Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

25X1

Page Denied

Next 3 Page(s) In Document Denied

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Analele Univ. C. I. Parhon - București
Seria St. Naturii nr. 14 — 1957

ASUPRA IPOTEZEI SECȚIUNILOR PLANE ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

PETRE P. TEODORESCU

1. Una din cele mai importante ipoteze care se fac în Rezistența materialelor, ipoteză care caracterizează această disciplină față de celelalte discipline din cadrul Mecanicii corpurilor continue deformabile, este ipoteza secțiunilor plane.

Această ipoteză are diferite aspecte după cum ne referim la o bară (grindă) sau la o placă (plană sau curbă). În cele ce urmează noi ne vom referi numai la o bară dreaptă supusă la o solicitare simplă : întindere sau compresiune simplă, forfecare simplă, încovoiere simplă sau răsucire simplă. Rezultatele rămîn valabile, prin suprapunerea efectelor, și în cazul unor solicitări compuse, cum sînt de pildă : întinderea sau compresiunea excentrică ; ele sînt valabile și în cazul încovoierii oblice (care este tot o solicitare simplă, obținută prin compunerea a două încovoieri simple în două plane principale de inerție).

2. Această ipoteză (cunoscută și sub numele de ipoteza lui J. Bernoulli în cazul încovoierii simple) se poate enunța în felul următor : „O secțiune plană și normală la fibra medie a barei înainte de deformație rămîne plană și normală la fibra medie deformată după deformație".

Pe baza acestei ipoteze se obține o variație liniară a deformațiilor specifice pe înălțimea secțiunii transversale a barei, ceea ce ne permite să găsim o distribuție a eforturilor unitare pe înălțimea aceleiași secțiuni ; rezultatele găsite pe această cale au un aspect mai simplu și deci o circulație mai largă în practica curentă.

Se pune însă problema valabilității acestei ipoteze. Aceasta se face atît pe cale experimentală cît și pe cale teoretică, prin metodele Teoriei elasticității. Ipotezele pe care se bazează Teoria elasticității sînt mult mai puțin restrictive decît cele care stau la baza Rezistenței materialelor. În orice caz Teoria elasticității nu face nicio ipoteză *a priori* cu privire la distribuția eforturilor unitare sau a deformațiilor specifice în interiorul unui corp elastic.

Problema barei drepte supusă la solicitări simple face parte dintre problemele elementare ale Teoriei elasticității (probleme în care deformațiile specifice și eforturile unitare, legate între ele prin legea liniară a lui Hooke, sînt funcții liniare de coordonatele punctului — deci ecuațiile de compatibilitate ale lui B. de St. Venant sînt identic verificate). Vom putea deci rezolva problema în eforturi folosind numai ecuațiile de echilibru ale unui element infinit mic și condițiile pe conturul corpului.

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

3. În cazul întinderii sau compresiunii simple, a forfecării simple sau a răsucirii simple se verifică cu ușurință că rezultatele date de Rezistența materialelor rămîn valabile în cadrul Teoriei elasticității, atît în ceea ce privește eforturile unitare cît și în ceea ce privește ipoteza secțiunilor plane care a fost făcută. În cazul încovoierii simple se verifică rezultatele privind distribuția eforturilor unitare dar nu se verifică ipoteza secțiunilor plane, ceea ce înseamnă că în acest caz reciproca nu mai este adevărată.

Ne-am propus ca în cele ce urmează să arătăm tocmai acest lucru, deoarece în diferitele lucrări sau tratate de Teoria elasticității — în baza unor demonstrații incomplete — se afirmă contrariul. Putem cita astfel cartea, devenită clasică, a lui Timoshenko [1]; multe cărți ulterioare de Teoria elaticității, inspirate de aceasta, repetă aceiași demonstrație incompletă.

Considerăm deasemenea util să arătăm care este aproximația care se face admițînd ca valabilă ipoteza secțiunilor plane.

4. Fie o bară dreaptă, de lungime l, încastrată la un capăt și supusă la un moment încovoietor M la celălalt capăt — moment ce acționează după un plan principal de inerție. Luăm ca sistem de axe un triedru drept cu origina în centrul de greutate al secțiunii încastrate, cu axa Ox după axa grinzii și astfel încît momentul M acționează în planul xOy. Momentul M este un moment negativ care încovoaie bara în jos, astfel încît fibra superioară este întinsă iar fibra inferioară este comprimată.

Se verifică apariția numai a efortului unitar normal

$$\sigma_x = -\frac{M}{I} y, \tag{1}$$

celelalte eforturi unitare fiind nule

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0. \tag{1'}$$

Aici I este momentul de inerție al secțiunii transversale în raport cu axa Oz.

