المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
التطوير التربوي

وزارة التربية والتعليم
MINISTRY OF EDUCATION

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

الرياضيات

لِلصَّفِّ الثالث المتَوسِّط

الفَصْلُ الدِّرَاسيُّ الثاني

قام بتعديله وتطويره

الأستاذ / علي بن عبدالله الغالب

أ. د. سالم بن أحمد سحَّاب
الأستاذ / ناصر بن حمد العويشق
الأستاذ / عادل بن عبدالعزيز البعيجان
الأستاذ / فيصل بن محمد الغامدي
الأستاذ / عيد بن سعد النفيعي

الأستاذ / محمد بن عبدالله البصيّص
الأستاذ / عبدالله بن ناصر الشلفان
الأستاذ / عبدالله بن دعيج الدعيج
الأستاذ / محمد بن ناصر ميمون
الدكتور / عباس بن حسن غندورة

طبعة ١٤٢٨هـ - ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م - ٢٠٠٨م

يوزع مجاناً ولا يباع

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

السعودية . وزارة التربية والتعليم

الرياضيات : للصف الثالث المتوسط : الفصل الدراسي الثاني –

١٧٠ص ؛ ٢١×٢٦سم

ردمك : ٣ـ١١٣ـ١٩ـ ٩٩٦٠ (مجموعة)

x ـ١٨٠ـ١٩ـ ٩٩٦٠ (ج٢)

١ – الرياضيات – كتب دراسية ٢– التعليم المتوسط – السعودية – كتب دراسية أ– العنوان

٢ – التعليم المتوسط – السعودية – كتب دراسية.

ديوي ٥١٠،٧١٣ ١٩٧١ / ١٩

رقم الإيداع : ١٩٧١/ ١٩

ردمك : ٣ـ١١٣ـ١٩ـ ٩٩٦٠ (مجموعة)

x ـ١٨٠ـ١٩ـ ٩٩٦٠ (ج٢)

لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه ....

إذا لم نحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر العام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به ...

موقع الوزارة

www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج

www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج

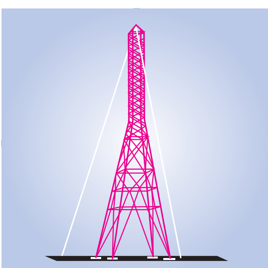
curriculum@moe.gov.sa

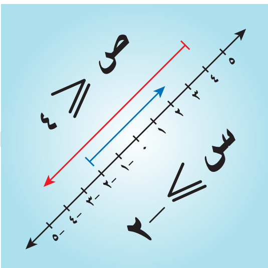
بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

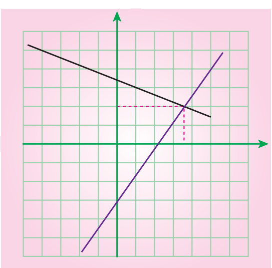
الفهرس

$\text{س}^{٢} = ٨$

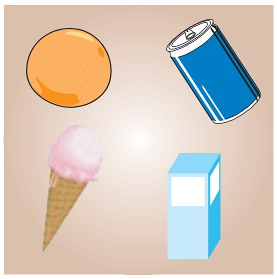
$\text{س} = \pm ٢\sqrt{٢}$







الفصل التاسع : هندسة المجسمات ١٢٧-١٦٨



الفصل الخامس

معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد

(٥-١) حل معادلة الدرجة الثانية بطريقة التحليل

(٥-٢) حل معادلة الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع

(٥-٣) تطبيقات

(٥-٤) تمارين عامة

$$س^{٢} = ٨$$

$$س = \pm ٢\sqrt{٢}$$

$س^٢ = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

(٥ - ١) حل معادلة الدرجة الثانية بطريقة التحليل

(١) الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد

كل معادلة بعد تبسيطها إذا احتوت على مجهول واحد، وكانت أعلى درجة للمجهول فيها هي الدرجة الثانية سُميت معادلة من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد، وكُتبت على الصورة العامة التالية :

$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠$

حيث : $أ \neq$ صفر ، س : هو المجهول ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية معلومة.

فمثلاً : $٣س^٢ - ٤ س + ٧ = ٠$ معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد ، فيها :

$أ = ٣$ ، $ب = -٤$ ، $جـ = ٧$

تدريب (١)

أي المعادلات التالية من الدرجة الثانية في مجهول واحد ؟ ، ثم عين قيم : أ ، ب ، جـ :

أ) $س^٢ + س - ١ = ٠$ د) $س (س^٢ - ١) = ٠$

ب) $س^٢ - ٥٢ = ٠$ هـ) $٣ س^٢ - س = ٠$

جـ) $س (س + ١) = ٠$ و) $س^٢ - ٩ ص = ٠$

$س^{٢} = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

(٢) حل معادلة الدرجة الثانية بطريقة التحليل

سنوظف ما درسناه عن التحليل في حل معادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد، وسنعتمد في ذلك على الحقيقة التالية:

إذا كان : أ ، ب $\in$ ح ، وكان أ × ب = ٠ ، فإن : أ = ٠ أو ب = ٠

مثال (١)

أوجد في ح مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠$

الحل : لحل المعادلة $س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠$ ، نُحلل الطرف الأيمن من المعادلة إلى عاملين كما يلي :

(س + ٣)

(س + ٢)

$س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠$

(س+٣) (س+٢) = ٠

إذاً : إما س+٣ = ٠ أو س + ٢ = ٠ وبحل هاتين المعادلتين نحصل على :

س = −٣ ، س = − ٢

نقول إن لهذه المعادلة حلين أو جذرين هما : −٣ ، −٢ ، ونرمز لهما بـ: $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ونكتب :

$س_{١} = −٣$ ، $س_{٢} = −٢$

والمجموعة : ع = { −٣ ، −٢ } تُسمى مجموعة الحل في ح للمعادلة $س^{٢} + ٥س + ٦ = ٠$

لو أردنا التحقق من صحة الحل الأول بالتعويض عن س بالعدد −٣ ، لوجدنا أن :

$(−٣)^{٢} + ٥ \times (−٣) + ٦ = ٩ − ١٥ + ٦ =$ صفر .

– تحقق من صحة الحل الثاني بالتعويض عن س بالعدد − ٢

س^{٢} = ٨

س = ± ٢$\sqrt{٢}$

مثال (٢)

حل المعادلة ٣ س^{٢} – ٨ س – ٣ = ٠ في ح

الحل : ٣ س^{٢} – ٨ س – ٣ = ٠

(س – ٣) (٣ س + ١) = ٠

إما س – ٣ = ٠ ، إذاً : س = ٣

أو ٣ س + ١ = ٠ ، إذاً : س = $\frac{-١}{٣}$

(٣س + ١)

(س – ٣)

∴ جذرا المعادلة هما : س$_{١}$ = ٣ ، س$_{٢}$ = $\frac{-١}{٣}$ ، ومجموعة الحل في ح هي : ع = { ٣ ، $\frac{-١}{٣}$ }

مثال (٣)

حل المعادلة ٢ س^{٢} – ٥ س = ٠ في ح

الحل : ٢ س^{٢} – ٥ س = س (٢س – ٥) = ٠ لماذا؟

إما س = ٠ ، أو ٢ س – ٥ = ٠ ، إذاً : س = $\frac{٥}{٢}$

جذرا المعادلة هما : س$_{١}$ = ٠ ، س$_{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

إذاً : ع = { ٠ ، $\frac{٥}{٢}$ }

$$س^٢ = ٨$$
$$س = \pm ٢\sqrt{٢}$$

مثال (٤)

حل المعادلة ٤ $س^٢ - ٩ = ٠$ في ح

الحل : ٤ $س^٢ - ٩ = ٠$

٤ $س^٢ = ٩$

$$س^٢ = \frac{٩}{٤}$$

$$س = \pm \sqrt{\frac{٩}{٤}}$$

$$س = \pm \frac{٣}{٢}$$

$$ع = \{ \frac{٣}{٢} ، - \frac{٣}{٢} \}$$

حل آخر : ٤ $س^٢ - ٩ = ٠$

(٢ س − ٣) (٢س + ٣) = ٠

إما ٢ س − ٣ = ٠ $\therefore$ س = $\frac{٣}{٢}$

أو ٢ س + ٣ = ٠ $\therefore$ س = $\frac{-٣}{٢}$

$$\therefore ع = \{ \frac{٣}{٢} ، - \frac{٣}{٢} \}$$

مثال (٥)

حل المعادلة $س^٢ + ٢٥ = ٠$ في ح

الحل : $س^٢ + ٢٥ = ٠$

$س^٢ = - ٢٥$ بإضافة (− ٢٥) للطرفين

إذاً : المعادلة مستحيلة الحل في ح ، لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب ، وبالتالي : ع = $\varnothing$

تدريب (٢)

حل المعادلات التالية في ح :

أ) $س^٢ + س - ٦ = ٠$
ب) $س^٢ + س = ٠$
جـ) ٢$س^٢ + ٩س - ٥ = ٠$
د) $س^٢ - ٣٦ = ٠$
هـ) $س^٢ + ٤ = ٠$

س^٢ = ٨

س = ± ٢$\sqrt{٢}$

تمارين (٥ - ١)

① اختر لكل معادلة في العمود (أ) مجموعة حل من العمود (ب) :

(أ)	(ب)
س^٢ = −٢	{٣}
٩ − س^٢ = ٠	{ }
(س + ٣) (س − ١) = ٠	{+٣ ، −٣}
(٢س − ٦)^٢ = ٠	{٠ ، $\frac{٣}{٢}$}
س (٢س − ٣) = ٠	{−٣ ، +١}
	{٣ ، −١}

② أي العبارات التالية صواب وأيها خطأ، مع ذكر السبب :

أ) س = −١ حل للمعادلة ٣ س (س + ١) = ٠

ب) ٣ جذر للمعادلة ٣ س^٢− س = ٠

جـ) ٥ حل للمعادلة س^٢+ ٥ = ٠

د) $\frac{٢}{٥}$ جذر للمعادلة ٥ س^٢ + ١٣ س − ٦ = ٠

③ إذا علمت أن العدد ٣ حل للمعادلة : ٢ س^٢ − ٣ س − جـ = ٠ فما هي قيمة جـ ؟

④ حل المعادلات التالية في ح :

أ) (س − ٧) (س + ١) = ٠

ب) س^٢+ ٧ س + ٦ = ٠

جـ) ٥ س^٢ − ٧ س − ٦ = ٠

د) ٤ س^٢ − ١٥س + ٩ = ٠

$س^{٢} = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

⑤ أوجد مجموعة حل المعادلات التالية في ح :

أ) $س (س - ١١) = ٠$

ب) $س^{٢} - ٤٩ = ٠$

جـ) $٢ س^{٢} + ٧ س = ٠$

د) $\frac{س^{٢}}{٢} - ١٨ = ٠$

هـ) $٣س^{٢} + ٥ = ٠$

و) $٢ س^{٢} - ٤٥ = -٣ س^{٢}$

⑥ حل المعادلات التالية في ح :

أ) $س^{٢} = ٣س + ١٠$

ب) $(س - ٤) (س + ١) = ٦$

جـ) $(س + ٣)^{٢} - ٤ = ٠$

د) $س (س + ٢) = ٨$

$س^2 = 8$

$س = \pm 2\sqrt{2}$

(٥ - ٢) حل معادلة الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع

(١) إكمال العبارة $س^2$ + ب س إلى مربع كامل

تعرفنا فيما سبق على المربع الكامل وتحليله، وتمييز العبارة التي تُمثل مربعاً كاملاً.

فمثلاً العبارة : $س^2 + 6س + 9$ مربع كامل . لماذا ؟

نلاحظ دائماً في مثل هذه الحالة أن الحد الثالث يساوي مربع نصف معامل س (الحد الأوسط) .

لذا فكل عبارة من الدرجة الثانية على صورة $س^2$ + ب س ، يمكن إضافة حد ثالث لها لتصبح مربعاً كاملاً.

مثال (١)

أكمل العبارة : $س^2 - 12$ س لتصبح مربعاً كاملاً.

الحل : نضيف حداً ثالثاً يساوي مربع نصف (-١٢) ، أي $(-6)^2$ ، فتصبح العبارة مربعاً كاملاً.

$س^2 - 12 س + 36$

$(\text{نصف } (-12))^2$

مما سبق نستنتج :

كي تصبح العبارة $س^2$+ ب س مربعاً كاملاً ، نُضيف إليها مربع نصف مُعامل س ، أي $(\frac{ب}{2})^2$ ، فنحصل على : $س^2 + ب س + (\frac{ب}{2})^2 = (س + \frac{ب}{2})^2$

$$س^2 = 8$$
$$س = \pm 2\sqrt{2}$$

مثال (٢)

أكمل العبارة $س^2 - 8$ س إلى مربع كامل :

الحل : $س^2 - 8س + (\frac{-8}{2})^2 = س^2 - 8س + 16$

مثال (٣)

أكمل العبارة $س^2 + \frac{1}{3}$ س إلى مربع كامل :

الحل : $س^2 + \frac{1}{3}س + (\frac{1}{3} \times \frac{1}{2})^2 = س^2 + \frac{1}{3}س + (\frac{1}{6})^2$

تدريب (١)

أكمل ما يلي إلى مربع كامل :

أ) $س^2 - 2$ س ب) $س^2 + 10$ س جـ) $س^2 + \frac{4}{5}$ س

$س^{٢} = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

(٢) حل معادلة الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع

نشاط (١)

. باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل ، حل المعادلة التالية في ح : $س^{٢} + ٦س + ٧ = ٠$

نلاحظ في النشاط السابق أنه يتعذر أحياناً حل معادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد باستخدام طريقه التحليل إلى عوامل، لذلك نلجأ إلى حل مثل هذه المعادلة بطريقة إكمال المربع كما في الأمثلة التالية :

مثال (٤)

حل المعادلة $س^{٢} - ٦\,س + ٧ = ٠$ بإكمال المربع .

الحل :

$س^{٢} - ٦س + ٧ = ٠$

$س^{٢} - ٦س = -٧$ (طرحنا ٧ من الطرفين)

$س^{٢} - ٦س + (-٣)^{٢} = -٧ + ٩$ (أضفنا $(-٣)^{٢}$ أو ٩ إلى الطرفين)

(نصف (-٦))^{٢}

$(س - ٣)^{٢} = ٢$ (حللنا الطرف الأيمن (مربع كامل) ، وبسطنا الأيسر)

$س - ٣ = \pm\sqrt{٢}$ (أوجدنا الجذر التربيعي للطرفين)

$س = ٣ \pm \sqrt{٢}$ (أوجدنا قيمة س)

للمعادلة جذران هما : $٣ + \sqrt{٢}$ ، $٣ - \sqrt{٢}$

$س^٢ = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

مثال (٥)

حل المعادلة : $٢ س^٢ - س - ٢ = ٠$

الحل : $٢س^٢ - س - ٢ = ٠$

$٢س^٢ - س = ٢$ (أضفنا + ٢ إلى الطرفين)

$س^٢ - \frac{١}{٢} س = ١$ (قسمنا الطرفين على ٢) . لماذا؟

$س^٢ - \frac{١}{٢} س + (-\frac{١}{٤})^٢ = ١ + \frac{١}{١٦}$ (أضفنا $(-\frac{١}{٤})^٢$ ، أو $\frac{١}{١٦}$ للطرفين)

(نصف $(-\frac{١}{٢})$)^٢

$(س - \frac{١}{٤})^٢ = \frac{١٧}{١٦}$ (حللنا الطرف الأيمن (مربع كامل) ، وبسطنا الطرف الأيسر)

$س - \frac{١}{٤} = \pm \frac{\sqrt{١٧}}{٤}$ (أوجدنا الجذر التربيعي للطرفين)

$س = \frac{١}{٤} \pm \frac{\sqrt{١٧}}{٤}$ (أوجدنا قيمة س)

للمعادلة جذران هما $\frac{١}{٤} + \frac{\sqrt{١٧}}{٤}$ ، وَ $\frac{١}{٤} - \frac{\sqrt{١٧}}{٤}$

تدريب (٢)

أولاً : حل المعادلة التالية في ح بطريقة إكمال المربع : $س^٢ + ٤س + ٤ = ٠$

ثانياً : حل المعادلات التالية في ح :

أ) $٢س^٢ + ١٦س + ١٤ = ٠$ ب) $(س - ١)^٢ = ٤٩$ جـ) $(س + ٥)^٢ = -٩$

$$س^٢ = ٨$$
$$س = \pm ٢\sqrt{٢}$$

تمارين (٥ - ٢)

① أي من العبارات التالية مربع كامل :

أ) $س^٢ - ٨س + ٨$ ب) $س^٢ - ٨س + ١٦$ جـ) $س^٢ - ٨س + ٦٤$

② أضف حداً ثالثاً لكلٍ من العبارات التالية لتصبح مربعاً كاملاً :

أ) $س^٢ - ١٨ س$ ب) $س^٢ + ٦س$ جـ) $س^٢ + ١٢ س$ د) $س^٢ - ٧س$

③ اختر الطريقة المناسبة لحل كلٍ من المعادلات التالية :

أ) $س^٢ - ٧س - ٨ = ٠$ ب) $س^٢ - ٦ = ٠$ جـ) $س^٢ - ٦س = ٠$

د) $س^٢ - ٦س - ٨ = ٠$ هـ) $٢ (س - ٣)^٢ = ١٢$ و) $٢س^٢ - ٦س - ٨ = ٠$

④ حل المعادلات التالية في ح بطريقة إكمال المربع :

أ) $س^٢ - ٤س - ٥ = ٠$ ب) $٢س^٢ = -٣س - ٥$ جـ) $- س^٢ - ٤س = ٣$

د) $س^٢ - ٣٢ = ٤س$ هـ) $س^٢ - س - ٣ = ٠$ و) $-٤س^٢ + ٣س = -٢$

ز) $س^٢ + ٣س = -٢$ ح) $س^٢ + ٢س + ٣ = ٠$

⑤ حل المعادلات التالية في ح :

أ) $س^٢ + ٦س + ٩ = -٤$ ب) $(٢س + ٣)^٢ + ٢ = ٠$ جـ) $س^٢ - ٤س + ٤ = ١٦$

د) $(٦س + ١)^٢ + ٢ = ١٤٦$ هـ) $(س - ٣) (س - ٣) = ٤٩$

⑥ حل المعادلات التالية في ح :

أ) $(س + ١) (٢س + ٣) = س^٢ - ١$ ب) $٢س^٢ - \frac{١١}{١٠}س - \frac{٣}{١٠} = ٠$

جـ) $\frac{٩}{س} - \frac{س}{٣} = ٢$ ، $س \neq صفر$

$$\text{س}^2 = 8$$
$$\text{س} = \pm 2\sqrt{2}$$

(٥ - ٣) تطبيقات

كثير من المسائل الحسابية يعود حلها إلى تنظيم معادلات من الدرجة الثانية ذات مجهول واحد ، ومن ثم حل هذه المعادلات ، كما أنه لا يمكن قبول حلول المعادلة إلا إذا كانت توافق طبيعة المسألة المعطاة.

مثال (١)

قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها يزيد ٦ أمتار عن عرضها ، ما بعداها إذا كانت مساحتها ٣١٥ متراً مربعاً؟

الحل :

(أ) **تنظيم المعادلة :**

نفرض أن عرض قطعة الأرض = س متراً

فيكون طولها = س + ٦ متراً

مساحة قطعة الأرض = العرض × الطول

$= \text{س}(\text{س} + 6) = \text{س}^2 + 6\text{س}$

$\therefore \text{س}^2 + 6\text{س} = 315$

(ب) **حل المعادلة :** $\text{س}^2 + 6\text{س} = 315$

$\text{س}^2 + 6\text{س} + 9 = 315 + 9$ (بإكمال المربع)

$(\text{س} + 3)^2 = 324$

$\text{س} + 3 = \pm 18$

إما $\text{س} + 3 = 18$ ، إذاً : $\text{س} = 18 - 3 = 15$

أو $\text{س} + 3 = -18$ ، إذاً : $\text{س} = -18 - 3 = -21$

مجموعة حل المعادلة = $\{15 ، -21\}$.

$س^٢ = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

(ج) **توافق الحل مع طبيعة المسألة :**

عرض قطعة الأرض = ١٥ متراً ، وبالتالي طولها = ١٥ + ٦ = ٢١ متراً

يُستبعد الحل (–٢١) ، لأنه لا يمكن أن يكون عرض قطعة الأرض عدداً سالباً .

ويمكن التحقق من صحة الحل كما يلي :

عرض قطعة الأرض = ١٥ متراً ، طولها = ٢١ متراً

مساحتها = ١٥ X ٢١ = ٣١٥ متراً مربعاً ، كما هو معطى في المسألة .

مثال (٢)

إذا كان حاصل ضرب عددين فرديين متتاليين يساوي ٦٧٥ ، فما العددان ؟

الحل : نفرض أن العدد الأول = س

فيكون العدد الثاني = س + ٢ لماذا ؟

حاصل ضرب العددين = س (س + ٢) = $س^٢ + ٢س$

إذاً : $س^٢ + ٢س = ٦٧٥$

– أوجد مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٢س = ٦٧٥$

بعد حل المعادلة وجدنا أن : س = ٢٥ ، أو س = –٢٧

فإذا كان العدد الأول = ٢٥ ، فإن العدد الثاني = ٢٥ + ٢ = ٢٧

وإذا كان العدد الأول = –٢٧ ، فإن العدد الثاني = –٢٧ + ٢ = –٢٥

مجموعة الحل = { **٢٥** ، **–٢٧** }

نلاحظ في كلا الحالتين أن الحل يتفق مع طبيعة المسألة . تحقق من ذلك.

$س^{٢} = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

تدريب (١)

(أ) ما هو العدد الذي إذا أضيف إلى مربعه كان الناتج ٢٠ ؟

(ب) ما العددان الزوجيان المتتاليان اللذان حاصل ضربهما يساوي ١٦٨ ؟

مثال (٣)

اشترى أحمد عدداً من الكتب بمبلغ ١٢٠ ريالاً ، وباع الواحد منها بمبلغ ٢٠ ريالاً ، فكسب بذلك مبلغاً يساوي ثمن شراء ١٢ كتاباً منها ، فما عدد الكتب التي اشتراها أحمد ؟

الحل : نفرض أن عدد الكتب التي اشتراها أحمد = س كتاباً

∴ ثمن شراء الكتاب الواحد = $\frac{١٢٠}{س}$ ، ثمن بيع الكتاب = ٢٠ × س

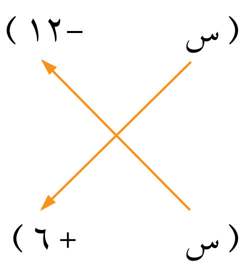
وبالتالي : ٢٠ × س − ١٢٠ = ١٢ × $\frac{١٢٠}{س}$

$٢٠س^{٢} - ١٢٠س = ١٢ \times ١٢٠$

$٢٠س^{٢} - ١٢٠س - ١٤٤٠ = ٠$

$س^{٢} - ٦س - ٧٢ = ٠$ لماذا ؟

(س − ١٢) (س + ٦) = ٠



إما س − ١٢ = ٠ ، وبالتالي : س = ١٢

أو س + ٦ = ٠ ، وبالتالي : س = −٦

إذاً : عدد الكتب التي اشتراها أحمد = ١٢ كتاباً.

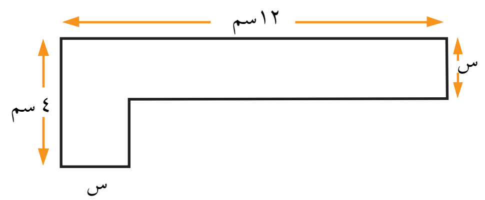
أما الحل (−٦) فمرفوض لماذا؟

تحقق من صحة الحل .

س^{٢} = ٨

س = ± ٢$\sqrt{٢}$

مثال (٤)

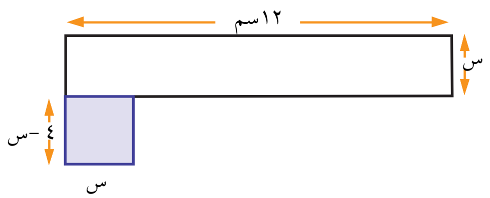


إذا كانت مساحة الشكل المجاور = ٢٨ سم^{٢} ،

فأوجد قيمة س .

الحل : نقسم الشكل إلى جزأين ، كما

هو واضح على الشكل المجاور :



مساحة الشكل = ١٢ × س + س (٤ – س)

= ١٢ س + ٤س – س^{٢}

= ١٦س – س^{٢}

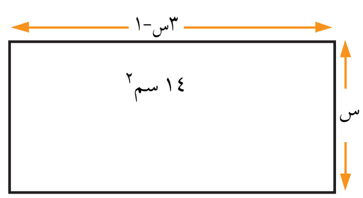
وبالتالي : ٢٨ = ١٦س – س^{٢}

س^{٢} – ١٦س + ٢٨ = ٠   لماذا ؟

وبحل المعادلة ، نجد : س = ٢ سم ، أو س = ١٤ سم والحل الثاني مرفوض ، لماذا ؟

تدريب (٢)

(أ) إذا كانت مساحة الشكل المجاور ١٤سم^{٢} ، فما قيمة س ؟



(ب) عمر علي ستة أمثال عمر ابنه . إذا كان حاصل ضرب عمريهما يساوي ٢٩٤ ، فما عمر كل منهما ؟

$س^٢ = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

تمارين (٥ - ٣)

① عددان موجبان يزيد أحدهما ٥ عن الآخر ، إذا كان حاصل ضربهما ٢٤ ، فما هذان العددان ؟

② عددان الفرق بينهما ٢ ، ومجموع مربعيهما ١٠٠ ، ما هذان العددان ؟

③ عددان زوجيان متتاليان يقل ناتج ضربهما عن ثلاثة أمثال مجموعهما بمقدار ٦ ، أوجد العددين .

④ عددان صحيحان متتاليان الفرق بين مربعيهما ١٥ ، أوجد العددين .

⑤ عدد موجب يزيد عن ثمانية أمثال معكوسه الضربي بمقدار ٢ ، أوجد هذا العدد .

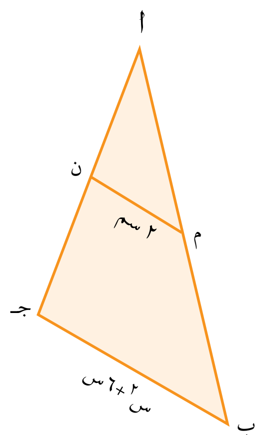
⑥ قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٣٦٠ متراً مربعاً ، ما بعداها إذا كان محيطها ٧٦ متراً ؟

⑦ مثلث طول قاعدته يساوي ضعف ارتفاعه ، إذا كانت مساحته ١٢١ $سم^٢$ ، فجد طول كل من القاعدة والارتفاع .

⑧ على الشكل المجاور :

م هي منتصف [أ ب] ، ن هي منتصف [أ جـ] ، | م ن | = ٢ سم

عبرنا عن طول القطعة | ب جـ | بكثيرة الحدود $س^٢ + ٦$ س . أوجد قيمة س.



⑨ أب عمره الآن ٣٢ سنة ، وعمر ابنه سنتان . بعد كم سنة يصبح عمر الأب مساوياً لمربع عمر ابنه ؟

⑩ أراد محسن أن يوزع ٤٠٠ ريال على عدد من الفقراء بالتساوي ، إلا أنه عند التوزيع وجد أن عدد الفقراء قد زاد خمسة ، وبذلك نقص نصيب كل فقير ٤ ريالات ، فما عدد الفقراء الذين وزع عليهم المبلغ ؟

⑪ قطعت شاحنة مسافة ٣٠٠ كم بسرعة منتظمة ، ولو أنها زادت سرعتها ٥ كم / ساعة ، لقطعت هذه المسافة بزمن أقل بساعتين . ما السرعة التي كانت تسير بها الشاحنة ؟

$س^٢ = ٨$

$س = \pm ٢\sqrt{٢}$

(٥ - ٤) تمارين عامة

أولاً : اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يلي :

① إذا كان : س = ٣ جذراً للمعادلة $س^٢ + هـ س + هـ = ٠$ ، فإن هـ =

$-\frac{٩}{٢}$ ، -٣ ، $-\frac{٩}{٤}$ ، $\frac{٩}{٢}$

② مجموعة حل المعادلة : $٣ س^٢ - ٦ س = ٠$ هي : {٢} ، {٠ ، ٢} ، {٠ ، ٣} ، {٢ ، ٣}

③ مجموعة حل المعادلة : $س^٢ + ٧ = ٠$ هي :

{$\sqrt{٧}$} ، {$\sqrt{٧}$ ، $-\sqrt{٧}$} ، {-٧} ، { }

④ المعادلة التي لها حلان متساويان هي :

$س^٢ + ٤ = ٠$ ، $س^٢ - ٤ = ٠$ ، $س (س - ٤) = ٠$ ، $س^٢ + ٤ س + ٤ = ٠$

⑤ المعادلة $س^٢ + ٦ س + جـ = ٠$ لها حلان متساويان ، إذا كانت جـ =

٩ ، -٩ ، ٣ ، -٣

⑥ إذا كان : $\frac{٤}{٥} = \frac{س^٢}{٢٠}$ ، فإن س تنتمي إلى المجموعة :

{٤} ، {-٤} ، {٤ ، -٤} ، {١٦ ، -١٦}

⑦ إذا كان طول مستطيل س + ٣ سم ، وعرضه س سم ، ومحيطه ٥٠ سم ، فإن :

$٢ س + ٣ = ٥٠$ ، $٤ س + ٦ = ٥٠$ ، $٤ س + ١٢ = ٥٠$ ، $س^٢ + ٣ = ٥٠$

$\text{س}^{٢} = ٨$

$\text{س} = \pm ٢\sqrt{٢}$

ثانياً : حل المعادلات التالية في ح :

① $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢ = ٠$

② $(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣) = ٤$

③ $\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤ = ٠$

④ $\text{س}(٢ - \text{س}) = ٣$

⑤ $\text{س} - ١٠ + \frac{٧}{\text{س}} = ٠$ ، $\text{س} \neq ٠$

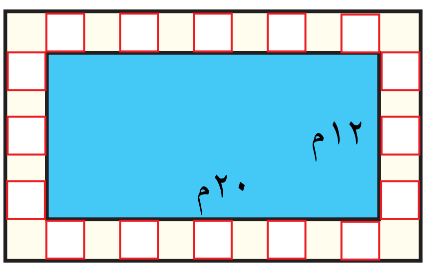
⑥ $\frac{\text{س}(\text{س} + ١)}{٦} - \frac{\text{س} - ٣}{٣} = ٢$

ثالثاً :

① اشترى تاجر عدداً من أباريق الشاي بمبلغ ٢٥٠ ريالاً . وعند نقلها فقد منها إبريقين ، بعد مدة اضطر التاجر أن يبيع الأباريق الباقية بخسارة ٣ ريالات في كل إبريق متبق ، وقبض ثمنها ١٧٦ ريالاً ، فكم عدد الأباريق التي اشتراها ؟

② إذا كان : $\text{س} + \frac{٢}{\text{س}} = ٣\sqrt{٢}$ ، فأثبت أن : $\text{س}^{٢} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}} = ١٤$ حيث $\text{س} \neq ٠$

③ بركة سباحة مستطيلة الشكل طولها ٢٠ متراً ، وعرضها ١٢ متراً ، أحيطت بممر منتظم عند جوانبه الأربعة . إذا عُلم أن مساحة سطح البركة والممر معاً يساوي ٥٦٠ متراً مربعاً ، فكم كان عرض الممر ؟



الفصل السادس

نظرية فيثاغورس

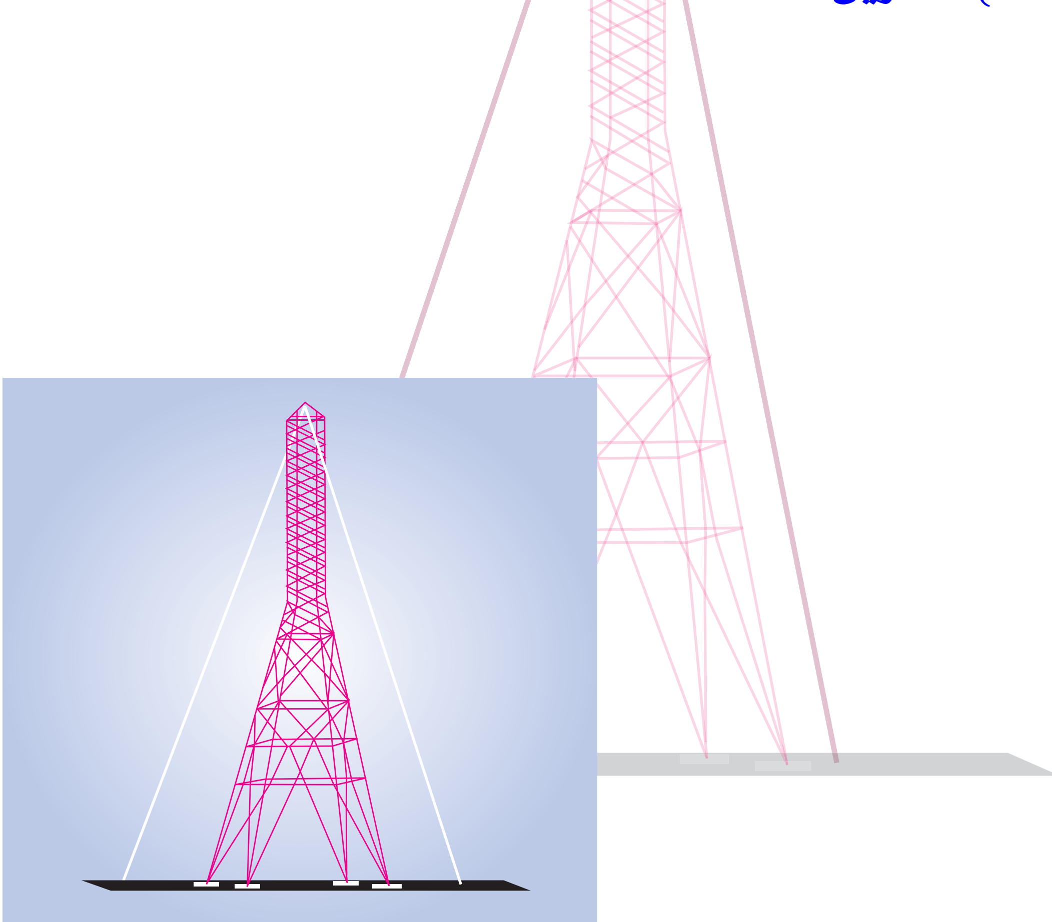
(٦-١) نظرية فيثاغورس

(٦-٢) عكس نظرية فيثاغورس

(٦-٣) الأطوال في أنواع خاصة من المثلثات القائمة الزاوية

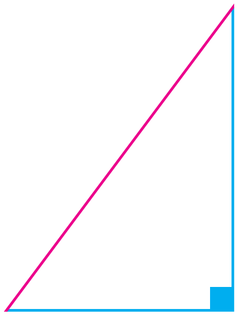
(٦-٤) المضلعات في دائرة

(٦-٥) تمارين عامة



(٦-١) نظرية فيثاغورس

(١) نظرية فيثاغورس (العلاقة بين أضلاع المثلث القائم الزاوية)



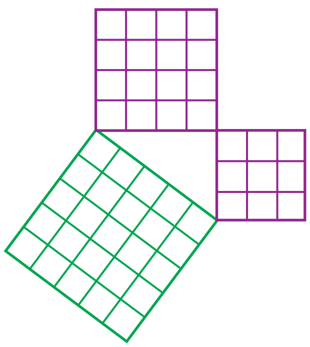
شكل (١)

نشاط (١)

على الشكل (١) مثلث قائم الزاوية نُسمي الضلع المقابل للزاوية القائمة «**الوتر**» ونسمي كلاً من الضلعين الآخرين «ضلع الزاوية القائمة».

- **ما طول كل من ضلعي الزاوية القائمة ؟**
- **ما طول الوتر ؟**

رسمنا مربعاً على كل ضلع من أضلاع المثلث القائم الزاوية «شكل ٢»



شكل (٢)

- **ما طول ضلع كل من المربعات ؟**
- **فسر ماذا يعني تربيع طول ضلع المثلث ؟**
- **ما مساحة المربع المرسوم علي كل من ضلعي الزاوية القائمة ؟**
- **ما مساحة المربع المرسوم على الوتر ؟**
- **قارن بين مجموع مساحتي المربعين المرسومين على ضلعي الزاوية القائمة ومساحة المربع المسوم على الوتر ماذا تلاحظ ؟**
- **كرر النشاط بالنسبة لمثلث آخر قائم الزاوية أطوال أضلاعه ٦ ، ٨ ، ١٠ .**
- **ما العلاقة بين مساحات المربعات الثلاثة المرسومة على أضلاع المثلث ؟**
- **هل هذه العلاقة صحيحة لأي مثلث قائم الزاوية ؟**

لاحظنا في النشاط السابق أن مساحة المربع المرسوم على الوتر في المثلث القائم الزاوية تساوي مجموع مساحتي المربعين المرسومين على ضلعي الزاوية القائمة.

هذه العلاقة تُسمى **نظرية فيثاغورس** ويمكن صياغتها على النحو التالي :

في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .

نبرهن هذه النظرية كما يلي : -

المعطيات : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية ، $\hat{\text{ب}} = \text{٩٠}^{\circ}$

المطلوب : **إثبات أن** : $|\text{أ جـ}|^{\text{٢}} = |\text{أ ب}|^{\text{٢}} + |\text{ب جـ}|^{\text{٢}}$.

