Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

50X1-HUM

Page Denied

Next 6 Page(s) In Document Denied

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

ACADEMY OF SCIENCES OF THE UKRAINIAN SSR
INSTITUTE OF MATHEMATICS

YU.A.MITROPOLSKY
USSR

THE METHOD OF INTEGRAL MANIFOLDS IN THE THEORY OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

STAT

Kiev - 1962

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Recently, a new approach to the investigation of behaviour of the differential equations solutions, the so-called method of integral manifolds, has been developed and applied in the Soviet Union and in the USA.

The idea of the method, which belongs to N.N. Bogoliubov, was stated by him in 1945 in a monograph: "On Some Statistical Methods in Mathematical Physics". In this monograph, a particular problem concerned with properties of the solutions of equations in standard form is considered.

At present this idea has been greatly generalized and has been applied when studying a sufficiently large class of differential equations that the investigation of various stability problems suggests.

Let us explain briefly the general idea of the

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

method, before we proceed to deal with a number of concrete classes of equations, for which the method of integral manifolds allows to obtain interesting theorems revealing some general properties of integral curves, and to consider the basic methods of the theory and analyze the developments and results recently obtained.

First of all we shall give the analytical definition of an integral manifold for a system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, \varepsilon), \qquad (1)$$

where x, X are vectors of an n - dimensional Euclidian space E_n, t is time, ε is a small positive parameter, and the right-hand sides of system /1/ satisfy certain sufficiently general conditions for $-\infty < t < \infty$ and x contained in the open set $U_n \in E_n$.

Suppose that to each t in the interval $(-\infty, \infty)$ there corresponds a certain set S_t of points x which can be represented analitically in a parametrical form by several functions

$$x = f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s), \qquad (2)$$

where $f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s)$ satisfy Lipschitz's conditions with respect to $C_1, C_2, \ldots, C_s$ in the whole range of their variation.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Then S_t will be said to be an s - dimensional ($s \leq n$) integral manifold for equation /I/ , if for every solution $x = x(t)$ of this equation the relation

$$x(t) \in S_t \tag{3}$$

which holds for some moment $t = t_0$, will hold for every real value of t .

Geometrically interpreted, the integral manifold S_t represents a hypersurface having the property that if some value of the solution of a system of equations lies on the integral manifold /on the hypersurface/, then the whole of the solution will also lie on the manifold /on the hypersurface/.

Originally in the paper [3] the idea of the theory of integral manifolds was applied to the following particular problem. A particular case of equations /I/ is considered, when the right-hand side of the system is proportional to a small parameter, the so-called equations in standard form:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x). \tag{4}$$

Assuming that for every $x \in U_n$ we have

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} X(t, x)\, dt = X_0(x) \tag{5}$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

uniformly with respect to t in the interval $(-\infty, \infty)$ simultaneously with system /4/ the averaged equation

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x) \qquad (6)$$

is considered. Then a fairly complex problem is solved for equations /4/, viz., to establish a series of agreements between such properties of exact solutions /those of system /4/ / and approximate solutions /those of the averaged system /6/ / as are dependent on their behaviour in the infinite interval.

Thus, for instance, in many cases of importance /as shown below/ the averaged equations /6/ allow invariant manifolds of toroidal type. In this connection, the following question is of interest: will the integral manifolds of the exact equations /4/ lie in sufficiently close neighbourhood to the toroidal manifolds above and to what extent will they be stable?

It should be noted that by using certain changes of variables, the exact equations /4/ can be reduced to a special form in which the right-hand sides differ from those of the averaged equations by terms of higher order of smallness. Hence, the

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

problems arising herein possess a certain analogy to the problem of the existence of periodic solutions in A.Poincaré's local theory.

However, while in Poincaré's theory the problem is reduced to the investigation, by employing the theorem of implicit functions, of the solvability of a system of ordinary equations with a finite number of unknows, which contains a small parameter, the theory of integral manifolds deals with functional equations determining the functions which characterise the integral manifolds in question.

At this point, it is to be noted specifically that independently of the mentioned above problem of the correspondence between the exact and approximate solutions of system /4/ /i.e.between the solution of system /4/ and those of system /6/ / , which is a problem of substantiating the averaging method, the construction of even a local theory of integral manifolds for system /4/ is of great interest in itself owing to the fact that the qualitative investigation of the solutions of system /4/ will be greatly simplified , if these lie on a manifold of smaller dimensionality than the initial phase space.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

A special feature of the ideas being developed in the method of integral manifolds is the new approach to the qualitative theory of differential equations. We consider here two systems of differential equations - the exact equations /4/ and the approximate equations /4/, the difference between their right-hand sides being asymptotically small. It is known that individual solutions, as a rule, are very sensitive to small changes of the right-hand sides of the equations.

Our theory deals not with individual solutions /curves/ but with integral manifolds /hypersurfaces/. And it appears that an integral manifold is a more stable formation with a respect to small changes of the right-hand sides of equations than individual solutions. In many cases theorems of the following type can be proved: if the approximate equations /6/ have a certain integral manifold, then the exact equations /4/ will also allow an integral manifold which lies in an asymptotically narrow neighbourhood of the approximate system. At the same time, similar theorems for individual solutions are obtainable only under sufficiently rigid conditions imposed

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

on the right-hand sides of equations /4/ and /6/.

It seems quite opportune to emphasize here the fact that the very existence of an integral manifold for the exact equations/4/ is of great importance also for the study of their individual solutions, for now, instead of considering the whole phase space, it is possible to concentrate upon the consideration of solutions lying on the integral manifold - the hypersurface.

After the preliminary remarks above and briefly characterizing the basic features of the method of integral manifolds, as applied to equations of the /4/ type, we proceed first of all to the consideration of the typical systems of differential equations containing a small parameter, for which the applying the ideas of the method of integral manifolds proves to be very effective.

The method of integral manifolds can be effectively applied when investigating not only the systems listed above, to which many problems of quasi-linear vibrations theory reduce, but also many complicated differential systems containing a small parameter.

Thus, the method may be applied to systems which are near to autonomous, such as

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon X^*(x, \tau, \theta) \qquad (7)$$

and systems which are near to non-autonomous, such as

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \varepsilon X^*(t, x, \varepsilon) \qquad (8)$$

ε being a small positive parameter, x, X, X^* – n-dimensional vectors Euclidean space E_n.

Furthermore, the right-hand sides of the equations /7/ and /8/ are periodic or almost periodic in t.

With a number of assumptions, numerous problems of the theory of oscillations /such as oscillations of system with many degrees of freedom and remote form being [illegible], relaxation oscillations, etc./ will be reduced to systems of type /7/ and /8/.

It is also possible to consider more general systems of differential equations of the form

$$\frac{dx}{dt} = X(\tau, x) + \varepsilon X^*(\tau, \theta, x, \varepsilon), \qquad (9)$$

$$\frac{dx}{dt} = X(\tau, \theta, x) + \varepsilon X^*(\tau, \theta, x, \varepsilon) \qquad (10)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

/ $\tau = \varepsilon t$ is slow time, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ /, in which the possibility of a slow variation of a number of parameters is taken into account or systems of equations of the most general form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(\theta, x, y) + \varepsilon X^*(\theta, x, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon Y(\theta, x, y), \end{aligned} \qquad (11)$$

where x, X, X^* are n - dimensional vectors and y, Y are m -dimensional vectors of $(n+m)$ - dimensional Euclidian space E_{n+m}, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$.

The method of integral manifolds can be applied with success in investigating systems of equations of the form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(t, x, y), \\ \varepsilon\frac{dy}{dt} &= Y(t, x, y) \end{aligned} \qquad (12)$$

/where x, X are n - dimensional vectors and y, Y are m - dimensional ones/, that the study of relaxation oscillatory systems gives. As is known, the system /12/ reduces to equations of the form /11/ by simple transformations. However there is a number of cases when it is convenient to consider system in the form /12/.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

It is usually expedient to make easier the application of the method of integral manifolds to the investigation of systems listed above by means of transforming the latter to new variables and reducing them to such a form which would take into consideration their specific features and enable us to evaluate the terms of the higher order of smallness which are being dropped in order to derive approximate equations.

These transformations usually reduce systems of equations to cylindric or polar coordinates, the substitution essentially depending on the form of particular solutions of appropriate non-perturbed equations, which are obtained at $\varepsilon = 0$.

After appropriate transformations the systems of equations reduce, in general case, to the systems of the type :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= \alpha_1(t,\varphi,\psi,a,b) + S_1(t,\varphi,\psi,a,b,\varepsilon),\\
\frac{d\psi}{dt} &= \alpha_2(t,\varphi,\psi,a,b) + S_2(t,\varphi,\psi,a,b,\varepsilon),\\
\frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(t,\varphi,\psi,a,b) + A_2(t,\varphi,\psi,a,b,\varepsilon),\\
\frac{db}{dt} &= B_1(t,\varphi,\psi)\,b + B_2(t,\varphi,\psi,a,b,\varepsilon),
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

where $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, φ, ψ, a, b are vectors of k, ℓ, m, n - dimensions respectively.

For the systems of differential equations listed above there is stated a number of theorems on existence of properties of integral manifolds, there are developed the rules of effective constructing the integral manifolds. Thanks to the latter, the investigation of solutions of the initial system is greatly simplified and in some cases may be completed.

We shall state a few typical theorems obtained by our method.

We consider a system of equations in standard form /4/ and the corresponding system of the first approximation /6/.

The following theorem is proved :

Theorem /N.N.Bogoliubov [4] / .

Let an equation /6/ has a periodic solution $x = \xi(\omega t)$, $\xi(s) = \xi(s + 2\pi)$ and the real parts of the $n-1$ characteristic exponents of the variational system of equations for a solution $\xi(\omega t)$

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X'_{ox}(\xi(\omega t))\delta\xi \qquad (14)$$

are different from zero. Assume also that $X(x,t)$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

is almost periodic in t, uniformly continuous with respect to x in ρ - neighbourhood U_ρ of a periodic solution $\xi(\omega t)$ and has partial derivatives with respect to x up to the second order, which are bounded and uniformly continuous in x for

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in U_\rho. \tag{15}$$

Under these assumptions there exist positive numbers ε_0, σ_0 $(\sigma_0 < \rho)$ such that for every ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ we have :

I/ equation /4/ has a unique integral manifold S lying in U_{σ_0} for all t, parametrically represented by

$$x = f(t, \theta, \varepsilon), \tag{16}$$

where f is defined for all real t and θ, periodic in θ of period 2π and almost periodic in t uniformly with respect to θ with frequency basis of functions $X(t, x)$. In addition the following inequality is satisfied :

$$\| f(t, \theta, \varepsilon) - \xi(\theta) \| \leq \delta(\varepsilon), \tag{17}$$

where $\delta(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, $f(t, \theta, \varepsilon)$ has uniformly continuous derivatives with respect to θ up to the second order;

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

2/ there exists a function $F(t,\theta,\varepsilon)$ defined for all real t; θ, periodic in θ of period 2π and almost periodic in t uniformly with respect to θ, having continuous derivatives up to the second order, such that equation /4/ on manifold S is equivalent to the equation

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon F(t,\theta,\varepsilon); \qquad (18)$$

3/ if the cylinder of periodic solutions $g(\omega t+\varphi)$, where φ is an arbitrary constant of equations/6/, is stable, unstable or conditionally stable with respect to an s - dimensional manifold, then the integral manifold S of equation /4/ is stable, unstable or conditionally stable with respect to the s - dimensional manifold. The manifold S will be referred to as <u>stable</u> if there exist neighbourhoods U_1, U_2 of dimensionality $n+1$ of the manifold S, $U_1 \subset U_2$ such that for every solution $x(t)$ of the equation /4/ $x(t) \in U_2$ will follow from $x(t_0) \in U_1$ for all $t \geq t_0$ and $x(t) \to S$ as $t \to \infty$. If for every $x(t)$ from $x(t_0) \in U_1 - S$ we have $x(t) \not\to S$ as $t \to \infty$, then S will be referred to as <u>unstable</u>. If U_1 is of dimensionality $s < n+1$ and if for every $x(t)$ from $x(t_0) \in U_1$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

there follows $x(t) \in U_2$ for $t \geq t_0$ and $x(t) \to S$ as $t \to \infty$, and if $x(t_0) \in U_2 - U_1$ with $x(t) \not\to S$ for $t \to \infty$, then S will be said to be <u>conditionally stable</u> with respect to an S - dimensional manifold.