Folosind legea lui Hooke generalizată, putem calcula alungirile specifice

$$\varepsilon_x = -\frac{M}{EI} y\,; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \mu \frac{M}{EI} y, \tag{2}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală iar μ este coeficientul lui Poisson.

Lunecările specifice corespunzătoare sînt nule.

Ținînd seama de relațiile lui Cauchy, care leagă deformațiile specifice de deplasări

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\,, \tag{3}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,, \tag{3'}$$

putem calcula pe acestea din urmă. Sistemul de ecuații este compatibil, după cum am menționat la pct. 2.

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Integrînd relațiile (3) și ținînd seama de (2), găsim

$$u = -\frac{M}{EI} xy + f_1(y, z),$$

$$v = \mu \frac{M}{2EI} y^2 + f_2(z, x), \tag{4}$$

$$w = \mu \frac{M}{EI} yz + f_3(x, y).$$

Folosind relațiile (3′) și punînd condiția ca origina O să nu se deplaseze și ca elementele plane în jurul ei să nu se rotească, pentru ca secțiunea din capătul din stînga să rămînă încastrată, găsim pentru deplasări următoarele expresii

$$u = -\frac{M}{EI} xy,$$

$$v = \frac{M}{2EI} [x^2 + \mu (y^2 - z^2)], \tag{5}$$

$$w = \mu \frac{M}{EI} yz.$$

5. Vom căuta să vedem ce se întîmplă cu diferite elemente ale barei după deformație.

Pentru aceasta observăm că, după deformație, punctul $M(x, y, z)$ devine $M_1(x_1, y_1, z_1)$ astfel încît

$$x_1 = x + u; \qquad y_1 = y + v; \qquad z_1 = z + w. \tag{6}$$

Fibra medie a barei are înainte de deformație ecuația

$$y = 0; \qquad z = 0. \tag{7}$$

După deformație, ecuațiile parametrice ale fibrei medii deformate vor fi (parametrul este variabila x)

$$x_1 = x; \qquad y_1 = -\frac{M}{2EI} x^2; \qquad z_1 = 0. \tag{7'}$$

Aceasta ne arată că fibra medie deformată este cuprinsă în planul xOy, deci este o curbă plană. Eliminînd pe x între primele două ecuații, constatăm că această curbă este o parabolă — rezultat diferit de cel pe care ni-l dă Rezistența materialelor, care afirmă că această curbă este un arc de cerc. Este drept însă că în cazul micilor deformații, care se presupun în Teoria liniară a elasticității, arcul de parabolă este aproximat foarte bine de arcul de cerc.

O secțiune plană, normală pe fibra medie înainte de deformație, are ecuația

$$x = x_0. \tag{8}$$

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

După deformaţie, această secţiune nu mai rămîne plană ; forma suprafeţii este dată de ecuaţiile parametrice

$$x_1 = x_0\left(1 - \frac{M}{EI}y\right),$$

$$y_1 = y + \frac{M}{2EI}\left[x_0^2 + \mu\left(y^2 - z^2\right)\right]. \tag{8'}$$

$$z_1 = z\left(1 + \frac{M}{EI}y\right),$$

unde y şi z sînt parametrii variabili.

Aceasta este o suprafaţă de gradul 4, care intersectează planul xOy după o parabolă. Remarcăm că ea devine un plan dacă $\mu = 0$, deci dacă se neglijează influenţa contracţiei transversale. Acest lucru nu are însă nicio influenţă asupra distribuţiei eforturilor unitare.

Dacă luăm o secţiune transversală cu contur dreptunghiular, este interesant de văzut ce se întîmplă după deformaţie.

Laturile

$$z = \pm\frac{b}{2}\ ;\ x = x_0 \tag{9}$$

devin

$$x_1 = x_0\left(1 - \frac{M}{EI}y\right),$$

$$y_1 = y + \frac{M}{2EI}\left[x_0^2 + \mu\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right)\right], \tag{9'}$$

$$z_1 = \pm\frac{b}{2}\left(1 + \frac{M}{EI}y\right).$$

Observăm că eliminînd pe y între prima şi a treia ecuaţie (9') căpătăm ecuaţia unui plan ; deci (9') reprezintă ecuaţiile unei curbe plane de gradul al doilea, în speţă o parabolă. **În cazul particular în care $\mu = 0$, această parabolă se poate aproxima cu o dreaptă. Aceasta este forma în care se tratează problema în diverse cărţi, de pildă în [1].**

Remarcăm deasemenea că punctele

$$x = x_0\ ;\qquad y = 0\ ;\qquad z = \pm\frac{b}{2}, \tag{10}$$

care erau la extremitatea axei neutre înainte de deformaţie, devin

$$x_1 = x_0\ ;\qquad y_1 = \frac{M}{2EI}\left(x_0^2 - \mu\frac{b^2}{4}\right);\quad z_1 = \pm\frac{b}{2}, \tag{10'}$$

deci se deplasează pe verticală cu mărimea y_1. Primul termen din expresia

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

lui y_1 provine din încovoierea (7′) a fibrei medii iar cel de al doilea din influența contracției transversale.