البرهان :

ليكن ب د $\perp$ أ جـ

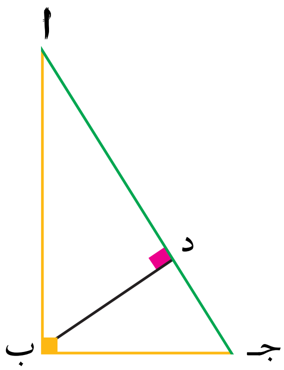
المثلثان أ ب جـ ، أ د ب متشابهان لأن :

$\hat{\text{ب}} = \widehat{\text{أ د ب}}$ (كلاً منهما قائمة) ، $\hat{\text{أ}}$ زاوية مشتركة

من تشابه المثلثين نستنتج :

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ د}|} = \frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{أ ب}|}$$

$$\therefore |\text{أ ب}|^{\text{٢}} = |\text{أ د}| \times |\text{أ جـ}| \qquad (\text{١})$$



شكل (٣)

كذلك المثلثان أ ب جـ ، ب د جـ متشابهان لأن :

$\hat{\text{ب}} = \widehat{\text{جـ د ب}}$ (كلاً منهما قائمة) ، $\hat{\text{جـ}}$ زاوية مشتركة

من تشابههما نستنتج :

$$\frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{د جـ}|} = \frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{ب جـ}|}$$

$$\therefore |\text{ب جـ}|^{\text{٢}} = |\text{د جـ}| \times |\text{أ جـ}| \qquad (\text{٢})$$

بجمع (١) مع (٢) نحصل على :

$$|\text{أ ب}|^{\text{٢}} + |\text{ب جـ}|^{\text{٢}} = (|\text{أ د}| \times |\text{أ جـ}|) + (|\text{د جـ}| \times |\text{أ جـ}|)$$

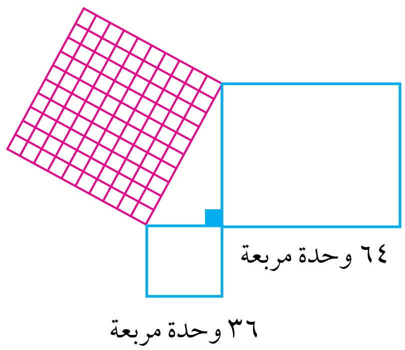
$$= |\text{أ جـ}| \, (|\text{أ د}| + |\text{د جـ}|)$$

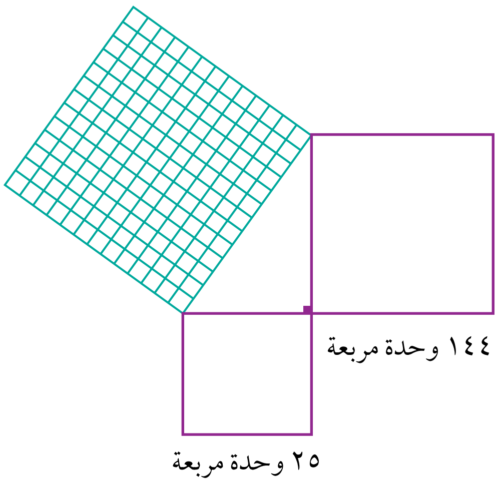
$$= |\text{أ جـ}| \times |\text{أ جـ}|$$

$$= |\text{أ جـ}|^{\text{٢}}$$ وهو المطلوب

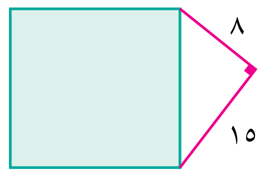
تدريب (١)

أ) بدون عد الوحدات المربعة ، اذكر كم وحدة مربعة مساحة المربع المظلل في كل مما يلي :

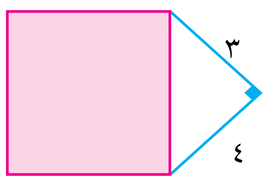




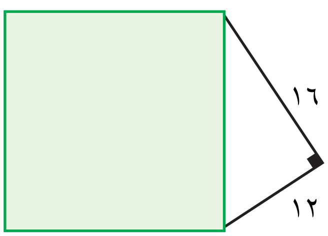
ب) احسب مساحة المربع في كل مما يلي :



(١)



(٢)



(٣)

جـ) املأ الفراغ في كل مما يلي بـ = أو ≠ كي تصبح العبارة صحيحة :

$٦^٢ \square ٤^٢ + ٥^٢$ ، $٥^٢ \square ٣^٢ + ٤^٢$

$١٠^٢ \square ٦^٢ + ٨^٢$ ، $٢٦^٢ \square ١٠^٢ + ٢٤^٢$

مثال (١)

أ ب جـ مثلث فيه : $\hat{\text{ب}} = ٩٠^\circ$ ، $|\text{أ ب}| = ٨$ سم ، $|\text{ب جـ}| = ٦$ سم، احسب $|\text{أ جـ}|$.

الحــل : ∵ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب

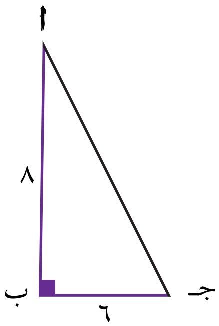
∴ $|\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢}$ (نظرية فيثاغورس)

$= ٨^{٢} + ٦^{٢}$

$= ٦٤ + ٣٦$

$= ١٠٠$

∴ $|\text{أ جـ}| = \sqrt{١٠٠} = ١٠$ سم



شكل (٤)

مثال (٢)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، $|\text{أ جـ}| = ٥$ سم ، $|\text{ب جـ}| = ٣$ سم، احسب $|\text{أ ب}|$.

الحــل : ∵ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية

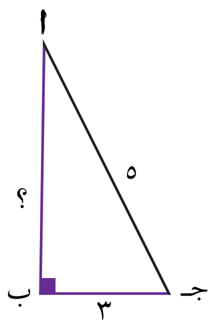
∴ من نظرية فيثاغورس: $|\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢}$

ومن ذلك $|\text{أ ب}|^{٢} = |\text{أ جـ}|^{٢} - |\text{ب جـ}|^{٢}$

$= ٥^{٢} - ٣^{٢} = ٢٥ - ٩$

$= ١٦$

∴ $|\text{أ ب}| = \sqrt{١٦} = ٤$ سم



شكل (٥)

تدريب (٢)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ أوجد طول الضلع الثالث إذا كان :

أ) $|\text{أ ب}| = ٥$ سم ، $|\text{أ جـ}| = ١٢$ سم .

ب) $|\text{أ ب}| = ٤,٨$ سم ، $|\text{ب جـ}| = ٦$ سم .

جـ) $|\text{أ ب}| = \sqrt{٥}$ ، $|\text{أ جـ}| = \sqrt{١١}$.

مثال (٣)

على الشكل (٦) : أ ب جـ د معين طولا قطريه |أ جـ| = ١٨ سم ، |ب د| = ٢٤ سم . أوجد طول ضلعه .

الحـــل : ∵ قطري المعين متعامدان ومتقاطعان في منتصفيهما .

∴ ق(أ م ب) = ٩٠° ، |أ م| = ٩ سم ، |م ب| = ١٢ سم .

المثلث أ م ب قائم الزاوية .

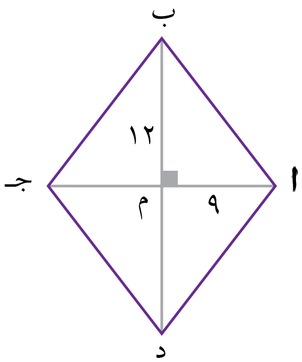
∴ |أ ب|^{٢} = |أ م|^{٢} + |م ب|^{٢} (من نظرية فيثاغورس).

∴ |أ ب|^{٢} = ٩^{٢} + ١٢^{٢}

= ٨١ + ١٤٤

= ٢٢٥

|أ ب| = ١٥ سم



شكل (٦)

مثال (٤)

على الشكل (٧) : سلم طوله ١٠ م يرتكز على حائط عمودي طوله ٩ م. أوجد بُعْدَ طرف السلم السفلي عن الحائط.

الحـــل : ليكن س بعد طرف السلم السفلي عن الحائط

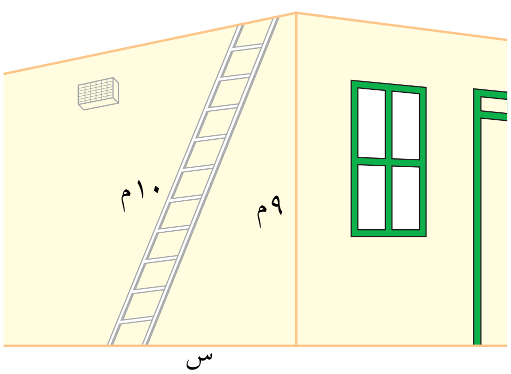
حسب نظرية فيثاغورس ١٠^{٢} = ٩^{٢} + س^{٢}

١٠٠ = ٨١ + س^{٢}

س^{٢} = ١٠٠ − ٨١ = ١٩

س = $\sqrt{١٩}$

بعد طرف السلم السفلي عن الحائط ≈ ٤,٤ م



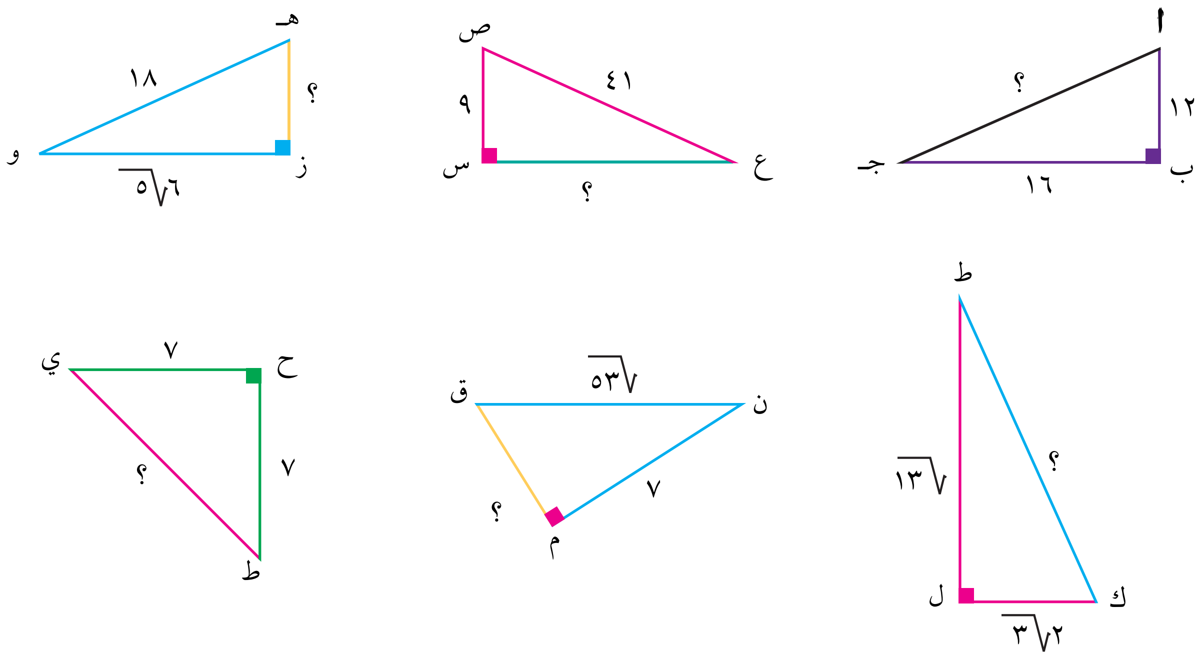
شكل (٧)

تدريب (٣)

أ) ما أطول ضلع في المثلث القائم الزاوية ؟

ب) قطعة أرض مستطيلة الشكل عرضها ١٠ أمتار وطول قطرها ٢٦ م. أوجد طولها .

① في كل من المثلثات القائمة الزاوية التالية احسب طول الضلع المجهول :



② أ ب جـ د معين طول ضلعه ٧ سم وطول أحد قطريه ٤ , ٨ سم ما طول القطر الآخر ؟

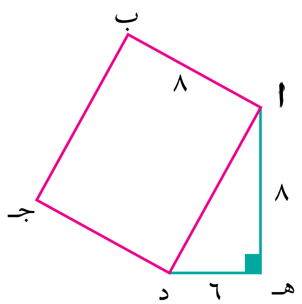
③ سار شخص مسافة ١٦ م نحو الشمال ، ثم ١٠ م نحو الشرق . ما بعد الشخص عن نقطة انطلاقه ؟

④ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٥ سم ، أوجد طول قطره .

⑤ مربع طول قطره ١٠ سم ، أوجد طول ضلعه .

⑥ دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها ٥ سم ، كم يبعد مركز هذه الدائرة عن وتر فيها طوله ٨ سم ؟

⑦ طول وتر في دائرة مركزها م يساوي ٦ سم ، احسب طول نصف قطر هذه الدائرة إذا كان الوتر يبعد ٤ سم عن مركزها.



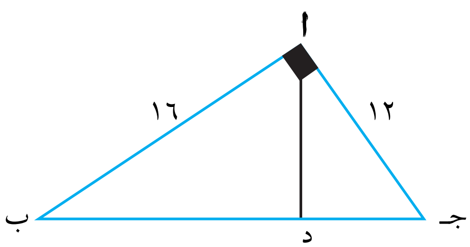
⑧ على الشكل المجاور : ا ب جـ د مستطيل .
أوجد مساحة الشكل ا ب جـ د هـ .

⑨ برج عمودي على سطح الأرض ارتفاعه ٦٠ متراً ، وصل سلك بين قمة البرج وقمة سارية عمودية على سطح الأرض أيضاً ، وارتفاعها عشرة أمتار ، تبعد قاعدتها عن قاعدة البرج مسافة ١٢٠ م . أوجد طول السلك .

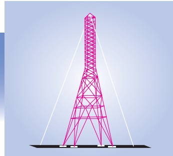
⑩ ا ب جـ مثلث فيه $\hat{ا}$ = ٩٠°. إذا كان |ا ب| = ٢ |ا جـ| ، فأثبت أن: |ب جـ|^{٢} = ٥ |ا جـ|^{٢} .

⑪ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا ، ا د ⊥ ب جـ ، د ∈ [ب جـ]

أولاً : أثبت أن : |ا جـ|^{٢} = |جـ د| × | ب جـ|
|ا ب|^{٢} = |ب د| × | ب جـ|



ثانياً : إذا علمنا أن : |ا جـ| = ١٢ سم ، |ا ب| = ١٦ سم .
احسب ما يلي : |ب جـ| ، |ب د| ، |جـ د|



(٦ - ٢) عكس نظرية فيثاغورس

نشاط (١)

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ . س ص ع مثلث أطوال أضلاعه ٦ ، ٨ ، ١٠

– **في كلّ من المثلثين السابقين أوجد مربع طول أطول ضلع ، وقارنه بمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين**

– **ارسم كلاً من المثلثين السابقين ، ما نوعهما بالنسبة لزواياهما ؟ .**

د هـ و مثلث أطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٦

– **أوجد مربع طول أطول ضلع ، وقارنه بمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين .**

– **ارسم المثلث د هـ و ، ما نوعه بالنسبة لزواياه ؟ .**

– **سجل ملاحظاتك .**

لاحظنا في النشاط السابق أن مربع طول أطول ضلع في كل من المثلثين **أ** ب جـ ، س ص ع يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين ، وعند رسمهما وجدت أنهما قائما الزاوية .

كما لاحظنا أن مربع طول أطول ضلع في المثلث د هـ و لا يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين وعند رسمه تبين لك أنه غير قائم الزاوية .

مما تقدم يتبين لنا صحة عكس نظرية فيثاغورس :

> **إذا كان مربع طول ضلع في مثلث يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية**

مثال (١)

في كل مما يلي بين ما إذا كان المثلث **أ** ب جـ قائم الزاوية أم لا :

أ) |**أ** ب| = ٢٠ سم ، |ب جـ| = ٢٥ سم ، |**أ** جـ| = ١٥ سم

ب) |**أ** ب| = ٣ سم ، |**أ** جـ| = ٤ سم ، |ب جـ| = ٦ سم .

جـ) |**أ** ب| = ٢ √٥ ، |**أ** جـ| = ٢ √١٥ ، |ب جـ| = ٤ √٥

الحـــل :

أ) نحسب مربعات الأطوال وهي :

|أ ب|^{٢} = ٢٠^{٢} = ٤٠٠ ، |ب جـ|^{٢} = ٢٥^{٢} = ٦٢٥

|أ جـ|^{٢} = ١٥^{٢} = ٢٢٥

∵ ٦٢٥ = ٤٠٠ + ٢٢٥

∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية «من عكس نظرية فيثاغورس» .

ب) |أ ب|^{٢} = ٩ ، |أ جـ|^{٢} = ١٦ ، |ب جـ|^{٢} = ٣٦

|أ ب|^{٢} + |أ جـ|^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥

∴ |ب جـ|^{٢} ≠ |أ ب|^{٢} + |أ جـ|^{٢}

∴ المثلث أ ب جـ ليس مثلثاً قائم الزاوية

جـ) |أ ب|^{٢} = (٢ $\sqrt{٥}$)^{٢} = ٤ × ٥ = ٢٠

|أ جـ|^{٢} = (٢ $\sqrt{١٥}$)^{٢} = ٤ × ١٥ = ٦٠

|ب جـ|^{٢} = (٤ $\sqrt{٥}$)^{٢} = ١٦ × ٥ = ٨٠

∵ ٨٠ = ٢٠ + ٦٠

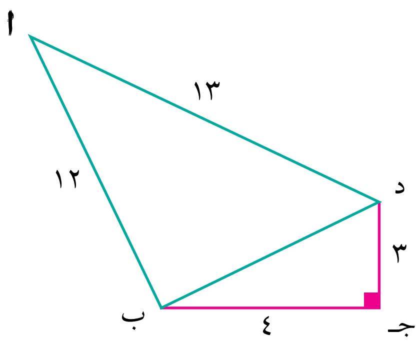
∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية حسب عكس نظرية فيثاغورس

مثال (٢)

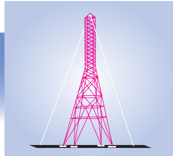
على الشكل (١) : أ ب جـ د رباعي فيه : $\widehat{\text{جـ}}$ = ٩٠° ،

|جـ د| = ٣ سم ، |ب جـ| = ٤ سم ، |أ ب| = ١٢ سم ،

|أ د| = ١٣ سم ، أثبت أن : $\widehat{\text{أ ب د}}$ = ٩٠°



شكل (١)



المعطيات : جَـ = ٩٠ْ ، |جـ د| = ٣ سم ، |ب جـ| = ٤ سم ، |أ ب| = ١٢ سم ، |أ د| = ١٣ سم .

المطلوب : إثبات أن : $\widehat{\text{د ب أ}}$ = ٩٠ْ

البرهان : ∵ المثلث ب جـ د قائم الزاوية

∴ |ب د|^{٢} = |جـ د|^{٢} + |جـ ب|^{٢} (نظرية فيثاغورس)

|ب د|^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥

|ب د| = ٥ سم

في المثلث أ ب د : |أ د|^{٢} + ١٣^{٢} = ١٦٩

|ب أ|^{٢} + |ب د|^{٢} = ١٢^{٢} + ٥^{٢} = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

∴ |أ د|^{٢} = |ب أ|^{٢} + |ب د|^{٢}

∴ المثلث أ ب د قائم الزاوية في ب (من عكس نظرية فيثاغورس)

∴ $\widehat{\text{د ب أ}}$ = ٩٠ْ

تدريب (١)

الأعداد التالية تمثل أطوال أضلاع مثلث ، أي من هذه المثلثات يكون قائم الزاوية ؟

أ) ٧ ، ٨ ، ٩ ب) ٥ ، ١٢ ، ١٣

جـ) ٢ ، ٧ ، ٨ د) ١٢ ، ١٦ ، ٢٠

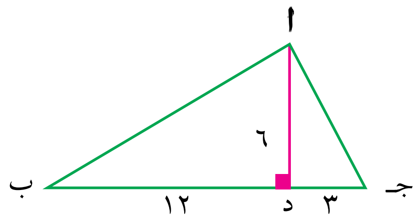
① بين أي المثلثات التي أطوال أضلاعها كالآتي قائمة الزاوية :

أ) ١١ ، ٦٠ ، ٦١

ب) ٤ ، √٣ ، ٥

جـ) ٦ ، ٣ ، ٣√٣

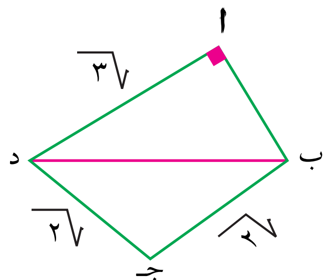
د) ٤,٥ ، ٧,٥ ، ٦



② أ ب جـ مثلث فيه : أ د ⊥ ب جـ

|جـ د| = ٣ ، |د ب| = ١٢ ، |أ د| = ٦

أثبت أن : ب أ^ جـ = ٩٠°



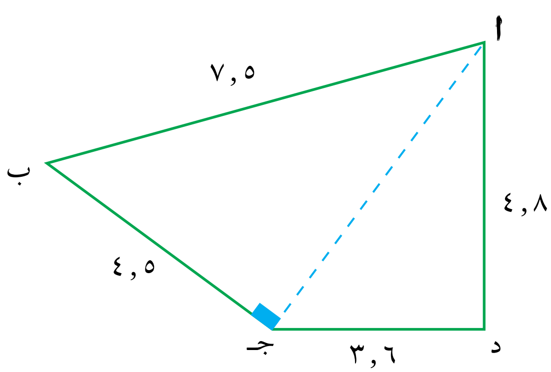
③ على الشكل المجاور :

أ ب جـ د رباعي ، حسب البيانات الموضحة عليه

أثبت أن أ^ ، جـ^ متكاملتان .

④ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه : |أ ب| = ٨ سم ، |ب جـ| = ١٥ سم ، |أ جـ| = ١٧ سم

أثبت أنه مستطيل .



⑤ على الشكل المجاور :

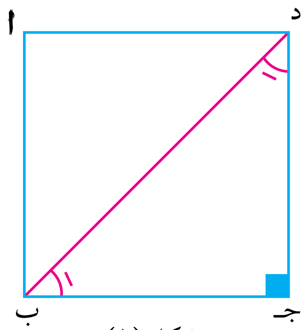
أ ب جـ د رباعي ، فيه : |أ د| = ٤,٨

|د جـ| = ٣,٦ ، |جـ ب| = ٤,٥ ، |ب أ| = ٧,٥

أ جـ^ ب = ٩٠° ، أثبت أن أ د^ جـ = ٩٠°

(١) المثلث القائم الزاوية والمتطابق الضلعين

نشاط (١)



شكل (١)

على الشكل (١) : **ا** ب جـ د مربع طول ضلعه ٦ سم ، [د ب] أحد قطريه .

– ما نوع المثلث د ب جـ بالنسبة لزواياه ، وبالنسبة لأضلاعه ؟

– ما قياس كل من $\widehat{د_{١}}$ ، $\widehat{ب_{١}}$ ؟ لماذا ؟

– في المثلث د ب جـ ، إذا كان |د جـ| = |جـ ب| = ٦سم ،

فاحسب |د ب| . (بتطبيق نظرية فيثاغورس)

– إذا كان |د جـ| = |جـ ب| = س سم ، فاحسب |د ب| بدلالة س .

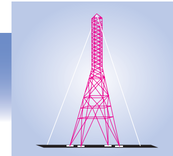
– من الخطوتين السابقتين ، هل يمكن إيجاد علاقة تربط بين طول الوتر وطول أحد ضلعي الزاوية القائمة في المثلث المتطابق الضلعين ؟

من النشاط السابق ، نستنتج :

في المثلث القائم الزاوية والمتطابق الضلعين يكون قياس كل من زاويتيه الحادتين ٤٥ْ ،

طول الوتر = طول ضلع الزاوية القائمة × $\sqrt{٢}$

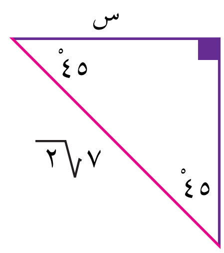
طول ضلع الزاوية القائمة = $\frac{\text{طول الوتر}}{٢} \times \sqrt{٢}$



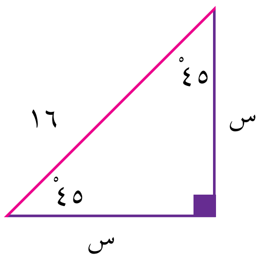
مثال (١)

أوجد طول الضلع المجهول في كل من المثلثين التاليين :

(أ)



(ب)



الحـــل : (أ) طول الوتر = طول ضلع الزاوية القائمة × $\sqrt{٢}$

$٧\sqrt{٢}$ = س $\sqrt{٢}$

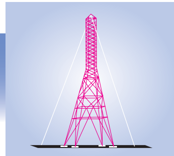
$\frac{٧\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\text{س}\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ (بقسمة الطرفين على $\sqrt{٢}$)

∴ س = ٧

(ب) طول ضلع الزاوية القائمة = $\frac{\text{طول الوتر}}{٢} \times \sqrt{٢}$

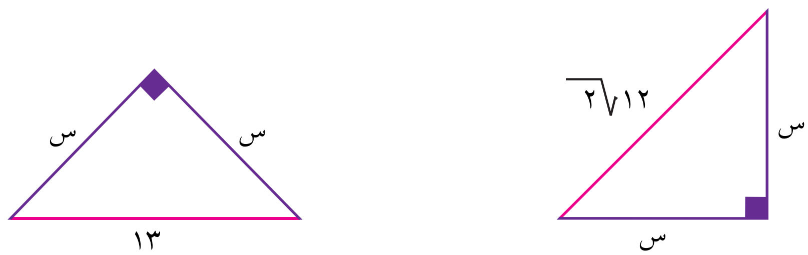
$= \frac{١٦}{٢} \times \sqrt{٢}$

$= ٨\sqrt{٢}$

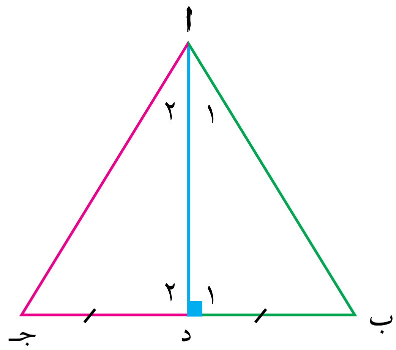


تدريب (١)

أوجد طول الضلع المجهول في كل من المثلثين التاليين :



(٢) المثلث الثلاثيني الستيني



شكل (٢)

على الشكل (٢) : أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع ، أ د ارتفاعه ،
وكما نعلم أ د هو أيضاً المنصف العمودي للضلع [ب جـ] .
يُسمى كل واحد من المثلثين أ ب د ، أ جـ د **مثلث ثلاثيني ستيني** .

نشاط (٢)

- تأمل الشكل (٢) نفسه ، وبرر العبارات التالية :

المثلثان أ ب د ، أ جـ د متطابقان $\quad \hat{\text{ب}} = \hat{\text{جـ}} = ٦٠^\circ$

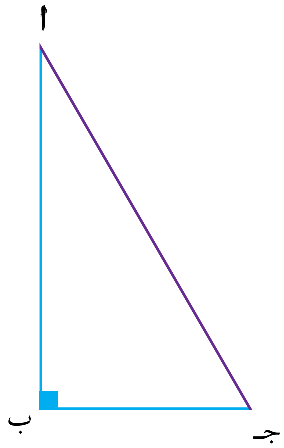
$\hat{\text{أ}}_{١} = \hat{\text{أ}}_{٢} = ٣٠^\circ \quad \hat{\text{د}}_{١} = \hat{\text{د}}_{٢} = ٩٠^\circ$

نستنتج من النشاط السابق أن :

المثلث الثلاثيني الستيني هو مثلث قائم الزاوية ، قياس زاويتيه الحادتين هو : ٣٠°، ٦٠°

(٣) حساب أطوال أضلاع مثلث ثلاثيني ستيني

(أ) طول الضلع المواجه للزاوية ٣٠ْ



شكل (٣)

نشاط (٣)

على الشكل (٣) : أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني

- ما هو الوتر في هذا المثلث ؟
- ما قياس كل من أ̂ ، جـ̂ ؟
- ما هو الضلع المواجه للزاوية ٣٠ْ ؟

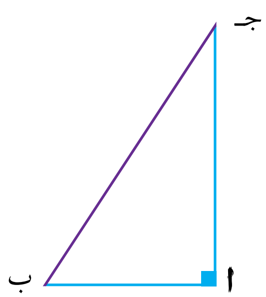
نلاحظ أن :

|ب جـ| = |أ جـ| / ٢ لماذا ؟

نستنتج :

> في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المواجه للزاوية ٣٠ْ يساوي نصف طول الوتر .

مثال (٢)



شكل (٤)

على الشكل (٤) : أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني فيه :

أ̂ = ٩٠ْ ، ب̂ = ٦٠ْ ، |ب جـ| = ١٠ سم

أوجد : |أ ب| ، |أ جـ|

الحـــل :

جـ^ = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°)

= ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

∴ [ا ب] هو الضلع المواجه للزاوية ٣٠° وبالتالي :

|ا ب| = $\frac{|\text{ب جـ}|}{٢}$

|ا ب| = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ سم

من نظرية فيثاغورس : |ا جـ|² = |ب جـ|² − |ا ب|²

= ١٠٠ − ٢٥

= ٧٥

∴ |ا جـ| = $\sqrt{٧٥}$ = $\sqrt{٣ \times ٢٥}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

ب) طول الضلع المواجه للزاوية ٦٠°

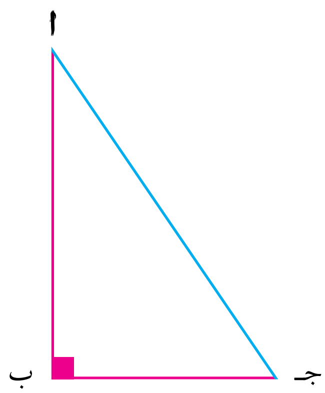
على الشكل (٥) : ا ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني

|ب جـ| = $\frac{|\text{ا جـ}|}{٢}$ لماذا ؟

من نظرية فيثاغورس : |ا ب|² = |ا جـ|² − |ب جـ|²

= |ا جـ|² − $\left(\frac{|\text{ا جـ}|}{٢}\right)^٢$

= |ا جـ|² − $\frac{|\text{ا جـ}|^٢}{٤}$



شكل (٥)

$= |\text{أجـ}|^{٢} \left(١ - \frac{١}{٤}\right)$ (بأخذ $|\text{أجـ}|^{٢}$ عامل مشترك)

$= |\text{أجـ}|^{٢} \times \frac{٣}{٤}$

$\therefore |\text{أب}| = |\text{أجـ}| \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{|\text{أجـ}|}{٢} \times \sqrt{٣}$

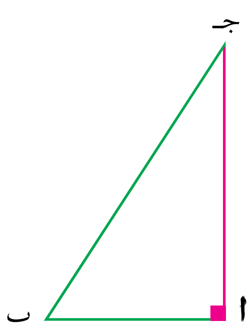
مما سبق نستنتج :

في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المواجه للزاوية ٦٠° يساوي حاصل ضرب نصف طول الوتر بـ $\sqrt{٣}$.

مثال (٣)

على الشكل (٦) : أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني، $\hat{\text{أ}}$ = ٩٠°، $\hat{\text{ب}}$ = ٦٠°

إذا كان : $|\text{أجـ}| = ٥\sqrt{٣}$ فأوجد طولي الضلعين الآخرين .



شكل (٦)

الحـل : $|\text{أجـ}| = \frac{|\text{ب جـ}|}{٢} \times \sqrt{٣}$ لأن [أجـ] هو الضلع المواجه للزاوية ٦٠°

$\therefore \frac{|\text{ب جـ}|}{٢} \times \sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$ وبضرب الطرفين في $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ينتج :

$|\text{ب جـ}| = ١٠$

$|\text{أب}| = \frac{١٠}{٢} = ٥$ لأن [أب] هو الضلع المواجه للزاوية ٣٠°

مثال (٤)

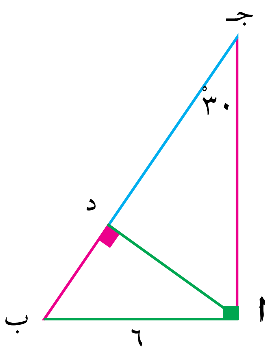
على الشكل (٧) : أ ب جـ مثلث فيه : ق(أ^) = ٩٠ْ ، ق(جـ^) = ٣٠ْ ، أ د ⊥ ب جـ ،

|أ ب| = ٦ سم أوجد |جـ د| ، |ب د| .

الحـــل : في المثلث أ ب جـ : ق(ب^) = ١٨٠ْ − (٩٠ْ + ٣٠ْ) = ٦٠ْ

وبالتالي فإن المثلث أ ب د فيه : ق(د^) = ٩٠ْ ، ق(ب^) = ٦٠ْ ، ق(د أ ب^) = ٣٠ْ

∵ [ب د] هو الضلع المواجه للزاوية ٣٠ْ



شكل (٧)

∴ |ب د| = $\frac{|أ ب|}{٢}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ سم

في المثلث أ ب جـ : [أ ب] هو الضلع المواجه للزاوية ٣٠ْ

∴ |أ ب| = $\frac{|ب جـ|}{٢}$

وبالتالي : |ب جـ| = ٢ × |أ ب| = ٢ × ٦ = ١٢ سم

∴ |جـ د| = |ب جـ| − |ب د| = ١٢ − ٣ = ٩ سم

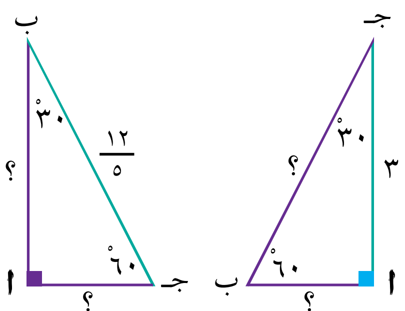
تدريب (٢)

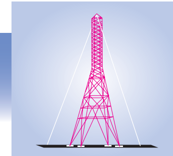
(أ) كيف يتم تحديد أطول ضلع وأقصر ضلع في المثلث الثلاثيني الستيني؟

(ب) أوجد طول الارتفاع في مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٩ سم .

(جـ) حسب البيانات الموضحة على الشكل المجاور

أوجد الأطوال غير المعلومة :



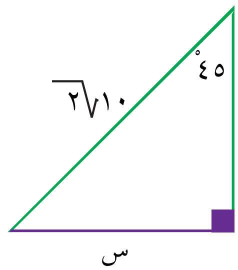


① بين فيما إذا كانت القياسات في كل مما يلي هي قياسات مثلث ثلاثيني ستيني، أو مثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين ، أو غير ذلك.

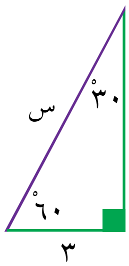
(أ) ٦، ٨، ١٠   (ب) ٥ ، ٥ ، ٥√٢   (جـ) ١٥ ، ٧,٥√٣ ، ٧,٥

② أوجد طول الضلع المجهول في كل من المثلثات التالية :

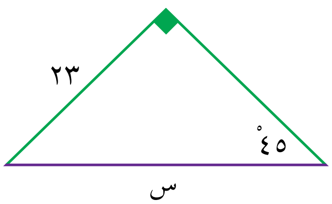
أ)



ب)



جـ)

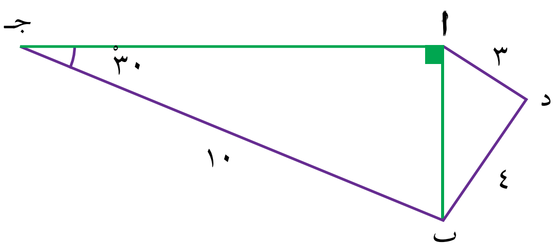


③ في المثلث الثلاثيني الستيني ، احسب أطوال الأضلاع ، إذا عرفت قياس :

أ - طول الوتر ٨ سم.

ب - طول الضلع المواجه للزاوية ٣٠° يساوي ٥ سم .

جـ - طول الضلع المواجه للزاوية ٦٠° يساوي ١٠ سم .

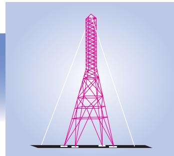


④ على الشكل المجاور :

إذا كان ب أ جـ (زاوية) = ٩٠° ، جـ (زاوية) = ٣٠°

|أ د| = ٣ سم ، |د ب| = ٤ سم

|ب جـ| = ١٠ سم ، أثبت أن المثلث أ د ب قائم الزاوية .



⑤ أ ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني : أ̂ = ٩٠°، ب̂ = ٦٠°

أ د ⊥ ب جـ بحيث : |أ د| = ٢√٣ أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ

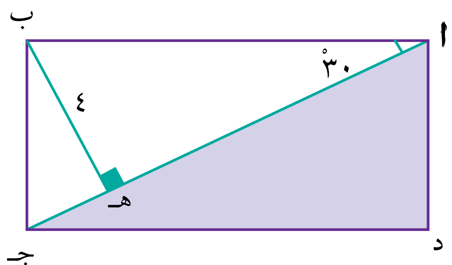
⑥ أ ب جـ مثلث فيه : أ̂ = ٩٠°، ب̂ = ٦٠°، أ د ⊥ ب جـ ، |أ جـ| = ٤ سم أوجد |جـ د| ، |ب د| .

⑦ أ ب جـ نصف مثلث متطابق الأضلاع فيه : أ̂ = ٩٠°، ب̂ = ٦٠°، إذا علمنا أن طول وتره يساوي ل سم

فأوجد |أ ب| ، |أ جـ| بدلالة ل .

⑧ على الشكل المجاور : أ ب جـ د مستطيل . حسب البيانات الموضحة ،

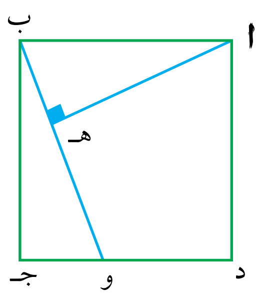
احسب مساحة المستطيل أ ب جـ د .



⑨ على الشكل المجاور :

أ ب جـ د مربع ، أ هـ ⊥ ب و ، و ب̂ جـ = ٣٠°، |ب هـ| = ٦ سم .

احسب محيط المربع .