Recently, some mathematics in the Soviet Union as well as in the USA have proved a series of theorems of the above type. Thus, the following theorem holds :

Theorem /Yu.A.Mitropolsky [30] / :

Assume that the following conditions are satisfied for system of the differential equations/7/ :

a/ the equation of "unperturbed" motion

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \tag{19}$$

has a periodic solution

$$x = x^0(\psi), \quad x^0(\psi + 2\pi) = x^0(\psi) \tag{20}$$

depending on the arbitrary constant φ $(\psi = \omega t + \varphi)$;

b/ the real parts of all $n-1$ characteristic exponents for the variational equation

$$\frac{d\delta x}{dt} = X'_x(x^0)\,\delta x, \tag{21}$$

corresponding to the periodic solution /20/ are different from zero;

c/ it is possible to find a ρ - neighbourhood D_ρ, outside of the periodic solution /20/ that on

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

ε_0 , such that in region $-\infty < t < \infty$, $x \in D_\rho$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ the functions

$$X(x) + \varepsilon X^*(\nu t, x, \varepsilon) \qquad (22)$$

are unboundedly differentiable with respect to x and ε and possess bounded and uniformly continuous derivatives in the same region;

d/ the functions $X^*(\nu t, x, \varepsilon)$ are periodic in νt of period 2π , or there exists for them an average in t .

Then positive numbers ε and σ $(\sigma < \rho;\ \varepsilon' < \varepsilon_0)$ such that for every positive $\varepsilon < \varepsilon'$ the following statements hold :

I/ equation /7/ has only one integral manifold lying in the region

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\sigma, \ 0 \le \varepsilon < \varepsilon' \qquad (23)$$

and parametrically representable by

$$x = x^0(\psi) + \frac{1}{2}\left\{A(\psi)h(\nu t, \psi, \varepsilon) + \bar{A}(\psi)\bar{h}(\nu t, \psi, \varepsilon)\right\} + \Phi(\nu t, \psi, \varepsilon), \qquad (24)$$

where $\Phi(\nu t, \psi, \varepsilon)$ is defined in region $-\infty < t < \infty$, $\psi \in \Omega$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon'$ and has a period 2π in ψ ;

II/ for the solutions lying on manifold /24/ system /7/ is equivalent to the equation

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon F(\nu t, \psi, \varepsilon), \qquad (25)$$

in which function $F(\nu t, \psi, \varepsilon)$ is defined in the

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

region $-\infty < t < \infty$, $\psi \in \Omega$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, unboundedly differentiable with respect to ψ and periodic in ψ of period 2π;

3/ manifold /24/ possesses the same properties of stability, unstability, or conditional stability as the cylinder of periodic solutions /20/.

The investigation of integral manifolds appears to be more complicated for system /7/, if the equation of "unperturbed" motion /19/ has a static solution or a family of periodic solutions depending on more than one arbitrary constant /two, for instance/.

In such cases we meet with difficulties which prevent us from studying the properties of integral manifolds in the whole phase space and confine us to the consideration of only local manifolds.

Here the following theorem holds.

Theorem /O.B.Lykova [22] /.

Assume that the following condition are satisfied for system of the differential equations /7/:

a/ the system of "unperturbed" equations /19/ has an isolated static solution

$$x = 0, \quad X(0) = 0 \quad (X'_x(0) \neq 0); \qquad (26)$$

b/ the functions $X(x) + \varepsilon X^*(t, x, \varepsilon)$ in the region

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_{\varepsilon_0}, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{27}$$

where D_{ε_0} is a ε_0 - neighbourhood of the point $x=0$ are periodic in $\forall t$ of period 2π and possess bounded and uniformly continuous derivatives with respect to x, ε of any order;

e/ for the variational equations

$$\frac{d\delta x}{dt} = X'_x(0)\,\delta x \tag{28}$$

corresponding to the static solution /26/, the characteristic equation

$$|\mathcal{D}_n z - A| = 0 \qquad (A = X'_x(0)) \tag{29}$$

has two purely imaginary roots $\pm i\omega$, while the other roots have negative real parts.

Then positive numbers ε', δ_1, ρ_1 can be pointed out such that for every positive $\varepsilon < \varepsilon'$, $\delta < \delta_1$, $\rho < \rho_1$ the following statements will hold:

I/ equation /7/ has only one two-dimensional local *) integral manifold $\mathfrak{M}_t$ parametrically representable by

---

*) $\mathfrak{M}_t$ will be said to be a local integral manifold, if from the relation $x(t_0, \xi_0, \xi_0^*, \varepsilon) \in \mathfrak{M}_t$, $|\xi_0| < \rho_1$, $|\xi_0^*| < \rho_1$ valid for $t = t_0$ follows $x(t, \xi_0, \xi_0^*, \varepsilon) \in \mathfrak{M}_t$ for any t so long as $|\xi_t| < \rho_1$, $|\xi_t^*| < \rho_1$.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$$x''(t) = A\xi + B\xi'' + Dh = F(\nu t, \xi, \xi'', \varepsilon), \qquad (31)$$

where A, B are constant n-dimensional vectors, D - a constant matrix of n rows and $n-2$ columns, and lying in the region U_{ξ}^{ε}. The function $F(\nu t, \xi, \xi'', \varepsilon)$ is defined in the region

$$-\infty < t < \infty, \quad |\xi| < \rho_1, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon', \qquad (32)$$

has bounded and uniformly continuous derivatives with respect to ξ, ξ'', ε of any order, and possesses a period 2π in νt;

2/ on the local integral manifold $\mathfrak{M}_t$ equation /7/ is equivalent to the following system:

$$\frac{d\xi_t}{dt} = i\omega\xi_t + P_1(t, \xi_t, \xi_t'', \varepsilon),$$
$$\frac{d\xi_t''}{dt} = -i\omega\xi_t'' + Q_1(t, \xi_t, \xi_t'', \varepsilon); \qquad (32)$$

3/ the local integral manifold $\mathfrak{M}_t$ attacts /so long as $|\xi_t| < \rho_1$, $|\xi_t''| < \rho_1$ / every solution of system /7/, whose initial values belong to the region U_{δ_1}.

The above theorem is of interest in connection with the study of the behaviour of integral curves in the vicinity of the origin, and a number of conclusions can be made therefrom with regard to the stability problem in the critical case for permanently active perturbations, etc.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Also the more general theorem can be proved:

Theorem /O.B.Lykova [83]/

Assume that for the system of equations /7/ the following conditions are satisfied :

a/ assume that for the system of unperturbed equations

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \qquad (33)$$

a family of periodic solutions is known

$$x = x^{\circ}(\omega t + \varphi, a) \quad (\omega t + \varphi = \psi) \qquad (34)$$

of period 2π in ψ, depending on two arbitrary constants a and φ, ω being a function of a in the general case

$$\omega = \omega(a); \qquad (35)$$

b/ for the system of variational equations

$$\frac{d\delta x}{dt} = X'_x(x^{\circ})\delta x \qquad (36)$$

corresponding to the periodic solution /34/, $n-2$ characteristic exponents

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} \qquad (37)$$

have negative real parts, while the two characteristic exponents α_n, α_1 are equal to zero by virtue of the existence of a two parametric family of periodic solutions /34/:

c/ $\Delta(a) \neq 0$ for $a \in \mathfrak{A}$ / $\mathfrak{A}$ being the interval of variation $a - (a_1, a_2)$ on

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

which a does not become zero/, where

$$\Delta(a) = \min_{\psi} \left| D(a,\psi,h) \right|_{h=0} = \min_{\psi} \left| \frac{\partial x^{\circ}}{\partial \psi}, \frac{\partial x^{\circ}}{\partial a}, \frac{1}{2}(\hat{A}+\bar{A}) \right| \quad (30)$$

in which $\hat{A}(\psi,a)$ is a matrix of n rows and $n-2$ columns, whose elements depend on a and are periodic in ψ of period 2π;

d/ there exists a certain neighbourhood U_{ρ}° of the curve $x = x^{\circ}(\omega t + \varphi, a)$, $\varepsilon = 0$ in an $n+1$ - dimensional space for which the functions

$$X(x) + \varepsilon X^{*}(\nu t, x, \varepsilon)$$

and their partial derivatives of any order with respect to x and ε are bounded and uniformly continuous for

$$-\infty < t < \infty;$$

e/ the functions $X^{*}(\nu t, x, \varepsilon)$ are periodic in t of period $\frac{2\pi}{\nu}$ uniformly with respect to x and ε in the region U_{ρ}°.

Then positive numbers ε', σ_1 $(\sigma_1 < \sigma_0, \varepsilon' < \varepsilon_0)$ can be given such that for any positive $\varepsilon < \varepsilon'$ the following statements will be true:

I/ equation /7/ has only one 2- dimensional local integral manifold $\mathfrak{M}_t$ on region U_{σ_1} and parametrically representable by

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$$x = x^{\circ}(\psi, a) + \frac{1}{2}\left\{A(\psi, a) f(t, \psi, a, \varepsilon) + \right.$$
$$\left. + \bar{A}(\psi, a) \bar{f}(t, \psi, a, \varepsilon)\right\} = F(t, \psi, a, \varepsilon), \qquad (39)$$

where $F(t, \psi, a, \varepsilon)$ is defined in region

$$-\infty < t < \infty, \ \psi \in \Omega, \ a \in \mathfrak{A}, \ 0 < \varepsilon < \varepsilon' \qquad (40)$$

/region $\mathfrak{A}$ being characterised by the locality of manifold $\mathfrak{M}_t$ has a period 2π in t and ψ and possesses bounded and uniformly continuous derivatives with respect to ψ, a, ε of any order;

2/ on the local integral manifold $\mathfrak{M}_t$ equations /7/ are equivalent to the system

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(a) + P_j(t, \psi, a, \varepsilon),$$
$$\frac{da}{dt} = Q_j(t, \psi, a, \varepsilon), \qquad (41)$$

where the right-hand sides P_j and Q_j are defined in region /40/, they are periodic functions of t and ψ of period 2π and have bounded and uniformly continuous derivatives with respect to ψ, a, ε of any order;

3/ the local integral manifold $\mathfrak{M}_t$ is stable, i.e. it attracts any solutions of system /9/, whose initial values belong to region U_{a_0} /so long as $a \in \mathfrak{A}$ /.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

We now briefly consider the general idea of the method of proving the above theorems of the existence and properties of integral manifolds.