Laturile

$$y = \pm \frac{h}{2}; \quad x = x_0 \tag{11}$$

devin

$$x_1 = x_0\left(1 \mp \frac{M}{EI}\frac{h}{2}\right),$$

$$y_1 = \pm \frac{h}{2} \mp \frac{M}{2EI}\left[x_0^2 + \mu\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\right], \tag{11'}$$

$$z_1 = z\left(1 \pm \frac{M}{EI}\frac{h}{2}\right).$$

Prima ecuație (11′) ne arată că aceste curbe sînt cuprinse în plane normale la fibra medie înainte de deformație, deci în secțiuni plane înainte de deformație, paralele cu secțiunea pe care o studiem; latura de jos este cuprinsă într-o secțiune anterioară (mai apropiată de secțiunea de încastrare) iar latura de sus de cealaltă parte a secțiunii pe care o studiem. Se observă cu ușurință că aceste curbe sînt parabole.

Dacă neglijăm contracția transversală, aceste curbe devin drepte; cu toate acestea, în toate cărțile de specialitate ele sînt arătate drept parabole; nu este cu nimic justificat faptul că în unele cazuri se neglijează influența coeficientului lui Poisson iar altcori nu.

În ceea ce privește axa neutră, ea are ecuațiile

$$x = x_0; \quad y = 0. \tag{12}$$

După deformație acestea devin

$$x_1 = x_0; \quad y_1 = \frac{M}{2EI}\left(x_0^2 - \mu z^2\right); \quad z_1 = z, \tag{12'}$$

deci obținem o parabolă cuprinsă în planul normal la fibra medie înainte de deformație. Această curbă are o curbură redusă în raportul μ față de curba fibrei medii deformate și cu sensul invers acesteia; planul xOz devine astfel prin deformare o suprafață anticlastică.

6. Dacă studiem problema de mai sus, în cazul secțiunii transversale dreptunghiulare, presupunînd că avem o stare de tensiune plană, ajungem la rezultate analoage.

Secțiunea plană înainte de deformație, se transformă într-o suprafață cilindrică cu o curbă directoare parabolă. Acest rezultat era de așteptat, deoarece am văzut că suprafața de gradul 4 de mai sus intersecta planul xOy după o parabolă.

7. Faptul că ipoteza secțiunilor plane este o ipoteză aproximativă nu alterează deloc rezultatele cu privire la distribuția eforturilor unitare

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1

In bar[illegible] am considera[illegible]
cuno[illegible] care le facem[illegible]
folosim [illegible]

[illegible] de mecanica [illegible]
Facultatea de matemati[illegible]

BIBLIOGRAFIE

[1]. S. Timoshenko — J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Mc Graw Hill & Co., ed. II, 1952.

К ГИПОТЕЗЕ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Автор рассматривает гипотезу плоских сечений для призматических стержней особенно при чистом изгибе. Во всех классических работах (например в 1) утверждается, что эту гипотезу удовлетворяет теория упругости. Автор доказывает что гипотеза плоских сечений не подтверждается теорией упругости как только при пренебрежении сужения (т. е. коэффициента Пуассона).

При этом автор рассматривает различные случаи деформации поперечного сечения стержней подверженных чистому изгибу.

SUR L'HIPOTHÈSE DES SECTIONS PLANES EN RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Résumé

L'auteur s'occupe de l'hipothèse des sections planes pour les barres prismatiques surtout dans le cas de la flexion pure. Dans tous les traités classiques (par exemple [1]) on affirme que cette hypothèse est vérifiée par la Théorie de l'élasticité. L'auteur démontre que l'hypothèse des sections planes n'est justifiée par la Théorie de l'élasticité que si l'on néglige la contraction transversale (c'est à dire le coefficient de Poisson μ).

À cette occasion, l'auteur fait diverses considérations sur la déformation de la section transversale des barres soumises à une flexion pure.

Approved For Release 2008/12/04 : CIA-RDP80T00246A003400020001-1