(١) طول ضلع مثلث متطابق الأضلاع مرسوم داخل دائرة

على الشكل (١) :

أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع ، تقع رؤوسه على الدائرة (م ، نق)

م هي نقطة تقاطع المنصفات العمودية لأضلاع المثلث أ ب جـ : أ د ، ب هـ ، جـ و .

∴ م تبعد البعد نفسه عن رؤوس المثلث

أي أن : |م أ| = |م ب| = |م جـ| = نق

المثلث م جـ د قائم الزاوية ، فيه : $\hat{د}$ = ٩٠ْ :

$\widehat{د جـ م}$ = ٣٠ْ لماذا ؟

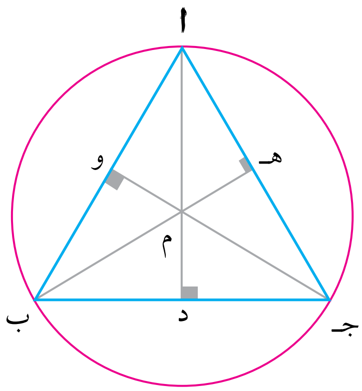
∴ $\widehat{جـ م د}$ = ٦٠ْ

∴ |م د| = $\frac{|م جـ|}{٢}$ = $\frac{نق}{٢}$

|جـ د| = $\frac{نق}{٢}\sqrt{٣}$

وبالتالي : |ب جـ| = ٢ × $\frac{نق}{٢}\sqrt{٣}$

= نق $\sqrt{٣}$



شكل (١)

نستنتج :

طول ضلع مثلث متطابق الأضلاع مرسوم داخل دائرة يساوي حاصل ضرب طول نصف قطر الدائرة في $\sqrt{٣}$.

مثال (١)

أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع مرسوم داخل الدائرة (م، ٤ $\sqrt{٣}$) أوجد طول ضلعه .

الحل : طول ضلع مثلث متطابق الأضلاع مرسوم داخل الدائرة (م ، نق) = نق × $\sqrt{٣}$

= ٤ $\sqrt{٣}$ × $\sqrt{٣}$

= ٤ × ٣ = ١٢ سم .

تدريب (١)

دائرة تحيط مثلثاً متطابق الأضلاع طول ضلعه ٧ سم ، أوجد طول قطر الدائرة .

(٢) طول ضلع سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة

نشاط (١)

على الشكل (٢) : أ ب جـ د هـ و مضلع سداسي منتظم محاط بالدائرة (م ، نق)

– **استخدم الفرجار لمقارنة طول ضلع السداسي أ ب جـ د هـ و بطول نصف قطر الدائرة (م) . ماذا تلاحظ ؟**

– **لإثبات ذلك يمكنك تتبع خطوات البرهان التالي ، مبرراً كل خطوة .**

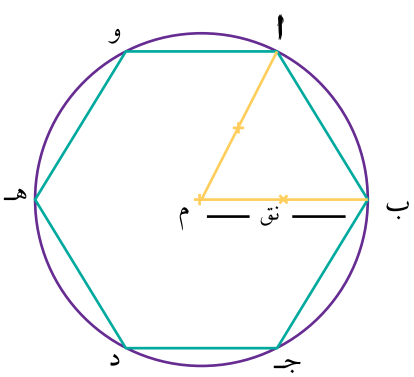
∵ |أ ب| = |ب جـ| = ... = |و أ| لماذا ؟

∴ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = ... = $\overset{\frown}{\text{و أ}}$ لماذا ؟

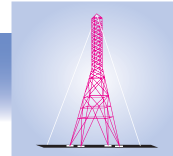
وبالتالي : $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = $\frac{٣٦٠^\circ}{٦}$ = ٦٠°

المثلث م أ ب متطابق الضلعين لماذا ؟

|م أ| = |م ب| = نق



شكل (٢)



∠ أ م ب = ٦٠ْ لأن ∠ أ م ب = ⌒أ ب

∴ المثلث أ م ب متطابق الأضلاع لأنه متطابق الضلعين وله زاوية قياسها ٦٠ْ

∵ |أ ب| = |م أ| = |م ب| = نق

نستنتج :

طول ضلع سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة يساوي طول نصف قطر الدائرة .

مثال (٢)

سداسي منتظم طول محيطه ٤٢ سم إذا كان محاطاً بالدائرة (م ، نق) فأوجد طول نصف قطرها .

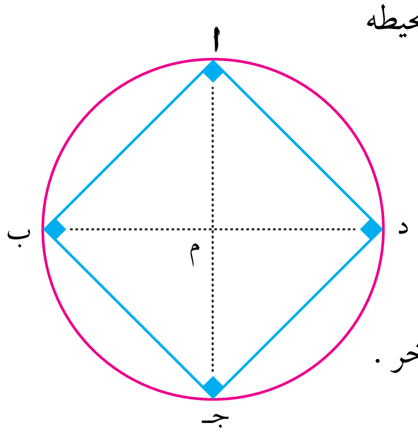
الحـــل : محيط السداسي المنتظم = طول ضلعه × ٦

∴ طول ضلع السداسي المنتظم = $\frac{٤٢}{٦}$ = ٧ سم

∵ طول ضلع السداسي المنتظم = طول نصف قطر الدائرة التي تحيطه

∴ نق = ٧ سم

(٣) طول ضلع مربع مرسوم داخل دائرة



شكل (٣)

على الشكل (٣) : [أ جـ] ، [ب د] قطران متعامدان في الدائرة (م ، نق) .

الرباعي أ ب جـ د قطراه متعامدان ومتطابقان وينصف كل منهما الآخر .

أ ب جـ د مربع مرسوم داخل الدائرة (م)

وعليه يكون : |م أ| = |م ب| = |م جـ| = |م د| = نق

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث أ م د ينتج :

| أ م |^{٢} = | م د |^{٢} + | م أ |^{٢}

| أ د |^{٢} = نق^{٢} + نق^{٢}

= ٢ نق^{٢}

∴ | أ د | = نق $\sqrt{٢}$

نستنتج :

طول ضلع مربع مرسوم داخل دائرة يساوي حاصل ضرب طول نصف قطرها بـ $\sqrt{٢}$

مثال (٣)

أ ب جـ د مربع محاط بدائرة طول قطرها ١٠ سم ، احسب مساحة المربع .

الحـــل :

∵ طول قطر الدائرة = ١٠ سم

∴ نق = ٥ سم

∵ طول ضلع المربع المحاط بالدائرة = نق × $\sqrt{٢}$

∴ طول ضلع المربع أ ب جـ د = ٥ $\sqrt{٢}$ سم

وبالتالي : مساحة المربع أ ب جـ د = ٥ $\sqrt{٢}$ × ٥ $\sqrt{٢}$

= ٢٥ × ٢ = ٥٠ سم^{٢}

تمارين (٦ - ٤)

① (م) دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ما طول ضلع :

أ - مثلث متطابق الأضلاع مرسوم داخل (م) ؟

ب - سداسي منتظم مرسوم داخل (م) ؟

جـ - مربع مرسوم داخل (م) ؟

② ما طول نصف قطر دائرة (م) في كل من الحالات التالية :

أ - (م) تمر برؤوس مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٥ سم .

ب - (م) تمر برؤوس سداسي منتظم طول ضلعه ٣ سم .

جـ - (م) تمر برؤوس مربع طول ضلعه ٤ سم .

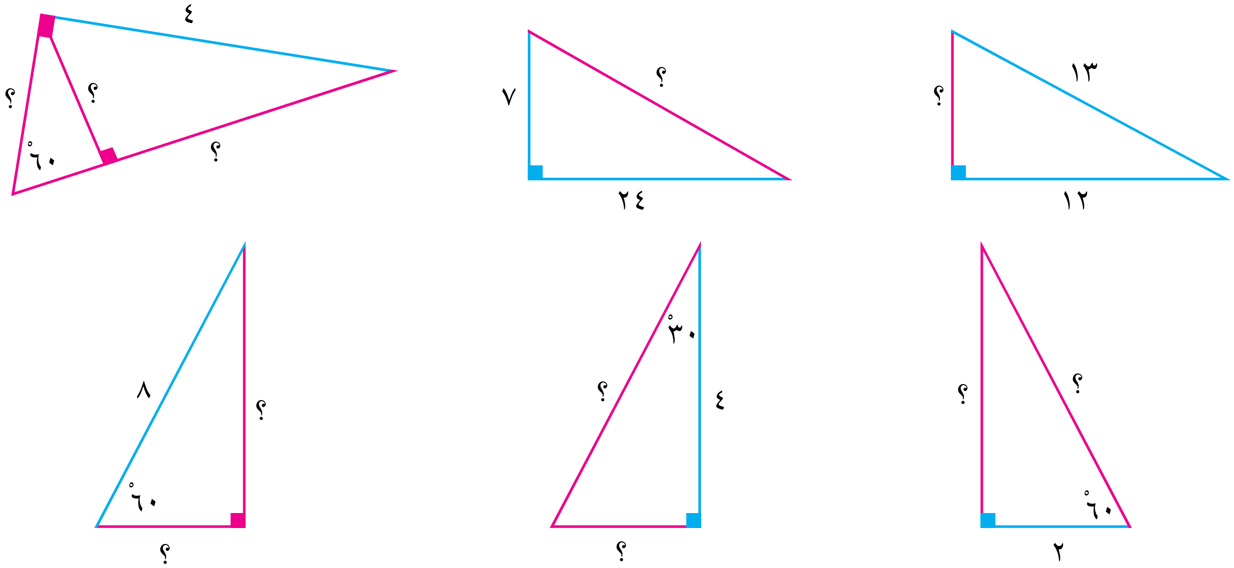
③ أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع محاط بدائرة طول نصف قطرها ٤ سم احسب مساحته .

④ ارسم سداسياً منتظماً طول ضلعه ٢ سم بواسطة الفرجار والمسطرة .

⑤ أ ب جـ د مربع محاط بدائرة طول نصف قطرها ٨ سم احسب محيطه ومساحته .

⑥ أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم محاط بدائرة طول نصف قطرها ٦ سم احسب مساحته .

① حسب البيانات الموضحة على كل من الأشكال التالية أوجد طول الضلع غير المعلوم :



② أثبت أن الأطوال التالية هي أطوال مثلثات قائمة الزاوية :

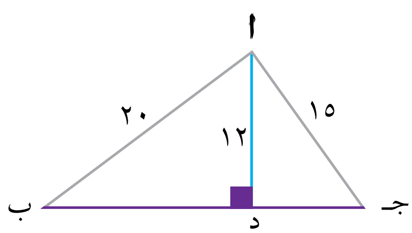
أ) ١٣ ، ٨٤ ، ٨٥   جـ) ٤,٥ ، ١٠,٨ ، ١١,٧

ب) ١٤ ، ٤٨ ، ٥٠   د) ١ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٣}$

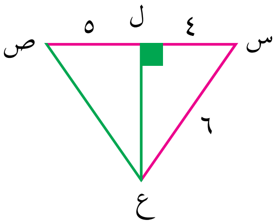
③ معين طولا قطريه ١٤ سم ، ٤٨ سم . أوجد طول ضلعه .

④ قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ٣٠ م ، وعرضها ١٦ م . احسب طول قطرها .

⑤ على الشكل المجاور ، أوجد |د جـ| = |ب جـ|



⑥ ا ب جـ مثلث فيه : $\hat{ا}$ = °٩٠ ، |ا ب| = ٥سم |ب جـ| = ١٣ سم ، د منتصف [ا جـ] احسب |ب د| .



⑦ على الشكل المجاور ، أوجد |ع ل| ، |ص ع|

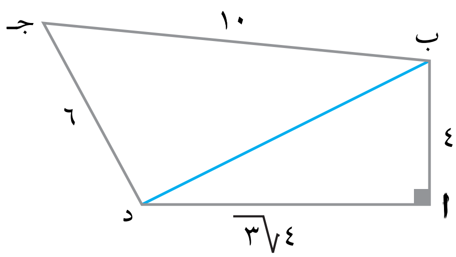
⑧ دائرة طول قطرها ٨ $\sqrt{٣}$ سم احسب ما يلي :

أ – طول ضلع مثلث متطابق الأضلاع محاط بها .

ب – طول ضلع سداسي منتظم محاط بها .

جـ – طول ضلع مربع محاط بها .

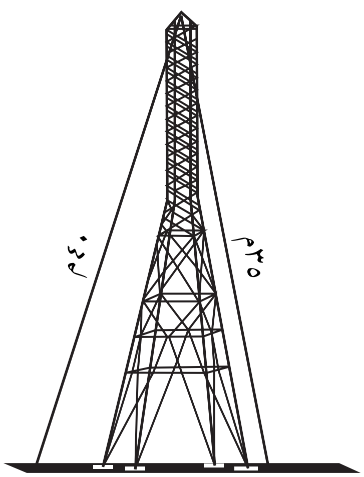
⑨ عمارتان ارتفاعهما ٢٠ م ، ١٢ م والبعد بينهما ٤ م . إذا أردنا مد حبل بين أعلى نقطتين في العمارتين فأوجد طول الحبل .



⑩ أ ب جـ د رباعي فيه : $\hat{أ}$ = ٩٠°

أ – حسب الأطوال الموضحة، احسب |ب د|

ب – أثبت أن : ب د ⊥ جـ د

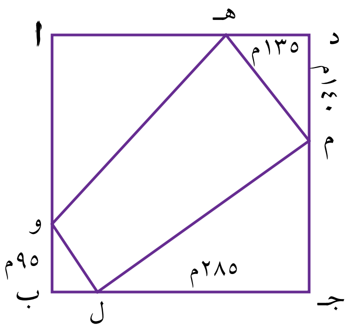


⑪ أ ب جـ د شبه منحرف متطابق الساقين طولا قاعدتيه ٧ سم، ١٣ سم وارتفاعه ٦ سم أوجد طول ساقه.

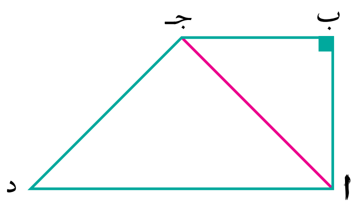
⑫ يوضح الشكل المجاور قاعدة برج اتصالات ارتفاعه ٢٥ متراً مثبتة بسلكين كبيرين .

احسب البعد بين نقطتي تثبيت السلكين في الأرض .

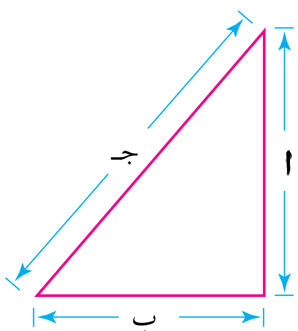
(١٣) الرسم المجاور يمثل حقلاً مربع الشكل ، طول ضلعه ٣٥٠ م .
قُسِّم إلى خمسة أقسام مفصولة عن بعضها بالسياج هـ و ل م .
احسب طول هذا السياج .



(١٤) أ ب جـ د رباعي فيه :
|أ د|^٢ = |أ ب|^٢ + |ب جـ|^٢ + |جـ د|^٢
ب̂ = ٩٠° ، أثبت أن أ جـ د̂ = ٩٠°



(١٥) تتكون ثلاثية فيثاغورس من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة أ ، ب ، جـ تحقق المعادلة : أ^٢ + ب^٢ = جـ^٢ . يمكن أن نجد ما نشاء من الثلاثيات الفيثاغورسية ، وذلك بالتعويض عن س ، ص في كل من التعابير التالية بأعداد صحيحة موجبة (بشرط : س > ص) للحصول على قيم أ ، ب ، جـ ، بحيث :



أ = س^٢ − ص^٢ ، ب = ٢ س ص ، جـ = س^٢ + ص^٢

فمثلاً : لو أخذنا س = ٧ ، ص = ٤ ، فإن :

أ = ٤٩ − ١٦ = ٣٣ ، ب = ٢ × ٧ × ٤ = ٥٦ ، جـ = ٤٩ + ١٦ = ٦٥

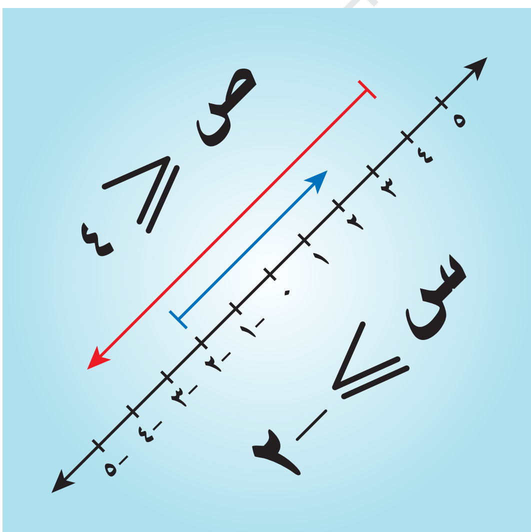
أوجد الثلاثيات الفيثاغورسية، باستخدام القيم التالية لكل من س ،ص:

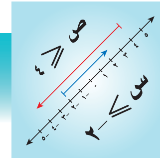
(أ) س = ٥ ، ص = ١   (ب) س = ٦ ، ص =٣

(جـ) س = ٤ ، ص = ٢

التبـــاينات ونظم المعـــادلات

الفصل السابع





(٧-١) نظم المعادلات

(١) تمهيد

تناولنا في دراستنا السابقة معادلات مثل : س + ٦ = ٧ ، ٤ س = ٩ ، ٣ (س – ٥) = ٨ ، ....

وهذه المعادلات بكل منها متغير واحد ، رمزنا له بالرمز س (مثلاً) ، كما أن هذا المتغير مرفوع للقوة ١ . مثل هذه المعادلات تُسمى **معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد .**

وحل هذه المعادلات يُقصد به إيجاد قيمة المتغير س التي تحقق المعادلة ، أي التي تجعل المساواة صحيحة، أو التي تجعل الطرف الأيمن للمعادلة مساوياً للطرف الأيسر فيها .

نشاط (١)

– ما قيمة س التي تحقق المعادلات التالية :

أ) س + ٧ = ١٢

ب) ٢ س = –٨

جـ) ٣ س + ٢ = ٩

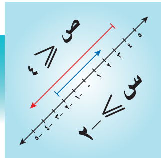
وجدنا في النشاط السابق أن قيمة س في الفقرة (أ) تساوي ٥ ، وفي الفقرة (ب) تساوي – ٤ ، بينما في الفقرة (جـ) تساوي $\frac{٧}{٣}$. ونلاحظ أيضاً أن هناك قيمة وحيدة للمتغير س في هذه المعادلات .

(٢) معادلة الدرجة الأولى ذات مجهولين

إذا تأملنا المعادلات التالية:

٣ س + ص = ٥ ، ص = ٥ س – ٤ ، ٢س = ٨ + ص ، .....

فإننا نلاحظ أن كلاً منها يشتمل على مجهولين رمزنا لهما بالحرفين س ، ص (ويمكن استخدام أي حروف أخرى)، كما نلاحظ أيضاً أن كلاً من هذين المجهولين مرفوع فقط للقوة الأولى .



مثل هذه المعادلات **تُسمى معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهولين .**

جميع معادلات الدرجة الأولى ذات مجهولين تكتب على الصورة العامة : **أ** س + ب ص = جـ ،

حيث : س ، ص هما المجهولان ، **أ** ، ب ، جـ ، أعداد حقيقية .

تدريب (١)

عين معادلات الدرجة الأولى ذات المجهولين فيما يلي :

أ) ٣ س = ٢ ص – ١ ب) س +٤ = ٢ س – ٢ جـ) ٢ س + ٣ ص = ٤ س – ٥

مثال (١)

حل المعادلة : س + ص = ٧

الحـــل : سنجد بسهولة أن لهذه المعادلة حلولاً كثيرة منها :

٣ + ٤ = ٧ ، أي أن : س = ٣ ، ص = ٤

– ٨ + ١٥ = ٧ ، أي أن : س = –٨ ، ص = ١٥

كذلك :

√٢ + (٧ – √٢) = ٧ أي أن : س = √٢ ، ص = ٧ – √٢

نشاط (٢)

أكمل الجدول التالي لكي يتم الحصول على حلول أخرى للمعادلة : س + ص = ٧

س	–٢		٥		–١٧		٢,٧		
ص		–٣		٧		٣,٥			

– **هل مجموعة حلول هذه المعادلة منتهية أم غير منتهية ؟**

مما سبق نلاحظ أنه يكفي أن نحدد قيمة معينة لأحد المجهولين ، فنحصل من المعادلة على قيمة المجهول الثاني ، وكذلك نلاحظ أن مجموعة حلول المعادلة في **ح** × **ح** غير منتهية .

ونكتب الحلول على الشكل التالي :

(٣ ، ٤) ، (–٨ ، ١٥) ، (٥,٣ ، ٥,٣) ..... وكل منها زوج مرتب ، حده الأول قيمة المجهول الأول س ، وحده الثاني قيمة المجهول الثاني ص .

مثال (٢)

اكتب كلاً من المعادلتين التاليتين على الصورة العامة : **أ** س + ب ص = جـ

أ) $\frac{\text{س} + ٥}{٥} = \frac{\text{ص} - ٣}{٧}$

ب) ٣ (س + ٢) – ٢ $\left(\frac{\text{ص}}{٢} - \frac{٢}{٣}\right)$ = ٣

الحـــل : أ) $\frac{\text{س} + ٥}{٥} = \frac{\text{ص} - ٣}{٧}$

بضرب الطرفين في ٣٥ (وهو المضاعف المشترك الأصغر للمقامين ٥ ، ٧) نحصل على :

٧ س + ٣٥ = ٥ ص – ١٥

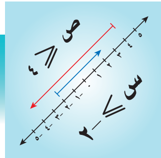
وبتنظيم المعادلة نجد أن : ٧ س – ٥ ص = – ٥٠

ب) ٣ (س + ٢) – ٢ $\left(\frac{\text{ص}}{٢} - \frac{٢}{٣}\right)$ = ٣

بفك الأقواس نحصل على : ٣ س + ٦ – ص + $\frac{٤}{٣}$ = ٣

وبضرب الطرفين في ٣ نحصل على : ٩ س + ١٨ – ٣ ص + ٤ = ٩

وبتنظيم المعادلة ينتج : ٩ س – ٣ ص = –١٣



تدريب (٢)

(أ) هات ثلاثة أزواج مرتبة تكون حلاً للمعادلة : ٢ س + ص = ٣

(ب) اكتب المعادلة : $\frac{\text{٣ س}}{\text{٢}}$ + ٤ = ص − ٣ على الصورة : أ س + ب ص = جـ

(٣) نظام معادلتين من الدرجة الأولى ذات مجهولين

نشاط (٣)

– **أوجد عددين حقيقيين س ، ص يحققان الشرطين التاليين :**

١) مجموعهما يساوي ١٠ ، ٢) الفرق بينهما يساوي ٤

إن الشرط الأول يؤدي إلى المعادلة س + ص = ١٠ ، أما الشرط الثاني فيؤدي إلى المعادلة س − ص = ٤

إن المجهولين س ، ص في المعادلة الأولى يرمزان إلى عددين حقيقيين ، وبالوقت ذاته فإن المجهولين س ، ص في المعادلة الثانية يرمزان إلى العددين الحقيقيين نفسيهما ، لذلك نقول :

إن المعادلتين تؤلفان نظاماً نسميه **نظام معادلتين ذات مجهولين من الدرجة الأولى**

ونكتبه على الشكل :
$$\begin{cases} \text{س + ص = ١٠} & \text{المعادلة الأولى} \\ \text{س − ص = ٤} & \text{المعادلة الثانية} \end{cases}$$

– أكمل الجدولين التاليين :

(١) س + ص = ١٠

س		−٢	٠	٧		٢,٦
ص	٩		١٠	٣	٩ $\frac{1}{2}$	

(٢) س − ص = ٤

س	٥		٠			٢٠
ص		−١١		٣	٨	

- ما هو الحل المشترك للمعادلتين ؟

وجدنا في النشاط السابق أن الحل (٧ ، ٣) هو حل مشترك للمعادلتين . وهذا الحل هو حل لنظام المعادلتين ، ونقول إن حل النظام هو : (٧، ٣)، وعموماً :

حل نظام المعادلتين هو الحل المشترك للمعادلتين

إن الوصول إلى الحل المشترك لنظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين يكون شاقاً إذا اتبعنا الطريقة نفسها في النشاط السابق ، لذا لا بد لنا من طريقة أسهل وأسرع نضمن بها الوصول إلى حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين .

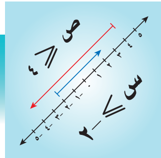
لنأخذ النظام التالي :
س + ص = ١٠ المعادلة (١)
س − ص = ٤ المعادلة (٢)

نلاحظ أن معامل ص في المعادلة الأولى هو المعكوس الجمعي لمعامل ص في المعادلة الثانية ، لذا فإن جمع المعادلتين يؤدي إلى حذف المجهول ص :

س + ص = ١٠ المعادلة (١)
س − ص = ٤ المعادلة (٢)
٢ س = ١٤ حاصل جمع المعادلتين ، وهي معادلة بمجهول واحد هو س .
∴ س = ٧

وبالتعويض عن س بالعدد ٧ في إحدى المعادلتين (الأولى مثلاً) نستطيع حلها لنحصل على قيمة ص .

س + ص = ١٠ المعادلة (١)
٧ + ص = ١٠ بالتعويض عن س بـ ٧
٧ − ٧ + ص = ١٠ − ٧ بطرح ٧ من الطرفين
ص = ٣ ∴ حل النظام هو : (٧ ، ٣)



إذا :

لحل نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين ، نحذف أحد المجهولين فنحصل على معادلة بمجهول واحد حلها يؤدي إلى حل النظام .

مثال (٣)

حل النظام التالي :

٢ س + ٣ ص = ١٦   المعادلة (١)
٣ س − ٣ ص = ٩   المعادلة (٢)

الحل : نلاحظ أن جمع المعادلتين يؤدي إلى حذف المجهول ص : (لماذا) ؟

٢ س + ٣ ص = ١٦   المعادلة (١)
٣ س − ٣ ص = ٩   المعادلة (٢)
____
٥ س = ٢٥   بجمع المعادلتين ، وهي معادلة بمجهول واحد هو : س

∴ س = ٥

وبالتعويض عن س بالعدد ٥ في إحدى المعادلتين ، (الأولى مثلاً) ، نحصل على :

٢ × ٥ + ٣ ص = ١٦

١٠ + ٣ ص = ١٦

٣ ص = ٦

ص = ٢

إذاً : حل النظام هو : (٥ ، ٢)

تدريب (٣)

(أ) تحقق من أن الزوج المرتب (٥ ، ٢) يحقق كلاً من معادلتي النظام في المثال السابق .

(ب) أي من الزوجين المرتبين (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٢) حل للنظام
{ س + ص = ٦
  ٢ س − ٥ ص = −٢

مثال (٤)

حل النظام التالي :
{ س + ص = ٦
  ٢ س − ٣ ص = ٧

الحل : نلاحظ أنه لا يمكن حذف أحد المجهولين بالجمع المباشر (لماذا ؟) . لذا لا بد من تساوي معاملي أحد المجهولين مع اختلاف إشارتيهما .

{ س + ص = ٦ .... (١)
  ٢ س − ٣ ص = ٧ .... (٢)

لكي نحذف المجهول ص من المعادلتين، نضرب المعادلة الأولى في ٣ ، ونُبقي المعادلة الثانية كما هي :

إذاً : س + ص = ٦ ← ٣ س + ٣ ص = ١٨ بالضرب في ٣

٢ س − ٣ ص = ٧ ← ٢ س − ٣ ص = ٧

٥ س = ٢٥ بجمع المعادلتين

∴ س = ٥

بالتعويض عن س بالعدد ٥ في المعادلة (١) نحصل على : ٥ + ص = ٦ إذاً : ص = ١

إذاً : حل النظام هو : (٥ ، ١)

تدريب (٤)

حل النظام :

٣ س − ٢ ص = ٤
٢ س + ص = ٥

مثال (٥)

حل النظام:

٤ س = ١٠ − ٣ ص   المعادلة (١)
٢ ص − ٥ = − س   المعادلة (٢)

الحل: نرتب أولاً المعادلتين ليكون النظام على الشكل التالي :

٤ س + ٣ ص = ١٠ .... المعادلة (١)

س + ٢ ص = ٥ .... المعادلة (٢)

لكي نحذف المجهول س من المعادلتين ، نُبقي المعادلة الأولى كما هي ، ونضرب المعادلة الثانية في −٤ ، فينتج :

٤ س + ٣ ص = ١٠

− ٤ س − ٨ ص = −٢٠

بالجمع : −٥ ص = − ١٠

إذاً : ص = ٢

وبالتعويض عن ص بالعدد ٢ في المعادلة (١) ، نحصل على :

٤ س + ٣ × ٢ = ١٠

٤ س + ٦ = ١٠

٤ س = − ٦ + ١٠   إذاً : س = ١

حل النظام هو : (١ ، ٢)

مثال (٦)

حل النظام :
٣ س − ٢ ص = ٩ المعادلة (١)
٢ س − ٥ ص = ٦ المعادلة (٢)

الحـــل : لكي نحذف المجهول ص نضرب المعادلة الأولى في −٥ ونضرب المعادلة الثانية في ٢ ، فينتج :

٣ س − ٢ ص = ٩ ⟵ − ١٥ س + ١٠ ص = −٤٥ بالضرب في −٥

٢ س − ٥ ص = ٦ ⟵ ٤ س − ١٠ ص = ١٢ بالضرب في ٢

− ١١ س = − ٣٣ بجمع المعادلتين

إذاً : س = ٣

وبالتعويض عن س بالعدد ٣ في المعادلة (٢) نحصل على : ٢ × ٣ − ٥ ص = ٦

٦ − ٥ ص = ٦

− ٥ ص = ٦ − ٦ = ٠ إذاً ص = ٠

إذاً : حل النظام هو : (٣ ، ٠)

تدريب (٥)

حل النظام :
٣ س − ٢ ص = ١٤
٢ س + ٣ ص = −٨

مثال (٧)

حل النظام :

$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}}{٢} = \dfrac{٢\ \text{ص}}{٣} & \text{.....................} \ (١) \\[2ex] \dfrac{\text{س} + ٢\ \text{ص}}{٥} = ٢ & \text{.....................} \ (٢) \end{cases}$$

الحل: بضرب المعادلة (١) في ٦ ، ينتج : ٣ س = ٤ ص لماذا ضربنا المعادلة (١) في ٦ ؟

وبتنظيم المعادلة نحصل على : ٣ س − ٤ ص = ٠

وبضرب المعادلة (٢) في ٥ ، ينتج : س + ٢ ص = ١٠ لماذا ضربنا المعادلة (٢) في ٥ ؟

ويكون النظام كالتالي :

٣ س − ٤ ص = ٠ .... (٣)

س + ٢ ص = ١٠ .... (٤)

ولكي نحذف المجهول ص ، نضرب المعادلة (٤) في ٢ ، فينتج :

٣ س − ٤ ص = ٠

٢ س + ٤ ص = ٢٠

وبالجمع : ٥ س = ٢٠

إذاً : س = ٤

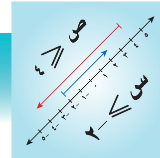
وبالتعويض عن س في المعادلة (٣) ، ينتج :

٣ × ٤ − ٤ ص = ٠

١٢ − ٤ ص = ٠

٤ ص = ١٢ ∴ ص = ٣

إذاً : حل النظام هو : (٤ ، ٣)



تمارين (٧ - ١)

① أ) هل (س = −٣ ، ص = ٥) حل للمعادلة ٢ س + ٧ ص = ١ ، ولماذا ؟

ب) هل (س = ٤ ، ص = ٢) حل للمعادلة س + ٢ ص = ٨ ، ولماذا ؟

② أي من الزوجين المرتبين مع كل نظام فيما يلي يمثل حلاً له :

أ) { ٣ س + ٢ ص = ٤ ، − س + ٣ ص = −٥ } (٢ ، −١) ، (−٣ ، ٢)

ب) { س + ص = −٢ ، ٢ س − ٣ ص = −٩ } (−٢ ، ٣) ، (−٣ ، ١)

جـ) { ٤ س − ٥ ص = ٠ ، ٦ س − ٥ ص = ١٠ } (٥ ، ٤) ، (١٠ ، ٨)

د) { ٣ س − ٢ ص = −٤ ، −٤ س + ٣ ص = ٥ } (٠ ، ٢) ، (−٢ ، −١)

③ اكتب كلاً من المعادلات التالية من الدرجة الأولى ذات المجهولين على الصورة العامة : **أ** س + ب ص = جـ

أ) $\frac{\text{س} + ٤}{٩} = \frac{\text{ص} + ٣}{٥}$

جـ) $\frac{\text{س} + ٢}{٤} + ٧ = \frac{٢\ \text{ص} + ٢}{٦}$

ب) $٤\ (\text{س} + ١) - ٥\ (\text{ص} - \frac{٣}{٥}) = ٢$

د) $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \frac{\text{س} - \text{ص} + ٣}{١٢}$

④ حل نظم المعادلات التالية :

أ) { ٣ س − ص = ١ ، ٢ س + ص = ٤ }

ب) { ٣ س + ص = ٥ ، ٤ س + ٢ ص = ١٠ }

جـ) ٢ س + ٣ ص = −٢٦
٥ س + ص = ٠

د) س − ص = ٠
٣ س − ٢ ص = −١

⑤ رتب نظم المعادلات التالية على الشكل :

أ س + ب ص = جـ
أَ س + بَ ص = جـَ

ثم حلها في ح × ح :

أ) س = − ص + ٥ ، س − ص = ٣

ب) ص = ٧ − س ، ٣ س − ص − ٩ = ٠

جـ) س = ١٠ − ٣ ص ، ص = ٤ − س

د) س = ص + ١ ، ٢ س = −ص − ١

هـ) ٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠ ، ٢ س − ٢ ص + ١٢ = ٠

⑥ حل نظم المعادلات التالية (إن أمكن) :

أ) − ١٠ س + ٢٠ ص − ٣ = ٠
٤ س − ٨ ص + ١ = ٠

ب) ٥ س − ٣ ص − ٦ = ٠
١٠ س − ٦ ص − ١٢ = ٠

جـ) ٢ س + ٣ ص − ٤ = ٠
٣ س − ٢ ص − ٦ = ٠

⑦ حل نظم المعادلات الكسرية التالية :

أ) $\frac{\text{س}}{٦} - \frac{\text{ص}}{٥} = ٠$ ، $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$

ب) س − ص = ٦ ، $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٥}$

جـ) $\frac{٥\text{س} - \text{ص}}{٣} = ٥$ ، $\frac{٤\text{س} + ٣\text{ص}}{٤} = ٢\text{س} - \frac{١}{٤}$

(٧-٢) مسائل حسابية

حل المسائل التي تؤول إلى نظم معادلات ذات مجهولين من الدرجة الأولى يشبه إلى حد بعيد حل المسائل التي تؤول إلى معادلة ذات مجهول واحد من الدرجة الأولى، فالخطوات التي تُتبع لحل مسألة بطريقة إيجاد معادلة واحدة هي نفسها الخطوات التي تتبع لحل مسألة بإيجاد معادلتين. وفيما يلي بعض الأمثلة :

مثال (١)

ما العددان اللذان مجموعهما ٤٤ والفرق بينهما ١٤ ؟

الحــل: (أ) اختيار المجهولين وتنظيم المعادلتين :

ليكن العدد الأول س ، وليكن العدد الثاني ص .

إذاً : المعادلة الأولى هي : س + ص = ٤٤

والمعادلة الثانية هي : س − ص = ١٤

نظام المعادلتين هو :
{ س + ص = ٤٤ .... (١)
{ س − ص = ١٤ .... (٢)

(ب) حل النظام :

{ س + ص = ٤٤ .... (١)
{ س − ص = ١٤ .... (٢)

نلاحظ أن جمع المعادلتين يؤدي إلى حذف المجهول ص :

س + ص = ٤٤ .... (١)

س − ص = ١٤ .... (٢)

بالجمع : ٢ س = ٥٨

∴ س = ٢٩

بالتعويض عن س بالعدد ٢٩ في المعادلة (١) ، نحصل على :

٢٩ + ص = ٤٤

ص = ٤٤ − ٢٩   إذاً : ص = ١٥

إذاً العدد الأول = ٢٩   ،   والعدد الثاني = ١٥

تدريب (١)

تحقق من صحة الحل في المثال السابق .

مثال (٢)

إذا كان طول مستطيل يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم ، وكان ضعف طوله ينقص عن خمسة أمثال عرضه بمقدار ٩ سم .

أوجد طول وعرض هذا المستطيل .

الحــل: (أ) اختيار المجهولين وتنظيم المعادلتين :

ليكن الطول = ط ، وليكن العرض = ع

فالمعادلة الأولى تكون : ط − ع = ٣ ، والمعادلة الثانية تكون : ٥ ع − ٢ ط = ٩

إذاً نظام المعادلتين هو :

ط − ع = ٣ .... (١)

−٢ط + ٥ع = ٩ .... (٢)

(ب) حل النظام :

ط − ع = ٣ .... (١)

−٢ط + ٥ع = ٩ .... (٢)

نلاحظ أنه لا يمكن حذف أحد المجهولين بالجمع المباشر، لذا لابد من تساوي معاملي أحد المجهولين مع اختلاف إشارتيهما.

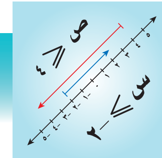
فلكي نحذف المجهول ط ، نضرب المعادلة الأولى في ٢ ، ونبقي المعادلة الثانية كما هي :

إذاً :

٢ ط − ٢ ع = ٦ .... (١)

− ٢ ط + ٥ ع = ٩ .... (٢)

بالجمع : ٣ع = ١٥ إذاً : ع = ٥



بالتعويض عن ع بالعدد ٥ في (١) ، نحصل على :

ط − ٥ = ٣ إذاً : ط = ٣ + ٥ = ٨

إذاً : طول المستطيل = ٨ سم ، وعرض المستطيل = ٥ سم .