One of the important steps of proof is the reduction of the equations to the form /I3/ convenient for further consideration and proof of auxiliary lemma.

An inherent difficulty in this reduction /especially in reducing the equations to the standard form /4/ / is the transformation of variables such that in the new equations the time t is contained in the terms of higher order of smallness. Thereafter, a family of solutions for the system in question is sought so as to belong to a specially selected class of functions. For this purpose, the first equation /or the first two equations/ is considered, in which h is replaced by an arbitrary function belonging to the given class, and then the solution of some functional equation is found by using the fixed point law. Then for the manifold obtained the periodicity or almost-periodicity with respect to t and the property of stability are established from the fact that this manifold satisfies the equation.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

At this point, it seems to be particularly useful and interesting to note that the integral manifold can be computed by successive approximations /since the transformation as obtained from the differential system in the process of proving the existence and oneness of the integral manifold is a reversible one, transferring each term $C(D,\Delta)$ of the class of functions $F(t,\theta,\varepsilon)$ into $C(D,\Delta)$ /.

A very important point in the method of proof of all the previous theorems, is the fact that by this method the existence of an integral manifold can be proved without making a special assumption as to the dependence of the right-hand sides of the equations on time. The above allows the method to be applied in considering the properties of integral manifolds of systems of differential equations of type /8-10/.

For example, the following theorem can be proved :

Theorem /Yu.A.Mitropolsky [32] /.

Let for system of equations

$$\frac{dx}{dt} = X(\tau,x) + \varepsilon X^{*}(\tau,\theta,x,\varepsilon), \qquad (9)$$

where $\tau = \varepsilon t$ is the "slow" time, ε - a small po-

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

sitive parameter, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau) > 0$, the following conditions are fulfilled :

a/ for the unperturbed equations

$$\frac{dx}{dt} = X(\tau, x) \tag{42}$$

in which τ is assumed to be a constant parameter, a family of stable periodic solutions

$$x = x^{\circ}(\tau, \omega t + \varphi) \tag{43}$$

of period 2π in ψ $(\psi = \omega t + \varphi)$ is known for any τ $(-\infty < \tau < \infty)$ depending on one arbitrary constant and, consequently, $n-1$ characteristic exponents $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \ldots, \alpha_{n-1}(\tau)$ for the variational system of equations

$$\frac{d\delta x}{dt} = X'_x(\tau, x^{\circ})\delta x \tag{44}$$

written down for equations /42/ and solution /43/ have negative real parts;

b/ there exist ρ and ε_0 such that in region

$$-\infty < t < \infty, \quad x \in D_\rho, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{45}$$

where D_ρ is a ρ - neighbourhood of orbit /43/ in an n - dimensional space E_n , the functions

$$X(\tau, x) + \varepsilon X^{*}(\tau, \theta, x, \varepsilon) \tag{46}$$

/ $\tau = \varepsilon t$, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ / are periodic in θ of period 2π , bounded and have a sufficient number of bounded derivatives with respect to x , t , ε .

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Under these conditions positive constants ρ^*, ε^* ($\rho^* < \rho$, $\varepsilon^* < \varepsilon_0$) can be pointed out such that any positive $\varepsilon < \varepsilon^*$ the system of equations /9/ has only one one-parametric manifold representable by relations of the form

$$x(\varepsilon t, \theta, \psi) = f(\varepsilon t, \psi, h(\varepsilon t, \theta, \psi, \varepsilon)). \qquad (47)$$

For solutions lying on this integral manifold, system /9/ is equivalent to one differential equation of the form

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \omega(\tau)\psi + \varepsilon P(\tau, \theta, \psi, \varepsilon), \qquad (48)$$

where $\tau = \varepsilon t$; the manifold possesses the property of stability, meaning that every solution of system /9/ whose initial values lie in region D_ρ^*, is in the course of time attracted to the manifold following the relationship

$$|x(\varepsilon t, \theta, \psi) - x(t)| \leq C e^{-\gamma(t-t_0)}, \qquad (49)$$

where $x(t)$ denotes any solution of system /9/, and C, γ are positive constants. Above theorems can be greatly extended and proved for more general and less rigorous conditions superposed on the right-hand sides of the equations and the structure of solutions of the "unperturbed" equations.

By using basically the procedure of proof as described generally above, some theorems have been proved in [12], [13] for somewhat more general con-

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

ditions.

Theorem / J.K.Hale [13] /.

Consider the system of equations

$$\theta' = d(\varepsilon) + \varepsilon b(t,\theta) + H(t,\theta,y,z,\varepsilon),$$

$$z' = \varepsilon a(t,\theta) + \varepsilon C(t,\theta) z + \varepsilon Z(t,\theta,y,z,\varepsilon), \qquad (50)$$

$$y' = Ay + Y(t,\theta,y,z,\varepsilon),$$

where θ, y, z are vectors, $d(\varepsilon)$ - vector ; H, Y, Z - are continuous and have continuous first partial derivatives with respect to t, θ, y, z ; A - constant matrix; $a(t,\theta)$, $b(t,\theta)$, $c(t,\theta)$ are continuous and have continuous first partial derivatives with respect to t and θ.

If the average values of the functions $a(t,\theta)$, $b(t,\theta)$ with respect to t and θ are equal to zero $M_{t,\theta}\{c(t,\theta)\} = C^*$, and the characteristic numbers of the matrices A, C^* have nonzero real parts, then there exists an $\varepsilon_1 > 0$ such that for $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ system /50/ has in the neighbourhood $y = 0$, $z = 0$ a unique integral manifold

$$y = f(t,\theta,\varepsilon), \quad z = g(t,\theta,\varepsilon) \qquad (51)$$

which possesses the definite property of stability.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

In studying the question of the perturbation of limiting cycles, a system of vector equations

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^i), \qquad (52)$$

is considered in [12], where x^i, X^i are vectors of dimension n_i, $X^i \in C^1(U^{n_i})$ with U^{n_i} denoting open sets in E_{n_i}. It is assumed that for system /52/ a family of periodic solutions is known

$$x^i = x^{i_0}(\omega_i t + \varphi), \qquad (53)$$
$$x^{i_0}(s+\pi) = x^{i_0}(s)$$

in which $i = 1, 2, \ldots, p$.

Simultaneously with system /52/, the following equations are considered:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \ldots, x^p, t, \varepsilon) \quad (i=1,2,\ldots,p) \qquad (54)$$

in which ε is a small positive parameter, the functions $X^i(x^1, \ldots, x^p, t, \varepsilon)$ with their first and second derivatives with respect to $x^1, \ldots, x^p$ are bounded and uniformly continuous in region $-\infty < t < \infty$, $x^i \in U^{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ and also

$$X^i(x^1, \ldots, x^p, t, 0) = X^i(x^i) \quad (i=1,2,\ldots,p). \qquad (55)$$

It is obvious that the functions /53/ represent a p - dimensional torus of solutions of system /54/

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

for $\varepsilon = 0$.

Under these assumptions the following theorem is proved :

Theorem / J.K.Hale [12] /.

Assume that for each $i = 1, 2, \ldots, p$ the real parts of the $(n_i - 1)$ -th characteristic exponent of the variational system of equations

$$\frac{d\delta x^i}{dt} = X^{i'}_{\alpha}(x^{i_0})\,\delta x^i \qquad (56)$$

are different from zero. Then there exist positive constant ε_0 , σ_0 such that for every $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ we have :

I/ equation /54/ has only one integral manifold S lying for all real t in region $U^{n_1}_{\sigma_0} \times \ldots \times U^{n_p}_{\sigma_0}$, where U_{σ_0} is a σ_0 - neighbourhood of x^{i_0}. This manifold is parametrically representable by

$$x^i = f^i(t, \theta_1, \ldots, \theta_p, \varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \qquad (57)$$

where the functions $f^i(t, \theta_1, \ldots, \theta_p, \varepsilon)$ are defined for all real $t, \theta_1, \ldots, \theta_p$, periodic in θ_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) of period 2π and satisfy the inequalities :

$$\left| f^i(t, \theta_1, \ldots, \theta_p, \varepsilon) - x^{i_0}(\theta_i) \right| \leq \delta(\varepsilon), \qquad (58)$$

where $\delta(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$, and have uniformly continuous derivatives with respect to $\theta_1, \ldots, \theta_p$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

up to the second order;

2/ on manifold S system /54/ is equivalent to the equations

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \varepsilon F^i(t, \theta_1, \dots, \theta_p, \varepsilon), \qquad (59)$$

where the functions $F^i(t, \theta_1, \dots, \theta_p, \varepsilon)$ are defined for all real t, $\theta_1, \dots, \theta_p$, periodic in θ_i $(i = 1, 2, \dots, p)$ of period 2π and have bounded and uniformly continuous derivatives with respect to $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ up to the second order;

3/ if the p - dimensional torus of solutions /53/ of system /58/ is stable, unstable or conditionally stable with reference to the manifold of dimension s then the integral manifold S of /57/ is stable, unstable or conditionally stable with reference to the manifold of dimension s.

Most interesting results can be obtained if the integral curves lying on the manifold lend themselves to investigation. In this case there can be proved theorems of such a form :

Theorem /Yu.A.Mitropolsky [30] / :

Suppose that for system of equations /7/ the conditions of second theorem are fulfilled and, in addition, that $X^n(\nu t, x, \varepsilon)$ are periodic functions in νt of period 2π.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Then positive numbers ε' and σ $(\varepsilon' < \varepsilon_0, \sigma < \rho)$ can be pointed out such that for any positive $\varepsilon < \varepsilon'$ the system possesses an integral manifold S_ε /represented by a torus/ which satisfies the conditions of theorem II .

The solutions of system /7/ lying on this integral manifold can be represented by

$$x(t) = x^*(\psi(t)) + \frac{1}{2}\left\{A(\psi(t))h(\nu t, \psi(t), \varepsilon) + \bar{A}(\psi(t))\bar{h}(\nu t, \psi(t), \varepsilon)\right\} = \Phi(t, \varepsilon, \mu, t + \psi_0), \quad (60)$$

$$\psi_0 = \text{const}$$

and are characterized by a certain number $\bar{\nu}$, i.e. they are quasi-periodic or periodic depending on whether the number $\bar{\nu}$ is irrational or rational.

In the latter case, every non-periodic solution lying on this integral manifold approaches one of such periodic solutions.

And, finally, any solution of equations /7/ , which passes at $t = t_0$ through some point of region U_σ , approaches as $t \to \infty$ one of the stationary solutions mentioned lying on the manifold S_ε . This tendency of approach is sufficiently rapid if the $(R-1)$-th negative real part of the characteristic exponents is large.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

enough in absolute value.

Interesting results have been obtained, concerning the application of the integral manifolds method to the stability problems and relaxation vibrations.

Consider two systems of differential equations:

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad t \geq 0, \tag{61}$$

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + X^{*}(t,x), \quad t \geq 0, \tag{62}$$

where x, X, X^{*} are real n - dimensional vectors and X, X^{*} satisfy the conditions which guarantee the uniqueness of the solutions of these systems.

The investigation of systems /61/ and /62/ with the integral manifolds method comes down to establishing the existence comparing the properties of the manifolds for these systems. It is established for which types of the "perturbing" functions the properties of the manifold of system /62/ are the same as those of the manifold of system /60/.