مثال (٣)

لدى بقال نوعان من البن. عندما يخلط ٤ كغم من النوع الأول مع ٢ كغم من النوع الثاني، يصبح ثمن الكيلو غرام من الخليط ٢٢ ريالاً. وعندما يخلط ٢ كغم من النوع الأول مع ٤ كغم من النوع الثاني، يصبح ثمن الكيلو غرام من الخليط ٢٤ ريالاً . فما ثمن الكيلو غرام من كل نوع ؟

الحـــل: (أ) اختيار المجهولين وتنظيم المعادلتين :

ليكن س ثمن الكيلو غرام من النوع الأول ، وليكن ص ثمن الكيلو غرام من النوع الثاني

في الخليط الأول (٤+٢) كغم ثمنها : ٦ X ٢٢ = ١٣٢ ريالاً

والمعادلة الأولى هي : ٤س + ٢ص = ١٣٢

في الخليط الثاني (٢+٤) كغم ثمنها : ٦ X ٢٤ = ١٤٤ ريالاً

والمعادلة الثانية هي : ٢س + ٤ص = ١٤٤

نظام المعادلتين هو :
٤س + ٢ص = ١٣٢ .... (١)
٢س + ٤ص = ١٤٤ .... (٢)

(ب) حل النظام :

٤س + ٢ص = ١٣٢ .... (١)
٢س + ٤ص = ١٤٤ .... (٢)

ولكي نحذف المجهول ص نضرب المعادلة الأولى في −٢ ، ونُبقي المعادلة الثانية كما هي ، فينتج

−٨س − ٤ص = −٢٦٤ .... (١)
٢ س + ٤ ص = ١٤٤ .... (٢)

بالجمع : −٦س = −١٢٠

إذاً : س = ٢٠

بالتعويض عن س بالعدد ٢٠ في المعادلة (١) نحصل على :

٤ × ٢٠ + ٢ ص = ١٣٢

٢ ص = ١٣٢ − ٨٠

٢ ص = ٥٢ ، إذاً : ص = ٢٦

أي أن ثمن كيلو غرام البن من النوع الأول = ٢٠ ريالاً .

وثمن كيلو غرام البن من النوع الثاني = ٢٦ ريالاً.

مثال (٤)

قبل ١٨ سنة من الآن كان عمر خالد ضعف عمر ماجد. وبعد ٩ سنوات من الآن يصبح عمر خالد $\frac{٥}{٤}$ عمر ماجد .
فما عمر كل منهما الآن ؟

الحـــل: (أ) اختيار المجهولين وتنظيم المعادلتين :

ليكن س عمر خالد الآن ، وليكن ص عمر ماجد الآن .

المعادلة الأولى: س −١٨ = ٢ (ص − ١٨) وهي تكافئ : س − ٢ ص = −١٨

المعادلة الثانية : س + ٩ = $\frac{٥}{٤}$ (ص + ٩) وهي تكافئ : ٤س − ٥ص = ٩

نظام المعادلتين هو :
س − ٢ص = −١٨ .... (١)
٤س − ٥ص = ٩ .... (٢)

(ب) حل النظام :

س − ٢ص = −١٨ .... (١)
٤س − ٥ص = ٩ .... (٢)

ولكي نحذف المجهول س نضرب المعادلة الأولى في −٤ ونبقي المعادلة الثانية كما هي ، فينتج :

−٤س + ٨ص = ٧٢ .... (١)
٤س − ٥ص = ٩ .... (٢)

بالجمع : ٣ ص = ٨١   إذاً : ص = ٢٧

بالتعويض عن ص بالعدد ٢٧ في (٢) ، نحصل على :

٤س − ٥ × ٢٧ = ٩

٤س = ٩ + ١٣٥ = ١٤٤   إذاً : س = ٣٦

أي أن عمر خالد الآن = ٣٦ سنة ، وعمر ماجد الآن = ٢٧ سنة

تدريب (١)

(أ) يزيد عمر أحمد عن عمر فيصل الآن ٦ سنوات. بعد سنتين يصبح عمر أحمد مثلي عمر فيصل. ما عمر كل منهما الآن؟

(ب) ثمن ثوب وحقيبة ٩٠ ريالاً وثمن ٣ أثواب وحقيبتين ٢٤٠ ريالاً. أوجد ثمن كل من الثوب والحقيبة.

تمارين (٧ - ٢)

(١) عددان مجموعهما ٧٠ والفرق بينهما ٢٠ ، فما هما ؟

(٢) ثمن ٣ برتقالات ، و٦ موزات ٥ ريالات. وثمن ٦ برتقالات، و٤ موزات ٦ ريالات. ما ثمن كل من البرتقالة والموزة؟

(٣) حسب أخوان ما معهما من المال ، فوجدا أن المجموع يساوي ٧٨ ريالاً، لو أعطى الأخ الأكبر أخاه الأصغر ٤ ريالات، لبقي مع الأكبر ضعف ما مع الأصغر . كم ريالاً كان مع كل منهما؟

(٤) قبل ٥ سنوات كان عمر أحمد خمسة أمثال عمر علي ، وبعد ٤ سنوات من الآن يصبح عمر أحمد ثلاثة أمثال عمر علي. احسب عمر كل منهما الآن.

(٥) باع مزارع ٣ دجاجات، و٤ أطباق من البيض بمبلغ ٦٧ ريالاً. ثم باع بالسعر نفسه دجاجة واحدة، و٥ أطباق من البيض بمبلغ ٥٩ ريالاً. ما سعر الدجاجة؟ وما سعر طبق البيض؟

(٦) قال معاذ لأنس : أعطني ٦ ريالات مما معك، فيصبح ما معي مساوياً لما يبقى معك. أجابه أنس: أعطني ٦ ريالات مما معك، فيصبح ما معي ثلاثة أمثال ما يبقى معك. كم من المال لدى كل من معاذ وأنس؟

(٧) ربع مجموع زاويتين ١٥° ، وسدس الفرق بينهما ٤° ، أوجد قياس الزاويتين .

(٨) عددان مجموعهما ٥٣، وحاصل قسمة الأكبر على الأصغر يساوي ٣ والباقي ٥ . ما هذان العددان؟

(٩) أعطى تلميذ صديقه في المرة الأولى ٣ أقلام تلوين ، وأخذ منه ٤ أقلام رصاص وريالاً واحداً. وفي المرة الثانية أعطاه ٦ أقلام رصاص ، وأخذ منه ٥ أقلام تلوين ودفع له ريالين. ما ثمن كل من قلمي الرصاص والتلوين؟

(١٠) ما الكسر الذي إذا أضفنا العدد ٢ إلى كل من حديه يصبح مكافئاً للكسر $\frac{٤}{٥}$ ، وإذا طرحنا من كل من حديه العدد واحد يصبح مكافئاً للكسر $\frac{١}{٢}$ ؟

(١١) الفرق بين عددين يساوي ٧٣ ، وحاصل قسمة الأكبر على الأصغر يساوي ٤ ، والباقي ٧. ما هذان العددان؟

(١) المتباينات

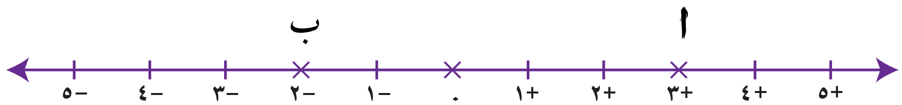
درسنا فيما سبق أن الرمز > يعني (أكبر من) ، وأن الرمز < يعني (أصغر من). فنقول مثلاً إن العدد ٩ أكبر من العدد ٧، ونكتب ٩ > ٧ . ونقول أيضاً : إن العدد ٧ أصغر من ٩ ، ونكتب : ٧ < ٩. وعلى العموم إذا كان ا، ب عددين حقيقيين فإن : ا > ب تعني ب < ا. والعكس صحيح .

تُسمى العبارة الرياضية التي تحتوي على الرمز > ، أو < متباينة .

نشاط (١)

نعلم أن ا > ب تعني أن العدد ا هو على يمين العدد ب عند ترتيب الأعداد على خط مستقيم

ـ بملاحظة الشكل (١) أملأ الفراغات باختيار ما يناسب من الرموز التالية : (> ، < ، =) :



شكل (١)

ا .... ب ، ا +١....... ب + ١ ، ب .... ا

ا −٣....... ب +٢ ، ا −٢....... ب + ١ ، ا .... ب+٣

تدريب (١)

عبر عن كل مما يلي باستخدام الرمز > أو < :

(١) العدد ستة أكبر من العدد س .

(٢) ٢٧ أصغر من العدد ٣ س .

(٣) العدد ا أصغر من العدد ب.

(٤) العدد ١٧ يقع بين العددين ١١ ، ٢٢.

تدريب (٢)

قارن المقدارين في كل مما يلي باختيار ما يناسب من الرموز < ، > ، = :

أ) ٨ ، ١٧ ب) س ، س + ٣ جـ) ب + ١ ، ب - ١ د) $\frac{٤٥}{٥}$ ، $\frac{٣٦}{٤}$

هـ) س + $\frac{١٢}{٢}$ ، س + $\frac{١٨}{٩}$ و) ب - $\frac{٣٢}{٨}$ ، ب + $\frac{٣٥}{٧}$ ز) ص - ٤٩ ، ص - ٧ .

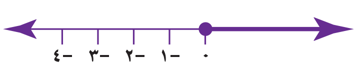
(٢) تمثيل متباينات الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد

كما تعرفنا على معادلات الدرجة الأولى بمجهول ومجهولين، ومعادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد، وتعلمنا حل تلك الأنواع من المعادلات فإنه سيتم التعرف في هذا الدرس إن شاء الله على متباينات الدرجة الأولى بمجهول واحد .

فمثلاً : ٢ س + ١ < ١٥ ، ٣ ص - ٢ > ٧ ، متباينتان من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

نستطيع تمثيل متباينات الدرجة الأولى بمجهول واحد على خط الأعداد الحقيقية كما في الأمثلة التالية :

مثال (٢)

المتباينة لفظياً	المتباينة رياضياً	التمثيل على خط الأعداد
(١) الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣	س < ٣	
(٢) الأعداد الحقيقية الأكبر من -٢	س > -٢	
(٣) الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي ١	س ≤ ١	
(٤) الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي صفراً	س ≥ ٠	

نلاحظ أننا استخدمنا على خط الأعداد دائرة صغيرة مفتوحة لتمثيل المتباينات التي تحتوي على الرمزين < ، > واستخدمنا دائرة صغيرة مغلقة لتمثيل المتباينات التي تحتوي على الرمزين ≤ ، ≥ .

مثال (٢)

مثل على خط الأعداد كلاً من المتباينتين :

(أ) ص < ٣

(ب) س ⩾ -٤

الحل : (أ)

قيمة ص هي أي عدد حقيقي أصغر من ٣ .

وضعنا دائرة مفتوحة ، حول العدد ٣

لتوضيح أن العدد ٣ ليس حلاً للمتباينة

(ب)

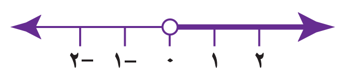
قيمة س هي -٤ أو أي عدد حقيقي أكبر من -٤ .

وضعنا دائرة مغلقة حول العدد -٤ ، لتوضيح أن -٤ حل للمتباينة .

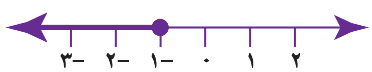
مثال (٣)

اكتب المتباينة الممثلة بيانياً في كل مما يلي :

(أ)

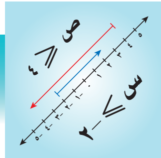


(ب)



الحـــل : (أ) س > ٠

(ب) س ⩽ -١ .



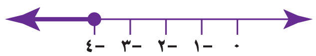
تدريب (٣)

(أ) صل كل متباينة فيما يلي بتمثيلها :

س ⩽ −٤

س ⩾ −٤

س < ٤,٠



س ⩽ −٤,٠

(ب) مثل على خط الأعداد الحقيقية كلاً من المتباينتين : س > −١ ، ص ⩾ ٢

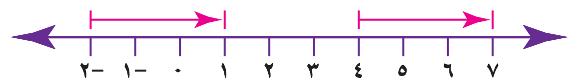
(جـ) اكتب المتباينة الممثلة بيانياً في كل مما يلي :

(٣) خصائص علاقة التباين

نشاط (٢)

– ادرس نماذج خط الأعداد التالية ، ليتم اكتشاف ماذا يحصل لإشارة التباين ٤ > −٢ ، عندما نضيف عدداً موجباً أو سالباً إلى طرفي المتباينة ، وعندما نضرب طرفي المتباينة بعدد موجب أو سالب .

(أ) أضف العدد الموجب ٣ إلى طرفي المتباينة ٤ > -٢



٤ > -٢

٤ + ٣ □ -٢ + ٣

٧ > ١

– **هل تغير اتجاه إشارة التباين ؟**

(ب) أضف العدد السالب -٣ إلى طرفي المتباينة ٤ > -٢

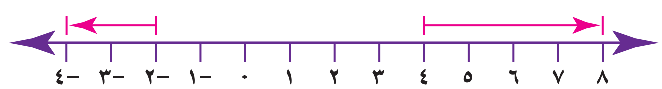
٤ > -٢

٤ + (-٣) □ -٢ + (-٣)

١ > -٥

– **هل تغير اتجاه إشارة التباين ؟**

(جـ) اضرب كلاً من طرفي المتباينة ٤ > -٢ بالعدد ٢



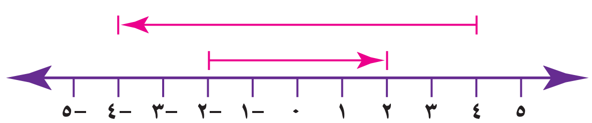
٤ > -٢

٤ × ٢ □ (-٢) × ٢

٨ > -٤

– **هل تغير اتجاه إشارة التباين ؟**

(د) اضرب كلاً من طرفي المتباينة ٤ > -٢ بالعدد -١



٤ > -٢

٤ × -١ □ (-٢) × -١

-٤ < ٢

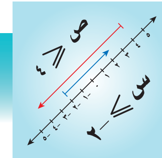
– **هل تغير اتجاه إشارة التباين ؟**

– ما هي أوجه التشابه والاختلاف بين خصائص علاقة التباين وخصائص علاقة التساوي (المعادلات) ؟

من النشاط السابق نستنتج الخصائص التالية لعلاقة التباين :

الخاصية	الخاصية عددياً	الخاصية رياضياً
الجمع	٧ > ٣ ، لذا فإن : ٧+٤ > ٣+٤	إذا كان أ > ب ، فإن : ا + جـ > ب+جـ
الطرح	١٢ > ٤ ، لذا فإن : ١٢-٣ > ٤-٣	إذا كان أ > ب ، فإن : ا - جـ > ب - جـ
الضرب	٤ > ٣ ، لذا فإن : ٤× ٥ > ٣×٥	إذا كان أ > ب ، جـ > ٠ فإن : أ × جـ > ب×جـ
	٧ > ٥ ، لذا فإن : ٧×(-٣) < ٥×(-٣)	إذا كان أ > ب ، جـ < ٠ فإن : أ × جـ < ب×جـ
القسمة	٦ > ٤ ، لذا فإن : ٦ ÷١٢ > ٤÷٢	إذا كان أ > ب ، جـ > ٠ فإن : أ ÷ جـ > ب÷جـ
	١٢ > ٦ ، لذا فإن : ٦÷(-٣) < ٦÷(-٣)	إذا كان أ > ب ، جـ < ٠ فإن : أ ÷ جـ < ب÷جـ

نلاحظ من خصائص علاقة التباين أنها لا تختلف عن خصائص علاقة التساوي إلا في حالة ضرب الطرفين أو قسمتها على عدد سالب ، حيث أنه في هذه الحالة يتغير اتجاه إشارة التباين من إشارة > إلى < ، ومن إشارة < إلى > انظر الجدول السابق.



(٤) حل المتباينات

استخدمنا فيما سبق خصائص علاقة التساوي في حل المعادلات ، ونستطيع استخدام خصائص علاقة التباين في حل المتباينات كما في الأمثلة التالية :

مثال (٤)

حل المتباينة : س − ١٥ < ٢٥

الحـــل : س − ١٥ < ٢٥

س − ١٥ + ١٥ < ٢٥ + ١٥ (أضفنا ١٥ إلى الطرفين)

س < ٤٠

مثال (٥)

حل المتباينة : −٢٦ < ص + ١٥

الحـــل : −٢٦ < ص + ١٥

−٢٦ − ١٥ < ص + ١٥ − ١٥ (طرحنا ١٥ من الطرفين)

−٤١ < ص

∴ ص > −٤١

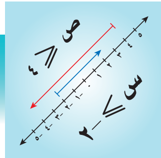
مثال (٦)

حل المتباينة : $\frac{\text{س}}{٦}$ > −٤

الحـــل : $\frac{\text{س}}{٦}$ > −٤

٦ × $\frac{\text{س}}{٦}$ > −٤ × ٦ (ضربنا الطرفين بالعدد ٦)

س > −٢٤



مثال (٧)

حل المتباينة − ٥ ص > −٢٠

الحــل : − ٥ ص > − ٢٠

−٥ص / −٥ > −٢٠ / −٥ (قسمنا الطرفين على −٥ ، وغيرنا اتجاه إشارة التباين)

ص < ٤

تدريب (٤)

(أ) بين هل تتغير إشارة التباين أو تبقى كما هي ، عندما يتم إجراء كلاً من العمليات التالية على طرفي المتباينة :

(١) إضافة − ٥ (٢) الضرب بـ −٧ (٣) القسمة على ٢ (٤) طرح ١٢

(٥) القسمة على −١ (٦) إضافة ٨ (٧) الضرب بـ −٣

(ب) حل كلاً من : (١) س − ٥ > ٦ (٢) −٤ س < ٨ .

مثال (٨)

حل في مجموعة الأعداد الكلية ك المتباينة : ٥ س + ٧ > ١٢

الحــل : ٥ س + ٧ > ١٢

٥ س + ٧ − ٧ > ١٢ − ٧ (طرحنا ٧ من الطرفين)

٥ س > ٥

٥س / ٥ > ٥ / ٥ (قسمنا الطرفين على ٥)

س > ١

مجموعة حل هذه المتباينة في ك هي : { ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... }

مثال (٩)

حل المتباينة التالية في مجموعة الأعداد الصحيحة ص : ٢ م + ٥ ≤ ٤ م + ١٧

الحـــل : ٢م + ٥ ≤ ٤ م + ١٧

٢ م + ٥ – ٥ ≤ ٤ م + ١٧ – ٥ (طرحنا ٥ من الطرفين)

٢م ≤ ٤ م + ١٢

٢ م – ٤ م ≤ ٤ م – ٤ م + ١٢ (طرحنا ٤ م من الطرفين)

–٢م ≤ ١٢

$\frac{-٢م}{-٢}$ ≥ $\frac{١٢}{-٢}$ (قسمنا الطرفين على –٢ ، وغيرنا اتجاه إشارة المتباينة)

م ≥ –٦

إذاً : مجموعة حل المتباينة في ص هي : { –٦ ، –٥ ، –٤ ، –٣ ، ...... }

مثال (١٠)

حل المتباينة : ٣ (س + ٦) + ٢ س ≥ ٢ س + ٦

الحـــل : ٣ (س + ٦) + ٢ س ≥ ٢س + ٦

٣ س + ١٨ + ٢ س ≥ ٢ س + ٦ (فك القوس في الطرف الأيمن)

٥ س + ١٨ ≥ ٢س + ٦ (جمعنا الحدود المتشابهة في الطرف الأيمن)

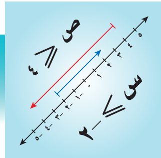
٥ س + ١٨ – ١٨ ≥ ٢س + ٦ – ١٨ (طرحنا ١٨ من الطرفين)

٥ س ≥ ٢س – ١٢

٥ س – ٢س ≥ ٢س – ٢ س – ١٢ (طرحنا ٢ س من الطرفين)

٣ س ≥ –١٢ ، وبقسمة الطرفين على ٣ ينتج :

س ≥ –٤



مثال (١١)

قسمنا عدداً على (-٥) ، وأضفنا ٤ إلى خارج القسمة، فكان الناتج لا يزيد عن ٧ ، فما هذا العدد ؟

الحـــل: نفرض أن العدد المطلوب هو : س

∴ $\frac{س}{-٥} + ٤ \leq ٧$ هي المتباينة التي تعبر عن وضع السؤال

$\frac{س}{-٥} + ٤ - ٤ \leq ٧ - ٤$ (طرحنا ٤ من الطرفين)

$\frac{س}{-٥} \leq ٣$

$-٥ \times \frac{س}{-٥} \geq ٣ \times -٥$ (ضربنا الطرفين في -٥ ، وغيرنا اتجاه إشارة المتباينة)

$س \geq -١٥$

∴ العدد المطلوب هو أكبر من أو يساوي - ١٥ .

مثال (١٢)

حل المتباينة التالية في ع ، ومثل ذلك على خط الأعداد : $٤ص - \frac{١}{٢} \geq \frac{٣}{٤} + ٣ص$

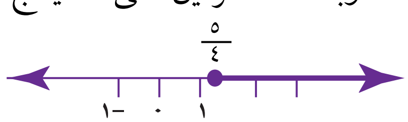
الحـــل: $٤ص - \frac{١}{٢} \geq \frac{٣}{٤} + ٣ص$ ، وبضرب جميع حدود الطرفين في ٤ ، ينتج:

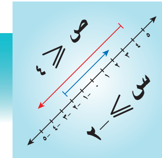
$١٦ص - ٢ \geq ٣ + ١٢ص$ ، وبإضافة ٢ إلى الطرفين ، ينتج :

$١٦ص \geq ٥ + ١٢ص$ ، وبطرح ١٢ص من الطرفين ، ينتج :

$٤ص \geq ٥$ ، وبقسمة الطرفين على ٤ ، ينتج :

$ص \geq \frac{٥}{٤}$





مثال (١٣)

حل المتباينة في ح ، ومثل ذلك على خط الأعداد : $\frac{س - ٥}{٤} < \frac{٢س + ٣}{٣}$

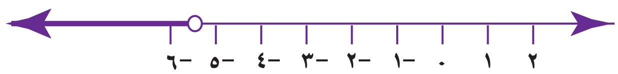
الحـل : $\frac{س - ٥}{٤} < \frac{٢س + ٣}{٣}$ ، بضرب الطرفين في العدد ١٢ ، وهو المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ، ينتج :

$٣س - ١٥ < ٨س + ١٢$ ، وبطرح ٨ س من الطرفين ، ينتج :

$-٥س - ١٥ < ١٢$ ، وبإضافة + ١٥ إلى الطرفين ، ينتج :

$-٥س < ٢٧$ ، وبقسمة الطرفين على −٥ ، وتغيير اتجاه إشارة المتباينة ، ينتج :

$س > -\frac{٢٧}{٥}$



تدريب (٥)

(أ) اذكر هي العملية التي أجريت على طرفي المتباينة الأولى للحصول على المتباينة الثانية في كل مما يلي :

(١) $س - ٥ \geq ٦$ (٢) $٨ > -٤ص$ (٣) $٧ع < \frac{١}{٣}$

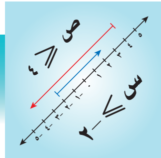
$س \geq ١١$ $ص > -٢$ $٢١ع < ١$

(ب) عبر عن كل من المتباينات اللفظية التالية بعبارات رياضية ، ثم مثل كلاً منها على خط الأعداد :

(١) جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣   (٢) جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من −٢

(٣) جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي ١   (٤) جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي الصفر

(جـ) حل المتباينة : $٤س - ١ \geq ٣$ ، ومثلها على خط الأعداد .



تمارين (٧-٣)

① اكتب المتباينات التي تعبر عن الجمل التالية :

أ) ١٥ أصغر من س مضافاً إليها ٧ . ب) ٩ أكبر من العدد ق .

جـ) ٤٥ أصغر من ٥ ط . د) ستة أضعاف العدد ص مطروحاً منه ٣ أكبر من ٣٥ .

هـ) ثلاثة أمثال العدد ع أصغر من العدد ع مقسوماً على ٢ .

② ضع علامة (✓) أمام العبارات الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارات غير الصحيحة فيما يلي :

أ) ٦ < ١٠ ب) م < م + ١ جـ) ق > ق + ٢

د) ٨ < ١٠ < ٩ هـ) س < س و) ١٠ < ٩ > ٨

③ مثل كلاً من المتباينات التالية على خط الأعداد :

(أ) س < ٢ (ب) ص > -٤ (جـ) ع ≥ -٦ (د) ل ≤ ١

④ اكتب المتباينة الممثلة على خط الأعداد : في كل مما يلي :

(أ)

(ب)

(جـ)

⑤ بين أياً من الأعداد التالية حل للمتباينة ٣ - س > ١

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١٢

⑥ حل كلاً من المتباينات التالية :

(أ) س - ٤ > -٨ (ب) ص + ٥ < ٩ (جـ) ل/-٦ > -٧

(د) ٦٤ ≤ -٨ع (هـ) -٤ (٢ س + ٧) < -١٢

⑦ عبر عن كل من الجمل اللفظية التالية بمتباينات ، ثم حل كلاً منها :

(أ) طرحنا ٧ من عدد فكان الناتج أكبر من −٢

(ب) قسمنا عدداً على −٤ ، فكان الناتج ٣٠ على الأقل .

(جـ) سالب ثمانية أكبر من أو يساوي عدداً مقسوماً على −٣ .

(د) عددان صحيحان متتاليان مجموعهما أكبر من ٥٥ .

(هـ) عددان صحيحان فرديان متتاليان مجموعهما أصغر من −١١

⑧ أوجد مجموعة حلول المتباينات التالية في ك :

أ) س + ٥ > ٨　　ب) ٣ س − ١ ≥ ١١　　جـ) ٣ س + ١ < س + ١٢

⑨ حل المتباينات التالية في ص :

أ) ٣ س − ٥ > ٥ س − ٣　　ب) ٢ س + ٧ ≤ − س −٢　　جـ) س + ٤ > ٣ س + ٧

⑩ مثل على خط الأعداد مجموعة حل كل من المتباينات التالية في ح :

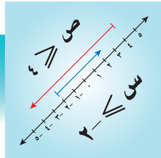
أ) (س − ١) / ٦ + (س − ٢) / ٣ ≥ ٠　　جـ) (٥ س − ٢) / ٣ < (٣ س + ٢) / ٥ −١

ب) س / ٢ + ٣س / ٥ −٢ ≤ (س − ٦) / ٥ + (س −٢) / ٢

⑪ حل المتباينات التالية في ح ومثل ذلك على خط الأعداد :

أ) ١٥ − س > ٣ س + ١　　ب) س + ٢٤ > ٤ س − ١٣

جـ) ٣ س + ١ / ٢ ≤ س − ٣　　د) (٢ − س) / ٣ ≥ (٣ + س) / ٥



(٧ - ٤) تمارين عامة

① ما هي العملية التي أجريت على طرفي المتباينة الأولى للحصول على المتباينة الثانية في كل مما يلي :

(أ) ٢ + س ≤ ٩ ، س ≤ ٧

(ب) ١٦ + س > −٥ ، س > −٢١

(جـ) −٣ س < ٢٤ ، س > −٨

(د) ٨س − ٣ ≤ ١٩ ، ٨س ≤ ٢٢

(هـ) $\frac{\text{٢س}}{\text{٥}}$ < ٢ ، س < ٥

② حل كلاً من المتباينات التالية ، ثم صل كل متباينة بالتمثيل البياني لها :

٣ س − ١ ≤ −٧

١٠ ≤ س + ٦

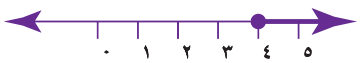
٥ س − ٧ < ٣ س + ٩

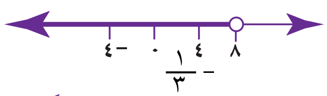
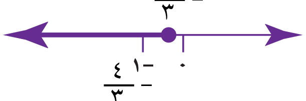
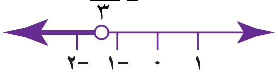
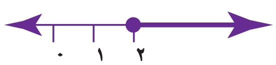
−٣ ≥ ٦ س − ١

−٩س + ٢ > ١٤

٢ س − ٦ < − س + ٦

٢ س ≥ − س + ٦



③ اكتب كلاً من المعادلات التالية من الدرجة الأولى ذات المجهولين على الصورة العامة : (ا س + ب ص = جـ):

أ) $\frac{\text{س + ٣}}{\text{٥}}$ = ص − $\frac{\frac{\text{٤}}{\text{٣}}}{\text{٢}}$

ب) ٥ (س + ٤) − ٦ ($\frac{\text{٣ص}}{\text{٤}}$ − $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$) = ٣

④ ما العددان اللذان مجموعهما ٧١١ والفرق بينهما ٣٥٣ ؟

⑤ رتب نظم المعادلات التالية على الشكل : $\begin{cases} \text{أ س} + \text{ب ص} = \text{جـ} \\ \text{أَ س} + \text{بَ ص} = \text{جـَ} \end{cases}$ ثم حلها في ع :

أ) ٢ س = −ص − ٣ ، ٢ ص = س − ١١

ب) ٣ س + ٢ ص − ٦ = ٠ ، ٥ س + ٦ ص − ١٢ = ٠

جـ) $\frac{\text{٣ س} + ١}{٢} = ٨ - \frac{\text{ص} - ١}{٣}$ ، $\frac{\text{ص} - ١}{٣} = ٩ - \frac{\text{س} - ١}{٢}$

د) ١,٢ س − ٠,٨ ص = −٠,٤ ، ص = ٠,٣ − ٠,١ س

هـ) ٢ س − ٣ ص + $\frac{١}{٢}$ = ٠ ، ٢س + ص − ٨ = ٠

⑥ أراد طالب أن يشتري عدداً من الدفاتر والأقلام لها الثمن نفسه ، إذا كان ثمن ٥ أقلام و٧ دفاتر يساوي ٨٧ ريالاً، وثمن ٨ أقلام و ٤ دفاتر هو ١١٤ ريالاً . أوجد ثمن كلٍ من القلم والدفتر .

⑦ ك ل م مثلث متطابق الأضلاع فيه : |ك ل| = (س + ٤) سم ، |ل م| = (ص + ٢) سم ، |ك م| = (٤ س − ص) سم . أوجد قيمة كلٍ من س ، ص . ثم أوجد محيط هذا المثلث.

⑧ عدد مكون من رقمين ، يزيد رقم آحاده على رقم عشراته ٢ إذا أضفنا ١٨ إلى هذا العدد نحصل على معكوسه (ترتيب الأرقام يصبح معكوساً) ما هذا العدد ؟ أعط جميع الحلول الممكنة .

⑨ حل المتباينات التالية في ح :

أ) ٤ س + ٧ ⩽ ٥ س − ٣

ب) ٢ ص − $\frac{٣}{٧}$ ⩾ ص + ٤

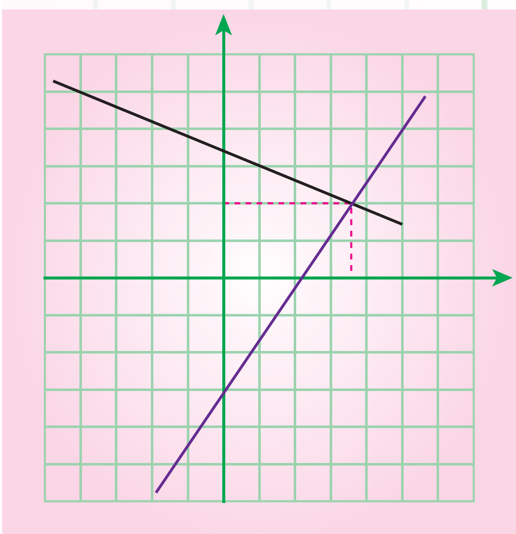
جـ) ٥ ق + $\frac{٣}{٧}$ > ٢ ق − $\frac{٣}{٧}$

د) $\frac{\text{٤س} - ٥}{٣} > \frac{\text{٢س} + ٣}{٢}$

هـ) $\frac{٣ - \text{ص}}{٢} > \frac{١ + \text{٢ص}}{٥}$

الهندسة التحليلية

الفصل الثامن



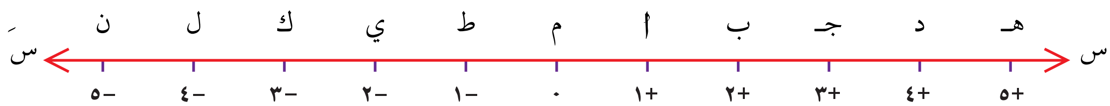
(٨ - ١) المستوى ح × ح

(١) تعريف المحور

على الشكل (١) س سَ مستقيم ، م نقطة عليه . على س سَ اتجاهان : من م نحو س ، ومن م نحو سَ .
عندما نختار واحداً من الاتجاهين ، نضع على المستقيم س سَ سهماً يدل على الاتجاه المختار. فإذا كان الاتجاه نحو اليمين نُسميه الاتجاه الموجب، أما الاتجاه الآخر فنسميه الاتجاه السالب.
ولقياس الطول على هذا المستقيم نُعَيِّن وحدة للطول ، فعلى الشكل (١) مثلاً ، وحدة الطول هي طول [م ب] .
نقول عندئذ : إن س سَ **محور**، والنقطة م تسمى **أصل المحور** ، ووحدة طوله هي |م ب| .

شكل (١)

(٢) المحور وتمثيل الأعداد الصحيحة

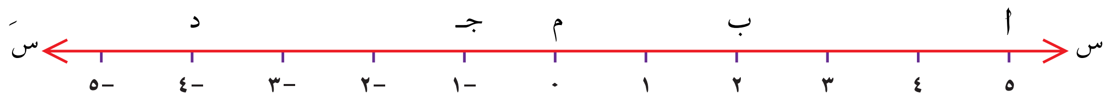


شكل (٢)

على الشكل (٢) س سَ محور أصله م . قسمنا [م س إلى قطع متطابقة ، طول الواحدة منها هو طول الوحدة على المحور، فحصلنا على النقاط : أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ... وقسمنا بالطريقة نفسها [م سَ، وحصلنا على النقاط : ط ، ي ، ك ، ل ، ن ، .... مقابل هذه النقاط كتبنا الأعداد الصحيحة ، كما هو مبين في الشكل (٢) .
نُسمي كل عدد من هذه الأعداد إحداثي النقطة المقابلة له، فإحداثي النقطة جـ هو + ٣ ، ونكتب : جـ (+ ٣) ، كذلك إحداثي النقطة ي هو − ٢ ، ونكتب : ي (−٢) ، أما بالنسبة لنقطة الأصل م فنكتب : م (٠) .

مثال (١)

حدِّد إحداثيات النقاط أ ، ب ، جـ ، د ، م الممثلة في الشكل (٣) :



شكل (٣)

الحـــل : أ (+٥) ، ب (+٢) ، جـ (-١) ، د (-٤) ، م (٠)

تدريب (١)

أ (+٥) ، ب (+٢) ، جـ (+٤) ثلاث نقاط على محور أصله م، حيث طول الوحدة ٢ سم.

ارسم المحور، ثم حدِّد هذه النقاط عليه .

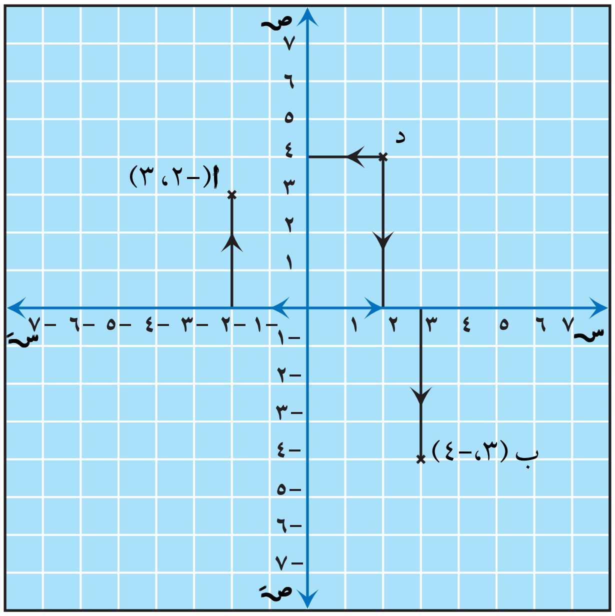
(٣) المستوى ح × ح

الشكل (٤) يمثل المستوى ح × ح، وهو يتألف من خطي أعداد متعامدين يُسمى الخط الأفقي سَ سَ محور السينات ، بينما يُسمى الخط الرأسي صَ صَ محور الصادات

ونقطة تقاطع هذين المحورين تُسمى نقطة الأصل.

كل نقطة من المستوى ح × ح يقابلها زوج مرتب من الأعداد الحقيقية ، حده الأول يُسمى الإحداثي السيني للنقطة ،وحده الثاني يُسمى الإحداثي الصادي للنقطة .

وكل زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يقابله نقطة في المستوى ح × ح .

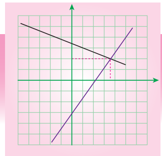


شكل (٤)

مثال (٢)

على الشكل (٤) مثّل النقطة أ (-٢ ، ٣) ، ب (٣ ، -٤)

الحل : لتعيين النقطة أ (-٢ ، ٣) في المستوى ح × ح نبدأ من نقطة الأصل ونتحرك وحدتين إلى اليسار على المحور سَ سَ ثم إلى الأعلى بموازاة المحور صَ صَ نتحرك ثلاث وحدات لنحدد النقطة أ (- ٢ ، ٣) على الشكل (٤) . وبالمثل لتعيين النقطة ب (٣ ، -٤) نبدأ من نقطة الأصل ، ونتحرك ثلاث وحدات إلى اليمين على المحور سَ سَ ، ثم إلى الأسفل بموازاة المحور صَ صَ أربع وحدات لنحدد موقع النقطة ب (٣ ، -٤) .



مثال (٣)

على الشكل (٤) عين إحداثيي النقطة د.