The following theorems are interesting :

Theorem / J.K.Hale and A.Stokes[11] / .

Assume that the system of equations /61/, where x, X are real n - dimensional, $X \in C^{1}$.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

has a $k+1$ - parametric family of real periodic solutions :

$$x = x^{\circ}[\omega(a)t + \varphi, a], \qquad (63)$$
$$x^{\circ}(s+2\pi, a) = x^{\circ}(s, a),$$

where $a = (a_1, \dots, a_k)$, φ are real constants $x^{\circ}(s,a) \in C^2(s)$, $x^{\circ}(s,a) \in C^2(a)$, $\omega(a) > 0$, $\omega(a) \in C^2$, $a \in U$ in which U is one of the open sets E_k or a unique point, in the latter case $k = 0$.

If $n-(k+1)$ characteristic exponents $\alpha_1(a), \dots, \alpha_{n-(k+1)}(a)$ of a system of linear variational equations corresponding to the periodic solution/63/ have negative real parts for all $a \in U$ and

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial x^{\circ}(s,a)}{\partial s}, \frac{\partial x^{\circ}(s,a)}{\partial a} \right\| = k+1 \qquad (64)$$

for all $a \in U$, $s \in R$ then the manifold $\mathfrak{M}$ as determined by relations /63/, is asymptotically stable with asymptotic phase and amplitude.

Theorem / J.K.Hale and A.Stokes [11] / .

Consider the system equations /62/ for which the system

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

satisfies the conditions of the previous theorem and assume that there exist continuous functions $h(y)$, $g(t)$ and $T > 0$ such that $g(t) \to 0$ as $t \to \infty$, and

$$|X^*(t,x)| \leq g(t)h(\|x\|) \qquad (65)$$

for all x, $t > T$. If, in addition to these conditions

$$\int_T^\infty g(t)\,dt < \infty \qquad (66)$$

then the manifold $\mathfrak{M}$ as determined by relations /63/ is an asymptotically stable manifold of system /62/ with asymptotic amplitude. Finally, if

$$\int_T^\infty \int_t^\infty g(u)\,du\,dt < \infty \qquad (67)$$

then this asymptotically stable manifold of system /62/ has an asymptotic amplitude and phase.

Interesting results have been obtained by the method of integral manifolds to the investigation of complex oscillatory phenomena in relaxation oscillatory systems.

In many cases, relaxation oscillations in systems with many degrees of freedom are known to be described by systems of differential equations with a small parameter in some derivatives. In this connection consider a system of equations

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, z, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \frac{dz}{dt} = F(t, x, z), \qquad (68)$$

where x, f are n - dimensional vectors and a, z, F - m- dimensional vectors of Euclidian space E_{n+m}.

Assuming that there exists

$$\lim \frac{1}{T} \int f(t, x, z, \nu)\, d\nu = f_0(t, x, z) \qquad (69)$$

uniformly with respect to x, $z \in E_{n+m}$ the degenerated system

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t, x, z), \quad z = \varphi(t, x) \qquad (70)$$

is considered simultaneously with system /68/ $z = \varphi(t, x)$ being determined as the root of equation

$$F(t, x, z) = 0. \qquad (71)$$

Under these assumptions the following theorem holds :

Theorem /K.V.Zadiraka [15] /.

It is assumed that in region

$$-\infty < t < \infty, \; x \in U_n, \; \|z - \varphi(t, x)\| \le \rho, \; 0 < \varepsilon < \varepsilon^* \qquad (72)$$

the following conditions are fulfilled in addition to /69/. :

a/ the vector-function $f\left(t, x, z, \frac{t}{\varepsilon}\right)$ is continuous, bounded and satisfies Lipschits's conditions with respect to x, z ;

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

b/ the vector-functions $F(t,x,z)$, $\varphi(t,x)$, ψ, and their derivatives with respect to all the arguments up to the second order are continuous and bounded;

c/ the second mixed derivatives of the vector-function $F(t,x,z)$ with respect to x and z satisfy Lipschitz's condition with respect to z;

d/ the roots of the characteristic equation

$$\operatorname{Det}\left\| J_m p - A(t,x) \right\| = 0, \tag{73}$$

where $A(t,x) = F_z'(t,x,0)$ is a square matrix of m-th order, satisfy the condition

$$\operatorname{Re}\left\{ p_k(t,x) \right\} \leq -\alpha < 0. \tag{74}$$

Then a positive ε_0 can be given such that for any positive $\varepsilon < \varepsilon_0$ the system /68/ has a unique local integral manifold of the form

$$z(t,x) = \varphi(t,x) + \psi(t,x,\varepsilon) \tag{75}$$

in which the function $\psi(t,x,\varepsilon)$ is defined in region $-\infty < t < \infty$, $x \in U_n$ and satisfies the inequalities

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$$|\psi(t,x,\varepsilon)| \leq D(\varepsilon), \quad |\psi(t,x',\varepsilon) - \psi(t,x'',\varepsilon)| \leq \leq \Delta(\varepsilon)\,|x' - x''|; \tag{76}$$

where $D(\varepsilon) \to 0$, $\Delta(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$ and $\varphi(t,x)$ is an isolated root of equation /71/.

Moreover, manifold /75/ has bounded and uniformly continuous derivatives with respect to x whose order is determined by the degree of smoothness of the vectors f and F.

By using this theorem, the structure of the solutions of system /68/ can be analyzed. Thus, for example, if the vector-functions $f(t,x,z,\frac{t}{\varepsilon})$, $F(t,x,z)$ are periodic in t with period 2π and system /70/ has an isolated periodic solution $x = x(t)$, $z = z(t)$ with period 2π, then using this theorem, it is not difficult to prove [16] the existence of a unique solution of system /68/ with period 2π: $x = x(t,\varepsilon)$, $z = z(t,\varepsilon)$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

which uniformly with respect to t tends to the periodic solution of system [illegible] as [illegible].

The autonomous relaxation systems can be studied in the same manner.

Thus, for example, considering the system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(x, z),$$
$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = F(x, z), \qquad (77)$$

where ε is a small positive parameter, x, f are n-dimensional vectors, z, F are m-dimensional vectors, and assuming that the variational equations corresponding to the periodic solution $x = x(t)$, $z = z(t)$ of the degenerated system

$$\frac{dx}{dt} = f(x, z), \qquad F(x, z) = 0, \qquad (78)$$

have one characteristic exponent equal to zero, it is possible to prove for sufficiently general the

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

existence and uniqueness of the integral manifold

$$z(x) = \varphi(x) + \psi(x,\varepsilon)$$

for system /77/, where $\varphi(x)$ is an isolated root of equation $F(x,z) = 0$ and $\psi(x,\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$.

From this readily follows the proof of the existence of the periodic solution of system /77/, tending to the periodic solution of the degenerated system /78/ as $\varepsilon \to 0$.

The above survey is not full and involves only some trends in the development of the method of integral manifolds which originates in the works of N.N.Bogoliubov.

We have not concerned the interesting results obtained by L.S.Pontryagin [34], V.M. Volosov [7], E.F.Mishchenko [35], D.V.Anosov [1], M.D. Markus [27], S.Diliberto [9], P.Koosis [30], D.L. Reinhart [36], etc. which are directly connected with our method.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Литература

1. Д.В.Аносов, О [illegible] систем дифференциальных уравнений, Матем.сб.,Новая серия, том 50, в.3, 1960.

2. Д.В.Аносов, О [illegible] в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими решениями, Известия Ак.наук СССР, Серия матем., 24, 1960, стр.721-742.

3. Н.Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, Киев, 1945.

4. Н.Н.Боголюбов и Ю.А.Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, Москва, 1958.

5. Н.Н.Боголюбов, Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сборник трудов.института строительной механики АН УССР, № 10, 1949.

6. Н.Н.Боголюбов и Ю.А.Митропольский, Метод интегральных многообразий в нелинейной механике, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, том 1, 1962.

7. В.М.Волосов, Асимптотика интегралов некоторых возмущенных систем, ДАН СССР, 1958, т.121, № 6, стр.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

959-962.

8. В.М.Волосов, О решениях некоторых возмущенных систем в окрестности периодических движений, ДАН СССР, 1958, том 123, № 4, стр. 587-590.

9. S.P.Diliberto, Perturbation Theory of Periodic Surfaces I,II,III,IV. Mimeographed O.N.R. Reports, Berkeley, 1956-57.

10. S.P.Diliberto, Perturbation Theorems for Periodic Surfaces, Technical Report Nr.24, Berkeley, 1958.

11. J.K.Hale and A.P.Stokes, Behaviour of Solutions Near Integral Manifolds, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.6, Nr.2, 1960.

12. J.K.Hale, Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems, Annals of Mathematics, Vol. 73, Nr.3, 1961.

13. J.K.Hale, On the Method of Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky for the Existence of Integral Manifolds of Perturbed Differential Systems, RIAS, Technical Report, 60-I.

14. J.K.Hale and A.P.Stokes, Integral Manifolds, RIAS, Technical Report, 60-10.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

15. К.В.Задирака, Об интегральном многообразии системы дифференциальных уравнений, содержащей малый параметр, ДАН СССР, том 115, № 4, 1957.

16. К.В.Задирака, Про періодичні розв'язки системи нелінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при похідних, Доповіді АН УРСР, № 2, 1958.

17. К.В.Задирака, Поведение особо возмущенных автономных систем вблизи семейства цилиндров, УМЖ, том XIУ, № 3, 1962.

18. N.Kryloff et N.Bogoliuboff, Méthodes approchées de la méchanique non linéaire dans leur application a l'etude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomenes s'y rapportant, Kyiv, 1935.

19. Н.М.Крылов и Н.Н.Боголюбов, Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний, Изд.АН УССР, 1934.

20. P.Koosis, One Dimensional Repeating Curves in the Nondegenerate Case, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Vol.III, p.277-285.

21. J.J.Levin and N.Levinson, Singular perturbations of non-linear systems of differential equation and an associated boundary layer equation, Journ. Rational Mech. and Analysis, 5, Nr.[illegible], 1954,

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

p.247-270.

22. О.Б.Лыкова, О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статического решения, УМЖ, том IX, № 3, 1957.

23. О.Б.Лыкова, О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит, УМЖ, том IX, № 4, 1957.

24. О.Б.Лыкова, Об исследовании решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в "нерезонансном случае, УМЖ, том X, № 3, 1958.

25. О.Б.Лыкова, Об исследовании индивидуальных решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в случае резонанса, УМЖ, том X, № 4, 1958.

26. О.Б.Лыкова, К вопросу об устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений , УМЖ, том XI, № 3, 1959.

27. M.D.Marcus, An Invariant Surface Theorem for a Nondegenerate System,Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations,Vol.III,p.243-256.

28. Г.С.Макаева, Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с малым параметром, системы "быстрых движений" которых близки к гамильт

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

тоновым, ДАН СССР, 1958, том 121, № 6, стр.973-976.

29. Ю.А.Митропольский, Неотъемлемые [illegible] в нелинейных колебательных системах, Изд.АН УССР, Киев, 1958.

30. Ю.А.Митропольский, О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории релаксационных колебаний, УМЖ, том IX, № 3, 1957.

31. Ю.А.Митропольский, Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, УМЖ, том X, № 3, 1958.