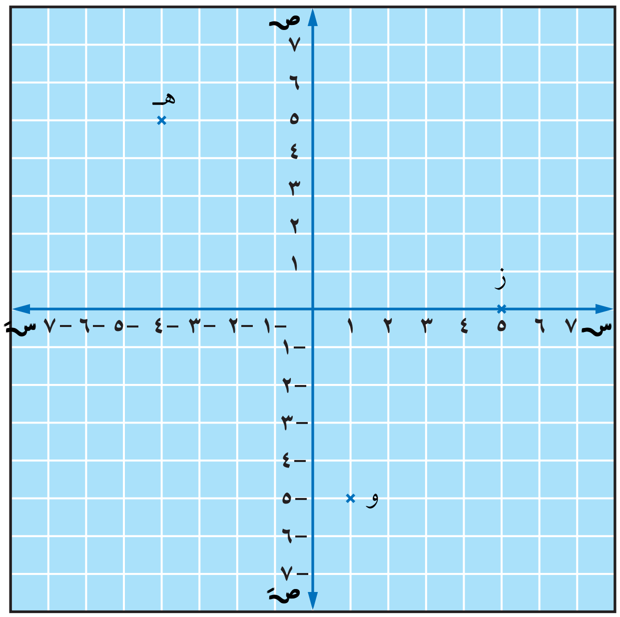
الحـــل : لتحديد إحداثيي النقطة د ، نتحرك من د رأسياً بموازاة المحور ص ص َ تجاه العدد على س س َ لتحديد الإحداثي السيني للنقطة د ، ثم من د نفسها نتحرك أفقياً بموازاة س س َ تجاه العدد على المحور ص ص َ لتحديد الإحداثي الصادي للنقطة د. وعليه يكون إحداثيا النقطة د هما : (٢ ، ٤) .

تدريب (٢)

أ - في المستوى ح × ح شكل (٥) عين كلاً من النقاط التالية :

أ (٢ ، ١) ، ب (-١ ، -٢) ، جـ (٠ ، -٣) ،
د (-٢ ، ٢)

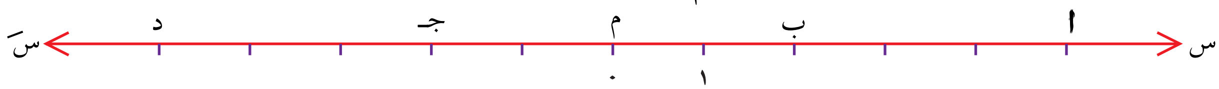
ب - في المستوى ح × ح شكل (٢) ، جد إحداثيي كل من النقاط : هـ ، و ، ز ، م



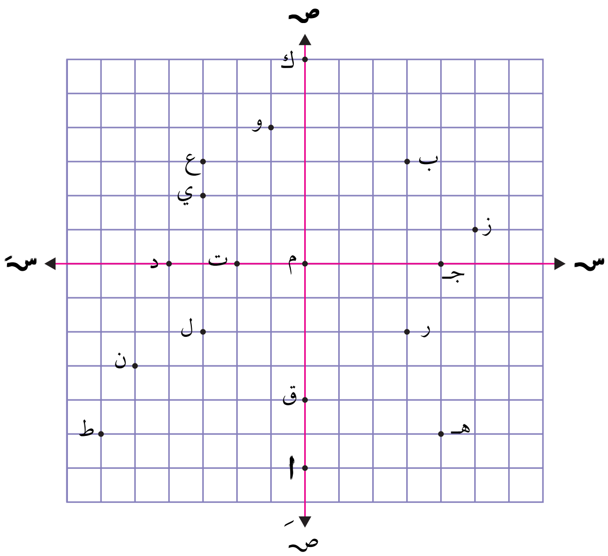
شكل (٥)

① على محور حيث طول الوحدة السنتيمتر ، ضع النقاط التالية المعروفة بإحداثياتها :
أ (−٨) ، ب (+٤) ، جـ (−١) ، د (٥) ، م (٠) .

② حدِّد إحداثيات النقاط الممثلة على الرسم :



③ على شبكة التربيع المجاورة



أ) حدِّد إحداثيات النقاط :
ب ، جـ ، د ، ي ، ك ، م ، ن ، ق ، ر
(ب) سم النقاط التي إحداثيا كل منها :
(−١، ٤) ، (٥، ١) ، (−٢ ، ٠) ، (٤، −٥) ، (−٣ ، ٣) ،
(٠ ، −٦) ، (−٦ ، −٥) ، (−٣ ، −٢)
(جـ) مثل النقاط التي إحداثيا كل منها : (−٢ ، ٣) ،
(+٦ ، −٢) ، (١ ، ٠) (٠ ، ١) ، (−٣ ، −٥)

④ مثِّل كلاً من النقاط التالية في المستوى ح × ح :
أ (٠ ، + ٤) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (−٥ ، ٠) ، د (٢ ، ٢) ، هـ (−٢ ، ٢) ، و (−٣ ، −٣) ، ز (٠ ، −٥)

⑤ مثِّل في المستوى ح × ح النقاط التالية :
أ) أ (٤ ، ٢) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ (−٢ ، −٣) ، د (٢ ، −٣)
ب) أ (−٣ ، −١) ، ب (٢ ، −١) ، جـ (٢ ، ٣) ، د (−٣ ، ٣)
جـ) أ (١ ، −٣) ، ب (٤ ، −٣) ، جـ (٤ ، ١) ، د (١ ، ١)
د) أ (−١ ، −١) ، ب (٤ ، −١) ، جـ (١ ، ٣) ، د (−١ ، ٣)
ثم صل بين النقاط أ ، ب ، جـ ، د على الترتيب . ما نوع الشكل الناتج في كل حالة ؟

(٢-٨) حساب القطع المستقيمة

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة في المستوى ح × ح

نشاط (١)

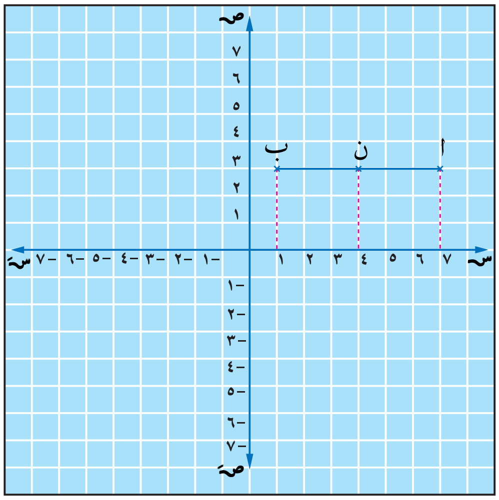
على الشكل (٣) عيّن : إحداثيي كل من النقاط أ ، ب ، ن ،

حيث ن منتصف [أ ب] ،

– أكمل : أ (.... ، ...) ، ب (... ، ...) ، ن (... ، ...) .

– قارن الإحداثي السيني للنقطة ن بمجموع الإحداثيين

السينيين للنقطتين أ ، ب .



شكل (١)

– وكذلك قارن الإحداثي الصادي للنقطة ن بمجموع الإحداثيين الصادين للنقطتين أ ، ب .

– ماذا تلاحظ ؟

لقد لاحظنا من النشاط السابق أن ن (٤ ، ٣) = $\left(\frac{٧ + ١}{٢} ، \frac{٣ + ٣}{٢} \right)$

نشاط (٢)

على الشكل (٤) عين :

إحداثيي كل من النقاط أ ، ب ، ن حيث ن منتصف [أ ب] .

– أكمل أ (...،...)، ب (...،...)، ن (...،...).

– قارن الإحداثي السيني للنقطة ن بمجموع الإحداثيين

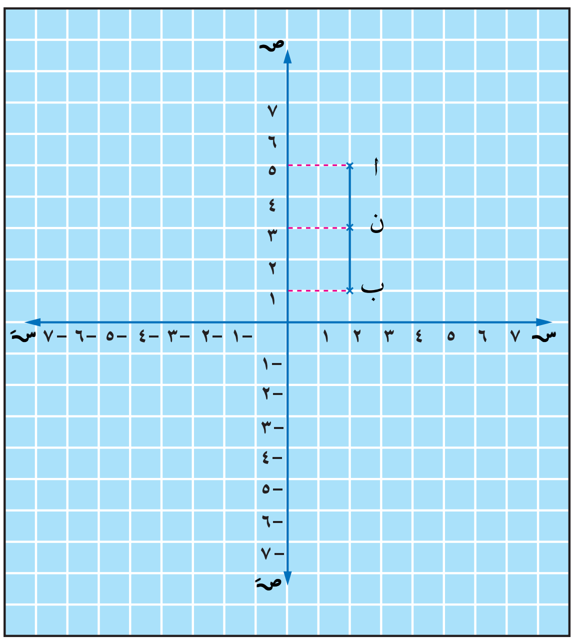
السينيين للنقطتين أ ، ب .

– ماذا تلاحظ ؟

– وكذلك قارن الإحداثي الصادي للنقطة ن بمجموع الإحداثيين

الصادين للنقطتين أ ، ب .

– ماذا تلاحظ ؟



شكل (٢)

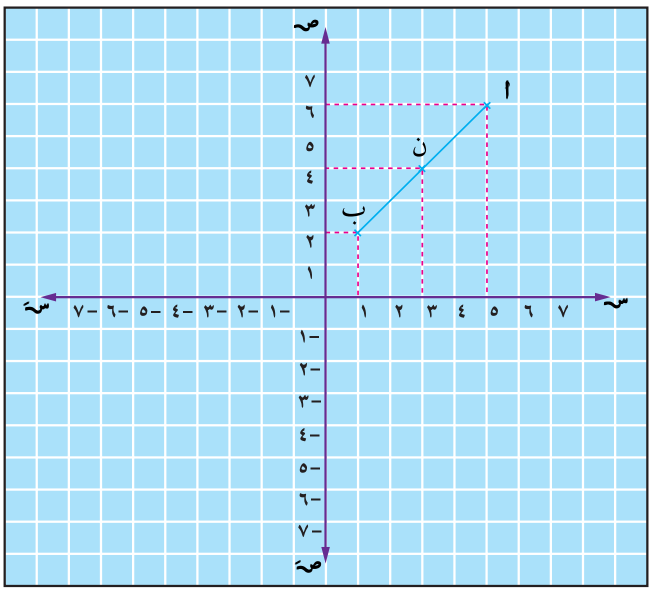
لقد لاحظنا من النشاط السابق أن

$$\text{ن}\,(\text{٢ ، ٣}) = \left(\frac{\text{٢ + ٢}}{\text{٢}} \;\text{،}\; \frac{\text{١ + ٥}}{\text{٢}}\right)$$

نشاط (٣)

على الشكل (٥) عيّن : إحداثيي كل من النقاط أ ، ب ، ن ، حيث ن منتصف [أ ب] ،

- **أكمل : أ (.... ، ...) ، ب (... ، ...) ، ن (... ، ...) .**
- **قارن الإحداثي السيني للنقطة ن بمجموع الإحداثيين السينيين للنقطتين أ ، ب .**
- **وقارن الإحداثي الصادي للنقطة ن بمجموع الإحداثيين الصاديين للنقطتين أ ، ب .**
- **ماذا تلاحظ ؟**



شكل (٣)

لقد لاحظنا من النشاط السابق أن

$$\text{ن}\,(\text{٣ ، ٤}) = \left(\frac{\text{٥ + ١}}{\text{٢}} \;\text{،}\; \frac{\text{٦ + ٢}}{\text{٢}}\right)$$

- من النشاط السابق نستنتج :

إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة طرفاها النقطتان $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

$$= \left(\frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{\text{٢}} \;\text{،}\; \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{\text{٢}}\right)$$

مثال (١)

إذا كانت أ (٧ ، ٦) ، ب (٥ ، −١٢) فأوجد إحداثيي النقطة جـ حيث جـ منتصف [أ ب] .

الحـــل : إحداثيا النقطة جـ = $\left(\frac{٧+٥}{٢} \text{ ، } \frac{٦-١٢}{٢}\right)$ = (٦ ، −٣)

مثال (٢)

إذا كانت أ (٨ ، −٢) ، جـ (١ ، ٦) نقطة منتصف [أ ب] ، فما إحداثيا النقطة ب ؟

الحـــل : نفرض أن إحداثيي النقطة ب هما (س ، ص)

∴ جـ (١ ، ٦) = $\left(\frac{٨ + \text{س}}{٢} \text{ ، } \frac{-٢ + \text{ص}}{٢}\right)$

وبالتالي : ١ = $\frac{٨ + \text{س}}{٢}$ ، وحيث أن حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين ، فإن :

٨ + س = ٢

∴ س = ٢ − ٨

س = −٦

وكذلك : ٦ = $\frac{-٢ + \text{ص}}{٢}$ أي إن : ص = ١٤ ، ب (−٦ ، ١٤)

تدريب (١)

إذا كانت ن منتصف [س ص] ، فعين إحداثيي النقطة ن في الحالات التالية :

أ) س (٧ ، ٣) ، ص (١ ، ٣)

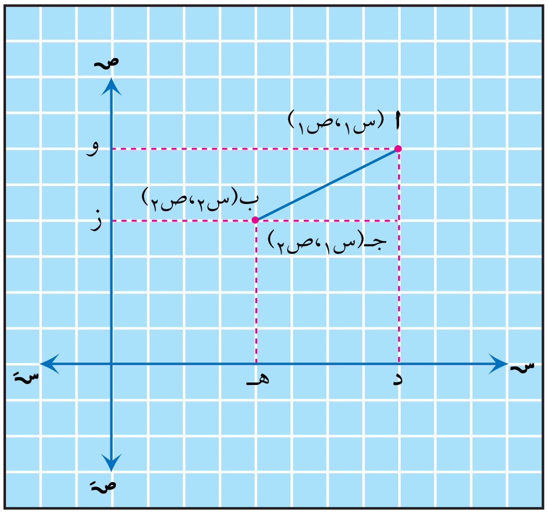
ب) س (−٣ ، ٥) ، ص (−٣ ، −٣)

جـ) س (١ ، −٥) ، ص (٢ ، ٣)

(٢) طول قطعة مستقيمة (المسافة بين نقطتين)

على الشكل (٦) : $أ(س_١ ، ص_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢)$ طرفا $[أب]$.

نرسم من أ ، ب موازيين لمحور الصادات ، فيقطعان محور السينات في د ، هـ . وكذلك نرسم من أ موازياً لمحور السينات ليقطع محور الصادات في و . من ب نرسم موازياً لمحور السينات ليقطع محور الصادات في ز ويقطع أ د في جـ .



شكل (٤)

من هندسة الشكل ، نجد أن : $|جـ ب| = |د هـ| = س_١ - س_٢$.

وبالمثل : $|أ جـ| = |و ز| = ص_١ - ص_٢$.

وحيث إن أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، بتطبيق نظرية فيثاغورس نجد : $|أ ب|^٢ = |ب جـ|^٢ + |أ جـ|^٢$

$|أ ب|^٢ = (س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢$ ، إذاً : $|أ ب| = \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$

ومن ذلك نستنتج :

في المستوى ح × ح ، إذا كانت $أ(س_١ ، ص_١)$ ، $ب(س_٢ ، ص_٢)$ ، فإن

$$|أ ب| = \sqrt{(س_١ - س_٢)^٢ + (ص_١ - ص_٢)^٢}$$

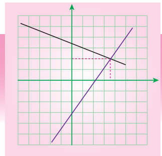
مثال (٣)

إذا كانت جـ(−٢ ، ٧) ، د(١ ، ٣) فاحسب $|جـ د|$.

الحل ، $|جـ د| = \sqrt{(-٢ - ١)^٢ + (٧ - ٣)^٢} = \sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$

تدريب (٢)

إذا كانت أ (٢ ، ٩) ، ب (−٦ ، ٤) ، فاحسب $|أ ب|$.



تمارين (٨-٢)

① اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(أ) طول القطعة المستقيمة التي إحداثيا طرفيها (−٣ ، ٤) ، (−٩ ، ٤) يساوي :

□ −١٢   □ ٦   □ −٤   □ ٣٦

(ب) إحداثيا منتصف القطعة المستقيمة التي إحداثيا طرفيها (٣ ، ٤) ، (−٧ ، ٦) يساوي:

□ (−٤ ، ١٠)   □ (٣ ، −٧)   □ (−٢ ، ٥)   □ (٣ ، ٦)

(جـ) طول القطعة المستقيمة التي إحداثيا طرفيها (−٩ ، ٠) ، (صفر ، صفر) يساوي :

□ ٩   □ −٩   □ −١٨   □ ٨١

② أوجد إحداثيي منتصف القطع المستقيمة التي طرفاها كل من الأزواج التالية :

أ) (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٨)   جـ) (٥ ، −١٠) ، (٣ ، ١٠)

ب) (٠ ، ٤) ، (٠ ، −٦)   د) ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٤}$) ، ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٥}{٨}$)

③ إذا كانت جـ (٣ ، −٢) هي منتصف [أ ب] وكانت أ (٢ ، ٣) ، فأوجد إحداثيي النقطة ب .

④ أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي : −

أ) (٤ ، −١٠) ، (٤ ، ٦)   جـ) (٢ ، ٦) ، (−٣ ، ٤)

ب) (٦ ، −٨) ، نقطة الأصل   د) (−٥ ، ١) ، (٤ ، −٦)

⑤ أثبت أن المثلث الذي رؤوسه أ (−٧ ، ٩) ، ب (−١ ، ٧) ، جـ (−٥ ، ٣) متطابق الضلعين .

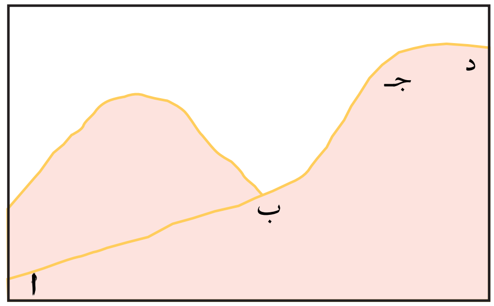
⑥ إذا كانت ن (٥ ، ٣) إحدى نقاط دائرة مركزها م (−٢ ، ٢) ، وكان [ن و] قطراً في هذه الدائرة فأوجد إحداثيي النقطة و .

⑦ أ (٠ ، ٢) ، ب (١ ، ٦) ، جـ (٢ ، −٥) ثلاث نقاط في المستوى ح × ح .

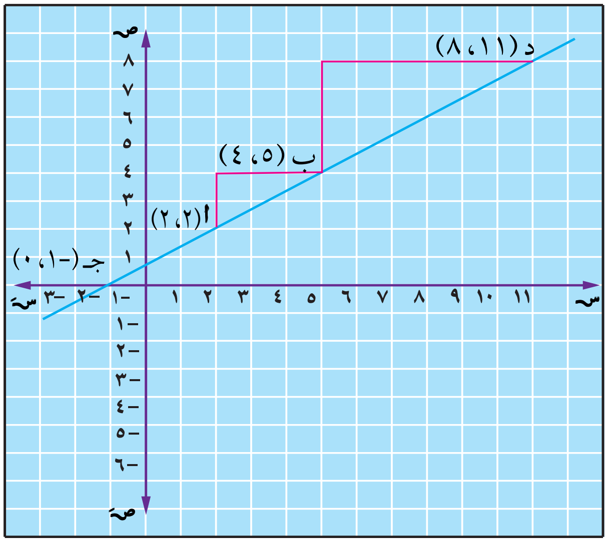
أ) احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة [أ ب] ، [أ جـ] ، [ب جـ] .

ب) احسب أطوال القطع الثلاثة : |أ ب| ، |أ جـ| ، |ب جـ|

(٨ - ٣) ميل المستقيم



شكل (١)



شكل (٢)

على الشكل (١) أعلاه يتغير الانحـــــدار في التل ، فنلاحظ أن الانحدار يزداد كلما صعدنا إلى الأعلى وعند أعلى التل يبدأ الانحدار بالتلاشي .

بينما نلاحظ على الشكل (٢) أن انحدار المستقيم جـ د لا يتغير ، بل يبقي ثابتاً عند التحرك عليه من نقطة إلى أخرى . سنعبر عن مفهوم الانحدار بمصطلح « ميل » ، وعلى هذا فميل المستقيم هو النسبة بين تغير الإحداثيات الصادية إلى تغير الإحداثيات السينية عند التحرك من نقطة إلى أخرى على هذا المستقيم .

فمثلاً عند التحرك من النقطة أ إلى النقطة ب ، فإن :

$$\frac{\text{التغير في ص ص̀}}{\text{التغير في س س̀}} = \frac{٤ - ٢}{٥ - ٢} = \frac{٢}{٣}$$

أي أن ميل المستقيم أ ب = $\frac{٢}{٣}$

نشاط (١)

بالرجوع إلى شكل (٢) أكمل ما يلي :

- عند التحرك من جـ إلى النقطة د : الميل = ...
- عند التحرك من ب إلى النقطة د : الميل = ...
- ماذا تلاحظ على ميل هذا المستقيم ؟ هل يتغير الميل عند التحرك من نقطة إلى أخرى على هذا المستقيم ؟

من النشاط السابق نستنتج :

إذا كانت **أ** $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ ، فإن :

ميل المستقيم أ ب $= \frac{\text{فرق الإحداثيات الصادية}}{\text{فرق الإحداثيات السينية}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث $س_١ \neq س_٢$.

مثال (١)

على الشكل (٣) : أوجد ميل المستقيم **أ** ب .

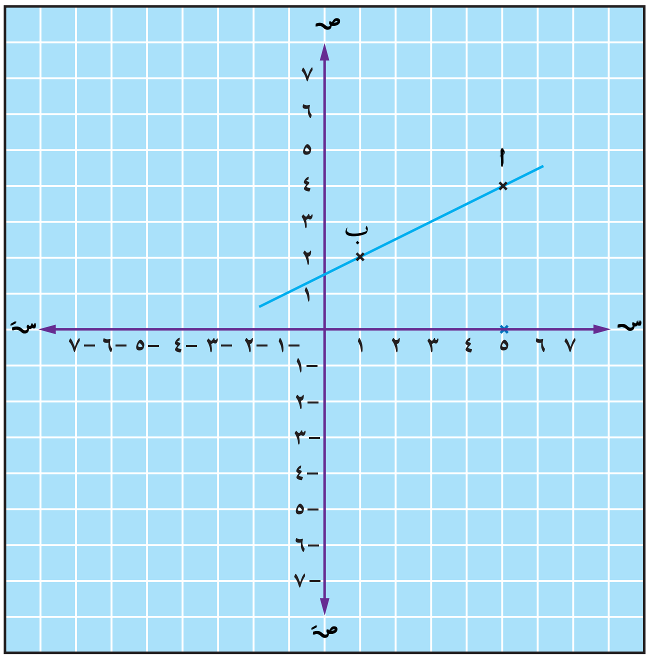
الحل : من الشكل (٣) ، نعين إحداثيي النقطة **أ**

وإحداثيي النقطة ب ، فنجد :

أ (٥ ، ٤) ، ب (١ ، ٢)

$\therefore$ ميل المستقيم **أ** ب $= \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

$= \frac{٢ - ٤}{١ - ٥} = \frac{-٢}{-٤} = \frac{١}{٢}$



شكل (٣)

مثال (٢)

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين **أ** (٣ ، ٥) ، جـ (-٢ ، ٠) .

الحــــل : ميل المستقيم **أ** جـ $= \frac{٥ - ٠}{٣ - (-٢)} = \frac{٥}{٣ + ٢} = \frac{٥}{٥} = ١$

مثال (٣)

إذا كانت أ (٣ ، ٤) ، ب (٥ ، ص) ، وكان ميل المستقيم أ ب يساوي ٦ ، فما قيمة ص ؟

الحــــل : بما أن ميل المستقيم = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

إذاً : ٦ = $\frac{\text{ص} - ٤}{٥ - ٣}$ ، وحيث أن حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين ، فإن :

ص − ٤ = ٦ (٥ − ٣)

ص − ٤ = ٦ × ٢

ص = ١٢ + ٤

ص = ١٦

مثال (٤)

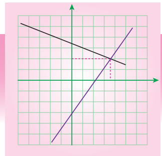
أثبت أن النقاط : أ (٥ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ (١ ، ٤) تقع على استقامة واحدة.

الحــــل : ميل أ ب = $\frac{٣ - ٠}{٢ - ٥} = \frac{٣}{-٣} = -١$

ميل ب جـ = $\frac{٤ - ٣}{١ - ٢} = \frac{١}{-١} = -١$

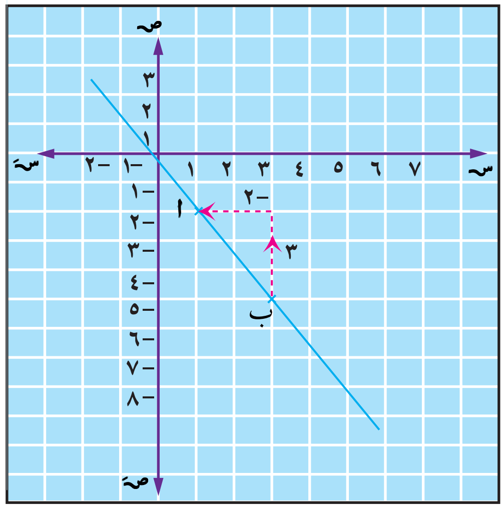
بما أن ميل المستقيمين أ ب ، ب جـ ، ثابت يساوي − ١

إذاً النقاط الثلاث أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة .

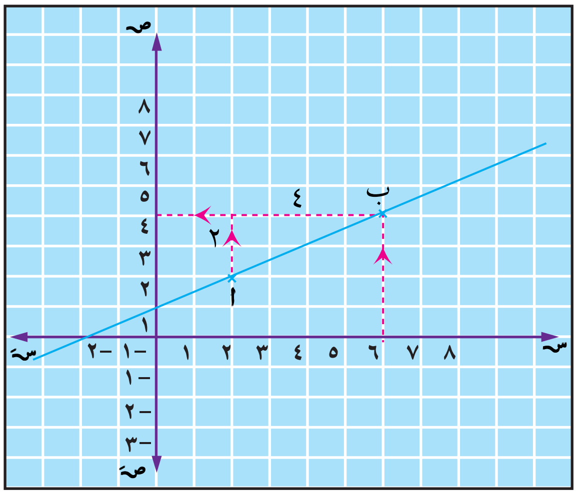


تدريب (١)

① أوجد ميل المستقيم في كل مما يلي :



(أ)



(ب)

② أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين أ (٥ ، ٤) ، ب (٦ ، ٨) .

③ إذاً كانت جـ (س ، ٥) ، د (-١ ، -٣) وكان ميل المستقيم جـ د يساوي - ٨ ، فما قيمة س ؟

تمارين (٨ -٣)

① أوجد المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي :

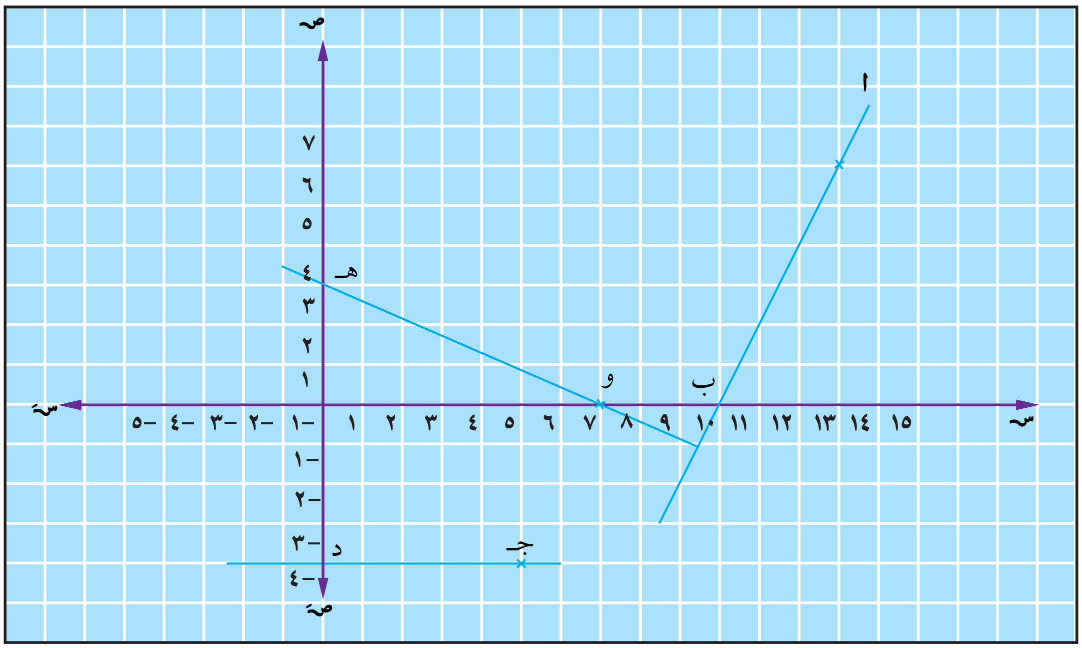
أ) (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٦) .

ب) نقطة الأصل ، (-٣ ، ٤) .

جـ) (-٤ ، ١) ، (٢ ، -٣) .

د) (-١ ، ٠) ، (٠ ، -٢) .

② أوجد على الشكل التالي ميل كل من المستقيمات أ ب ، جـ د ، و هـ .



③ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، أ) ، (٤ ، -١) يساوي ١ ، فأوجد قيمة أ .

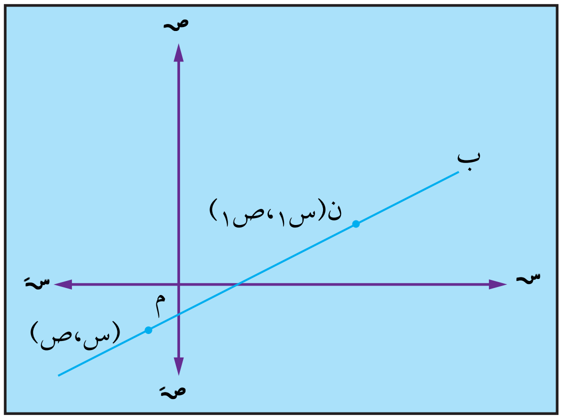
④ إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٥) ، (٣ ، س) يساوي $\frac{-٥}{٤}$ ، فأوجد قيمة س .

⑤ أثبت أن النقاط أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ٧) ، جـ (-١ ، -٩) تقع على استقامة واحدة .

⑥ احسب ميل محور السينات .

٨ - ٤ معادلة المستقيم

(١) إيجاد معادلة مستقيم بمعرفة ميله ونقطة عليه



شكل (١)

ليكن ب جـ مستقيماً ميله **أ**، ويمر بنقطة معلومة ($س_1$ ، $ص_1$) ، كما في الشكل (١) .

ولإيجاد معادلة المستقيم ب جـ ، نفرض نقطة أخرى عليه (س ، ص) فيكون ميل ب جـ .

$$أ = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$$

وحيث إن حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين ، فإن :

$$ص - ص_1 = أ\,(س - س_1)$$

أي أن : $ص = أ\,س + (ص_1 - أ\,س_1)$

تُسمى هذه العلاقة معادلة المستقيم الذي ميله **أ**، ويمر بالنقطة ($س_1$ ، $ص_1$)

وبفرض أن المقدار $ص_1 - أ\,س_1 = ب$

إذاً : ص = **أ** س + ب

وعلى العموم، فإن :

> **ص = أ س + ب معادلة مستقيم ميله أ ، ويقطع محور الصادات في العدد ب**

تُسمى المعادلة ص = **أ** س + ب بمعادلة المستقيم على الصورة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات .

مثال (١)

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (-١ ، ٥)

الحل : معادلة المستقيم هي على الصورة : ص = **أ** س + ب ،

وبما أن ميله = ٢ ، ويمر بالنقطة (-١ ، ٥)

∴ ٥ = ٢ × -١ + ب

وعليه فإن : ب = ٥ + ٢ = ٧

إذاً المعادلة المطلوبة هي ص = ٢ س + ٧

مثال (٢)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، ٢) ، ب (−١ ، −٤)

الحـــل : المستقيم أ ب يمر بنقطتين معلومتين ، لذا يمكن حساب ميله .

ميل المستقيم أ ب = $\frac{-٤ - ٢}{-١ - ٢} = \frac{-٦}{-٣} = ٢$

معادلة المستقيم هي : ص = أ س + ب ، وبالتعويض عن أ بـ ٢ ، ينتج :

ص = ٢ س + ب ، وبالتعويض عن س ، ص بقيمتيهما إما من

النقطة أ (٢ ، ٢) أو ب (−١ ، −٤) ، ينتج :

٢ = ٢ × ٢ + ب

∴ ب = −٢

وعليه فمعادلة المستقيم هي : ص = ٢ س − ٢

تدريب (١)

(أ) ما هي درجة معادلة الخط المستقيم ؟ وكم مجهولاً فيها ؟

(ب) هات أربعة حلول لمعادلة المستقيم ص = س −٣

(جـ) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ، ويمر بالنقطة (٢ ، ٤) .

(٢) تمثيل المستقيم ص = أ س + ب في المستوى ح × ح

لتمثيل مستقيم معلومة معادلته في المستوى ح × ح نجد حلين على الأقل لهذه المعادلة ، وهما عبارة عن زوجين مرتبين نمثلهما بنقطتين في المستوى ح × ح. المستقيم الواصل بينهما يمثل المستقيم المعلومة معادلته .

مثال (٣)

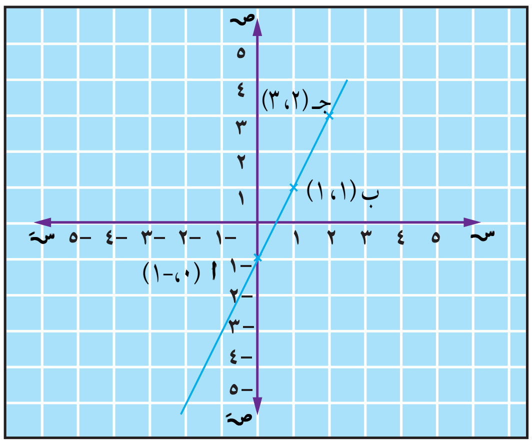
مثِّل في المستوى ح × ح المستقيم الذي معادلته : ص = ٢ س −١

الحـــل :

الجدول التالي يبين ثلاثة حلول (أزواج مرتبة)

لمعادلة المستقيم ص = ٢ س −١

س	٢ س − ١	ص	(س ، ص)
٠	٢ × ٠ − ١	−١	(٠ ، − ١)
١	٢ × ١ − ١	١	(١ ، ١)
٢	٢ × ٢ − ١	٣	(٢ ، ٣)



شكل (٢)

نعين النقاط أ (٠ ،ـ١) ، ب (١ ، ١) ، جـ (٢ ، ٣) في المستوى ح × ح .

المستقيم الواصل بين هذه النقاط هو تمثيل لجميع حلول معادلة المستقيم ص = ٢ س ـ ١

تدريب (٢)

(أ) أكمل الجدول المجاور ، ثم مثِّل المستقيم : ص = ٣ س

(ب) مثِّل في المستوى ح × ح المستقيم الذي معادلته :

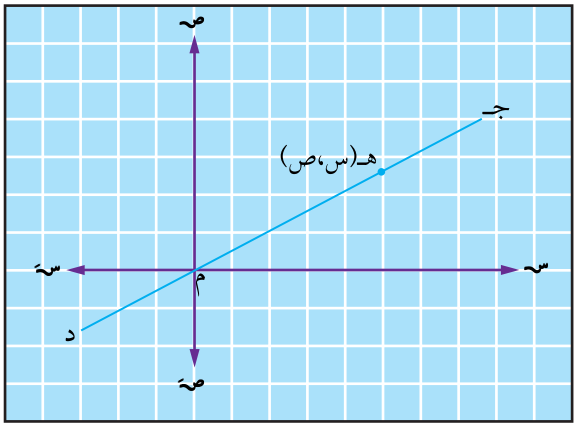
ص = − س + ٣

ص = ٣ س

س	٣ س	ص	(س ، ص)
١			
٠			
−١			

(٣) حالات خاصة لمعادلة مستقيم

(أ) معادلة مستقيم يمر في نقطة الأصل



شكل (٣)

على الشكل (٣) : جـ د مستقيم ميله أ

ويمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

لإيجاد معادلته نفرض نقطة أخرى عليه هـ (س، ص)

فيكون ميله : أ = $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٠}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

وعليه : ص = أ س .... (١)

تُسمى المعادلة (١) معادلة المستقيم الذي ميله أ ويمر بنقطة الأصل

إذاً :

ص = أ س هي معادلة المستقيم الذي ميله أ ويمر بنقطة الأصل

مثال (٤)

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل بالنقطة (٢ ، −٤).

الحـــل :

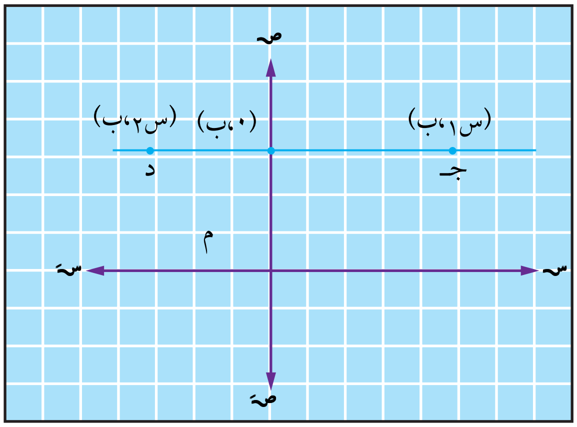
ص = أ س معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل ، وبالتعويض عن س ، ص من الزوج (٢ ، −٤) في المعادلة ينتج : −٤ = ٢ أ

∴ أ = $\frac{-٤}{٢}$

أ = −٢

وعليه تكون المعادلة المطلوبة : ص = −٢ س .

ب) معادلة مستقيم يوازي محور السينات



شكل (٤)

نشاط (١)

على الشكل (٤) : جـ د مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ب)

- ما هو الإحداثي الصادي لجميع نقاط المستقيم جـ د ؟
- ما هو ميل المستقيم جـ د ؟
- أكمل ص = ... + ...

من النشاط السابق لاحظنا أن الإحداثي الصادي لجميع نقاط المستقيم جـ د يساوي العدد ب . كما لاحظنا أن ميل هذا المستقيم = صفراً ، لذا فإن معادلة المستقيم جـ د هي : ص = ب

من النشاط السابق نستنتج :

ص = ب ، هي معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور الصادات في العدد ب .