32. Ю.А.Митропольский, Об устойчивости однопараметрического семейства решений системы уравнений с переменными коэффициентами, УМЖ, том X, № 4, 1958.

33. Yu.A.Mitropolsky, Sur les multiplicités intégrales des systèmes d'équations différentielles non linéaires ayant un petit paramètre, Annali di Matematica pura ed applicata /IV/, Vol.XLIX, 1961-1962.

34. Л.С.Понтрягин, Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Труды III Всесоюзного математического съезда, том II, М., 1956, стр.[illegible].

35. Л.С.Понтрягин и Е.Ф.Мищенко, Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных,

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Известия Ак.наук СССР, Серия матем., 23, 1959, стр. 643-660.

36. B.L.Reinhart, Periodic Orbits on Two Manifolds, RIAS, Technical Report, 60-2.

37. А.Н.Тихонов, Система дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Матем.сб., Новая серия, том 31, 1952.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

БФ - 01757. Зак. - 79. Тир. - 20[illegible] экз.

Отпечатано на ротопринте в Институте Истории АН УССР

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

ACADÉMIE DES SCIENCES D'U.R.S.S.
SECTION DE LA SIBÉRIE

M. A. LAVRENTIEV

SUR QUELQUES PROBLÉMES FRONTIÉRES POUR LES SISTÉMES ELLIPTIQUES

NOVOSIBIRSK
1962

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Le schéma classique de Kirchhof de la solution des problèmes plans de l'hydrodynamique fut considérablement développé par les recherches des dernières quarante années.

Beaucoup de problèmes relativement simples ont été résolu d'une façon tout à fait générale (Levi Civitta, Villat, Nekrasov, Lerey, Lavrentiev, Gainstein, Kravtchenko, Gerber, Garabetian . Plusiers différentes méthodes ont été employées pour la solution de ces problèmes . Celle des équations intégrales à noyaux singuliers. Ces équations ont été traitées d'abord au moyen de développements en séries suivant un petit paramètre et puis à l'aide de l'analyse fonctionnelle contemporaine.

Une direction essentiellement différente (la méthode variationnelle est fondée sur les propriétés frontières des représentations conformes et quasiconformes.

Les deux méthodes, ainsi que la méthode des représentations intégrales, récemment dé -

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

veloppée par Vequa, Boiarski, et Daniluk sont loin d'être épuisées. Le bût du présent article est de signaler quelques problèmes connus concernant le mouvement d'un fluide avec une frontière libre ainsi que quelques problèmes nouveaux de la même nature qui peuvent être traitées par la méthode variationnelle.

Dans la première partie nous allons traiter des problèmes plans et des problèmes à symétrie axiale. Dans la seconde partie nous allons considérer quelque résultats particuliers, concernant les courants spatiaux.

Pour abréger l'exposé nous allons formuler d'une façon générale, les problèmes frontières principaux en termes des representations quasiconformes. Nous allons commencer par les problèmes plans et par les problèmes à symétrie axiale.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

1. Le problème général.

Considérons le système fortement ellip - tique

$$F_1(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0$$
$$F_2(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \qquad \text{(I)}$$

Designions par $W = f(z, \Gamma_0, \Gamma)$ (2)
la représentation quasiconforme du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$, limité par les courbes Γ_0 et Γ

$$\Gamma_0 : y = y_0(x), \quad \Gamma : y = y(x)$$

sur la bande $0 < v < h$
du plan $W = u + iv$ effectuée par (I). Nous allons supposer que $x \to \pm\infty$ quand $u \to \pm\infty$ et que le point d'abscisse $x \to 0$ de la courbe Γ_0 se transforme en un point pour lequel $u = 0$

Le problème le plus simple de la théorie des représentations quasiconformes est celui de Riemann : Établir la représentation (2) étant donné le système (I) et le domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$. Quelque soit h, la solution du prob - lème de Riemann existe et elle est unique si

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

seulement les courbes Γ_0 et Γ sont suffisamment régulières.

Le problème de Riemann admet une interprétation mécanique simple pour des cas speciaux du système (I) .

Désignions par $\gamma_v : y = y(x, v)$ la ligne de $D(\Gamma_0, \Gamma)$ qui se transforme en une droite $v = Const$

La représentation (2) effectuée par le système (3) (pour $\nu(V)$ choisi d'une façon spéciale)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \nu(V)\frac{\partial u}{\partial y} \qquad V = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\nu(V)\frac{\partial u}{\partial x}$$

définie le mouvement d'un gaz avec un débit h dans la bande $D(\Gamma_0, \Gamma)$

Les lignes γ_v son les lignes du courant; donc dans le domaine $D(\Gamma_0 \gamma_v)$ nous avons un courant avec un débit v

Le cas $\nu(V) = 1$ correspond au mouvement plan d'un fluide incompressionnable .

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

La représentation (2) effectuée par le système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\ \nu(V)\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -y\ \nu(V)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4)$$

decrit un mouvement à symétrie axiale d'un gaz limité par les surfaces de rotation des courbes

$y = y_0(x) \geq 0$ et $y = y(x)$, $\nu(V) \equiv 1 \geq y_0(x)$

corresponds au mouvement à symétrie axiale d'un fluide incompressionable idéal .

La propriété d'être fortement elliptique s'exprime pour les systèmes (3) et (4) par l'inégalité

$$\frac{\partial \nu}{\partial V} \geq K_0 > 0$$

Cette condition est satisfaite pour le cas de la dynamique des gaz pour toutes les valeurs de la vitesse V , inférieures à celle du son.

C'est ainsi que le théorème d'existence des représentations quasiconforme pour les systèmes fortement elliptiques correspondants entraine le théorème d'existence et d'unicité des courants de gaz pour les vitesses inférieures à celle du son .

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

2. Mouvement d'un fluide avec une frontière libre.

Passons aux problèmes on l'une des fron - tieres du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ ou bien une partie quelconque de ces frontières ne sont pas déterminées à l'avance mais quelles sont recherchées.

Les problèmes suivants de la mécanique : l'étude du mouvement ondulatoire stable d'un fluide est celui du mouvemets d'un fluide avec détachement des jets appartiennent à la classe considérée.

Posons le problème suivant qui contient beaucoup de problèmes classiques de l'hydro - dynamique.

Problème I.

La courbe Γ_0 est définie pour tous les $x < x_0$, Γ - pour tous les $x < x_1$. Il faut déterminer les courbes Γ_0 et Γ pour tous les x d'une telle façon que pour les parties nouvelles de ces courbes la représentation $W = f(z)$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

satisfasse aux conditions

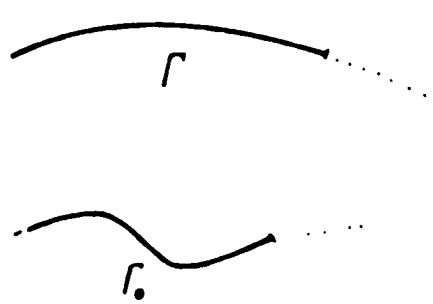
$$\begin{aligned} f_0(V, \alpha, x, y) &= 0 \\ f_1(V, \alpha, x, y) &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

les f_0 et f_1 étant des fonctions de V, α, x, y ; α designe la tangente a Γ au point (x, y)

Ce problème présente une généralisation considérable du problème classique de Kirchhof en se qui concerne le système (I) de même que les conditions frontière.

D'ailleurs les conditions imposées aux parties données des courbes frontières sont encore trop restrictive .

Nous allons les traiter d'une façon dif - férente.



Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

3. Les systèmes qui ne sont pas fortement elliptique.

L'exemple le plus simple d'un système elliptique, qui n'est pas fortement elliptique, est le suivant :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \omega y, \quad \omega = Const$$

Il correspond au mouvement turbulent d'un fluide incompressionable; ω est l'intensité de la turbulance.

Le problème de la détermination d'un courant turbulent (ω étant constant) se réduit au problème de la représentation quasi-conforme du domaine $D(\Gamma_0 \Gamma)$ sur la bande $0 < v < h$. Ce dernier problème peut être réduit à son tour au problème de Hilbert pour les fonctions harmoniques ou bien au problème de Dirchlet pour une fonction v , satisfaisante à l'équation de Poisson $\Delta v = \omega$

De même que pour la cas d'un courant laminaire la solution existe toujours et elle est unique.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Ce qui est spécifique pour le cas considéré c'est que la solution peut ne pas être uniforme.

Il est essentiel pour se qui suit, que si les courbes Γ_0 et Γ sont suffisamment regulières ω étant fixe, il existe toujours un h tel que pour tous les $h > h_0$ la représentation quasiconforme du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ sur la bande $0 < v < h$ est uniforme.

4. Les problèmes de réecollement.

Le mouvement de deux couches de fluides différents peut être considéré comme une généralisation naturelle du mouvement d'un fluide avec une frontière libre.

C'est Kotchine le premier qui traita un problème de cette natûre d'une façon rigoureuse.

Il s'agie de la propagation des ondes le long de la frontière de deux couches de fluides à densités différentes.

Du point de vue mathématique les mouvements de fluides formées de deux couches se réduisent aux problèmes de "récollement".

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Voici des exemples de telles problèmes.

Problème 2.

Il faut déterminer dans le domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ une courbe γ qui partage ce domaine en deux bandes $D(\Gamma_0, \gamma)$ et $D(\gamma, \Gamma)$ d'une telle façon que la représentation quasiconforme effectuée au moyen du système (6) de la bande $D(\Gamma_0, \gamma)$ sur la bande $0 < v < h_0$ et la représentation conforme de la bande $D(\gamma, \Gamma)$ sur la bande $h_0 < v < h$ coincident le long de γ.

Problème 3.

La frontière Γ_0 du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ possède un point angulaire A. Il faut déterminer dans le domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ une courbe γ donc les extrémités sont les points A et B de la ligne Γ_0 d'une telle façon que le long de γ coincident les vitesses des deux courants:

I. Un courant à turbulence constante ω dans le domaine limité par la courbe γ est

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

le segment AB de la courbe Γ_0

2. Un courant dans la bande $D(\bar{\Gamma}_0, \Gamma)$ $\bar{\Gamma}_0$ étant obtenu de Γ_0 en remplaçant le segment AB par la courbe γ .

Le problème 3 peut être généralisé.

Problème 3'

Considérons un contour fermé γ_1 situé dans le domaine limité par la courbe γ et le segment AB de la ligne Γ_0 .

On exigent la coincidence sur γ des vitesses du courant I du problème 3 et du courant à turbulence constante ω dans l'anneau limité par la courbe γ le segment AB de la courbe Γ_0 et par le contour γ_1 . La vitesse de ce courant doit être constante sur γ_1 .

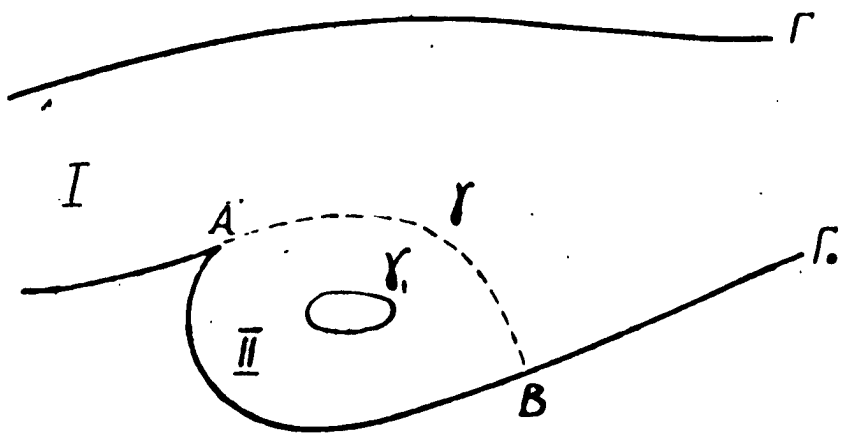
Parmi tous les problèmes qui ne font pas appel à la viscosité du fluide les problèmes 3 et 3' - paraissent d'écrire les mouvements réels de la façon la plus précise .

On peut obtenir la solution approchée des problèmes de l'hydrodynamique technique en in-

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

troduisent dans les solutions des problèmes 3 et 3' - des corrections à l'aide d'une couche frontière



On peut généraliser les problèmes 2 et 3 de la même façon q'on l'a fait pour le pro - blème de Kirchhof.

Les deux courants dans les domaines I et II peuvent être d'écrit au moyen de différents systèmes d'équations elliptiques. La condition de continuité sur la courbe γ peut être formulée d'une façon générale par exemple sous formes (5).

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Principe variationnel

La méthode variationnelle qui permet d'établir les théorèmes d'existence et d'unicité pour les problèmes cités est fondée sur les propriétés frontières des représentations quasiconformes.

La plus importante d'entre eux est le principe de Schvarz - Lindelöf généralisé. Nous allons le formuler sous une forme susceptible d'application:

Principe de Schvarz - Lindelöf.

Considérons deux bandes $\mathcal{D}(\Gamma_0, \Gamma)$ et $\mathcal{D}(\bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma})$ limitées par des courbes Γ_0, Γ et $\bar{\Gamma}_0$, $\bar{\Gamma}$ suffisamment régulières

$$\Gamma_0 : y = y_0(x), \ \Gamma : y = y(x), \ \bar{\Gamma}_0 : y = \bar{y}_0(x), \ \bar{\Gamma} : y = \bar{y}(x)$$

Savoir $\bar{y}(x) > y(x)$

Nous dirons que la représentation quasiconforme du domaine $\mathcal{D}_0(\Gamma_0, \Gamma)$ (à l'aide du système I) sur la bande $h_1 < v < h_2$ satisfait aux principe de Sch.-L. si les représentations quasicon -

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

formes des domaines $D(\Gamma_0, \Gamma)$ et $D(\Gamma_0, \bar{\Gamma})$ sur la bande (7) satisfons aux inégalités sui - vantes:

1°. En tout point de la courbe Γ_0

$$\bar{V} < V$$

2°. En tout point de la courbe Γ appartenent à la courbe $\bar{\Gamma}$ $\quad \bar{V} < V$

3°. Au points d'abscisse x_0 situés sur les courbes Γ et $\bar{\Gamma}$ ou $\bar{y}(x) - y(x)$ atteint son maximum

$$\bar{V} > V$$

Dans tous les trois cas les égalités on lieu seulement dans le cas de la coincidence des courbes Γ et $\bar{\Gamma}$.

Citons quelques cas où le principe de Sch.-L. a lieu.

<u>Théorème I.</u>

Le principe de Sch.-L. a lieu pour tous les systèmes fortements elliptiques qui ne con - tiennent pas les variables x, y, u, v d'une façon explicite et pour tous les domaines

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$D(\Gamma_0, \Gamma)$ a frontières suffisamments régulières.

Théorème 2.

Le principe de Sch.-L. a lieu pour tous les systèmes fortements elliptiques à condition que le domaine soit suffisamment étroit. Cela veux dire que $k_0 h < \bar{y}(x) - y(x) < k_1 h$, $h_2 = h_1 + h$ les k_0, k_1, h_1 étant constants et h suffisamment petits.

Notons encore deux cas partuculiers où le principe de Sch.-L. a lieu, quoique les conditions des théorèmes I et 2 sont en défaut.

Théorème 3.

Le principe de Sch.-L. a lieu pour un domaine quelconque $D(\Gamma_0, \Gamma)$

$$\Gamma_0 : y = y_0(x) \geq 0, \quad \Gamma : y = y(x), \quad y(x) > y_0(x)$$

et pour toutes les représentations quasiconformes de ce domaine affectuée sur une bande $0 < v < h$ au moyen du système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -y \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (7)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Le système (8) d'écrit le mouvement d'un fluide a symétrie axiale.

Le principe de Sch.-L. permet d'établire le signe de la variation de la vitesse du courant, étant donnée la variation de sa frontière.

Demonstration:

Supposons d'abord $y_0(x) \geqslant k > 0$

Le cas générale peut être obtenu par un passage à la limite quand $k \longrightarrow 0$

Soit encore $max\,[\bar{y}(x) - y(x)] = h < k$

Cette restriction n'est pas essentielle parce que l'on peut obtenir une déformation arbitraire en superposant des déformations qui satisfont à cette restrictions.

Remarquons que I° et 2° sont des consé - quences immédiates du principe du maximum pour la fonction v .

Il nous reste à démontrer 3°. Pour celà représentons la variation du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ comme superposition des trois variations auxiliaires suivantes:

I. Translation du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

en bas (dans la direction négative des y) à h unite de longeur.

2. Translation de la frontière inférieure du nouveau domaine dans la direction positive de y a h unite de longeur.

3. Transformation de la frontière supérieure du nouveau domaine en $\bar{\Gamma}$.

D'aprés 1° et 2° les deux dernières variations du domaine ne peuvent qu'augmenter V aux points des courbes Γ et $\bar{\Gamma}$ qui nous intéressent.

Il nous reste a établir le signe de la variation de V , produite par la première translation. La vitesse du courant translaté est évidemment égale à la vitesse du courant initial aux points correspondants.

Le potentiel $\bar{u}$ et la fonction du courant $\bar{v}$ du nouveau courant satisfont aux systèmes d'équations

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = (y+h)\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = (y+h)\frac{\partial u}{\partial x}$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Pour les fonctions du courant v et $\bar{v}$ nous avons les équations :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} - \frac{1}{y+h}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

La variation de la fonction du courant $\delta v = \bar{v} - v$ dans le domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial \delta v}{\partial y} = \frac{h}{y^2}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (8)$$

sur la frontière Γ_0

on a

Nous devons démontrer que

$$\frac{\partial \delta v}{\partial y} > 0 \qquad (9)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

sur la frontière supérieure ou bien que $\delta v \leqslant 0$ partout dans $\mathcal{D}(\Gamma_0, \Gamma)$

Supposons le contraire qu' il existe un point intérieur de $\mathcal{D}(\Gamma_0, \Gamma)$ où

$$\delta v > 0$$

Il existe alors dans $\mathcal{D}(\Gamma_0, \Gamma)$ un point où δv atteint son maximum.

En ce point nécessairement

$$\frac{\partial \delta v}{\partial x} = \frac{\partial \delta v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} \leqslant 0 \qquad \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} \leqslant 0$$

Ce qui contredit à (8) et (9).

Considérons encore un nouvel exemple de l'application du principe de Sch.-L. au système (6) qui n'est pas fortement elliptique.

Désignons par $E = \{\mathcal{D}(\Gamma_0, \Gamma)\}$ la classe des domaines $\mathcal{D}$ dont les frontières satisfont aux conditions :

$$|y_0(x)| \leqslant K_0 \,, \quad K_1 h \leqslant y(x) - y_0(x) \leqslant K_2 h$$

$$|y_0'(x)| \leqslant K' \qquad |y'(x)| \leqslant K'$$

$$|y_0''(x)| \leqslant K'' \qquad |y''(x)| \leqslant K''$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Théorème 4.

Le principe de Sch.-L. a lieu pour toutes les représentations quasiconformes des domaines de la classe (E) sur la bande $0 < v < h$ efféctuées par le système (6), ω étant suffisamment petit.

La grandeur de ω dépend uniquement des constantes k, h qui caracterisent la classe E .

Conséquances du principe variationnel

Toutes les propriétés des représentations conformes, qui suivent du principe de Sch.-L., subsistent pour les représentations quasiconformes, pour lesquelles ce principe a lieu. En particulier les propriétés frontières des représentations quasiconformes telle, que les conditions d'existence et de continuité des dérivés aux points frontières, les théorèmes sur la croissance et sur la décroissance du module de la dérivé au points d'inclination extrême de la frontière et le théorème sur l'impossibilité de l'extremum du module de la dérivè aux points extrêmaux de la courbure de la frontière du signe correspondant on lieu pour les représentations quasiconformes qui admettent le principe de Sch.-L.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Parfois les précisions métrique du principe de Sch.-L. sont indispensables pour les applications.

En particulier, ça a lieu pour les problèmes à conditions frontières du type (5).

En s'appuyant sur le principe de Sch.-L. On peut construire des fonctions majorante pour de différentes classes de domaines $\mathcal{D}(\Gamma_0, \Gamma)$ qui permettent d'apprécier des deux cotées la variation du module de la dérivé frontière par rapport à la variation de la frontière elle même.

Par exemple: si h est l'ordre de la largeur de la bande on a aux points ou la variation de la frontiere Γ est extrêmale (cf.3°)

$$\delta \log V > \frac{k\, \delta y(x)}{h} \qquad (10)$$

La constante étant appréciable à partir du grade de régularité des courbes Γ_0 et Γ.

D'une façon analogue on peut apprécier les valeures extrêmales de $\log V$ et de ces dérivés par rapport au grade de régularité des courbes Γ_0 et Γ.

On peut déterminer un procédé général pour résoudre les problèmes frontières formulés plus haut en s'appuyant sur le principe variationnel et sur

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

les propriétés frontières citées des représentations conformes et quasiconformes.

Nous allons montrer l'application de la méthode variationnelle aux problèmes les plus simples du mouvement d'un fluide avec un jet libre .

Considérons le problème (I) Γ_0 , $y = y_0(x)$ étant définis pour tous les x , les $y_0(x)$, $y_0'(x)$, $y_0''(x)$ étant bornés. La courbe Γ étant définie par la condition $V = V_0$ le long de cette courbe, V_0 étant donné .

Remarquons premièrement que l'uncité de la solution suit de principe variationnel, ~~quand on fait tendre $|x| \to \infty$~~

Pour la démonstration considérons une classe compacte de courbes

$$\Gamma : y = y(x)$$

$$y_0(x) + h \leq y(x) \leq y_0(x) + \frac{1}{h}$$

$$|y'(x)| \leq K_1 \ , \quad |y''(x)| \leq K_2$$

Choisissons dans cette classe la ligne $\Gamma_1 : y = y_1(x)$ sur laquelle la fonctionnelle

$$J(\Gamma) = \max |V - V_0|$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

(h étant suffisement petit et K_1 et K_2 suf - fisement grands) atteint son minimum par rapport à la classe considérée. Il faut prouver que

$$J(\Gamma_1) = 0$$

Supposons le contraire $J(\Gamma_1) > 0$

Le principe variationnel permet d'obtenir une variation de la courbe Γ_1 qui diminue $J(\Gamma)$.

En s'appuyant sur les inégalités du type (IO) et sur les propriétés frontières de V on peut construire une variation admissible de Γ_1

La contradiction obtenue prouve notre affir - mation.

Nous donnerons plus loin quelques théorèmes d'existence et d' unicité dont les démonstrations font appel aux majorantes qui utilisent les pro- priétés les plus simples des classes de courbes Γ_0 et Γ seulement.