مثال (٥)

ما هي معادلة المستقيم المار في النقطة (٣ ، ٥) ويوازي محور السينات ؟

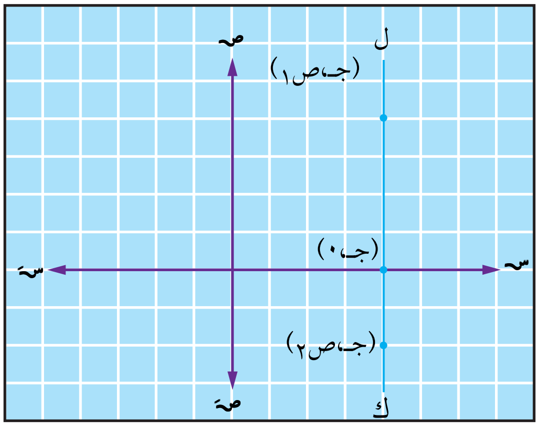
الحـــل :

بما أن المستقيم موازٍ لمحور السينات ، إذاً معادلته على الصورة : ص = ب

وبالتعويض بالنقطة (٣ ، ٥) في هذه المعادلة ينتج : ب = ٥

وبالتالي فإن المعادلة المطلوبة هي : ص = ٥ .

جـ) معادلة مستقيم يوازي محور الصادات



شكل (٥)

على الشكل (٥) : ليكن ل ك مستقيماً موازياً لمحور الصادات ويمر بالنقطة (جـ ، ٠)

فمن الملاحظ أن الإحداثي السيني لجميع نقاط المستقيم ل ك تساوي العدد (جـ) ، وعلى هذا تكون معادلة المستقيم ل ك هي : س = جـ .

كما يُلاحظ أن العدد (جـ) هو الجزء المقطوع من محور السينات .

من ذلك نستنتج :

س = جـ ، هي معادلة مستقيم يوازي محور الصادات ، ويقطع محور السينات في العدد جـ .

مثال (٦)

ما هي معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٥ ، –١) والموازي لمحور الصادات ؟

الحــل :

بما أن المستقيم مواز لمحور الصادات ، ∴ هو على الصورة : س = جـ

وبما أنه يمر بالنقطة (–٥ ، –١) ، ∴ جـ = –٥

وبالتالي ، المعادلة المطلوبة هي : س = –٥

تدريب (٣)

أوجد ما يلي:

أ – معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٠) وبالنقطة (–٤ ، ٦).

ب – معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، –٩) ومواز لمحور السينات .

جـ – معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، –٣) ومواز لمحور الصادات .

مثال (٧)

مثِّل في المستوى ح × ح المستقيمات التي معادلاتها :

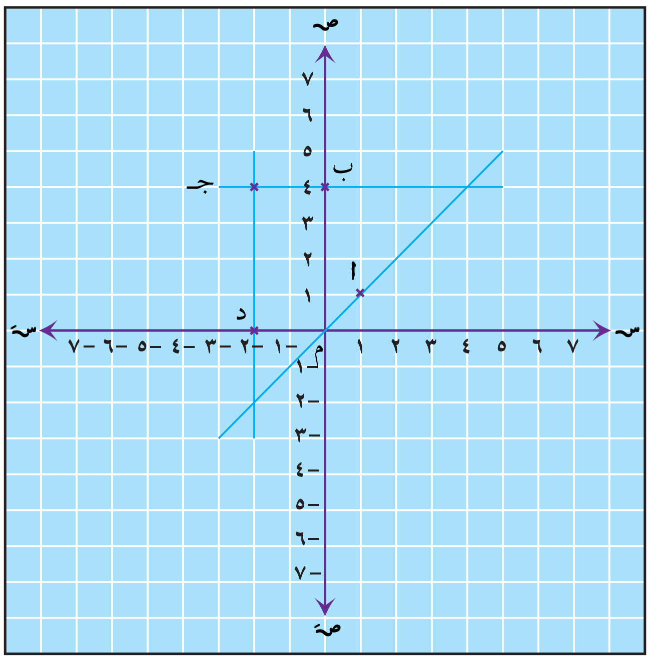
أ) ص = س　　　ب) ص = ٤　　　جـ) س = −٢

الحـــل :

أ) المعادلة ص = س هي معادلة مستقيم يمر بنقطة الأصل وبالنقطة أ (١ ، ١) ويمثله المستقيم م أ في المستوى ح × ح (شكل ٦) .

ب) المعادلة ص = ٤ هي معادلة مستقيم موازٍ لمحور السينات ويمر بالنقطة ب (٠ ، ٤) ويمثله المستقيم ب جـ في المستوى ح (شكل ٦) .

جـ) المعادلة س = −٢ هي معادلة مستقيم موازٍ لمحور الصادات ويمر بالنقطة د (−٢ ، ٠) ويمثله المستقيم د جـ في المستوى ح × ح (شكل ٦) .



شكل (٦)

تدريب (٤)

مثِّل في المستوى ح × ح المستقيمات التي معادلاتها :

(أ) ص = ٣ س　　(ب) ص = −١　　(جـ) س = ٣

(د) ص = ٠　　(هـ) س = ٠

(٤) حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى ذات مجهولين بيانياً

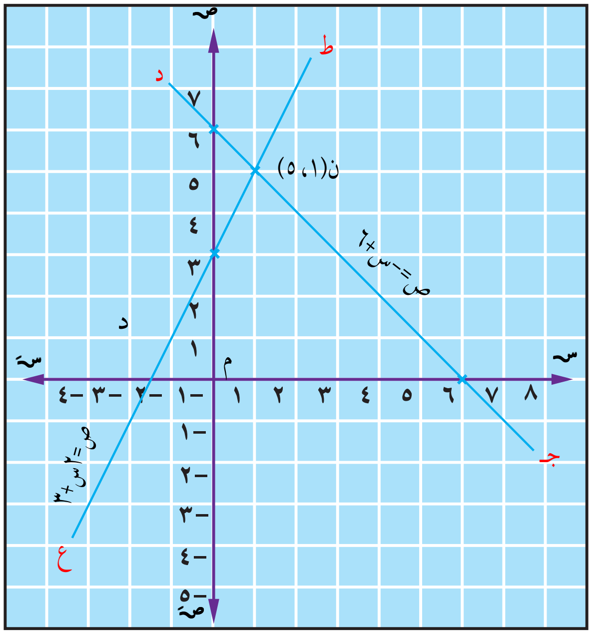
مثال (٨)

لدينا نظام معادلتين من الدرجة الأولى ذات مجهولين :

(١) $\left\{ \begin{array}{l} ٢ \text{ ص} - ٣ = \text{ص} + ٢ \text{ س} \\ \text{س} + \text{ص} = ٦ \end{array} \right.$

وهو مكافىء للنظام التالي :

(٢) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = ٢ \text{ س} + ٣ \\ \text{ص} = -\text{س} + ٦ \end{array} \right.$



شكل (٧)

على الشكل (٧) ، المستقيمان ع ط و جـ د ، يمثلان توالياً معادلتي النظام المفروض .

إحداثياً أي نقطة منتمية إلى ع ط يحققان المعادلة : ص = ٢ س + ٣

كذلك إحداثيا أي نقطة منتمية إلى جـ د يحققان المعادلة : ص = -س + ٦ .

نلاحظ على الشكل نفسه أن النقطة ن (١ ، ٥) ، تنتمي إلى ع ط و جـ د في آن معاً . لذلك يحقق إحداثياها معادلتي النظام في آن معاً .

إذاً : (س = ١ ، ص= ٥) هو حل للنظام المفروض

بما أننا وجدنا حل النظام باستخدام التمثيل البياني، لذلك نصف هذه الطريقة بالحل البياني للنظام .

نستنتج :

من أجل الحل البياني لنظام من معادلتين من الدرجة الأولى ذات مجهولين نقوم بتمثيل مجموعتي حلول المعادلتين بمستقيمين، ثم نحدد نقطة تقاطع المستقيمين على الرسم . يشكل إحداثيا نقطة التقاطع هذه حلاً للنظام المفروض .

مثال (٩)

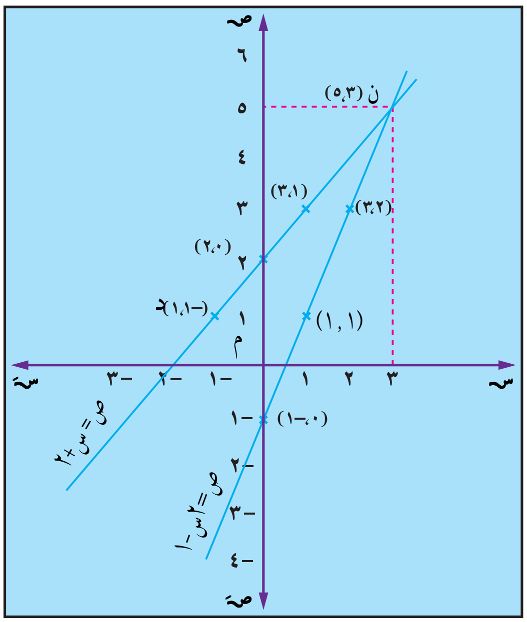
أوجد حل النظام التالي بيانياً :
$$\begin{cases} ص = ٢س - ١ \\ ص = س + ٢ \end{cases}$$

الحـــل : الجدول التالي يبين بعض حلول المعادلة ص = ٢س − ١

س	٢ س − ١	ص	(س ، ص)
١	٢ × ١ − ١	١	(١ ، ١)
٠	٢ × ٠ − ١	−١	(٠ ، −١)
٢	٢ × ٢ − ١	٣	(٢ ، ٣)

الجدول التالي يبين بعض حلول المعادلة ص = س + ٢

س	س + ٢	ص	(س ، ص)
١	١ + ٢	٣	(١ ، ٣)
٠	٠ + ٢	٢	(٠ ، ٢)
−١	−١ + ٢	١	(−١ ، ١)



شكل (٨)

إذاً من التمثيل البياني شكل (٨) نجد أن (٣ ، ٥) (نقطة تقاطع المستقيمين) هي حل للنظام المعطى .

تدريب (٥)

أوجد حل النظام التالي بيانا ً :
$$\begin{cases} ص = ٢ س \\ ص = س + ١ \end{cases}$$

تمارين (٨ - ٤)

① أوجد معادلة المستقيم الذي :

أ) ميله $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (-٣ ، ٢) .

ب) ميله -٢ ويمر بالنقطة (-١ ، ٥) .

جـ) ميله $\frac{-٢}{٥}$ ويمر بنقطة الأصل .

د) يمر بالنقطتين (٣ ، -٢) ، (-١ ، ٤) .

هـ) يمر بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ٥) .

② ضع علامة (✓) أمام الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

أ) ميل المستقيم الذي معادلته ص = $\frac{٣}{٤}$ س - ٥ يساوي :

☐ -٥ ☐ $\frac{-٣}{٤}$ ☐ $\frac{٣}{٤}$ ☐ $\frac{٤}{٣}$

ب) ميل المستقيم الذي معادلته ٣ س + ٢ ص + ٥ = صفراً يساوي :

☐ $\frac{-٣}{٢}$ ☐ $\frac{٣}{٢}$ ☐ ٢ ☐ ٣

جـ) المستقيم الذي معادلته ٥ س = ٤ ص - ٣ يمر بالنقطة :

☐ (٥ ، ٤) ☐ (١ ، -٣) ☐ (٠ ، $\frac{٣}{٤}$) ☐ (-٣ ، ٥)

د) ميل المستقيم الذي معادلته $\frac{ص}{٥}$ + $\frac{س}{٣}$ = ١ يساوي :

☐ $\frac{-٥}{٣}$ ☐ $\frac{١}{٥}$ ☐ $\frac{٣}{٥}$ ☐ ١

هـ) المستقيم الذي معادلته -٢ ص = -س يمر بالنقطة :

☐ (-١ ، -٢) ☐ (١ ، $\frac{١}{٢}$) ☐ (٠ ، -٢) ☐ (١ ، -٢)

③ ص = -٢س + ١ ، ص = -$\frac{١}{٢}$ س + ١ ، ص = س + ٢ ، معادلات ثلاثة مستقيمات في المستوى : ح × ح .
اكتب معادلات ثلاثة مستقيمات تمر في نقطة الأصل ، ولها ميول المستقيمات السابقة.

④ أكمل ما يأتي :

أ) معادلة محور السينات هي .... ومعادلة محور الصادات هي ....

ب) معادلة المستقيم الذي ميله −٢ ويقطع محور الصادات في العدد −٢ هي ....

جـ) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (−٢ ، ٣) ويوازي محور الصادات هي ....

د) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (−٥ ، −٧) ويوازي محور السينات هي ....

⑤ جد خمسة حلول للمعادلة : ٣ س + $\frac{١}{٢}$ ص = ٣ ، ومثِّل في المستوى ح × ح مجموعة حلولها.

⑥ استخـدم التمثيل البياني كي تجد حلول الأنظمة التالية ، (إحداثيي نقطة التقاطع) عندما يكون ذلـك ممكنـاً :

أ) $\begin{cases} \text{٢ س + ص = ٨} \\ \text{س − ص + ٥ = ٠} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \text{س + ص = −٣} \\ \text{٥ س − ٢ ص = −٦} \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} \text{ص + ٥ س + ٥ = ٠} \\ \text{٢ ص + ١٠ س = ٣} \end{cases}$

د) $\begin{cases} \text{ص = } \frac{1}{2} \text{ س + ٣} \\ \text{ص = −٢س + ٣} \end{cases}$

⑦ جـ(١ ، ١) ، د (٢ ، ٠) ، هـ (−٢ ، ٤) ، ثلاث نقاط في المستوى : ح × ح

أ) أثبت أن النقاط : جـ ، د ، هـ ، تنتمي إلى مستقيم واحد ، وحدده بمعادلته .

ب) ما ميل المستقيم جـ د ؟

⑧ جـ (١ ، ٢) نقطة في المستوى : ح × ح .

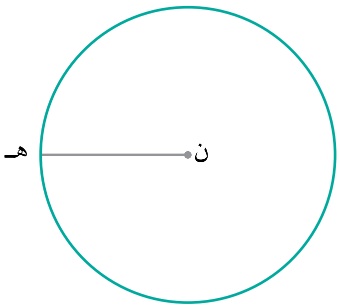
أ) ارسم المستقيم المار في جـ ، والذي ميله يساوي (−٣) .

ب) ارسم المستقيم الذي ميله $\frac{١}{٣}$ ، والذي يمر في جـ .

(٨ - ٥) معادلة الدائرة

(١) الدائــرة

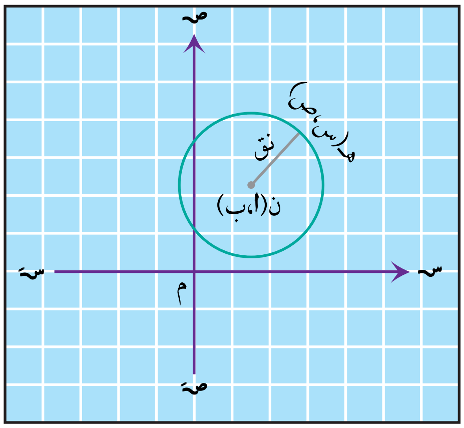
هي مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد البعد نفسه عن نقطة معينة .
هذا البعد هو طول نصف قطرها ، والنقطة المعينة هي مركزها .
شكل (١) يمثل دائرة مركزها ن ، والقطعة المستقيمة [ن هـ] نصف قطرها .



شكل (١)

(٢) معادلة دائرة بمعلومية مركزها ، وطول نصف قطرها

على الشكل (٢) : دائرة مركزها ن (أ ، ب)،
هـ (س ، ص) نقطة على الدائرة في المستوى ح × ح .
ولإيجاد معادلة الدائرة (ن ، |ن هـ|)
نلاحظ أن : |ن هـ| = نق ، ∴ |ن هـ|^{٢} = نق^{٢}
بتطبيق قانون طول قطعة مستقيمة ، نحصل على :
(س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}
وهذه معادلة الدائرة أي أن :



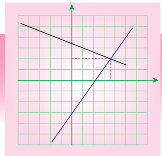
شكل (٢)

في المستوى ح × ح معادلة الدائرة (ن ، نق) ، حيث : ن (أ ، ب) هي :
(س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

مثال (١)

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٣ ، −٢) وطول نصف قطرها ٥ .

الحــــل : بما أن صورة معادلة دائرة بمعلومية مركزها وطول نصف قطرها هي :
(س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢} ، وحيث أن : أ = ٣ ، ب = −٢ ، نق = ٥
إذاً : المعادلة المطلوبة هي : (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥



مثال (٢)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−١ ، +٤) ، طول نصف قطرها $\sqrt{٢}$

الحل : بما أن (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = نق^{٢}

إذاً : المعادلة المطلوبة هي : (س + ١)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٢

مثال (٣)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (−٢ ، ٥) ، وتمر بالنقطة (٣ ، ٥) .

الحل : أولاً نوجد طول نصف قطر الدائرة ، حيث

نق = $\sqrt{(−٢ −٣)^{٢} + (٥ − ٥)^{٢}}$ = $\sqrt{(−٥)^{٢} + ٠}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

إذاً : معادلة الدائرة المطلوبة هي : (س + ٢)^{٢} + (ص −٥)^{٢} = ٢٥

مثال (٤)

عين مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها : (س − ٤)^{٢} + (ص +١)^{٢} = ١٦

الحل: مركز الدائرة : (٤ ، −١) ، وطول نصف قطرها = ٤

تدريب (١)

أ) أوجد معادلة الدائرة التي :

١) مركزها (−١ ، −٣) ، وطول نصف قطرها ٥ .

٢) مركزها (٤ ، صفر) ، وطول نصف قطرها $\sqrt{٧}$.

ب) عين مركز وطول نصف قطر الدائرة من المعادلات التالية :

١) (س +٢)^{٢} + (ص −٣)^{٢} = ٩   ٢) (ص − ٦)^{٢} + (س + ٢)^{٢} = $\frac{١}{٤}$

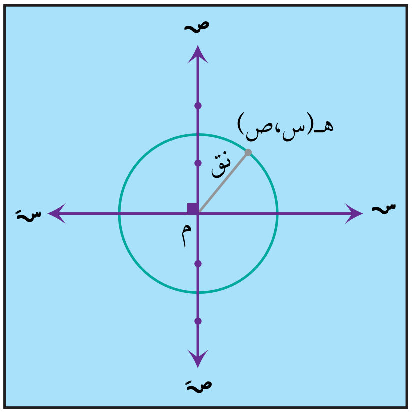
٣) (س − ل)^{٢} + (ص − ك)^{٢} = ١٣

(٣) حالة خاصة لمعادلة الدائرة

نشاط (١)

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة هـ (س ، ص) . شكل (٣)

لا بد أنه تم استنتاج ما يلي :



شكل (٣)

في المستوى ح × ح معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها نق
هي : س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

مثال (٥)

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ، طول نصف قطرها ٤ .

الحل : بما أن مركز الدائرة هو نقطة الأصل :

∴ س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} ، وحيث أن : نق = ٤ .

إذاً : المعادلة المطلوبة هي : س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ .

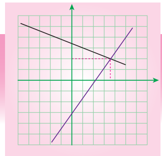
تدريب (٢)

أ) جد معادلة الدائرة التي :

١) مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٩ . ٢) طول نصف قطرها واحد ، مركزها (٠، ٠) .

ب) عين مركز وطول نصف قطر الدائرة من المعادلتين التاليتين :

١) س^{٢} + ص^{٢} = $\frac{٤}{٩}$ ٢) ص^{٢} + س^{٢} = ٦٤



تمارين (٨ - ٥)

① ضع علامة (✓)أمام الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

أ) $(س + ٩)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٧^٢$ معادلة دائرة مركزها :

☐ (٩ ، ٣)   ☐ (٧ ، ٣)   ☐ (-٩ ، ٣)   ☐ (-٣ ، +٩)

ب) $ص^٢ + س^٢ = ٤٩$ معادلة دائرة طول نصف قطرها :

☐ ٤   ☐ ٧   ☐ ٩   ☐ ٤٩

جـ) $(ص + ١)^٢ + (س - ٥)^٢ = \frac{١}{٤}$ معادلة دائرة طول نصف قطرها

☐ $\frac{١}{٤}$ ☐ $\frac{١}{٢}$ ☐ ١   ☐ ٥

د) معادلة الدائرة التي مركزها (صفر ، -٧) وطول نصف قطرها $\sqrt{١١}$ هي :

☐ $(س - ٧)^٢ + (ص - ٧)^٢ = \sqrt{١١}$ ☐ $س^٢ + (ص + ٧)^٢ = ١١$

☐ $(س - ١١)^٢ + (ص - ٧)^٢ = (١١)^٢$ ☐ $س^٢ + ص^٢ = \sqrt{١١}$

② أكمل الفراغ فيما يأتي :

أ) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها نق هي : ....

ب) $(س - ٦)^٢ + (ص - ١١)^٢ = ٦٤$ معادلة دائرة مركزها .... وطول نصف قطرها ....

جـ) $ص^٢ + س^٢ = \frac{٤}{٨١}$ معادلة دائرة مركزها .... وطول نصف قطرها ....

د) معادلة الدائرة التي مركزها (-٨ ، صفر) وطول نصف قطرها $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ هي ....

③ جد معادلات الدوائر التالية :

(أ) (م ، ٢) (ب) (م ، ٣) (جـ) (م ، $\frac{٣}{٤}$) (د) (م ، $\frac{١}{٢}$)

حيث م نقط الأصل .

④ ارسم الدوائر التالية التي معادلاتها :

أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٤

ب) ص^{٢} + س^{٢} = ١

جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٩

د) (س + ٢)^{٢} + (ص –٣)^{٢} = ٩

هـ) (س – ١)^{٢} + (ص –١)^{٢} = ٤

و) (س – ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٩

⑤ أوجد معادلة الدوائر التالية التي :

أ) مركزها (–١ ، ٥) ، وتمر بالنقطة (٢ ، ١) .

ب) مركزها (–٤ ، ٢) ، وتمس محور السينات .

جـ) مركزها (٣ ، –٥) ، وتمس محور الصادات .

د) تمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، ومركزها النقطة (٠ ، ٣).

هـ) مركزها نقطة الأصل ، ونصف قطرها $\sqrt{٥}$.

و) طرفا أحد أقطارها النقطتان (–١ ، ٣) ، (٧ ، –١) .

⑥ جد في كل حالة من الحالات التالية ، معادلة الدائرة التي مركزها ن ، وطول نصف قطرها يساوي نق :

أ) ن (١، ٢) ، نق = $\sqrt{٥}$

ب) ن (–٣ ، +٢) ، نق = ٣ .

جـ) ن (–٢ ، –٥) ، نق = ٤ .

د) ن (٤ ، –١) ، نق = $\sqrt{٢}$.

⑦ جد نقطتي تقاطع الدائرة (م ، $\sqrt{٥}$) (حيث م نقطة الأصل) مع المستقيم عَ ع الذي معادلته : ص= ٢ س .

(٨ - ٦) تمارين عامة

① ضع علامة (✓) أمام الإجابة الصحيحة :

أ) معادلة مستقيم ميله ٢ ، ويمر في النقطة (−١ ، −٣) هي :

□ ص = ٢ س + ٥   □ ص = ٢ س −١

□ −٣ ص = ٢ س −١   □ ص = ٥ س + ٢

ب) معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٢ ، −١) ، وطول نصف قطرها ٣ هي :

□ (س − ٢)^{٢} − (ص + ١)^{٢} = ٣   □ (س −٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٩

□ (س + ٢)^{٢} + (ص +١)^{٢} = ٩   □ (س − ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٩

جـ) معادلة الدائرة (م ، $\sqrt{٥}$) ، حيث م نقطة الأصل ، هي :

□ س^{٢} − ص^{٢} = ٢٥   □ س^{٢} + ص^{٢} = $\sqrt{٥}$

□ ص^{٢} + س^{٢} = ٥   □ س^{٢} − ص^{٢} = ٥

د) ميل المستقيم ٥س = ٤ ص − ٤ يساوي :

□ −٥   □ −$\frac{٥}{٤}$ □ $\frac{٥}{٤}$ □ ٥

هـ) إذا كان : أ (− ٤ ، ٠) ، ب (٢ ، −٨) إحداثي طرفي [أ ب] ، فيكون إحداثيا منتصفها هو :

□ (−٤ ، ٦)   □ (−٢ ، −٨)   □ (−١ ، −٤)   □ (−٤ ، −١)

و) إذا كان جـ (١ ، ٣) ، د(−٢ ، ٧) ، فإن | جـ د | =

□ ٥   □٥   □٧   □٩

ز) مركز الدائرة التي معادلتها (س + ٣)^{٢} + (ص − ١١)^{٢} = ٩ هو :

□ (+٣ ، −١١)   □ (٣ ، ٩)   □ (−٣ ، ١١)   □ (١٤ ، ٩)

٢) أوجد معادلات الدوائر التالية والتي :

أ) مركزها (٣ ، −٢) وطول نصف قطرها ٥ .

ب) مركزها (−١ ، −٣) وطول نصف قطرها $\frac{٣}{٨}$

جـ) مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها $\frac{٢}{٥}$.

د) مركزها (٤ ، −٣) وتمس محور السينات .

هـ) مركزها (٧ ، −٥) وتمس محور الصادات .

و) مركزها (−٢ ، ٢) وتمر بالنقطة (٢ ، −٢) .

ز) مركزها (−١ ، −٣) وطول نصف قطرها ٢ $\sqrt{٣}$.

٣) في المستوى ح × ح ، عينا النقاط : أ (٣ ، ٥) ، ن (−١ ، −١) ، د (−٣ ، −٥) جد إحداثي :

أ) النقطة ب ، بحيث تكون ن منتصف [أ ب] .

ب) النقطة جـ ، بحيث تكون ن منتصف [جـ د] .

٤) أ (١ ، ٢) ، ب(−٢ ، ٢) ، جـ (١ ، −٢) ، ثلاث نقاط في المستوى : ح × ح

أ) احسب أطوال القطع التالية : [أ ب] ، [أ جـ] ، [ب جـ]

ب) استنتج أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية .

٥) في المستوى ح × ح : النقاط أ (٣ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) ، جـ (−٢ ، −١) . أثبت أن أ ، ب ، جـ تنتمي إلى مستقيم واحد ، ثم أوجد معادلة هذا المستقيم .

٦) في المستوى ح × ح المحوران سـ سَ وصـ صَ حيث م نقطة الأصل

أ) ارسم المستقيم عَ ع الممثل للدالة : ص = س .

ب) ارسم المستقيم طَ ط الممثل للدالة : ص = − س .

جـ) ما دور عَ ع و طَ ط بالنسبة للزوايا التي رأسها م على الرسم .

⑦ في المستوى ح × ح ، المستقيم ع ط يمثل المعادلة ص = − ٢ س + ب . جد :

أ) معادلة ع ط ، إذا كان يمر في النقطة ل (−٢ ، ٥) .

ب) معادلة ع ط ، إذا كان يمر في النقطة جـ (١ ، ٦) .

جـ) معادلة ع ط ، إذا كان يمر في النقطة م (٠ ، ٠) .

⑧ ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٢ وَص = −٣ س + ١ هما توالياً معادلتا مستقيمين عَ ع وَ طَ ط في المستوى ح × ح،

أ) تحقق أن عَ ع وَ طَ ط يتقاطعان في النقطة ن (− $\frac{٣}{١٠}$ ، $\frac{١٩}{١٠}$) .

ب) جـ ∈ عَ ع وإحداثيها السيني ٣ ، د ∈ طَ ط ، وإحداثيها السيني − ١ .

احسب الإحداثي الصادي لكل من جـ وَ د

جـ) أثبت أن المثلث ن جـ د قائمُ الزاوية .

⑨ حوِّل المعادلة : ٢ س + ٣ ص = ٥ إلى الشكل : ص = أ س + ب .

(أ) ما ميل المستقيم الذي يمثل هذه المعادلة ؟ (ب) مثل هذه المعادلة بيانياً .

⑩ عَ ع ، طَ ط مستقيمان في المستوى ح × ح ، جد بيانياً إحداثيي نقطة تقاطعهما ، إن كانا متقاطعين :

أ) معادلة عَ ع : ص = ٢ س + ١ ، معادلة طَ ط : ص = س + ٢ .

ب) معادلة عَ ع : ص = −٣ س + ١ ، معادلة طَ ط : ص = −٣ س + ٤ .

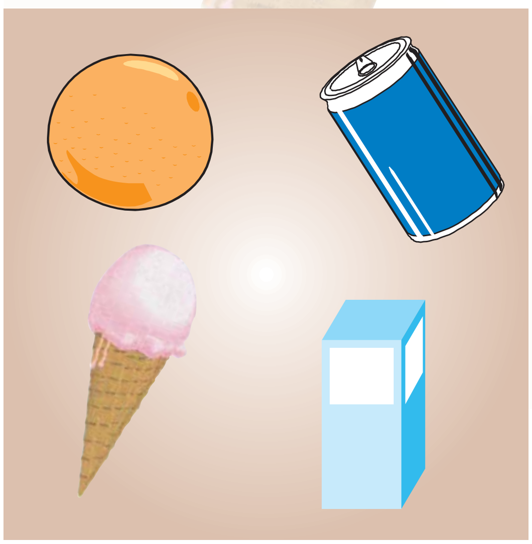
⑪ إذا كانت : أ (−٢ ، ٤) ، ب (١ ، ١) ، جـ (−١ ، −١) ، د (−٤ ، ٢)

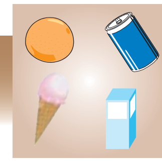
فأثبت أن أ ب جـ د متوازي أضلاع .

⑫ أ ب جـ د متوازي أضلاع : أ (−٤ ، ٤) ، ب (−٥ ، ١) ، جـ (−٤ ، ٢) أوجد إحداثيي النقطة د .

الفصل التاسع

هندسة المجسمات



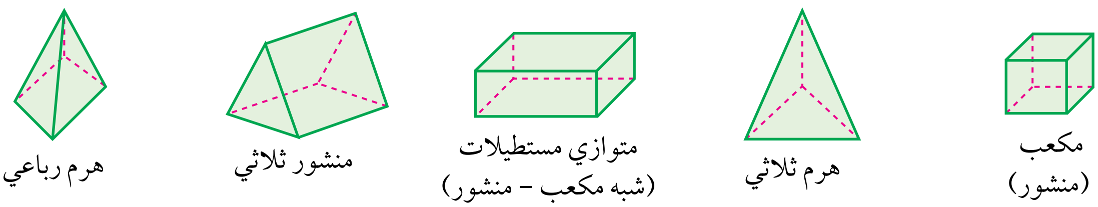


(١-٩) المجسمات

درست في السنوات السابقة بعض المجسمات مثل المكعب ومتوازي المستطيلات (شبه المكعب) .
وسندرس إن شاء الله في هذا الفصل مزيداً من هذه المجسمات من خلال التعرف عليها وعلى بعض خصائصها وبنائها وإجراء بعض العمليات الحسابية لإيجاد حجومها ومساحات سطوحها .

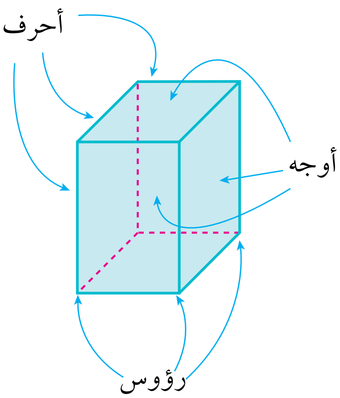
(١) المجسمات المضلعة

على الشكل التالي ، شكل (١) بعض المجسمات ، ونطلق عليها اسم المجسمات المضلعة ، لأنك لو دققت النظر



شكل (١)

فيها لوجدت أنها تتألف من أوجه على شكل مضلعات ولها أحرف ورؤوس .
فمثلاً على الشكل (٢) ، مجسم مضلع (متوازي مستطيلات) ، له ٦ أوجه و١٢ حرفاً و٨ رؤوس .



شكل (٢)

نشاط (١)

بالرجوع إلى الشكل (١) أعلاه املأ فراغات الجدول التالي :

اسم المجسم المضلع	عدد أوجهه	عدد رؤوسه	عدد أحرفه
المكعب			
متوازي المستطيلات			
الهرم الثلاثي			
المنشور الثلاثي			
الهرم الرباعي			

- لاحظ عدد الأحرف لكل مجسم ، وقارنه بمجموع عدد الأوجه والرؤوس .

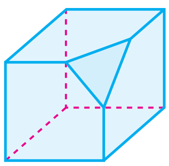
- بكم ينقص عدد الأحرف لكل مجسم عن مجموع عدد الأوجه والرؤوس ؟ هل هذا النقصان ثابت لا يتغير ؟

من النشاط السابق استنتجنا قاعدة تحدد العلاقة بين عدد الأحرف ومجموع عدد الأوجه والرؤوس لكل مجسم مضلع . تُسمى هذه القاعدة قاعدة أولر ، وتنص على ما يلي :

عدد أحرف الجسم المضلع = عدد أوجهه + عدد رؤوسه − ٢

مثال (١)

كم عدد الأوجه والأحرف والرؤوس للمجسم المضلع المجاور ، هل تنطبق عليها قاعدة أولر ؟

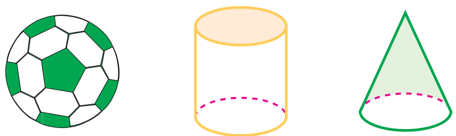


الحل : نلاحظ أن المجسم المضلع هو عبارة عن مكعب نُشر من أحد أركانه .

عدد الأوجه = ٧ ، عدد الرؤوس = ١٠ ، عدد الأحرف = ١٥

إذاً : $\underset{\text{الأحرف}}{١٥} = \underset{\text{الأوجه}}{٧} + \underset{\text{الرؤوس}}{١٠} - ٢$ ، أي أن قاعدة أولر تنطبق على هذا الجسم .

تدريب (١)

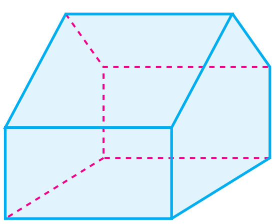


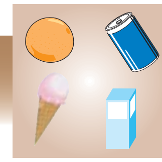
مخروط اسطوانة كرة

(أ) لماذا لا تعتبر المجسمات المجاورة مجسمات مضلعة ؟

(ب) لماذا توضع بعض الخطوط المنقطة في رسم المجسمات ؟

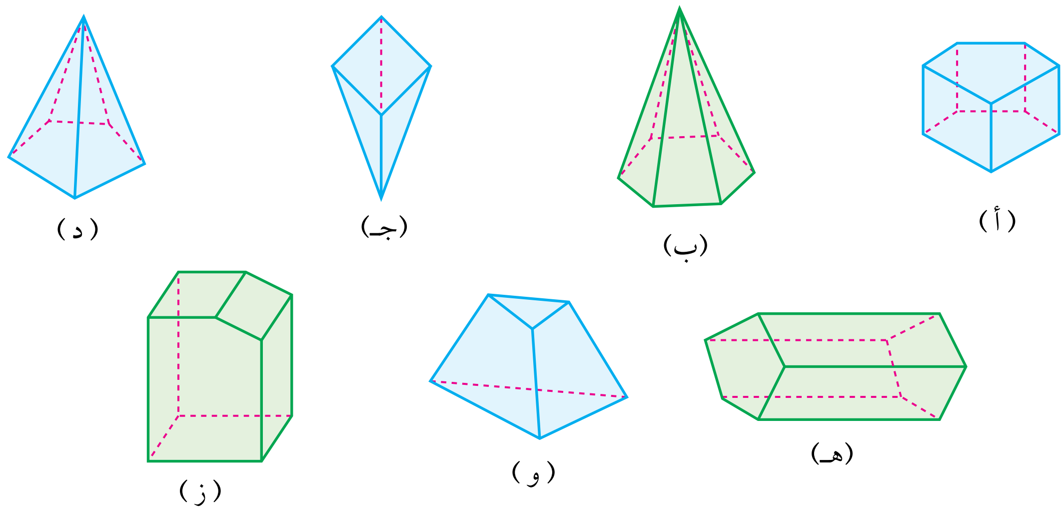
(جـ) كم عددالأوجه والأحرف والرؤوس للمجسم المضلع المقابل؟
هل تنطبق قاعدة أولر على هذا المجسم ؟

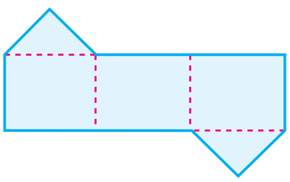




تمارين (٩ - ١)

① كم عدد الأوجه والأحرف والرؤوس لكل من المجسمات المضلعة التالية :
هل تنطبق عليها قاعدة أولر ؟





② ما هو المجسم المضلع الذي نستطيع عمله من النموذج المرسوم ؟
ما عدد أوجهه ورؤوسه وأحرفه ؟

③ لو نشرنا مكعباً من أحد أركانه ، كم يزيد عدد أحرف المجسم الناتج عن عدد أحرف المكعب ؟

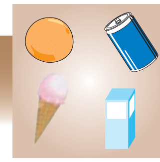
④ لدينا مجسم مضلع عدد أحرفه ١٨ حرفاً ، وله ٨ أوجه ، كم عدد رؤوسه ؟

⑤ قطعة من الألماس لها ٨ أوجه ، وستة رؤوس ، كم عدد أحرف قطعة الألماس هذه ؟

⑥ أي من النماذج التالية يمكن طيها وعمل مكعب منها ؟ اعمل هذه النماذج على ورق مقوى ، ثم أثبت ذلك عملياً .