Notons que l'emploi des calculayrices mo - dernes permet d'obtenir des solutions effect - ives d'un grand nombre de problèmes classiques de l'hydrodynamique à surface libre.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

7. Théorème d'existence et d'unicité.

Voici quelques résultats sur ce sujet:

Théorème I.

Supposons que la courbe Γ_0 est définie pour tous les x, $y_0(x) > 0$ et que la courbure de Γ est continue et bornée.

Alors la solution du problème (I) existe et elle est unique pour les systèmes d'équations des types suivants:

I. Les systèmes fortement elliptiques qui ne contiennent pas les coordonnés (y, u, v) d'une façon explicite.

2. Les systèmes (4) avec $v(V) \equiv 1$ si les condition frontière (5) satisfont aux conditions supplémentaires

$$0 < K_0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial V}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \leqslant \lambda$$

étant suffisamment petit, et les constantes qui déterminent la régularité des courbes frontières, l'ellipticité forte du système et K_0 étant fixe.

Le cas particulier quand Γ_0 est l'axe d'abs -

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

cisse, elle même et la condition sur Γ est de la forme

$$V^2 + \lambda y = C$$

présente un intérêt spéciale.

Dans ce cas le problème I ~~ce réduit au~~ est un pro - blème classique du mouvement stable d'un fluide pesant dans un canal de profondeur finie.

Pour les valeurs de λ suffisamment petites le problème n'admet qu'une solution triviale s'est à dire un mouvement de translation.

À partir d'un certain λ la solution cesse d'être unique.

Il existe encore une classe de solution périodiques des ondes.

On peut obtenir une onde solitaire comme cas limite des ondes infiniment longes.

Les méthodes approchées fondées sur la méthode variationnelle permettent d'établir l'existence et l'unicité des solutions du problème (I) pour une classe de valeurs de λ approchées de la valeur critique.

Cela permet d'inclure les ondes solitaires de petites amplitudes dans la théorie générale.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

On peut construire un procédé général pour résoudre le problème des ondes dans des bassins de profondeur finie. Ce procédé exige des calculatrices modernes.

Voici encore un théorème qui se rattache au problème du récollement des solutions.

Théorème 2.

La solution du problème 2 existe et elle est unique pour tous les ω suffisamment petites.

Des problèmes de recollement plus généraux (problème 3) ont été résolus récemment par plusieurs auteurs au moyen de méthodes différentes. Pykhteev et Khaperskov ont résolus le problème 3 sous les conditions suivantes; la courbe Γ_0 est composé de l'axe des abscisses et du segment (O,I) de l'axe des ordonnées. Entre les courbes γ_1 et γ le mouvement est laminaire. Chabat a résolu le même problème pour le cas ou Γ_0 est l'axe des abscisses le contour s'évanoui et la turbulance est constante dans le domaine limité par Γ_0 et γ.

C'est encore Chabat qui a trouvé une classe de mouvement satisfaisant aux conditions du

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

problème 3 : étant donné le courant I il construit le courant II en résolvant le problème de Cauchy.

8. Le problème spatial.

Par analogie avec le cas des domaines plans on peut poser le problème des représentations quasiconformes des domaines spatiaux.

Il s'agit d'établir une représentation homéomorphe et différentiable du domaine D de l'espace x, y, z sur le domaine Δ de l'espase u, v, W d'une telle façon que les fonctions

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad W = W(x, y, z)$$

satisfassent au système d'équations

$$F_i(x, y, z, u, v, W, u_x, u_y, u_z, \ldots\ldots W_z) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{(II)}$$

De même que dans le cas plant le problème de Riemann de la représentation quasiconforme d'un domaine sur un autre pour un système (II) arbitraire n'est pas résolu dans toute la généralitée.

Il parait être pénible de caractériser d'une façon complète les classes des représentations (II) pour lesquelles le problème de Riemann est soluble.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Nous avons construit quelques classes particulières de systèmes (8) (les représentations harmoniques) pour lesquelles le théorème d'existence et d'unicité a lieu.

Pour assurer l'unicité de la solution on est obligé de supposer que la représentation est homéomorphe à l'intérieur du domaine et que la correspondance des points frontières est donné.

Considérons maintenant une classe de représentations liées aux mouvements d'un fluide entre deux surfaces.

9. Représentation d'une couche.

Soit $D(\Gamma_0, \Gamma)$ un domaine limité par deux surfaces Γ_0 et Γ régulières

$$\Gamma_0 : z = z_0(x, y)$$

$$\Gamma : z = z(x, y)$$

Les fonctions z_0 et z tendent vers et h quand $x \longrightarrow -\infty$. On chèrchent une représentation de D sur la couche $0 < W < H$ qui jouie des propriétés suivantes:

I. On a $\frac{u}{x} \to \frac{H}{h}$, $\frac{v}{y} \to \frac{H}{h}$, $\frac{W}{z} \to \frac{H}{h}$ quand $x \longrightarrow -\infty$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

2. Les plans $u = C$ se transforment en des surfaces orthogonales aux surfaces Γ_0, Γ.

La fonctions $u = u(x, y, z)$ est harmonique et régulière dans $D(\Gamma_0, \Gamma)$

3. Les droites $v = C_1$, $W = C_2$ se transforment en des courbes orthogonales aux surfaces $u = C$.

Il est évident que les conditions signalées déterminent la représentation du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ d'une façon unique. La fonction u est le potentiel des vitesses du courant d'un fluide idéal dans la couche $D(\Gamma_0, \Gamma)$ dont la vitesse est donnée pour $x \longrightarrow -\infty$

La constuction de la représentation se ramène a la construction du potentiel u. Ce potentiel peut être mis sous la forme

$$u = \frac{H}{h} x + u^*$$

u^* étant une fonction harmonique qui satisfait à la condition de Neumann $\frac{\partial u^*}{\partial h} = \vec{e}\,\vec{n}\,\frac{H}{h}$ sur la frontière du domaine $\vec{e}$ étant un orthe (vecteur de longuer I) parallèle à l'abscisse et $\vec{n}$ (un orthe orthogonale à la frontière de D).

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Nous allons admettre dans ce qui suit que l'épaisseur de la couche est borne' des deux côtés

$$kh < z(x,y) - z_0(x,y) < \frac{1}{k} h$$

k étant fixe, $0 < k < 1$

IO. Couches minces, formules approchées.

Il est surtout important pour les applications de savoir évalues les dérivés frontières des représentations à partir du grade de la régularité de la frontière Γ

De même que dans le cas plan cette appréciation dépend de l'evalution de la variation de la vitesse frontière et de sa direction comme fonction de la variation locale de la frontière.

Nous allons supposer que les surfaces Γ_0 et Γ sont suffisamment rapprochées des plans $z_0 = 0$ et $z = h$ et que les dérivés des deux premiers ordres des fonctions $z_0(x,y)$ et $z(x,y)$ sont d'ordre h .

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Théorème 3 .

Si l'on remplacent la surface Γ par une surface $\bar{\Gamma}$ qui différe de Γ seulement dans le voisinage Δ du point A_0 , cela veut dire

$$\bar{z}(x,y) - z(x,y) = \delta z = \begin{cases} 0 \text{ pour } A \notin \Delta \\ >0 \text{ pour } A \subset \Delta \end{cases}$$

au point arbitraire A on a :

$$(\delta \bar{V}) \leq K e^{-\frac{r}{h}} \frac{\sigma}{r^3} \qquad (12)$$

étant la distance de A à A_0 et σ le volume contenu entre Γ et $\bar{\Gamma}$.

La démonstration peut être obtenue par la considération des courants élémentaires dans la couche, $0 < z < h$ quand il y a une convéxité sur une des surfaces frontières. Le cas général peut être traité à l'aide d'une majorante de $\delta \bar{V}$ avec appel au principe du maximum par rapport au potentiel.

Il est aisé d'obtenir des formules approchées pour $\bar{V}$ et d'apprécier l'erreur commise comme fonction de h et de la régularité des surfaces Γ et Γ_0 en s'appuyant sur théorème 3 et en considérant des exemples élémentaires du courants,

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

situés dans une couche.

On peut choisire comme approximation initiale la valeur de la vitesse V et sa direction α définie à l'aide de l'hydraulique en admettant que la vitesse est constante le long de la normal a la surface Γ .

Dans ce cas la continuité du courant entraine le système suivant

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial n} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial s} \qquad (I4)$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{h}{z^2}\,|\mathrm{grad}\, z|\,\sin\theta$$

s désigne la direction de $\vec{V}$, n lui est orthogonale et θ est l'angle formé par $\vec{V}$ et grad z .

Pour obtenir des formules plus exactes on peut calculer une correction en poursuivant une méthode analoge à celle du problème plan.

Considérons pour cela la normale à la surface Γ passant par le point A_0 . Soit B_0 le point d'intersection de cette normale avec la surface de Γ_0 . Soient $\bar{\Gamma}$ et $\bar{\Gamma}$ deux surfaces ayant aux points A_0 et B_0 un contacte

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

d'ordre deux avec les surfaces Γ et Γ_0 respectivement. Les surfaces $\bar{\Gamma}$ et $\bar{\Gamma}_0$ doivent être choisies d'une telle façon, que la vitesse V_0 du courant puisse être déterminé d'une façon effective ; elles doivent être quatre fois continûment differentiables.

Dans ces conditions chaoune des surfaces $\bar{\Gamma}_0$ et $\bar{\Gamma}$ peut être déterminé à l'aide de cinq paramètres (A_0 et B_0 étant fixe) savoir: les coefficients $\frac{\partial z_0}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z_0}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ du développement taylorien.

Soit $\vec{V}_a$ la vitesse du courant dans la domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$, (la vitesse V_0 au point A_0 et sa direction α_0 étant définies par la solution du problème hydraulique). Supposons que toutes les différences $\left[\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right], \ldots, \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right]$ sont de l'ordre de grandeur de h.
Alors

$$\vec{V}_a = V_0 + \vec{a}_1 h + \vec{a}_2 h^2 + R_0$$

$\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ étant deux vecteurs dont les composantes sont déterminées par les dix paramètres

$$\frac{\partial z_0}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

et R_0 étant un infiniment petit d'ordre supérieur à h^2 (I3) permet d'apprécier la différence $\vec{V}_0 - \vec{V}$. On a $|\vec{V}_0 - \vec{V}| < M_1 h^2$. M étant une fonction des quatrièmes dérivés des fonctions qui déterminés les surfaces $\Gamma_0, \Gamma, \bar{\Gamma}_0, \bar{\Gamma}$. Donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à celui de h^2 ont a:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}_1 h + \vec{a}_2 h^2$$

On peut obtenir des expressions effectives si les surfaces Γ_0 et Γ peuvent être sujeties à des conditions supplémentaires. Soit Γ_0 le plan $z = 0$ et Γ - une surface voisine du plan $z = h$. Supposons que Γ satisfait à la condition suivante $|z(x,y) - h| < A h^2 e^{-\frac{\lambda}{h}(|x|+|y|)}$ (I5), l'ordre des grandeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ n'est pas inférieur à celui de $h^{3/2}$, ~~l'ordre des grandeurs de~~ ~~est supérieur a celui de~~ $\frac{\partial z}{\partial y}$, les ordres des grandeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ne sont pas inférieurs à celui de h et l'ordre de grandeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ est supérieur à celui de h. Sous ces conditions les lignes du courant sont proches au parallèles à l'axe des X. Les formules (I4)

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

peuvent être remplacées par les formules approchées suivante:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{h}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}$$

D'où l'on obtient par intégration.

$$V_0 = \frac{h}{z} - h\int_{-\infty}^{x} \alpha \int_{-\infty}^{y} \left[\frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{z^4}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dx$$

$$\alpha = h\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\, dx \qquad (I6)$$

En remarquant, que sous les conditions admises, la surface formée par des lignes du courant qui passent pour $x \to -\infty$ par une droite verticale est presque cilindrique, on obtien une expression approchée de V sur Γ

$$V = V_0\left(1 + \frac{1}{3} z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \qquad (I7)$$

On peut obtenir de même des expressions analogues à (I6) et (I7) en remplaçant (I5) par une condition de double-périodicité de Γ. Ces formules approchées permettent de construire une théorie approximative non-linéaire des mouvements ondulatoires stables spatiaux et des mouvements ayant des jets. Les ondes de Relay généralisées sons définies par l'équation:

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

$$V_0^2\left(1+\frac{2}{3}z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+\mu z=C$$

On peut étudier l'influence de la nonliniarité sur les lois de la propagation des ondes pour les mouvements, décrits par l'équation précédente et peut différents des cas linéaires suivents:

Superposition des ondes sinusoïdales d'amplitude égale qui se répendent dans des directions formant des angles α et $-\alpha$ avec l'abecisse.