⑦ أكمل كلاً من الأشكال التالية لتمثيل بعض المجسمات المضلعة ، كما هو محدد أدناه :

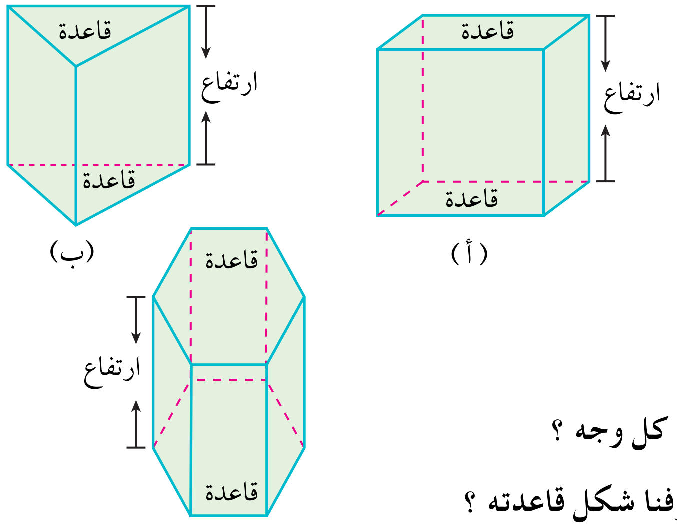
هرم ثلاثي | منشور ثلاثي | مكعب | هرم خماسي



(٩ - ٢) المنشور

(١) تعريف المنشور وخواصه

نشاط (١)



(أ) (ب) (جـ)

شكل (١)

كل من الأشكال المجاورة تمثل منشوراً .

– كم قاعدة لكل منشور ؟ وما هو شكل كل قاعدة ؟

– هل القاعدتان متطابقتان ؟

– كم عدد الأوجه الجانبية لكل منشور ؟ وما هو شكل كل وجه ؟

– هل يمكن معرفة عدد الأوجه الجانبية للمنشور إذا عرفنا شكل قاعدته ؟

من النشاط السابق نستنتج التعريف التالي للمنشور :

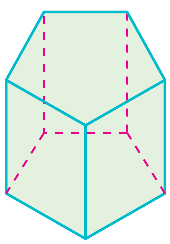
المنشور القائم : هو مجسم مضلع له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان ، وأوجه جانبية على شكل مستطيل

تدريب (١)

(أ) هل كل من المكعب ومتوازي المستطيلات منشور ؟

(ب) بالرجوع إلى الأشكال أعلاه ، أكمل ما يلي : يُسمى المجسم (أ) منشوراً ....، ويُسمى المجسم (ب) منشوراً ....، ويُسمى المجسم (جـ) منشوراً ....

مثال (١)



شكل (٢)

الشكل (٢) يمثل منشوراً، اذكر :

(أ) عدد أوجهه . (ب) عدد أحرفه (جـ) عدد رؤوسه .

(د) شكل كل من قاعدتيه (هـ) عدد أوجهه الجانبية وشكل كل منها .

الحل : (أ) عدد أوجهه = ٧ (ب) عدد أحرفه = ١٥ حرفاً

(جـ) عدد رؤوسه = ١٠ رؤوس

(د) القاعدتان كل منهما على شكل خماسي .

(هـ) عدد أوجهه الجانبية = خمسة أوجه مستطيلة .

تدريب (٢)

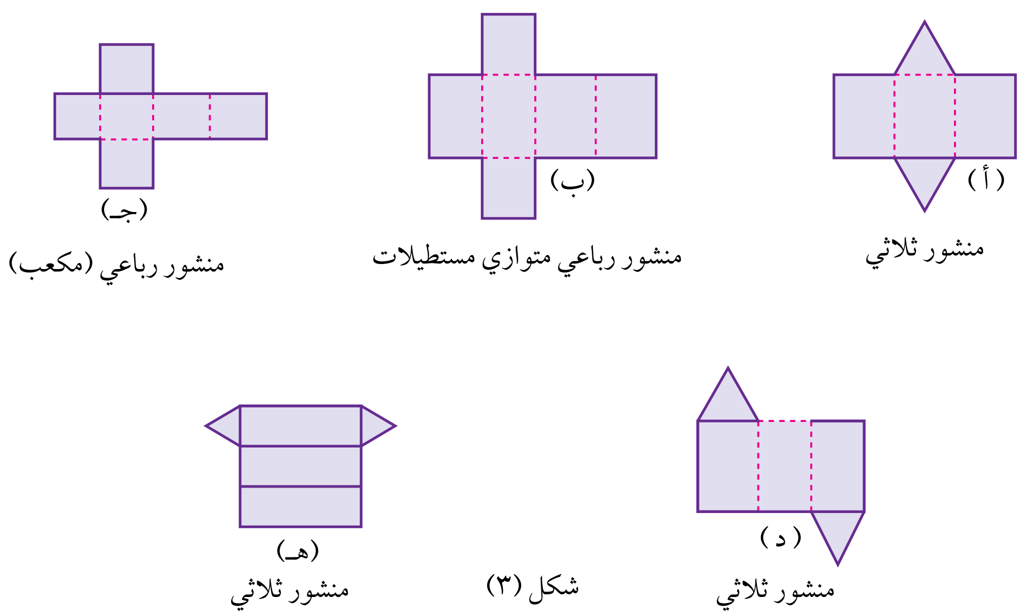
(أ) منشور رباعي قاعدتاه على شكل شبه منحرف . اذكر :

(١) عدد أوجهه (٢) عدد أحرفه (٣) عدد رؤوسه

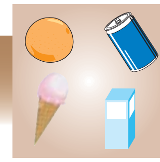
(ب) مثِّل بالرسم منشوراً بقاعدة شبه منحرف ، ومنشوراً خماسياً .

(٢) بناء المنشور

يمكن بناء أي منشور باستخدام التفصيلات (الشبكات المناسبة) لذلك ، مثِّل الشبكات التالية ، شكل (٣) :



شكل (٣)

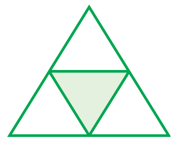


تدريب (٣)

(أ) ارسم شبكة (تفصيلة) لمنشور رباعي قاعدته مستطيلة .

(ب) ارسم اثنتين من التفصيلات في شكل (٣) على ورق مقوى ، واطو الورقة حول الخطوط المنقطة . وسيتم الحصول على منشور .

(جـ) سم المجسم الذي يمكن تكوينه من كل من الشبكتين التاليتين :



(أ)

(ب)

(٣) المساحة الجانبية والمساحة الكلية للمنشور

سنستخدم شبكة المنشور الثلاثي لاستنتاج قاعدة حساب المساحة الجانبية والمساحة الكلية للمنشور

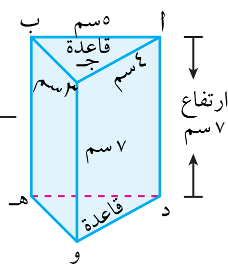
نشاط (٢)

على الشكل (٤ - أ) مجسم من الورق المقوى على شكل منشور ثلاثي أطوال أضلاع كل من قاعدتيه هي :

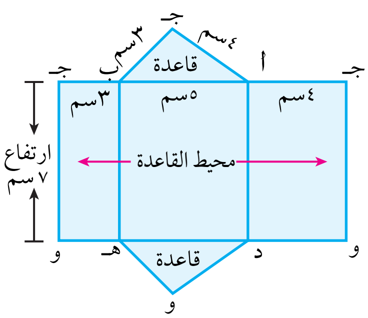
٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم ، وطول ارتفاعه ٧ سم .

على الشكل (٤ - ب) تفصيلة هذا المنشور .

- مم تتكون تفصيلة هذا المنشور ؟ كم مستطيلاً ، وكم مثلثاً ؟



شكل (٤ - أ)



شكل (٤ - ب)

- ماذا تمثل المستطيلات بالنسبة للمنشور؟

- أكمل مساحة المستطيل الأول = ٤ × ٧ = ٢٨ سم^{٢}

مساحة المستطيل الثاني= .... × .... = ...

مساحة المستطيل الثالث = ... × .... = ...

إذاً : المساحة الجانبية للمنشور := .... + ... + ... = ٨٤ سم^{٢}

- احسب طول محيط قاعدة المنشور : المحيط = ... + ... + ... = ١٢ سم

- جد حاصل الضرب التالي : طول محيط قاعدة المنشور × طول ارتفاعه = ... × .... = ...

- قارن حاصل الضرب بالمساحة الجانبية التي حصلت عليها في خطوة سابقة . ماذا تستنتج ؟

من النشاط السابق لاحظنا أنه بدلاً من نشر المنشور ، وحساب مساحة كل وجه من أوجهه الجانبية على حدة ، نستطيع حساب مساحته الجانبية باستخدام القاعدة التالية :

المساحة الجانبية للمنشور = طول محيط قاعدته × طول ارتفاعه

ولإيجاد المساحة الكلية للمنشور نضيف إلى مساحته الجانبية مساحتي قاعدتيه ، وعموماً :

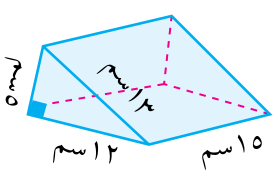
المساحة الكلية للمنشور = مساحته الجانبية + مساحة قاعدتيه

مثال (٢)

الشكل (٥) يمثل منشوراً ثلاثياً ، جد :

(أ) مساحته الجانبية (ب) مساحة قاعدتيه

(جـ) مساحته الكلية



شكل (٥)

الحـــل : (أ) المساحة الجانبية للمنشور = طول محيط قاعدته × طول ارتفاعه

= (١٢ + ١٣ + ٥) × ١٥ = ٣٠ × ١٥

= ٤٥٠ سم^{٢}

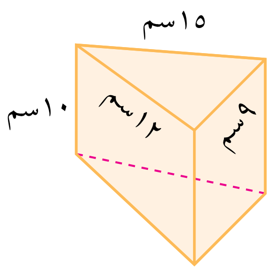
(ب) مساحة القاعدة المثلثة الواحدة = $\frac{١٢ \times ٥}{٢}$ = ٣٠ سم^{٢} (هل تتذكر قاعدة مساحة المثلث ؟)

إذاً : مساحة القاعدتين = ٣٠ × ٢ = ٦٠ سم^{٢}

(جـ) المساحة الكلية للمنشور = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

= ٤٥٠ + ٦٠ = ٥١٠ سم^{٢}

تدريب (٤)



الشكل المجاور يمثل منشوراً ثلاثياً ، جد :

(أ) مساحته الجانبية (ب) مساحته الكلية

(٤) حجم المنشور

نشاط (٣)

ملأنا منشوراً بطبقات من مكعبات طول ضلع كل منها ١ سم

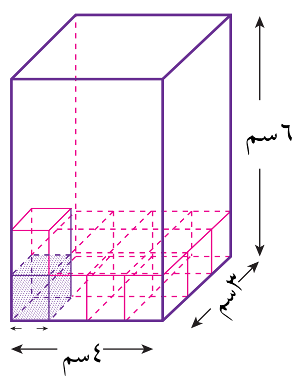
كما في الشكل (٦) :

١ – ما عدد مكعبات كل طبقة ؟

٢ – ما مساحة قاعدة المنشور ؟

٣ – ما عدد طبقات المكعبات ؟

٤ – ما طول ارتفاع المنشور ؟



شكل (٦)

٥ – **ما عدد ا لمكعبات ؟**

٦ – **ما حجم المنشور ؟**

لا حظنا من النشاط السابق أن عدد المكعبات التي تملأ المنشور يمثل حجم المنشور وأنه يساوي حاصل ضرب مساحة قاعدة هذا المنشور في ارتفاعه . هذا العدد هو قياس حجم المنشور إذا اخترنا المكعب الواحد كوحدة لقياس الحجوم .

وعلى العموم مهما كانت وحدة قياس الحجوم . فإن :

حجم المنشور = (مساحة القاعدة) × (طول الارتفاع) .

مثال (٣)

احسب حجم منشور ثلاثي ارتفاعه ٧ سم ، وقاعدته على شكل مثلث قائم طول ضلعي القائمة ٦ سم ، ٥ سم .

الحــــل : حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

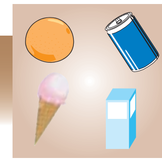
$= (\frac{١}{٢} \times ٦ \times ٥) \times ٧$

$= ١٥ \times ٧$

= ١٠٥ سم^{٣}

مثال (٤)

حوض ماء على شكل منشور رباعي مساحة قاعدته من الداخل ٣, ٤٤م^{٢} وارتفاعه ٤, ٨م . هل يسع هذا الحوض ٣٥٠م^{٣} من الماء . ولماذا ؟



الحــل : حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ٤٤,٣ × ٨,٤

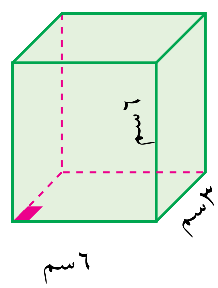
= ٣٧٢,١٢ م^{٣}

إذاً : الحوض يسع ٣٥٠م^{٣} من الماء، لأن حجم المنشور > حجم الماء .

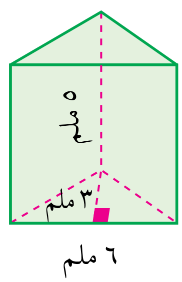
تدريب (٥)

على الشكلين التاليين مثَّلنا منشورين املأ الجدول التالي لإيجاد حجم كل منهما :

(أ)



(ب)



	(أ)	(ب)
طول الارتفاع		
مساحة القاعدة		
حجم المنشور		

① اعتماداً على المنشورين القائمين المجاورين أجب عمّا يلي لكل شكل :

أ – ما عدد الأوجه ؟

ب – ما عدد الأوجه الجانبية وما شكل كل منها ؟

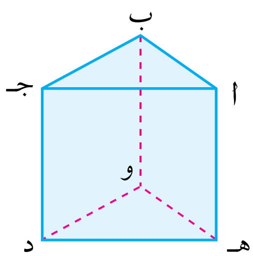
جـ – ما عدد الرؤوس ؟

د – ما عدد الأحرف ؟

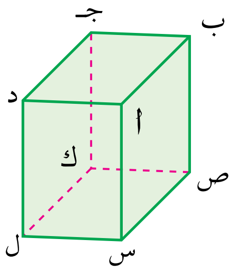
هـ – ما شكل القاعدة ؟

و – حدد القاعدتين .

ز – حدد الارتفاع .

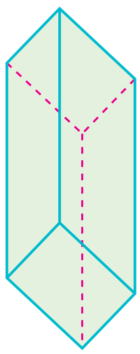


(١)

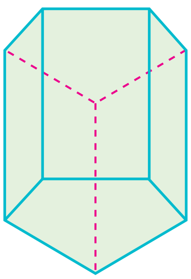


(٢)

② ارسم رسماً تفصيلياً لكل من المنشورين القائمين في الشكل المجاور.



(١)

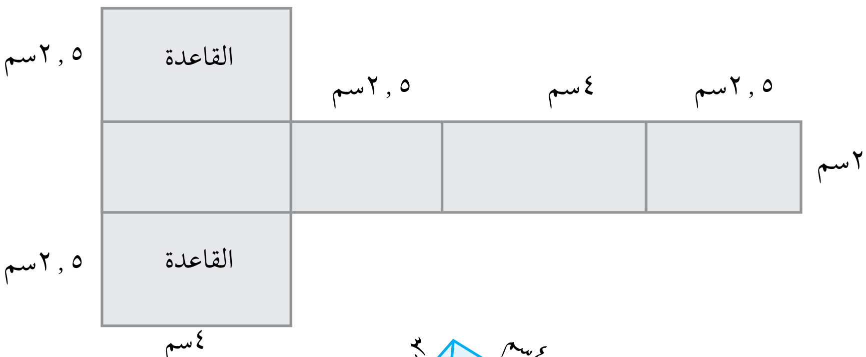


(٢)

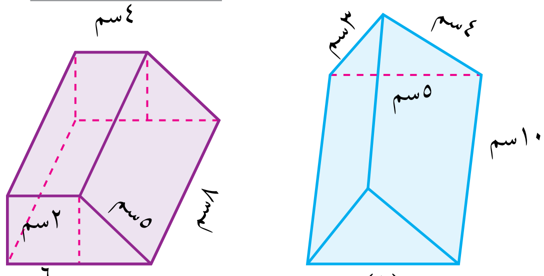
③ أكمل الجدول التالي :

مساحة قاعدة المنشور	ارتفاعه	حجمه
٢٥م^{٢}	٦م	
٦٠ سم^{٢}		٩٠٠ سم^{٣}
٢١ دسم^{٢}	٨ سم	
	١٤م	٧٠٠ سم^{٣}

④ احسب مساحة وحجم المنشور في الشكل المجاور .



⑤ جد مساحة القاعدتين والمساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل من المنشورين المجاورين .



(٢) (١)

⑥ أوجد حجم منشور قائم ، ارتفاعه ٢٥ سم ، وقاعدته على شكل مثلث قائم طول ضلعي القائمة فيه ٩سم ، ١٢ سم .

⑦ يراد صنع صندوق على شكل منشور رباعي ارتفاعه ٧ دسم وأبعاد قاعدته ٣ دسم ، ٤ دسم من ألواح خشبية يكلف المتر المربع منه ١٥ ريالاً . أوجد تكلفة صناعة هذا الصندوق .

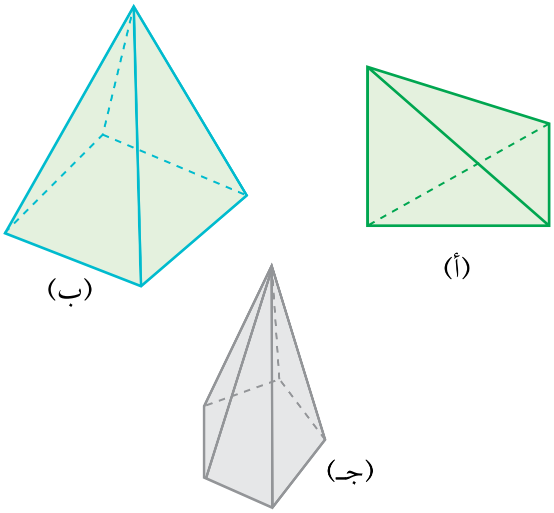
⑧ مستودع للقمح على شكل منشور رباعي بعدا قاعدته ١٢ م ، ١٥ م وارتفاعه ٥ أمتار . يراد طلاء جدرانه بدهان يكلف المتر المربع الواحد منه ٤ ريالات . كم سيكلف دهان المستودع ؟

⑨ قطعة من المعدن على شكل منشور رباعي ارتفاعه ٥٤ سم وأبعاد قاعدته ٤٩ سم ، ٢٨ سم صهرت وصنع منها منشور رباعي آخر قاعدته مربعة الشكل طول ضلعه ٢٠ سم . احسب ارتفاع المنشور الرباعي الجديد .

(٩-٣) الهـــرم

(١) تعريف الهرم وخواصه

نشاط (١)



شكل (١)

كل من المجسمات في الشكل (١) تمثل هرماً .

- كم قاعدة لكل هرم ؟
- ما هو شكل كل قاعدة ؟
- كم عدد الأوجه الجانبية لكل هرم ؟ وما هو شكل كل وجه ؟

نستنتج من النشاط السابق :

الهرم مجسم قاعدته مضلعة الشكل وأوجهه الجانبية مثلثة الشكل تلتقي رؤوسها في نقطة واحدة هي رأس الهرم .

يُسمى الهرم بحسب عدد أضلاع قاعدته فالهرم في (أ) هرم ثلاثي لأن قاعدته مثلث ... وهكذا .

مثال (١)

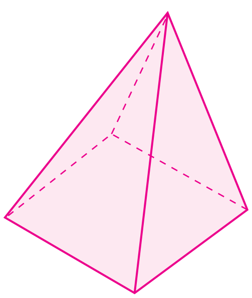
الشكل (٢) يمثل هرماً ، اذكر :

أ - عدد أوجهه .

ب- عدد أحرفه .

جـ - عدد أوجهه الجانبية . وشكل كل منه .

د - شكل قاعدته .


شكل (٢)

الحـــل : (أ) ٥ أوجه (ب) ٨ أحرف .

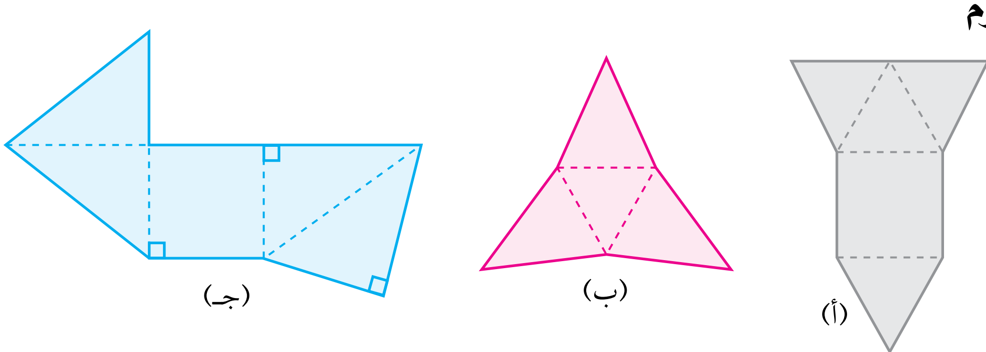
(جـ) ٤ أوجه مثلثة . (د) رباعية الشكل .

تدريب (١)

(أ) هرم قاعدته على شكل خماسي ، اذكر : ١ – عدد أوجهه .   ٢ – عدد أحرفه .   ٣ – عدد أوجهه الجانبية .

(ب) مثل بالرسم هرماً ثلاثياً . هرماً خماسياً .

(٢) بناء الهرم



شكل (٣)

يمكن بناء أي هرم باستخدام التفصيلات (الشبكات) المناسبة لذلك . كما في شكل (٣) .

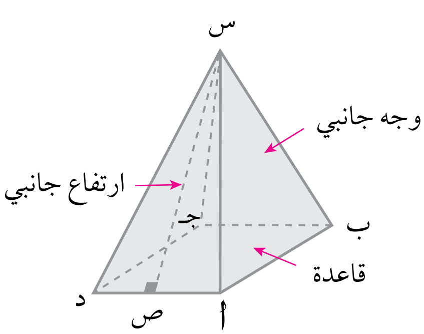
تدريب (٢)

ارسم اثنين من التفصيلات السابقة على ورق مقوى . واطوها حول الخطوط المنقطة للحصول على هرم .

(٣) المساحة الجانبية والكلية لهرم قائم

ستقتصر دراستنا على الهرم القائم وهو الذي تكون قاعدته منتظمة وأوجهه الجانبية عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين.

على الشكل (٤) : هرم قائم ، [س ص] ارتفاع لأحد أوجهه يُسمى هذا بالارتفاع الجانبي للهرم .



شكل (٤)

في الشكل (٥ ، أ) مجسم من الورق المقوى على شكل هرم رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلع قاعدته ٨ سم. وارتفاعه الجانبي ٣ سم .

نلاحظ أن المساحة الجانبية تساوي مجموع مساحة أربع مثلثات .

إذاً المساحة الجانبية = ٤ × $\left(\frac{٨ \times ٣}{٢} \right)$ = ٤٨ سم^٢

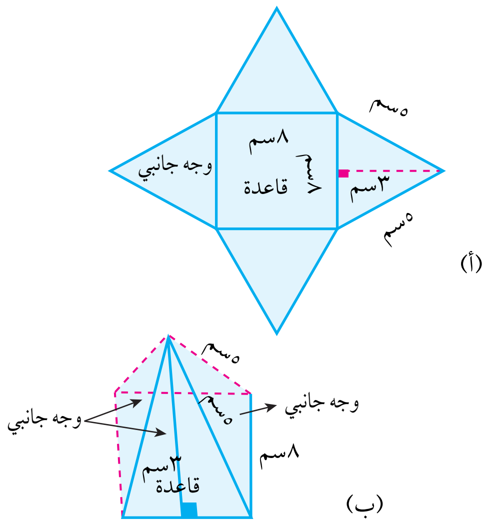
ويمكن حساب المساحة الجانبية بطريقة أخرى باستخدام

نصف محيط قاعدة الهرم = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٤ = ١٦ سم ،

وارتفاع الهرم الجانبي = ٣ سم .

إذاً المساحة الجانبية للهرم = ١٦ × ٣ = ٤٨ سم^٢

وبشكل عام فإن:



شكل (٥)

المساحة الجانبية للهرم = نصف محيط قاعدته × طول ارتفاعه الجانبي.

= مجموع مساحات أوجهه الجانبية .

ولإيجاد المساحة الكلية للهرم نضيف إلى مساحته الجانبية مساحة قاعدته أي : −

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته .

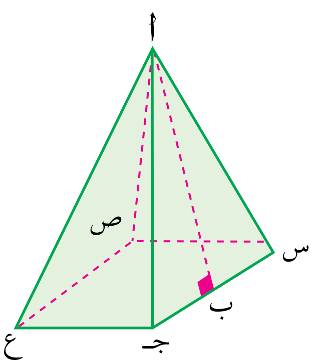
مثال (٢)

الشكل (٦) يمثل هرماً رباعياً قائماً فيه :

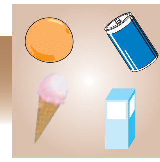
|س ص| = ٥ سم والارتفاع الجانبي |أ ب| = ٨ سم . أوجد مساحته الجانبية .

الحل : المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة x الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × ٨ = ٨٠ سم^٢



شكل (٦)



مثال (٣)

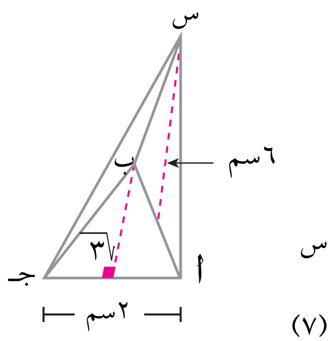
الشكل (٧) يمثل هرماً ثلاثياً قائماً أوجد:

(أ) مساحته الجانبية . (ب) مساحة القاعدة (جـ) مساحته الكلية.

الحــل : أ) المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times ٣ \times ٦ = ١٨$ سم^{٢} .

ب) مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢} \times ٢ \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$ سم^{٢}

جـ) المساحة الكلية = $١٨ + \sqrt{٣} = (١٨ + \sqrt{٣})$ سم^{٢}

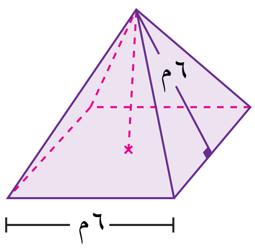


شكل (٧)

تدريب (٣)

إذا كان سعر الدهان للمتر المربع الواحد ٥ ريالات .

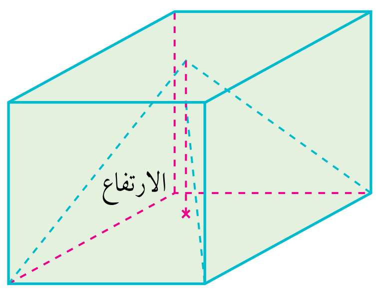
فما تكلفة طلاء الهرم القائم في الشكل (٨)



شكل (٨)

(٤) حجم الهرم

الشكل (٩) يمثل هرماً رباعياً قائماً يشترك مع المنشور في القاعدة، ويسمى العمود النازل من رأسه على قاعدته الارتفاع ويساوي طول حرف المنشور في الشكل(٩) .



شكل (٩)

نشاط (٢)

بأخذ منشور وهرم لهما قاعدتان متطابقتان وارتفاعان متساويان كما في الشكل (٩) .

– املأ الهرم رملاً ثم أفرغه في المنشور .

– كرر هذه العملية إلى أن يمتلئ المنشور رملاً .

– كم مرة كررت العملية ؟

– استنتج علاقة تربط بين حجم الهرم وحجم المنشور .

سنلاحظ أن حجم الهرم يساوي ثلث حجم المنشور .

إذاً :

$$\text{حجم الهرم} = \frac{(\text{مساحة قاعدته} \times \text{طول ارتفاعه})}{٣}$$

مثال (٤)

أوجد حجم هرم قاعدته على شكل مربع مساحته ١٦ سم^{٢} وارتفاعه ٩ سم .

الحـــل : حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٦ × ٩ = ١٦ × ٣

= ٤٨ سم^{٣}

مثال (٥)

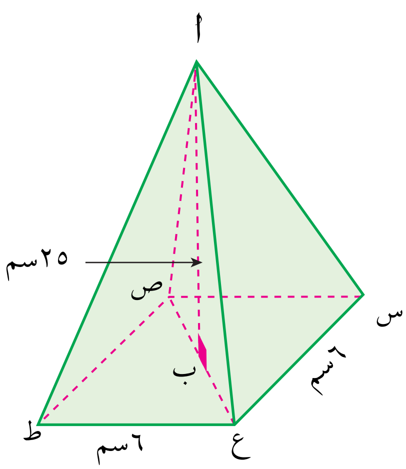
أوجد حجم الهرم القائم في الشكل (١٠).

الحـــل : مساحة القاعدة = ٦ × ٦ = ٣٦ سم^{٢}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦ × ٢٥

= ١٢ × ٢٥

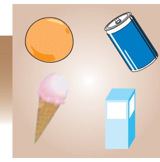
= ٣٠٠سم^{٣}



شكل (١٠)

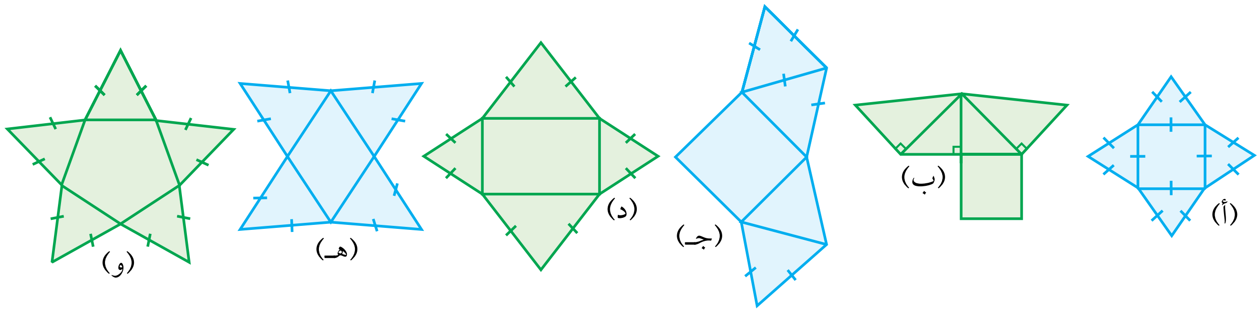
تدريب (٤)

أوجد حجم هرم رباعي قاعدته مربع محيطه ١٢ سم وارتفاعه ٦ سم .



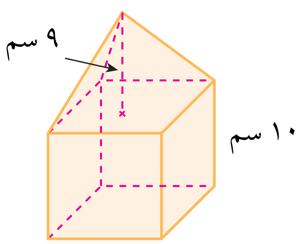
تمارين (٩-٣)

① انقل ما يلي إلى ورق مقوى أولاً ثم قص ، وبين أياً من الأشكال التالية يمثل هرماً قائماً أو لا ؟



② هرم رباعي قائم مساحة أحد أوجهه الجانبية ٢٠ سم ^{٢} ، احسب مساحته الجانبية .

③ احسب حجم هرم إذا كانت مساحة قاعدته ٢٥ سم ^{٢} وارتفاعه ٤ سم .



④ الشكل المجاور يمثل صندوقاً مكوناً من مكعب وهرم . احسب حجمه .

⑤ أوجد المساحة الجانبية لهرم رباعي قائم طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه الجانبي ١٠ سم .

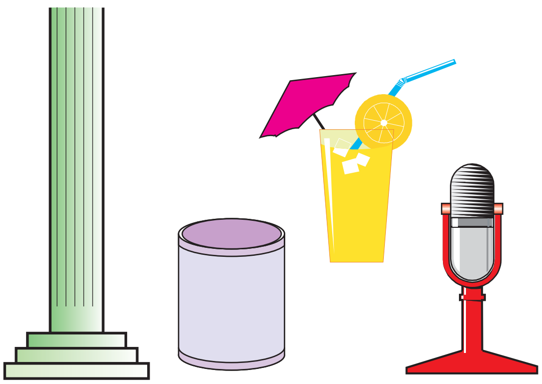
⑥ هرم ثلاثي قائم مساحة قاعدته ٩٠ سم ^{٢} احسب طول ارتفاعه إذا علمت أن حجمه ١٨٠ سم ^{٣}.

⑦ هرم رباعي قائم حجمه ٢١٦ سم ^{٣} وارتفاعه ٨ سم . احسب طول ضلع قاعدته .

⑧ هرم ثلاثي قائم حجمه ٣٠٠ سم ^{٣} . وارتفاعه ٦ سم ومجموع مساحات أوجهه الثلاثة الجانبية ١٥٠ سم ^{٢} .
احسب مساحة الهرم الكلية .

⑨ هرم رباعي قائم طول ضلع قاعدته ١٦ سم وارتفاعه ٦ سم ، احسب مساحة الهرم الكلية ، وحجمه .

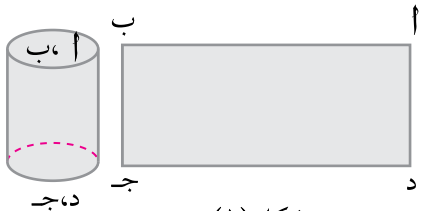
(١) تعريف الأسطوانة



الأسطوانة من المجسمات المألوفة في حياتنا اليومية فالأنابيب بمختلف أحجامها ، وأنواع كثيرة من علب الأدوية والأغذية والمشروبات، وبعض أنواع الأسلاك والقضبان ، وغيرها كثير مما يشبه الأسطوانة في شكله .

نشاط (١)

- خذ ورقة مستطيلة الشكل ، كما في شكل (١) .
- لف الورقة المستطيلة حتى ينطبق [أ د] على [ب جـ] ، ثم الصقهما معاً ، فتحصل على السطح الجانبي للأسطوانة
- ما شكل كل قاعدة من قاعدتي الأسطوانة، وهل هما متطابقتان ؟
- على شكل (١) ارسم نصف قطر قاعدة الأسطوانة وارتفاعها .
- بماذا تتشابه الأسطوانة مع المنشور ، وبماذا تختلف عنه ؟



شكل (١)

لاحظنا من النشاط السابق أن الأسطوانة تشبه المنشور إلا في القاعدتين ، وعموماً :

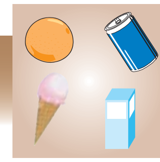
الأسطوانة هي مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان ، كل منهما على شكل دائرة .

تدريب (١)

(أ) ما وجه الشبه بين تعريف الأسطوانة وتعريف المنشور ؟

(ب) ارسم أسطوانة وعين على الرسم : القاعدتين ، الارتفاع ، نصف القطر .

(جـ) اذكر أمثلة من البيئة لأجسام أسطوانية .



(٢) المساحة الجانبية والمساحة الكلية للأسطوانة

نشاط (٢)

على الشكل (٢ – أ) مجسم من الورق المقوى على شكل أسطوانة . فردناه بعد قص سطح الأسطوانة بموازاة الارتفاع ، فحصلنا على تفصيلة هذه الأسطوانة شكل (٢ – جـ)

– ماذا يمثل المستطيل ؟

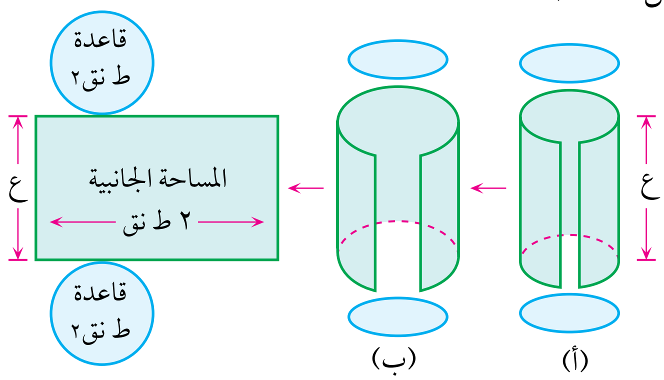
– ماذا يمثل طول المستطيل ؟

– ماذا يمثل عرض المستطيل ؟

– احسب مساحة المستطيل .

– ماذا تمثل هذه المساحة بالنسبة للأسطوانة ؟

من النشاط السابق توصلت إلى النتيجة التالية :



شكل (٢)

المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ ط نق ع

حيث : نق طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ، ع طول ارتفاعها

وكما هو الحال في المنشور ، إذا أضفنا إلى مساحتي قاعدتي الأسطوانة مساحتها الجانبية ، فإننا نحصل على المساحة الكلية للأسطوانة .

إذاً :

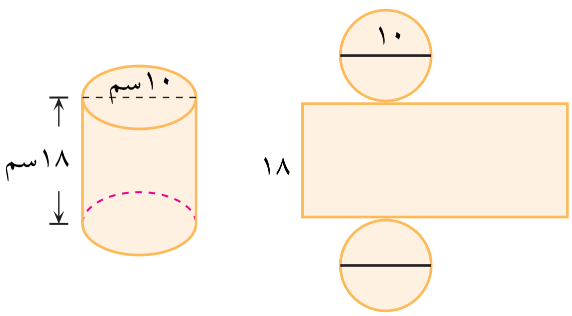
المساحة الكلية للأسطوانة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة الأولى + مساحة القاعدة الثانية

= ٢ ط نق ع + ٢ ط نق^{٢}

مثال (١)

جد المساحة الكلية لعلبة أسطوانية ممثلة بالشكل (٣) (ط = ١٤ , ٣).

الحل : نرسم تفصيلة العلبة الأسطوانية



شكل (٣)

مساحة القاعدتين = ٢ ط نق^{٢}

= ٢ (ط × ٢٥)

= ٥٠ × ١٤ , ٣

= ١٥٧ سم^{٢} (١)

المساحة الجانبية = ٢ ط نق ع = ط × ١٠ × ١٨

= ١٨٠ × ١٤ , ٣

= ٥٦٥ , ٢ سم^{٢} (٢)

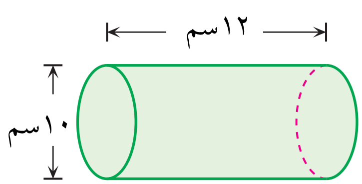
من (١) ، (٢) المساحة الكلية للعلبة = ١٥٧ + ٥٦٥ , ٢ = ٧٢٢ , ٢ سم^{٢}

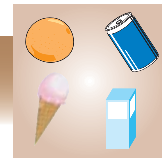
تدريب (٢)

(أ) ما وجه الشبه بين قاعدة حساب المساحة الكلية للمنشور وقاعدة المساحة الكلية للأسطوانة؟

(ب) ارسم تفصيلة الأسطوانة المجاورة ، ثم احسب مساحتها الجانبية، ومساحتها الكلية .