II. PRINCIPES VARIATIONNELS.

Soit E la classe des domaines $D(\Gamma_0,\Gamma)$ jouissants des propriété suivantes

$$|z_0(x,y)|<\varepsilon h e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{h}}(|x|+|y|)} \qquad |z(x,y)-h|<\varepsilon h e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{h}}(|x|+|y|)}$$

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|<\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|<\varepsilon',\quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|<\varepsilon,\quad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|<\varepsilon',$$

$$\left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}\right|<\varepsilon_2,\quad \left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\partial y}\right|<\varepsilon_2\quad \left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right|<\varepsilon_2$$

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|<\varepsilon_2',\quad \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|<\varepsilon_2'\quad \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|<\varepsilon_2'$$

Tous les ε étant suffisamment petits, on peut énoncer le principe variationnel suivant pour tous les domaines de la classe E.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

PRINCIPE VARIATIONNEL :

Soient $D(\Gamma_0, \Gamma)$ et $D(\Gamma_0, \bar{\Gamma})$ deux domaines de la classe E_0 et E^+ et E^- deux ensembles de points, où la différence $\bar{z}(x,y) - z(x,y)$ atteind son maximum et son minimum, qui sont égaux en valeur absolue

$$\max[\bar{z}(x,y) - z(x,y)] = \max[z(x,y) - \bar{z}(x,y)]$$

Sous ces conditions, au point des ensembles E^+ et E^- on a respectivement

$$V_1 \leq V$$
$$V_1 \geq V$$

$\vec{V}$ et $\vec{V}_1$ étant respectivement les vitesses des courants du domaine initial et du domaine varié. Remarquons, que quand ε_1 est fixe et ε_1' tend vers zero, le mouvement du fluide tend vers un mouvement plan. Il s'en suit que pour ε_1' suffisamment petit aux points où $\frac{\partial z}{\partial x}$ atteind sont maximum (minimum) absolu et il est supérieur (inférieur) au maximum (minimum) de $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ ~~la vitesse du courant initial est inférieure (supérieure) à la vitesse~~ du courant varié. on a donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} < 0 \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x} > 0\right)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

I2. MOUVEMENT AVEC UNE SURFACE LIBRE

Le cas particulier spatial le plus simple du problème I est le suivant : la surface Γ_0, étant donné, il faut déterminer la surface Γ d'une telle façon que le courant du domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ possédé dans tous les points de Γ une vitesse $\vec{V}$ fixée d'avance:

$$|\vec{V}| = a > 0$$

Bien que la solution soit unique on doit imposer des conditions auxiliaires. Par exemple, on peut fixer la direction de la vitesse dans un point quelconque. Supposons que la direction du vec - teur $\vec{V}$ et déterminé pour $x \to -\infty$ et qu'il est parallèle à l'abscisse. D'ailleur cette condition n'est pas encore suffisante parce que si par exemple $z_0(x, y) = 0$, Γ peut être une surface cilindrique arbitraire,

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

parallèle à l'abscisse. Dans le cas trivial $z_0(x,y) \equiv 0$ la solution devient unique si l'on admet $x \to -\infty$, $z(x,y) \to \varphi(y)$ en particulier $z(x,y) \to 1$

Mais on ce heurtent à une nouvelle difficulté: la solution devient instable.

Quel que soit ε, on peut construire un courant $z_0(x,y) = 0$ $\lim z(x,y) = 1$ pour $x \to -\infty$ tel que $||\vec{V}|-1| < \varepsilon$, tendis que la surface Γ a'écarte du plan $z = 1$ plus que de $\frac{1}{2}$. En effet, posons

$$\Gamma : z(x,y) = 1 + \frac{2}{3}\,\frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2}\,\cos y$$

La surface Γ s'écarte du plan $z = 1$ a une grandeur qui dépasse $\frac{1}{2}$, quel que soit α pour x suffisamment grand et $y = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Néanmoins $\vec{V}$ converge uniformément vers 1

Cet exemple montre, qu'il est nécessaire de déterminer d'avance une classe de domaines, pour lesquelles les solutions sont stables. La classe E définie plus haut joui de cette propriété .

Voici un théorème qui assure simultanément l'existense, l'unicité et la stabilité du courant

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

dans une couche.

Théorème : soit Γ_0 une surface $z = z_0(x,y)$ satisfaisant à la condition

$$a)\ 0 < z_0(x,y) \leq h e^{-|x|-|y|}$$

et telle que les courbes $z = z_0(x,K)$, $K = Const$ sont symétriques par rapport au point $x = 0$ et les lignes $z = z_0(K,y)$ symétriques par rapport au point $y = 0$ quelque soit K ; $b)$ de plus ces courbes sont monotones pour $x > 0$, $x < 0$, $y > 0$, $y < 0$

Supposons encore que

$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| \leq h \quad , \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leq h$$

$$\left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}\right| \leq h \quad , \quad \left|\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right| \leq h \ ,$$

Sous ces conditions il existe une surface Γ $z = z(x,y)$ unique, recouvrant Γ_0 et telle que

$$0 < z(x,y) < A h e^{-|x|-|y|}$$

$$\lim_{x \to -\infty} z(x,y) = h$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

qui joui de la propriété suivante: la vitesse du courant défini dans le domaine $D(\Gamma_0, \Gamma)$ satisfait sur Γ à la condition $|\vec{V}| = 1$ et pour $x \to -\infty$ cette vitesse est parallèle à l'abscisse.

La solution est stable dans le sens suivant:

Si l'on a sur la surface $\bar{\Gamma}, \Gamma$

$$\left| |\vec{V}| - 1 \right| < \varepsilon$$

et si pour $x \to -\infty$ la vitesse du courant $\vec{V}$ est parallèle à la direction positive de l'abscisse alors pour toutes les surfaces $\bar{\Gamma}$ satisfaisantes aux conditions imposées à Γ_0 on a

$$|\bar{z}(x,y) - z(x,y)| < K\varepsilon$$

K étant une constante.

ε peut être arbitrairement petit.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Quelques problèmes nouveaux.

Plusieurs propriétés des représentations conformes et quasiconformes ont été généralisées pour les représentations des domaines à plusieurs dimensions. Mais on ne connait presque rien sur les propriétés géometriques des transformations biunivoques des domaines à plusieurs dimensions effectuées par des fonctions satisfaisantes à des systèmes d'équations aux dérivés partielles. Il s'agit des représentations des domaines spatiaux effectués par des fonctions $u(x, y, z)$

$$v(x, y, z), \quad w(x, y, z)$$

satisfaisantes à des systèmes d'équations aux dérivés partielles du premier ordre.

Le premier problème important qui se pose dans cette direction est de définir une classe aussi vaste que possible de système d'équation différentielle pour lesquelles le problème de Riemann de la représentation quasiconforme de deux domaines arbitraires soit toujours soluble.

Au lieu de considérer les représentations des domaines on peut étudier les métriques différentielles de Riemann ou bien construire des par -

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

titions du domaine donné en système de parallé - lépipèdes infiniment petits dont les neuf para - mètres naturels sont sujetis à trois relations . Outre l'intérêt intrinsèque de l'étude des propriétés intérieures et frontières de ces représentations découlantes des propriétés analytiques des systèmes d'équations correspondants, ces recherches peuvent être utiles pour l'étude des problèmes spatiaux de la mécanique des milieux continues.

Voici encore une série de problèmes qui se rattachent au théorème classique de Liouville : toutes les représentations conformes des domaines spatiaux sont toujours linéaires. Liouville a établit ce théorème en admettant que toutes les dérivés jusqu'au troisième ordre des fonctions qui effectuent la représentations sont continues. Récemment ce théorème fut généralisé considé - rablement.

Le résultat le plus complet a été obtenu il n-y-a pas longtemps par Belinski : la représentation presque conforme d'une sphère est toujours presque linéaire et l'image de la sphère elle même est toujours presque sphérique .

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Ce que est remarquable dans le théorème de Belinski c'est que l'écart de la représentation presque conforme d'une représentation linéaire dépend uniquement de l'écart de l'image d'une sphère infiniment petite d'une sphère et qu'il ne dépend pas des autres propriétés différentielles de cette représentation. Le théorème généralise de Liouville suit des resultat de Belinski sous la forme la plus générale en ce qui concerne la régularité locale des fonctions qui effectuent la représentation.

Voici encore un théorème qui présente une généralisation du théorème de Liouville dans un sens différent :

Soient

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad \text{et} \quad w(x, y, z) \qquad (c)$$

trois fonctions définies dans la couche

$$0 \leqslant z \leqslant 1 \qquad (d)$$

dont toutes les dérivés jusqu'au troisième ordre sont continues et uniformément bornées qui effectuent une représentation de cette couche.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Supposons que l'image de chaque cube infiniment petit orienté suivant les axes des coordonnées est presque un parallélépipède rectangulaire. et

~~Cela veut dire~~ que tous les plans $z = K$ se transforment en des surfaces d'une façon ~~quasi~~ presque conforme. Alors les images de ces plans sont eux aussi presque des plans.

Si l'on remplacent "presque un parallélépipède rectangulaire" par les mots "parallélépipède rectangulaire", on obtient une représentation de la forme

$$u = ax + by + c, \quad v = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad W = \varphi(z)$$

Ça veut dire que dans le théorème de Liouville on peut remplacer la représentation conforme par une représentation plus générale. La condition que l'image d' un cube infiniment petit doit toujours être un cube peut être remplacé par une condition plus faible que cet image doit toujours être un parallélépipède rectangulaire .

Cette condition élargie la classe des représentations admissibles d'une façon tout à

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4

fait naturelle et peut signifiante.

Ç' aurait été intéressant de savoir si l'on peut enlever les restrictions locales imposées à la représentation dans le théorème énoncé, de même que de considérer des représentation satisfaisant au quatre conditions

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2011/11/18 : CIA-RDP80T00246A018800540001-4