(جـ) خذ مجسماً أسطواني الشكل، وقس طول ارتفاعه وطول نصف قطر قاعدته ، ثم احسب مساحته الكلية .

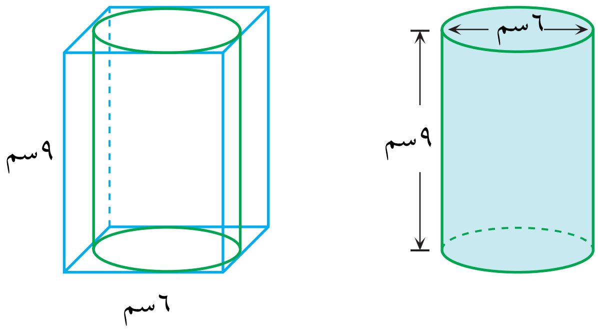




(٣) حجم الأسطوانة

ذكرنا قبل قليل أن الأسطوانة تشبه المنشور ، إلا أنها تختلف عنه في قاعدتيها الدائريتين. لذا ، فإن حساب حجم الأسطوانة يشبه طريقة حساب حجم المنشور .

نشاط (٣)



شكل (٤)

على الشكل (٤) مثلنا أسطوانة داخل منشور رباعي

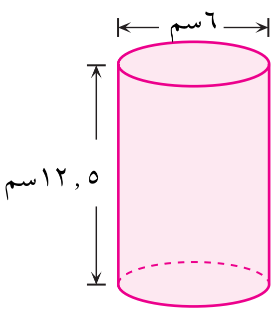
- **ما طول قطر قاعدة الأسطوانة ، وما ارتفاعها ؟**
- **ما حجم المنشور ؟**
- **إذا وضعنا الأسطوانة داخل منشور سداسي ، أو مثمن ،**

هل يقترب شكل قاعدة المنشور من شكل قاعدة الأسطوانة ؟

لعلنا لاحظنا من النشاط السابق أنه كلما زاد عدد أضلاع قاعدة المنشور اقترب شكل المنشور من شكل الأسطوانة، وبالتالي يصبح حجم الأسطوانة مساوياً لحجم المنشور ، وعلى العموم :

> **حجم الأسطوانة = مساحة قاعدته × طول ارتفاعها = ط نق^{٢} ع**
>
> **حيث : نق طول نصف قطر قاعدتها ، ع طول ارتفاعها .**

مثال (٢)



جد حجم علبة العصير المجاورة (ط = ٣,١٤)

الحل : حجم العلبة = ط نق^{٢} ع (مساحة القاعدة × الارتفاع)

= ٣,١٤ × ٣^{٢} × ١٢,٥

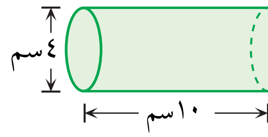
= ٣,١٤ × ٩ × ١٢,٥ = ٣,١٤ × ١١٢,٥

= ٣٥٣,٢٥ سم^{٣}

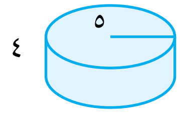
تمارين (٩-٤)

① جد حجم كل من المجسمات التالية (ط = ٣,١٤) :

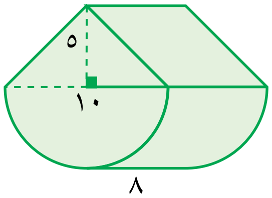
(أ)



(ب)



(جـ)



② املأ الفراغات في الجدول التالي (تبقى الإجابات بدلالة ط) :

حجم الاسطوانة	١٢ ط	١٥٠ ط	١٠٠ ط	٢٠ ط	١٨ ط
نصف قطر القاعدة	٢	٥			
مساحة القاعدة			٢٥ ط	٤ ط	
الارتفاع					٢

③ ماذا يحصل لحجم الأسطوانة في كل من الحالات التالية :

(أ) ضاعفنا طول نصف قطر قاعدتها .

(ب) أنقصنا طول ارتفاعها إلى النصف .

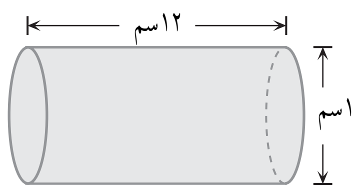
(جـ) ضاعفنا طول نصف قطر قاعدتها ، وأنقصنا طول ارتفاعها إلى النصف .

(د) أنقصنا طول نصف قطرها إلى النصف . (هـ) ضاعفنا طول ارتفاعها .

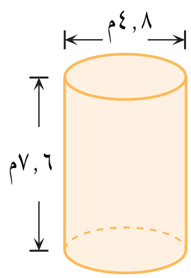
(و) أنقصنا طول نصف قطرها إلى النصف ، وضاعفنا طول ارتفاعها .

④ جد المساحة الكلية للمجسمات التالية : (ط = ٣,١٤).

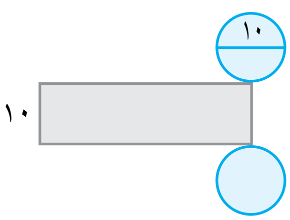
(أ)

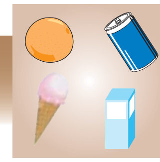


(ب)

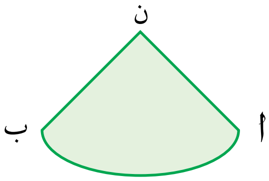


(جـ)





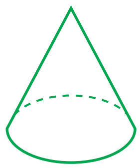
(١) تعريف المخروط وخواصه



شكل (١)

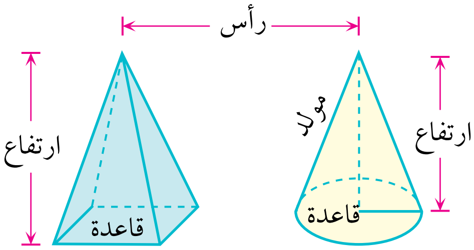
نشاط (١)

- ارسم على ورقة دائرة مركزها ن ، وطول نصف قطرها ٨ سم .
- قص جزءاً من الدائرة على شكل قطاع دائري ن أ ب ، شكل (١) .
- لف القطاع الدائري حتى ينطبق نصف القطر [ن ب] على نصف القطر [ن أ] . ثم ألصق [ن ب] ، [ن أ] ، للحصول على جسم مخروطي ، شكل (٢) .
- كم قاعدة للمخروط؟ وما شكلها ؟
- كم رأساً للمخروط ؟
- على شكل (٢) : ارسم نصف قطر قاعدة المخروط . وارتفاعه.



شكل (٢)

لاحظنا من النشاط السابق أنه كما وصفنا الأسطوانة قبل ذلك بأنها تشبه المنشور، فإنه من الممكن القول بأن المخروط يشبه الهرم ، شكل (٣)



شكل (٣)

المخروط : هو مجسم بقاعدة دائرية واحدة ورأس واحد

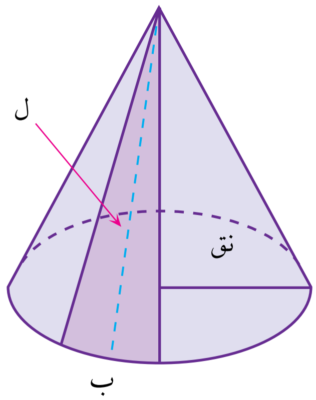
ملحوظة : كل قطعة مستقيمة تصل رأس المخروط بنقطة على محيط قاعدته تُسمى مولداً للمخروط .

تدريب (١)

(أ) ما هي أوجه الشبه والاختلاف بين المخروط والهرم ؟ (ب) أذكر أمثلة من البيئة لأجسام مخروطية .

(جـ) ارسم مولداً آخر للمخروط في شكل (٣) .

(٢) المساحة الجانبية والمساحة الكلية للمخروط



شكل (٤)

على الشكل (٤) نلاحظ أن السطح الجانبي للمخروط يتكون من عدد من الشرائح الصغيرة كالشريحة الملونة على الشكل . لو اعتبرنا كل شريحة صغيرة مثلثا قاعدته ب وارتفاعه ل (مولد المخروط) ، فإن :

مساحة المثلث الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ب × ل (قاعدة مساحة المثلث)

وعندما نجمع مساحات كل المثلثات نحصل على :

المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{١}{٢}$ × (٢ ط نق) × ل

(نلاحظ أن مجموع أطوال القواعد ب = محيط قاعدة المخروط = ٢ ط نق)

وبتبسيط الطرف الأيسر نحصل على : المساحة الجانبية للمخروط = ط نق ل

إذاً :

المساحة الجانبية للمخروط = ط نق ل ، حيث :

نق طول نصف قطر قاعدة المخروط ، ل طول مولد المخروط

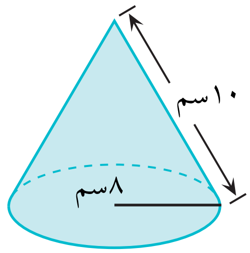
إذا أضفنا مساحة قاعدة المخروط إلى مساحته الجانبية، فإننا نحصل على المساحة الكلية للمخروط .

إذاً :

المساحة الكلية للمخروط = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

= ط نق ل + ط نق^{٢}

مثال (١)



شكل (٥)

احسب المساحة الكلية للمخروط شكل (٥)، (ط = ٣,١٤):

الحـــل : المساحة الجانبية للمخروط = ط نق ل

= ٣,١٤ × ٨ × ١٠

= ٣,١٤ × ٨٠

= ٢٥١,٢سم^{٢}

مساحة قاعدة المخروط = ط نق^{٢}

= ٣,١٤ × ٨^{٢} = ٣,١٤ × ٦٤

= ٢٠٠,٩٦سم^{٢}

إذاً: المساحة الكلية للمخروط = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

= ٢٥١,٢ + ٢٠٠,٩٦

=٤٥٢,١٦ سم^{٢}

مثال (٢)

أيهما أكبر المساحة الكلية لمخروط طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم ، وطول مولده ٢٠سم أم المساحة الجانبية لأسطوانة طول نصف قطر قاعدتها ١٠ سم ، وطول ارتفاعها ١٥ سم ؟

الحـــل : أولاً : المساحة الكلية للمخروط = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

المساحة الجانبية للمخروط = ط نق ل = ٣,١٤ × ١٠ × ٢٠ = ٦٢٨ سم^{٢}

مساحة قاعدة المخروط = ط نق^{٢} = ٣,١٤ × ١٠٠ =٣١٤سم^{٢}

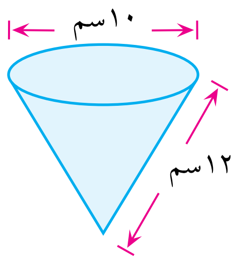
إذاً : المساحة الكلية للمخروط = ٦٢٨ + ٣١٤ = ٩٤٢ سم^{٢} (١)

ثانياً: المساحة الجانبية للأسطوانة = ٢ ط نق ع

= ٢ × ٣,١٤ × ١٠ × ١٥ = ٣,١٤ × ٣٠٠

= ٩٤٢ سم^{٢} (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية للأسطوانة

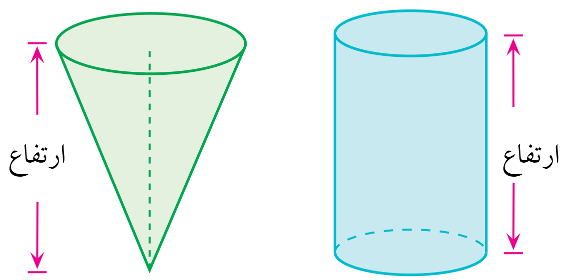


تدريب (٢)

احسب المساحة الكلية للمخروط المجاور.

(٣) حجم المخروط

نشاط (٢)

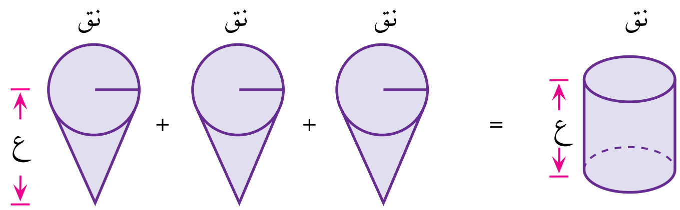


شكل (٦)

- خذ أسطوانة ومخروطاً من البلاستيك الشفاف لهما الارتفاع نفسه، والقاعدة نفسها، شكل (٦).
- املأ المخروط بالرمل أو الماء، ثم أفرغه في الأسطوانة هل امتلأت الأسطوانة ؟
- أعد العملية حتى تمتلئ الأسطوانة .
- كم مرة ملأت المخروط حتى امتلأت الأسطوانة ؟
- ما هي العلاقة التي تربط بين حجم المخروط وحجم الأسطوانة المتساويين في الارتفاع والقاعدة ؟
- أكمل : حجم المخروط = ... × حجم الأسطوانة

وحيث أن حجم الأسطوانة = ط نق^{٢} ع (مساحة القاعدة × الارتفاع) ، فإن :

حجم المخروط = ...



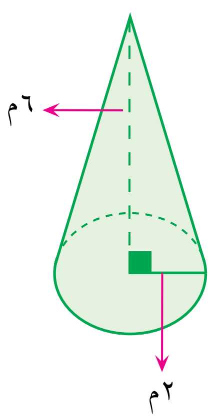
شكل (٧)

من النشاط السابق لاحظنا أن حجم المخروط يساوي ثلث حجم الأسطوانة المتساوية معه في القاعدة والارتفاع

$$\textbf{حجم المخروط} = \frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{٣} = \frac{١}{٣}\ \text{ط نق}^{٢}\ \text{ع}\ \text{، حيث :}$$

نق طول نصف قطر قاعدة المخروط ، ع طول ارتفاعه .

مثال (٣)



جد حجم المخروط المجاور (ط = ٣,١٤).

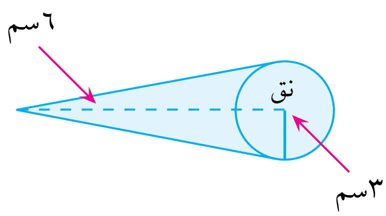
الحـــل : مساحة القاعدة = ط نق^{٢} = ٣,١٤ × ٢ × ٢=١٢,٥٦م^{٢}

$$\textbf{حجم المخروط} = \frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{٣}$$

$$= \frac{١٢,٥٦ \times ٦}{٣}$$

$$= \frac{٧٥,٣٦}{٣} = ٢٥,١٢\ \text{م}^{٣}$$

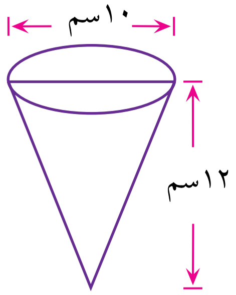
تدريب (٣)



(أ) ما وجه التشابه بين علاقة حجم المخروط بالأسطوانة وحجم الهرم بالمنشور ؟

(ب) جد حجم المخروط المجاور (ط = ٣,١٤) .

تمارين (٩ - ٥)



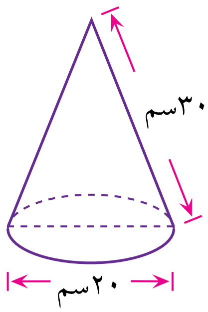
① الشكل المجاور يمثل مخروطاً طول قطر قاعدته ١٠ سم ، وطول ارتفاعه ١٢ سم ، والمطلوب إيجاد ما يلي :

(أ) المساحة الجانبية للمخروط .

(ب) مساحة قاعدته .

(جـ) مساحته الكلية.

(د) حجمه .



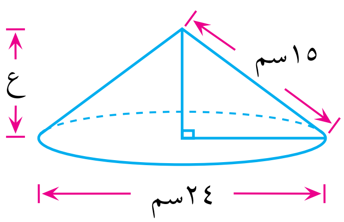
② ارسم تفصيلة المخروط المجاور ، ثم احسب مساحته الكلية

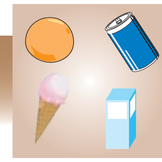
③ خزان ماء أسطواني الشكل حجمه ١٥ م^{٣} ، مليء بالماء . يُراد تفريغ الماء منه في عدد من الخزانات على شكل مخروط متساوية مع الخزان الأسطواني في القاعدة والارتفاع :

(أ) كم عدد الخزانات المخروطية التي ستستخدم لتفريغ الماء بها ؟

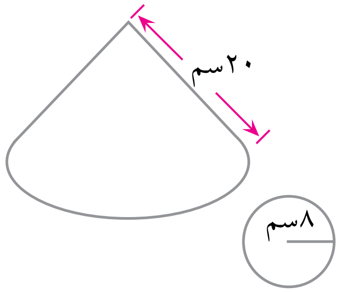
(ب) كم حجم الخزان الواحد منها ؟

④ جد ارتفاع المخروط في الشكل المجاور، ثم احسب حجمه .

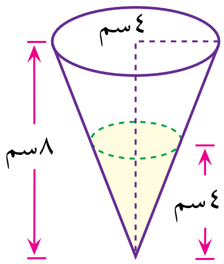




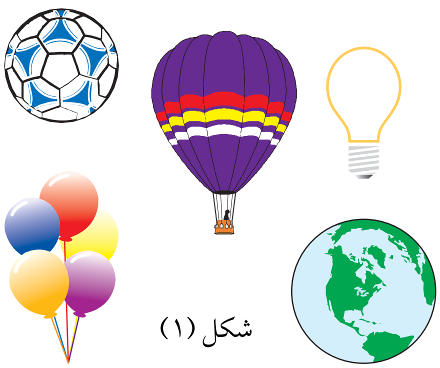
⑤ على الشكل المجاور تفصيلة لمخروط . ارسم المخروط ،
ثم احسب مساحته الجانبية.



⑥ كأس من الورق على شكل مخروط ارتفاعه ٨ سم ، وطول نصف قطر قاعدته ٤ سم . وضعنا ماء في الكأس إلى نصف ارتفاعه ما نسبة الجزء المملوء بالماء إلى حجم الكأس ؟



(٩ - ٦) الكــــرة



شكل (١)

الكرة من المجسمات المألوفة في حياتنا ، مثل كرات التنس والقدم والسلة ، كما أن الكواكب وفقاعات الصابون ، وبعض المصابيح الكهربائية ، وغيرها الكثير مما يشبه الشكل الكروي تقريباً .

(١) تعريف الكرة

نشاط (١)

- خذ كرة شفافة مجوفة ، قابلة للفك إلى نصفين ، ثم أجب عن الأسئلة التالية :

- هل الكرة جسم مضلع ، لماذا ؟

- هل يوجد للكرة مركز ، كما يوجد للدائرة ؟

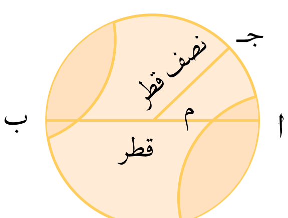
-هل يوجد للكرة قطر ، ونصف قطر ، كما هو الحال في الدائرة ؟

- إذا عرفت مركز الكرة ، فكيف يمكن معرفة طول نصف قطرها ؟

إن الإجابة على هذه الأسئلة تقودنا إلى التعريف التالي للكرة .

الكرة هي مجسم غير مضلع، جميع نقاط سطحها الخارجي تبعد البعد نفسه عن نقطة ثابتة داخلها تسمى مركز الكرة

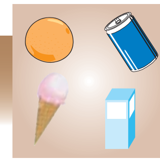
تدريب (١)



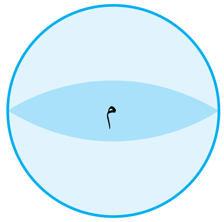
شكل (٢)

(أ) الشكل (٢) يمثل كرة، حيث م مركزها ، [ب م] نصف قطرها ، [ا ب] قطر فيها . ارسم ، ونصف قطر آخرين للكرة ، وسم كلاً منهما .

(ب) ما هو وجه الشبه بين تعريف الكرة وتعريف الدائرة ؟



(جـ) اذكر أمثلة أخرى من البيئة لمجسمات كروية الشكل .



(٢) المساحة السطحية للكرة

سنقدم قاعدة حساب المساحة السطحية للكرة ، دون استنتاجها ، نظراً لأن استنتاجها يتطلب معلومات رياضية أعلى .

المساحة السطحية لأي كرة نصف قطرها نق = ٤ ط نق^{٢}

مثال (١)

احسب مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ٧ سم . (اعتبر ط = ٢٢/٧)

الحـــل : مساحة سطح الكرة = ٤ ط نق^{٢}

= ٤ × ٢٢/٧ × ٧^{٢} = ٤ × ٢٢/٧ × ٤٩

= ٤ × ٢٢ × ٧

= ٦١٦ سم^{٢}

مثال (٢)

إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي ٢٤٦٤سم^{٢} ، فاحسب طول نق . (ط = ٢٢/٧)

الحـــل : مساحة سطح الكرة = ٤ ط نق^{٢}

إذاً : ٢٤٦٤ = ٤ × ٢٢/٧ نق^{٢} ، وبضرب الطرفين في ٧ :

١٧٢٤٨ = ٤ × ٢٢ × نق^{٢}

١٧٢٤٨ = ٨٨ نق^{٢} ، وبقسمة الطرفين على ٨٨ :

١٩٦ = نق^{٢}

∴ نق = ١٤سم

تدريب (٢)

(أ) احسب المساحة السطحية لكرة طول قطرها ٤٢ سم (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

(ب) أيهما أكبر مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ٢ سم ، أم المساحة الكلية لأسطوانة ، طول نصف قطرها ٢ سم ، وارتفاعها ٢ سم ؟

(٣) حجم الكرة

نشاط (٢)

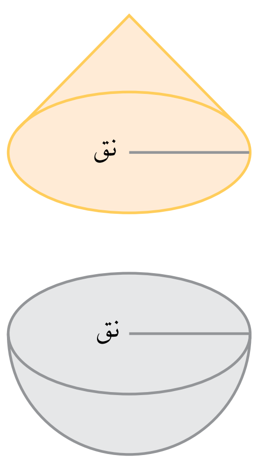
أحضر مخروطاً مجوفاً من البلاستيك الشفاف طول ارتفاعه يساوي طول نصف قطر قاعدته، أحضر نصف كرة مجوفة من البلاستيك ، طول نصف قطرها يساوي طول نصف قطر قاعدة المخروط .

– ما قاعدة حجم المخروط في هذه الحالة ؟ (حالة طول ارتفاعه = نصف قطر قاعدته)

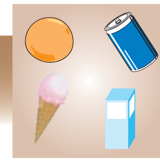
– املأ المخروط ماءً ملوناً أو رملاً ناعماً ، ثم أفرغه في نصف الكرة .

هل امتلأ نصف الكرة ؟

– املأ المخروط مرة أخرى – ثم أفرغه في نصف الكرة، هل امتلأ نصف الكرة ؟



شكل (٣)



- كم مرة ملأت المخروط كي تملأ نصف الكرة ؟
- ما هي العلاقة التي تربط بين حجم نصف الكرة وحجم المخروط ؟
- أكمل : حجم نصف الكرة = ... × حجم المخروط

∴ حجم الكرة = ... × حجم المخروط

وحيث إن حجم المخروط في هذا النشاط = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٣} لماذا ؟

إذاً : حجم الكرة = ... × $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٣}

= ..... ط نق^{٣}

من النشاط السابق نستنتج :

حجم كرة طول نصف قطرها نق = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

مثال (٣)

أوجد الحجم والمساحة السطحية لكرة نصف قطرها ٢١ سم . (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل : حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

= $\frac{٤}{\cancel{٣}} \times \frac{٢٢}{\cancel{٧}} \times \cancel{٢١} \times ٢١ \times ٢١$

= ٤ × ٢٢ × ٢١ × ٢١

= ٣٨٨٠٨ سم^{٣}

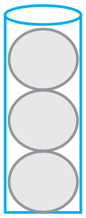
مساحة سطح الكرة = ٤ ط نق^{٢}

= ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١ × ٢١

= ٨٨ × ٦٣

= ٥٥٤٤ سم^{٢}

مثال (٤)



تباع كل ثلاث كرات تمس قطر الواحدة منها ٥ سم في علبة أسطوانية الشكل .ما حجم الفراغ الذي لم تشغله الكرات داخل العلبة ؟ (باعتبار أن الكرات تمس العلبة الأسطوانية من الداخل من الجانبين ومن الأعلى ومن الأسفل)

الحـــل : ارتفاع الأسطوانة = ٣ × ٥ = ١٥ سم   لماذا ؟

نصف قطر الأسطوانة = ٢,٥ سم   لماذا ؟

إذاً : حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ط نق^{٢} × ع

= ٣,١٤ × ٢,٥ × ٢,٥ × ١٥

= ٢٩٤ سم^{٣}

حجم الكرة الواحدة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}$ × ٣,١٤ × ٢,٥ × ٢,٥ × ٢,٥

= ٦٥,٤ سم^{٣}

حجم الكرات الثلاث = ٦٥,٤ × ٣ = ١٩٦ سم^{٣}

إذاً : حـجـم الفـراغ = حجم العلبة الأسطوانية – حجم الكرات الثلاث

= ٢٩٤ – ١٩٦ = ٩٨ سم^{٣}

تدريب (٣)

(أ) احسب حجم كرة نصف قطرها ١٥ سم . (ط = ٣,١٤)

(ب) هل البيضة كرة ؟ أذكر طريقة ممكنة لحساب حجمها .

(جـ) إذا كان حجم كرة يساوي عددياً مساحة سطحها ، فما طول نصف قطرها ؟

تمارين (٩ - ٦)

① أكمل الآتي :

(أ) مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ١ = ... ، وحجمها = ...

(ب) مساحة سطح كرة طول نصف قطرها ٢ = ... ، وحجمها = ...

(جـ) إذا تضاعف طول نصف قطر كرة ، فإننا نضرب مساحتها السطحية في ...

(د) إذا تضاعف طول نصف قطر كرة . فإننا نضرب حجمها في ...

(هـ) إذا كان [أ ب] قطراً لكرة مركزها م ، فإن [أ م] ، [ب م] هما ...... للكرة

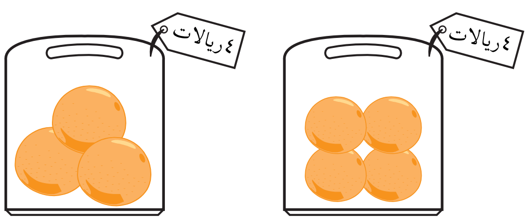
② مساحة سطح كرة تساوي ١٦٠٠ ط . ما طول نصف قطرها ؟

③ املأ الفراغات في الجدول التالي «تبقى الإجابة بدلالة ط » :

نصف قطر الكرة	٣			٤,٥		
المساحة السطحية		١٠٠ ط			٢٥٦ ط	
الحجم			٢٨٨ ط			٩٧٢ ط

④ أوجد المساحة السطحية لكرة طول نصف قطرها ٢ ، ولكرة أخرى طول نصف قطرها ٥ ما هي العلاقة التي تربط بين النسبة بين طولي نصفي قطريهما والنسبة بين مساحتيهما ؟

⑤ أيهما أفضل شراء ثلاث برتقالات نصف قطر الواحدة ٣,٥ سم بأربعة ريالات، أم شراء أربع برتقالات من النوع نفسه نصف قطر الواحدة ٣ سم بأربعة ريالات ؟



(٩ - ٧) تمارين عامة

① ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (×) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يلي :

(أ) حجم منشور رباعي أبعاده ٤ سم ، ٥سم ، ٩سم يساوي ٩٦سم^{٣} .

(ب) حجم منشور ثلاثي مساحة قاعدته ١٥ سم^{٢} ، وطول ارتفاعه ١٠ سم يساوي ٧٥ سم^{٣} .

(جـ) حجم أسطوانة طول قطرها ١٠ سم ، وطول ارتفاعها ٢٠ سم يساوي ٢٠٠ سم^{٣} .

(د) المساحة الجانبية لأسطوانة أكبر من مساحتها الكلية .

(هـ) المساحة الكلية لمنشور رباعي أبعاده ٨ سم ، ٥ سم ، ٣ سم تساوي ١٢٨ سم^{٢} .

(و) للمخروط قاعدتان .

(ز) للهرم الرباعي أربعة مثلثات .

(ح) الأوجه الجانبية للمنشور القائم مستطيلات .

(ط) الأسطوانة مثال للمجسم المضلع .

(ي) الأوجه الجانبية للهرم المنتظم على شكل مثلثات متطابقة الضلعين .

(ك) من الممكن أن يكون للهرم قاعدة دائرية .

② أكمل :

(أ) للمنشور الثلاثي .... مثلثات

(ب) للمنشور السداسي .... أوجه جانبية

(جـ) عدد أحرف قاعدة الهرم الرباعي = ...

(د) عدد رؤوس المخروط = ...

(هـ) المجسم الذي له خمسة أوجه جانبية على شكل مستطيل هو ......، وقاعدتاه على شكل ......

(و) المنشور المثمن له ثمانية ......

③ أراد أحمد تغليف علبة لهدية سيقدمها إلى صديقه محسن، فإذا كانت العلبة على شكل متوازي مستطيلات (منشور رباعي) أبعاده ٢٤ سم ، ٣٣ سم ، ٦ سم ، فاحسب :

(أ) المساحة الكلية لعلبة الهدية .

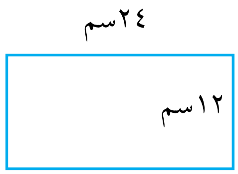
(ب) إذا اشترى أحمد لفة من ورق التغليف طولها ٣٠ سم ، وعرضها ٦٠ سم ، فهل تكفي هذه اللفة لتغليف علبة الهدية ؟

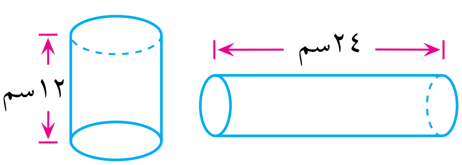
④ كرة من الآيسكريم قطرها ٦ سم، وضعت في كأس على شكل مخروط طول قطره ٦ سم ، وطول ارتفاعه ١٢ سم . إذا ذابت كرة الآيسكريم ، فهل سينسكب جزء من الآيسكريم الذائب خارج الكأس المخروطي ؟

⑤ أكمل الجدول التالي بذكر نوع المجسم :

نوع المجسم	عدد القواعد والأوجه	عدد الأحرف	عدد الرؤوس
	قاعدتان + ٤ أوجه مربعة	١٢	٨
	قاعدة واحدة + ٣ أوجه أخرى	٦	٤
	قاعدتان	لا شيء	لا شيء
	قاعدتان + ٥ أوجه أخرى	١٥	١٠
	قاعدتان + ٦ أوجه أخرى	١٨	١٢
	قاعدتان مستطيلتان + ٤ أوجه أخرى	١٢	٨

⑥ الشكل المجاور يمثل ورقة على شكل مستطيل بعداه ١٢ سم ، ٢٤ سم ، تم لفها لعمل أسطوانة بطريقتين ثم أغلق طرفاها بدائرتين .

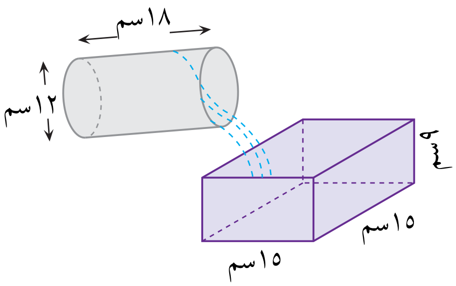




أي الأسطوانتين أكبر من حيث : (أ) المساحة الجانبية (ب) المساحة الكلية (جـ) الحجم

⑦ أيهما أكبر حجماً مكعب طول حرفه ٣ وحدات ، أم كرة طول نصف قطرها وحدتان ؟

⑧ على الشكل المجاور : إذا أفرغنا إناء أسطوانياً مملوءاً بالماء في إناء على شكل متوازي مستطيلات (منشور رباعي) فهل سيفيض الماء من المنشور ، ولماذا ؟

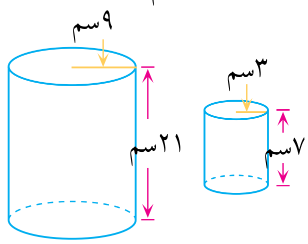


⑨ على الشكل المجاور أسطوانتان جد ما يلي :

(أ) النسبة بين طول نصفي قطريهما

(ب) النسبة بين ارتفاعيهما .

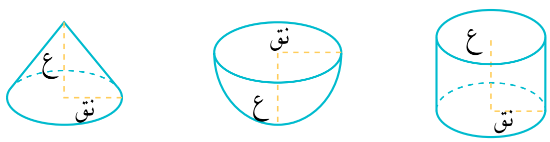
(جـ) النسبة بين حجم الأسطوانة الصغيرة وحجم الأسطوانة الكبيرة



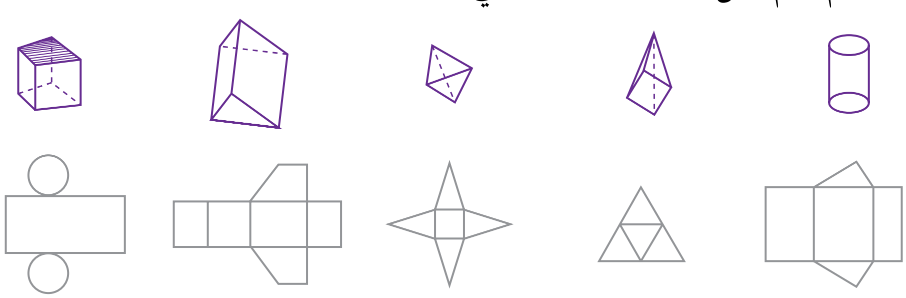
⑩ كرتان طول نصف قطر الأولى ٥ سم ، وطول نصف قطر الثانية ١٠ سم ، جد النسبة بين حجميهما.

⑪ على الشكل المجاور أسطوانة، ونصف كرة ومخروط لها الارتفاع نفسه ونصف القطر نفسه . جد نسبة حجم الأسطوانة :

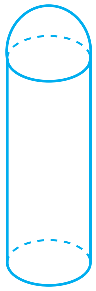
حجم نصف الكرة : حجم المخروط



⑫ سم كل مجسم ، ثم صل وبين شبكته فيما يلي :



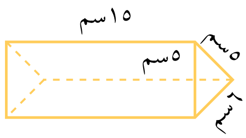
⑬ برج أسطواني الشكل سقفه على شكل نصف كرة فإذا كان ارتفاع البرج (عدا السقف) ٢٥ متراً وقطر قاعدته ٥ م. احسب كلاً من حجمه ومساحته المعرضة للهواء الخارجي .



⑭ وعاء هرمي الشكل حجمه ٣٠٠سم³. إذا كان ارتفاعه ٨ سم . أوجد مساحة قاعدته .

⑮ أسطوانة طول قطر قاعدتها ١٤ سم . وارتفاعها ١٠ سم . احسب كلاً من مساحتها الجانبية والكلية .

⑯ احسب مساحة المنشور الثلاثي في الشكل المجاور .



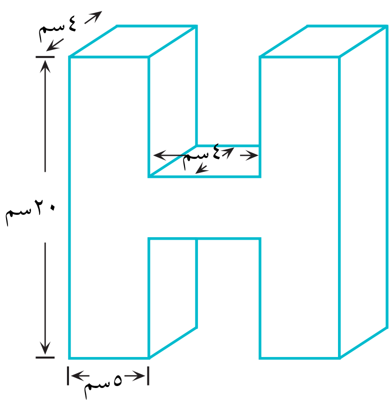
⑰ أوجد حجم كرة إذا علمت أن مساحة سطحها الخارجي ٦١٦ سم² .

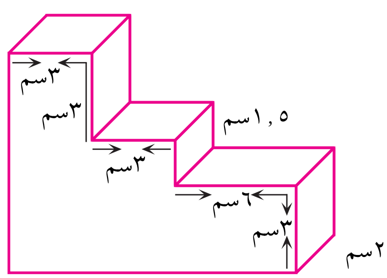
⑱ ملأنا صندوقاً بـ ٥٠ قطعة مكعبة من الصابون طول حرف الواحدة منها ٨,٢ سم.

أ) ما حجم الصندوق . ب) ما الأبعاد الممكنة للصندوق .

⑲ كرتان النسبة بين حجميهما ٢٧ : ٨ ، جد النسبة بين مساحتي سطحيهما .

⑳ أوجد حجم كل من الشكلين التاليين .





أعضاء اللجنة المكلفة بدراسة كتب الرياضيات وموازنتها للبنين والبنات في المرحلتين الابتدائية والمتوسطة والتي أوصت بهذا الكتاب.

١	د. عبدالعزيز الرويس	جهاز الوزارة	رئيساً
٢	د. عبدالله بن صالح المقبل	جهاز الوزارة	عضواً
٣	عويد بن عبدالله الزغيبي	جهاز الوزارة	عضواً
٤	عاطف محمد البطاطي	الإدارة العامة للتربية والتعليم بمنطقة مكة المكرمة (جدة)	عضواً
٥	عبدالله سعيد باجابر	الإدارة العامة للتربية والتعليم بمنطقة مكة المكرمة (جدة)	عضواً
٦	إلهام محمد كلنتن	شؤون تعليم البنات (المنطقة الغربية)	عضواً
٧	ابتسام سعيد منسي	شؤون تعليم البنات (المنطقة الغربية)	عضواً
٨	نور سعيد باقادر	شؤون تعليم البنات (المنطقة الغربية)	عضواً
٩	نجوى رجب الشوا	شؤون تعليم البنات (المنطقة الغربية)	عضواً
١٠	ناهدة أحمد فوزي	شؤون تعليم البنات (المنطقة الغربية)	عضواً

قام بمراجعة هذا الكتاب ومواءمته

أ. صلاح بن عبدالله الزيد	أ. محمد بن عبدالله البصيّص	أ. عويد بن عبدالله الزغيبي
أ. جهير بنت محمد المحيسن	أ. هدى بنت سليمان الأحيدب	أ. مها بنت راشد العقيلي

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية