

Page Denied

Next 4 Page(s) In Document Denied

STAT
1



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.Н. Фаустов

P - 1566

ПЕРЕНОРМИРОВКА
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

STAT

Дубна 1964

Фаустов Р.Н.

P - 1566

Перенормировка квазипотенциального уравнения для системы двух частиц.

Рассматривается построение квазипотенциала для системы двух частиц одинаковой массы. Показано, что в случае перенормируемых теорий, где расходятся лишь диаграммы собственной энергии и тройные вершинные части, расходимости квазипотенциала сводятся к расходимостям S - матрицы.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Faustov R.N.

P-1566

Renormalization of the Quasipotential Equation
for the Two-Particle System

The construction of the quasipotential for the system of two particles with equal masses is considered. It is shown, that in the case of the renormalizable theories, where only self-energy diagrams and three-vertices diverge, the divergences of the quasipotential reduce to those of the S -matrix.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

Р.Н. Фаустов

P-1566

ПЕРЕНОРМИРОВКА
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ

Направлено в ДАН

Дубна 1964

В работе^{/1/} было получено квазипотенциальное уравнение для волновой функции системы двух частиц

$$(E^2 - p^2 - m^2)\psi(\vec{p}) = \int V(\vec{p}, \vec{p}', E)\psi(\vec{p}')d\vec{p}', \quad (1)$$

где квазипотенциал V определяется с помощью двухвременной функции Грина двух частиц. Благодаря трехмерности, это уравнение имеет ряд преимуществ по сравнению с уравнением Бете-Солпитера. При построении квазипотенциала V по теории возмущений возникает проблема устранения расходимостей. Эту проблему можно было бы считать решенной, если бы удалось показать, что соответствующие расходимости сводятся к расходимостям S -матрицы, поскольку рецепт устранения последних хорошо известен. Эта ситуация имеет место в случае уравнения Бете-Солпитера^{/2/}. Напротив, в методе Тамма-Данкова этого достигнуть не удастся, что является одной из основных трудностей метода.

В настоящей работе рассматривается построение квазипотенциала V для системы двух частиц одинаковой массы. При этом будет показано, что в случае перенормируемых теорий, где имеются лишь тройные точечные вершины (например, электродинамика) в квазипотенциале V не возникает других расходимостей, кроме тех, которые характерны для S -матрицы. Эти теории отличаются тем, что в них расходятся лишь собственно энергетические и вершинные части, а диаграммы, описывающие процессы рассеяния, уже не имеют собственных расходимостей.

Рассмотрим систему двух частиц одинаковой массы (например, электрон и позитрон). Обозначим четырехимпульсы в с.ц.м. этих частиц в начальном состоянии через $(E + \epsilon_q, \vec{q})$ и $(E - \epsilon_q, -\vec{q})$, а в конечном состоянии через $(E + \epsilon_p, \vec{p})$ и $(E - \epsilon_p, -\vec{p})$, где $2E$ - полная энергия системы. Тогда двухвременная функция Грина двух частиц \overline{G} определяется через 4-временную функцию Грина G следующим образом^{/1/}:

$$\overline{G}(\vec{p}, \vec{q}, E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon_p d\epsilon_q G(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon_p, \epsilon_q, E), \quad (2)$$

(знак $\overline{\quad}$ будет в дальнейшем использоваться для обозначения интеграций по энергиям). Функция \overline{G} удовлетворяет уравнению^{/1/}:

$$\overline{G}(\vec{p}, \vec{q}, E) = \overline{G}_0(\vec{p}, \vec{q}, E) - \quad (3)$$

$$-i \int \overline{G}_0(\vec{p}, \vec{k}, E) V(\vec{k}', \vec{k}, E) \overline{G}(\vec{k}, \vec{q}, E) d\vec{k}' d\vec{k} ,$$

где

$$G_0(\vec{p}, \vec{q}, \epsilon_p, \epsilon_q, E) = S_1(\vec{p}, E + \epsilon_p) S_2(-\vec{p}, E - \epsilon_p) \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta(\epsilon_p - \epsilon_q) ,$$

а S_1 и S_2 - полные одночастичные функции Грина. В дальнейшем мы будем использовать символическую запись уравнения (3):

$$\overline{G} = \overline{G}_0 - i \overline{G}_0 V \overline{G} . \quad (4)$$

При этом для квазипотенциала V получается выражение:

$$iV = \overline{G}^{-1} - \overline{G}_0^{-1} . \quad (5)$$

Вместо функции Грина G удобно ввести формально амплитуду рассеяния двух частиц вне массовой поверхности:

$$-i G_0 T G_0 = G - G_0 . \quad (6)$$

Аналогичную величину можно определить и для двухвременной функции Грина \overline{G} :

$$-i \overline{G}_0 \tilde{T} \overline{G}_0 = \overline{G} - \overline{G}_0 . \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), получим связь между \tilde{T} и T :

$$\tilde{T} = \overline{G}_0^{-1} \overline{G}_0 T G_0 \overline{G}_0^{-1} \quad (8)$$

(в дальнейшем знак \sim понимается в смысле этого определения).^c Из выражения (8) следует, что на энергетической поверхности ($p = q = E - m$) функция \tilde{T} совпадает с величиной T на массовой поверхности ($\epsilon_p = \epsilon_q = 0, p^2 = q^2 = E^2 - m^2$) и дает, таким образом, физическую амплитуду рассеяния. Вводя величину

$$F = -i G_0 , \quad (9)$$

получим из (4) и (7) уравнение для \tilde{T} в следующем виде:

$$\tilde{T} = V + V F \tilde{T} . \quad (10)$$

Поскольку уравнение (10) эквивалентно уравнению (4), то оно также может служить для определения квазипотенциала V , а именно,

$$V = \tilde{T} (1 + F \tilde{T})^{-1} , \quad (11)$$

где \tilde{T} определено в (8).

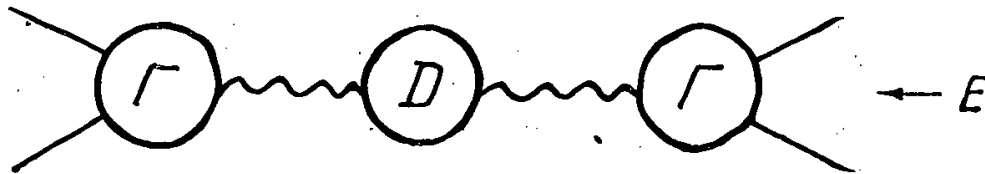
Для дальнейшего рассмотрения удобно представить T в виде двух слагаемых:

$$T = M + L. \quad (12)$$

Здесь L представляет собой совокупность слабо связанных диаграмм, в которых частицы начального состояния связаны с частицами конечного состояния одной бозонной линией. Эти диаграммы имеют следующий общий вид:

$$L = \Gamma D \Gamma, \quad (13)$$

где Γ - полная вершинная часть, а D - полный бозонный пропагатор. Можно представить выражение (13) графически.

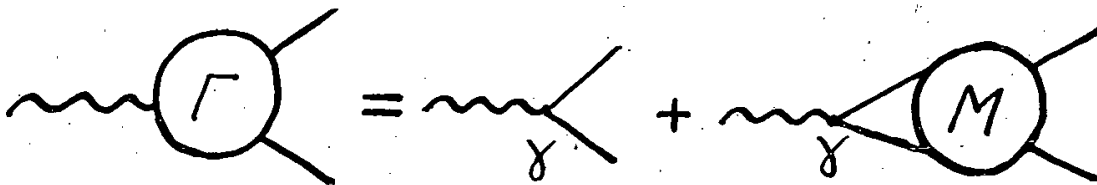


Р и с. 1.

Раскрывая (11) по теории возмущений, мы получим расходящиеся выражения типа $\bar{L} \bar{F} \bar{T}$. Эти расходимости не устраняются обычной ренормировкой S -матрицы. Однако, как мы сейчас покажем, в действительности эти члены в выражении (11.) отсутствуют. Представим вершинную часть Γ в виде:

$$\Gamma = \gamma(1 + FM), \quad (14)$$

где γ - точечная вершина, F определено в (9), а M - в (12). Представление (14) можно изобразить графически.



Р и с. 2.

Подставляя (14) в (13), получим:

$$L = (1 + MF) \gamma D \gamma (1 + FM). \quad (15)$$

Теперь нам нужно получить величину $\bar{L} = \bar{F}^{-1} \overline{FLF} \bar{F}^{-1}$ согласно (9). Поскольку функция D в (15) зависит только от полной энергии E системы, то справедливо соотношение

$$\overline{ADB} = \bar{A} \bar{D} \bar{B} \quad (16)$$

для любых функций A и B . Таким образом, используя (15) и (16), мы получаем:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \bar{M} + \bar{L} = \bar{M} + (1 + \bar{M} \bar{F}) \gamma D \gamma (1 + \bar{F} \bar{M}) = \\ &= \bar{M} [1 + \bar{F} \gamma D \gamma (1 + \bar{F} \bar{M})] + \gamma D \gamma (1 + \bar{F} \bar{M}). \end{aligned} \quad (17)$$

Величину $(1 + \overline{F} \tilde{T})^{-1}$ удобно представить в следующих двух формах:

$$\begin{aligned} (1 + \overline{F} \tilde{T})^{-1} &= (1 + \overline{F} \tilde{M})^{-1} [1 + \overline{F} (1 + \tilde{M} \overline{F}) \gamma D \gamma]^{-1} = \\ &= [1 + \overline{F} \gamma D \gamma (1 + \overline{F} \tilde{M})]^{-1} (1 + \overline{F} \tilde{M})^{-1} . \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь, подставляя (17) и (18) в определение (11), получим:

$$V = \tilde{M} (1 + \overline{F} \tilde{M})^{-1} + \gamma D \gamma [1 + \overline{F} (1 + \tilde{M} \overline{F}) \gamma D \gamma]^{-1} . \quad (19)$$

Используя представление (14) для вершинной части и определение (8), получим:

$$\gamma \overline{F} (1 + \tilde{M} \overline{F}) \gamma = \gamma F \Gamma . \quad (20)$$

Таким образом, с учетом (20) выражение (19) для квазипотенциала V можно переписать в виде:

$$V = \tilde{M} (1 + \overline{F} \tilde{M})^{-1} + \gamma D [1 + \gamma F \Gamma D]^{-1} \gamma . \quad (21)$$

Воспользуемся теперь уравнением Дайсона для бозонного пропагатора:

$$D = \Delta + \Delta \gamma F \Gamma D , \quad (22)$$

где Δ - функция Грина свободного бозона. Тогда, очевидно,

$$(1 + \gamma F \Gamma D)^{-1} = D^{-1} \Delta ,$$

и, подставляя это выражение в (21), получим окончательно:

$$V = \tilde{M} (1 + \overline{F} \tilde{M})^{-1} + \gamma \Delta \gamma . \quad (23)$$

Из выражения (23) видно, что квазипотенциал V распадается на два слагаемых, причем в первое слагаемое дают вклад только диаграммы M , а от диаграмм L остается только член низшего порядка теории возмущений (второе слагаемое), который, очевидно, не содержит расходимостей. В этом отношении квазипотенциал V аналогичен ядру уравнения Бете-Солпитера.

Диаграммы M содержат обычные расходимости S -матрицы. Раскрывая первое слагаемое в (23) по теории возмущений, получим выражения типа $\tilde{M} F \tilde{M}$. В этих выражениях не возникает дополнительных расходимостей, если рассматриваются теории, в которых расходятся лишь диаграммы собственной энергии и тройные вершинные части (например, электродинамика).

Таким образом, в этом случае квазипотенциал V не содержит других расходимостей, кроме тех, которые характерны для S -матрицы, и перенормировка квазипотенциального уравнения (1) производится полностью аналогично перенормировке S -матрицы.

В случае ренормируемых теорий, где расходятся диаграммы, описывающие процессы рассеяния (например, мезона на мезоне), требуется дальнейшее исследование. В этом случае можно избавиться от возможных дополнительных расходимостей, если, переходя к уравнению для парциальных волн, отбросить s - и p -волны^{/3/}. В работе^{/4/} было показано, что в ядре одновременного уравнения Бете-Солпитера в лестничном приближении не появляется новых расходимостей. Однако, когда в ядре содержатся члены, описывающие возможность виртуальной аннигиляции частиц системы (например, диаграммы L), то, как видно из вышеизложенного, необходимо дополнительное рассмотрение.

Автор выражает благодарность Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, А.Н. Тавхелидзе за плодотворные и стимулирующие дискуссии, Б.А. Арбузову, А.Т. Филиппову и О.А. Хрусталеву за обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. А.А. Logunov, А.Н. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. W. Zimmerman. Nuovo Cim., 11, 88 (1954).
3. А.Т. Филиппов. Phys. Lett. (в печати); Препринт ОИЯИ Р-1483, Дубна, 1964.
4. K. Symanzik. Nuovo Cim., 11, 88 (1954).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 февраля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3586. . . . Тираж 410. 0,4 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. Февраль, 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Нгуен Ван Хьеу

P-1564

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ
МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ РАССЕЯНИЯ
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛОКАЛЬНОЙ
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Диссертация, представленная на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1964

Нгуен Ван Хьеу

P-1564

Асимптотические соотношения между амплитудами
рассеяния в релятивистской локальной квантовой теории
поля

В работе систематически изложены результаты ряда работ,
посвященных изучению асимптотических соотношений между ам-
плитудами рассеяния. Эти асимптотические соотношения являются
следствиями основных принципов релятивистской локальной кванто-
вой теории поля.

0

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Nguyen Van Hieu

P-1564

Asymptotic Relations between Scattering Amplitudes in
Relativistic Local Quantum Field Theory

The results of a number of papers devoted to the study of the asymptotic relations
between the scattering amplitudes are stated in a systematic manner. These asymptotic
relations are the consequences of the basic principles of relativistic local quantum field
theory.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

Нгуен Ван Хьеу

P-1564

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ
МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ РАССЕЙАНИЯ
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЛОКАЛЬНОЙ
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Диссертация, представленная на соискание
ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 1964

О Г Л А В Л Е Н И Е

стр.

<u>ВВЕДЕНИЕ</u> . Сильные взаимодействия при больших энергиях	5
<u>ГЛАВА I. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ</u> <u>СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ И ФОРМФАКТОРОВ.</u>	
§ 1. Постулаты локальной квантовой теории поля и дисперсионные соотношения	16
§ 2. Теорема Фрагмена-Линделёфа и асимптотическое равенство дифференциальных сечений перекрёстных процессов	21
§ 3. Случай упругого рассеяния	23
§ 4. Асимптотика формфакторов	27
<u>ГЛАВА II. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД МЕЗОН-БАРИОН-</u> <u>НОГО РАССЕЯНИЯ.</u>	
Введение	30
I. МЕЗОН-БАРИОННОЕ РАССЕЯНИЕ	
§ 1. Свойства перекрёстной симметрии	31
§ 2. Асимптотические равенства между дифференциальными сечениями	34
§ 3. Асимптотические соотношения для полных сечений и дифференциальных сечений упругого рассеяния вперед	36
§ 4. Асимптотические свойства поляризационных эффектов	39
§ 5. Полный опыт для упругого мезон-барионного рассеяния	42
II. БАРИОН-БАРИОННОЕ РАССЕЯНИЕ	
§ 1. Свойства перекрёстной симметрии	46
§ 2. Асимптотические равенства между сечениями	49
§ 3. Асимптотические соотношения между поляризациями и параметрами асимметрии	52
<u>ГЛАВА III. СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНО-</u> <u>ШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ РАССЕЯНИЯ.</u>	
Введение	56
I. МЕЗОН-БАРИОННОЕ РАССЕЯНИЕ	

§ 1. Несокращение четности	57
§ 2. Нарушение инвариантности относительно отражения времени	60
П. БАРИОН-БАРИОННОЕ РАССЕЙНИЕ	
§ 1. Несокращение четности	61
§ 2. Нарушение инвариантности относительно отражения времени	66
<u>ГЛАВА IV. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД ФОТОРОЖДЕНИЯ И КОМПТОН-ЭФФЕКТА.</u>	
Введение	68
§ 1. Свойства перекрестной симметрии амплитуд фоторождения мезона на барионе	68
§ 2. Равенство между дифференциальными сечениями фоторождения мезона на барионе	71
§ 3. Асимптотические свойства поляризационных эффектов в процессах фоторождения	73
§ 4. Асимптотические свойства амплитуд комптон-эффекта	76
<u>ГЛАВА V. ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ МЕЗОН-БАРИОННОГО РАССЕЙНИЯ И ФОТОРОЖДЕНИЯ.</u>	
Введение	79
§ 1. Унитарная группа и её неприводимые представления	83
§ 2. Унитарная симметрия и соотношения между амплитудами мезон-барионного рассеяния	89
§ 3. Группа G_2 , семимерное зарядовое пространство и соотношения между амплитудами процессов мезон-барионного рассеяния	94
§ 4. Соотношения между сечениями и поляризациями	98
<u>ГЛАВА VI. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ</u>	
Введение	107
§ 1. Бозон-фермионное рассеяние	108
§ 2. Фермион-фермионное рассеяние	113
<u>ГЛАВА VII. ЗАКЛЮЧЕНИЯ И ОБСУЖДЕНИЯ</u>	
§ 1. Сводка результатов	120
§ 2. Сравнение с экспериментом	130
ЛИТЕРАТУРА	134

ВВЕДЕНИЕ

Сильные взаимодействия при больших энергиях

В настоящее время свойства сильных взаимодействий элементарных частиц обсуждаются во многих работах. Большинство этих работ либо опирается на феноменологические гипотезы, либо исходит из некоторых специальных предположений модельного характера. К первому типу принадлежат, например, работы И.Я. Померанчука и Л.Б. Окуня^{/1,2/}, в которых на основе анализа экспериментальных данных предлагается гипотеза, согласно которой при больших энергиях сечения всех процессов рассеяния с перезарядкой обращаются в нуль. Из этой гипотезы, теперь называемой правилом Померанчука-Окуня, и изотопической инвариантности сильных взаимодействий можно установить ряд равенств между сечениями рассеяния частиц одного и того же изотопического мультиплета. Например, дифференциальные сечения процессов рассеяния π -мезонов на протоне

$$\begin{aligned} \text{а) } \pi^+ p \rightarrow \pi^+ p, & \quad \text{в) } \pi^+ p \rightarrow \pi^+ n, \\ \text{с) } \pi^0 p \rightarrow \pi^0 p, & \quad \text{д) } \pi^0 p \rightarrow \pi^0 n \end{aligned} \quad (1)$$

выражаются через амплитуды рассеяния в состояниях с определенными изотопическими спинами T^J , $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_a &= |T^{\frac{3}{2}}|^2, & \sigma_b &= \frac{1}{9} |T^{\frac{3}{2}} + 2T^{\frac{1}{2}}|^2, \\ \sigma_c &= \frac{1}{9} |2T^{\frac{3}{2}} + T^{\frac{1}{2}}|^2, & \sigma_d &= \frac{4}{9} |T^{\frac{3}{2}} - T^{\frac{1}{2}}|^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно правилу Померанчука-Окуня, сечение σ_b очень мало при больших энергиях, что не противоречит имеющимся экспериментальным данным^{/3/}. В этом случае из (2) следует, что

$$T^{\frac{3}{2}} \approx T^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

и, следовательно,

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \approx \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ n) \approx \sigma(\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p) \quad (4)$$

Из равенства (3) для амплитуд рассеяния вперед и оптической теоремы также следует равенство полных сечений

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) \approx \sigma_{\text{tot}}(\pi^+ n) \approx \sigma_{\text{tot}}(\pi^0 p) \quad (5)$$

Аналогичные равенства также можно получить в случае рассеяния нуклонов, антинуклонов или K -мезонов на протоне.

Среди феноменологических теоретических работ по сильным взаимодействиям весьма важны также работы, в которых развивается теория дифракционного рассеяния. Так, например, в работах Д.И. Блохинцева, В.С. Барашенкова и др.^{/4-7/} изучается дифракционное рассеяние π -мезона большой энергии на нуклоне на основе оптической модели структуры нуклона. Дело в том, что при больших энергиях длина волны частиц становится значительно меньше размеров нуклона, и движение частицы внутри нуклона можно рассматривать как движение по траектории в среде с заданными коэффициентами преломления $n(z)$ и поглощения $k(z)$ (z - расстояние до центра нуклона). Кроме того, при больших энергиях сечение дифракционного рассеяния σ_{dif} намного больше сечения недифракционного рассеяния σ_{ndif} , так что действительная часть амплитуды упругого рассеяния очень мала по сравнению с мнимой частью. В этом случае из выражения амплитуды рассеяния через фазы

$$f(k, \theta) = \frac{\lambda}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{i\gamma_l}) P_l(\cos \theta) \quad (6)$$

следует, что

$$\gamma_l \approx -\frac{i}{2} \ln \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi} \left[\frac{d\sigma_{dif}(k, \theta)}{d\Omega} \right]^{1/2} P_l(\cos \theta) d\cos \theta \right\} \quad (7)$$

С другой стороны, фаза γ_l , соответствующая параметру удара $\rho = \lambda \sqrt{l(l+1)} \approx \lambda l$, выражается через коэффициент поглощения $k(z)$ соотношением

$$\gamma_l = \gamma(\rho) = -2i \int_{\rho}^{\infty} k(z) \frac{dz}{\sqrt{z^2 - \rho^2}} \quad (8)$$

Фазы γ_l можно определить из эксперимента на основе формулы (7). Зная γ_l , можно найти $k(z)$ с помощью соотношения (8) и вывести некоторые заключения относительно структуры нуклона.

Как было отмечено в работе Д.И. Блохинцева^{/7/}, предположение о существовании коэффициентов преломления и поглощения эквивалентно предположению о существовании комплексного потенциала $V(z)$. В данном случае функция $V(z)$ чисто мнимая. Задавая эту функцию, можно вычислить фазы γ_l и, следовательно, определить дифференциальное и полное сечения. В работах^{/8,9/} было показано, что можно объяснить имеющиеся экспериментальные данные в рамках оптической модели с некоторым комплексным потенциалом типа Юкавы

$$V(z) = -i\alpha \frac{e^{-\nu z}}{z} \quad (9)$$

или вида суперпозиции потенциалов Юкавы

$$V(z) = -i\alpha_1 \frac{e^{-\nu_1 z}}{z} + i\alpha_2 \frac{e^{-\nu_2 z}}{z} \quad (10)$$

Теория дифракционного рассеяния при больших энергиях также развивается в работах А.И. Ахиезера и И.Я. Померанчука^{/10/}, Л. Ван Хова^{/11-13/} и др.

Кроме указанных работ, опирающихся на феноменологические гипотезы, в настоящее время имеются многие работы, исходящие из некоторых специальных предположений модельного характера. Среди работ этого типа в первую очередь надо отметить работы по реджистике, в которых применяется метод комплексного углового момента, введенного Редже^{/14,15/} при изучении потенциального рассеяния. На основе представления Мандельштама^{/16/} и при помощи метода Редже, Грибов и Померанчук^{/17-19/}, Чу, Франчи и Гелл-Маян^{/20-23/}, Домокош^{/24/} и др. исследовали асимптотическое поведение амплитуд рассеяния при больших энергиях и фиксированной передаче импульса t . Рассмотрим, например, процессы рассеяния скалярных частиц a и b с одинаковой массой m

$$a + b \rightarrow a + b, \quad (I)$$

$$\bar{a} + b \rightarrow \bar{a} + b, \quad (II)$$

$$a + \bar{a} \rightarrow b + \bar{b}, \quad (III)$$

и обозначим через s , u и t переменные Мандельштама для этих процессов. Косинус угла рассеяния в процессе III (третьем канале) обозначим через z . Мы имеем

$$z = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2} \quad (II)$$

Амплитуду рассеяния в этом канале можно разложить на парциальные волны следующим образом

$$T(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(t) P_l(z). \quad (12)$$

Обобщая результаты Редже, указанные выше авторы предположили, что $f_l(t)$ в (12) также являются значениями некоторой аналитической функции $f(l, t)$ комплексной переменной l , которая убывает экспоненциально на бесконечности в правой полуплоскости, и что крайней особенностью (справа) этой функции является полюс. При этих предположениях можно записать $T(s, t)$ в виде контурного интеграла в плоскости комплексной l и деформировать контур влево. Вклад от полюса будет определять асимптотическое поведение амплитуды (12) при $z \rightarrow \infty$ и, следовательно, согласно (II), будет определять асимптотику амплитуды процесса (I) при больших энергиях и фиксированном t . Эта асимптотика имеет вид:

$$T(s, t) \sim f(t) s^{\alpha(t)}. \quad (13)$$

* Аналитичность $f(l, t)$ при $Re\ l$ больших некоторого l_0 следует из дисперсионного соотношения по передаче импульса t .

Из условия унитарности и аналитичности следует, что $\alpha(\omega) \leq 1$ *). На основе анализа экспериментальных данных в настоящее время предполагают, что для упругих процессов

$$\alpha(\omega) = 1. \quad (14)$$

В этом случае полные сечения взаимодействия стремятся к постоянным при $s \rightarrow \infty$. Полюса Редже имеют интересный физический смысл: они соответствуют связанным и резонансным состояниям в третьем канале. Таким образом, метод комплексного углового момента позволяет построить единую схему процессов сильных взаимодействий в областях больших и малых энергий. Траектория с свойством (14) соответствует состояниям с квантовыми числами вакуума и называется вакуумной.

В ряде работ были сделаны попытки найти информацию о полюсах Редже в теории возмущений. С помощью метода ренормализационной группы А.А. Логунов, А.Н. Тавхелидзе и др.^{/25/} показали, что в скалярной теории амплитуда рассеяния имеет реджевское поведение (13) с траекторией

$$\alpha(t) = -1 + \frac{g^2}{8\pi^2} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\sqrt{t'-4m^2}}{t'} \frac{dt'}{(t'-4m^2)(t'-t)} \quad (15)$$

в низшем порядке по константе связи g . Этот результат затем получен в работах^{/26,27/} путем суммирования лестничных диаграмм Фейнмана, а также в работе^{/28/} на основе уравнения Бете-Солпитера. В скалярной теории реджевское поведение (13) также было получено на основе мультипериферической модели^{/29/} и на основе квазипотенциального подхода^{/30,31/} при некотором предположении о поведении комплексного локального потенциала, зависящего от энергии. Таким образом, в теории возмущений содержится информация о полюсах Редже в теории поля. Однако, кроме полюсов Редже, в плоскости комплексного момента могут существовать и разрывы. Возможность существования разрывов в ℓ -плоскости обсуждалась во многих работах (например, ^{/32-34/} и др.), причем в некоторых случаях вклады разрывов в асимптотику амплитуды сокращаются, а в других - не сокращаются. Полюса Редже в квантовой электродинамике также изучены в работах А.А. Логунов и др.^{/35,36/}. В^{/35/} было показано, что амплитуда рассеяния электрона на позитроне в синглетном состоянии имеет реджевское поведение при $\cos \theta \rightarrow \infty$, причем реджевская траектория совпадает с известной формулой для уровней энергии позитрония. Однако амплитуды электромагнитного рассеяния электрона на позитроне в триплетном состоянии, мезона на фермионе и мезона на мезоне не имеют простого асимптотического поведения (13), вытекающего из гипотезы о том, что

*) Этот вопрос будет обсуждаться в дальнейшем.

крайней особенностью в l -плоскости является полюс Редже, соответствующий связанным кулоновским состояниям (см. /36/). Таким образом было показано на основе теории возмущений, что в действительности картина весьма сложна, и кроме полюсов Редже в l -плоскости существуют ещё другие особенности.

Из гипотезы, согласно которой крайней особенностью в l -плоскости является полюс Редже и этот полюс определяет асимптотику амплитуды рассеяния, вытекает ряд экспериментально проверяемых следствий /37-39, 24/. Например, были получены асимптотические соотношения между дифференциальными и полными сечениями различных процессов

$$\sigma(\pi\pi) \sigma(NN) \sim [\sigma(\pi N)]^2. \quad (16)$$

Из асимптотического поведения (13) с траекторией $\alpha(t)$, растущей с ростом t вблизи точки $t=0$ и удовлетворяющей (14), следует, что дифракционный конус сужается при $\lambda \rightarrow \infty$. Это утверждение противоречит имеющимся экспериментальным данным (см. обзорную работу /40/).

Кроме работ по реджистике, к числу работ второго типа также принадлежат работы, исходящие из предположения о существовании новых свойств симметрии сильных взаимодействий, которые могут проявляться только при больших энергиях (гипотеза): γ_5 -инвариантность /41/, симметрия в семимерном зарядовом пространстве (группа G_2) /42/, унитарная симметрия /43-45/ и т.д.

Отметим, что указанные работы либо носят полуфеноменологический характер, либо опираются на некоторые специальные гипотезы. Значение каждой из этих работ зависит от результатов её экспериментальной проверки. Экспериментальное подтверждение предсказаний какой-нибудь из работ такого типа имело бы большую ценность, поскольку это означало бы открытие новой закономерности в сильных взаимодействиях. Наоборот, экспериментальное опровержение какой-либо из этих работ не представляло бы особого интереса, так как это означало бы только опровержение специальных гипотез, но не затрагивало бы основных принципов квантовой теории поля. Так как в последнее время наблюдается скорее вторая тенденция - тенденция к опровержению (в особенности это касается работ по однополюсной реджистике), то естественно возрастает интерес к таким утверждениям, которые выводятся только из общих принципов локальной квантовой теории поля. Исследованию строгих асимптотических соотношений между амплитудами рассеяния при высоких энергиях и посвящена настоящая работа.

Среди основных постулатов релятивистской локальной квантовой теории поля, наряду с требованием инвариантности относительно неоднородной группы Лоренца, существования полной системы физических состояний с положительной энергией и микропричинности, имеется некоторое требование математического характера: требуется, чтобы элементы матрицы рас-

реального роста^{/40-41/}. На первый взгляд это чисто формальное требование. Однако оно играет важную роль при изучении порядка роста аналитического продолжения матричных элементов в импульсном пространстве. Оно обеспечивает полиномиальную ограниченность преобразования Фурье запаздывающей амплитуды во всей области аналитичности этой функции. Ослабление этого требования приводит к тому, что аналитическое продолжение матричных элементов в импульсном пространстве может иметь любой рост (например, экспоненциальный), что соответствовало бы неперенормируемой теории в лагранжевом формализме (этот вопрос обсуждался, например, в работе Хаага и Шроера^{/49/}). При этом вовсе не обязательно, чтобы такой рост сечения наблюдался на вещественной оси, как это имеет место при изучении n -ого члена ряда теории возмущений, который полиномиально возрастает вдоль любого направления в комплексной плоскости энергии. Поскольку бесконечность в этом случае является существенно особой точкой, то амплитуда может экспоненциально возрастать вдоль одних направлений, оставаясь ограниченной вдоль других. Как было отмечено в книгах Н.Н. Боголюбова и др.^{/46,47/} в этом случае для того чтобы компенсировать экспоненциальное возрастание амплитуды в верхней полуплоскости энергии E необходимо ввести множитель типа $e^{-\alpha E}$, где положительная константа α имеет размерность длины и может быть интерпретирована как некоторая мера нелокальности (элементарная длина). Отметим также, что без дополнения предположения об умеренном росте матричных элементов нельзя получить дисперсионных соотношений - практически единственно экспериментально проверяемого следствия общих принципов релятивистской локальной квантовой теории поля.

Если к общим принципам локальной теории поля добавить физическое допущение о том, что амплитуды процессов рассеяния не осциллируют, а имеют определенный рост (степенной или логарифмический, например), когда энергия стремится к бесконечности при фиксированной передаче импульса, то можно получить ряд экспериментально проверяемых асимптотических равенств между матричными элементами различных процессов. Первое соотношение такого рода - равенство полных сечений взаимодействия частиц и античастиц при больших энергиях было доказано И.Я. Померанчуком^{/50/} на основе дисперсионных соотношений. Предположим, что дифференциальные сечения упругого рассеяния протонов и антипротонов на протонах вперед ($\theta = 0$) и полные сечения взаимодействия стремятся к постоянным значениям, когда энергия E стремится к бесконечности. Обозначим через $M_{\pm}(E)$ амплитуды рассеяния вперед протонов и антипротонов, соответственно, усредненные по спинам. В рассматриваемом случае дисперсионные соотношения для амплитуд $M_{\pm}(E)$ имеют вид^{/51-53/}:

$$D_+(E) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{M}\right) D_+(M) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{M}\right) D_-(M) + \frac{f^2}{4\pi^2} \int_M^\infty \frac{dE'}{p'} \left[\frac{\sigma_+(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_-(E')}{E' + E} \right] + \frac{f^2}{m^2} \frac{p^2}{M - m^2/2M - E} + \frac{f^2}{4\pi^2} \int_M^M \frac{dE'}{p'} \left[\frac{\sigma_+(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_-(E')}{E' + E} \right] \quad (17)$$

$$D_-(E) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{M}\right) D_-(M) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{M}\right) D_+(M) + \frac{f^2}{4\pi^2} \int_M^\infty \frac{dE'}{p'} \left[\frac{\sigma_-(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_+(E')}{E' + E} \right] + \frac{f^2}{m^2} \frac{p^2}{M - m^2/2M + E} + \frac{f^2}{4\pi^2} \int_M^M \frac{dE'}{p'} \left[\frac{\sigma_+(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_-(E')}{E' + E} \right] \quad (18)$$

где $p = \sqrt{E^2 - M^2}$, $D_\pm(E) = \text{Re } M_\pm(E)$, а $\sigma_\pm(E)$ - полные сечения взаимодействия протонов и антипротонов с протонами (или их аналитические продолжения в области $E < M$), M - масса нуклона, m - масса π - мезона, а f - константа пион-нуклонного взаимодействия. Переходя в (17) и (18) к пределу $E \rightarrow \infty$, мы имеем

$$D_+(E) = \frac{E}{2M} [D_+(M) - D_-(M)] - \frac{f^2}{m^2} E + \frac{E}{4\pi^2} \int_M^M \frac{dE'}{p'} [\sigma_-(E') - \sigma_+(E')] + \frac{f^2}{4\pi^2} \int_M^\infty \frac{dE'}{p'} \left[\frac{\sigma_+(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_-(E')}{E' + E} \right] \quad (19)$$

$$D_-(E) = \frac{E}{2M} [D_-(M) - D_+(M)] + \frac{f^2}{m^2} E + \frac{E}{4\pi^2} \int_M^M \frac{dE'}{p'} [\sigma_+(E') - \sigma_-(E')] + \frac{f^2}{4\pi^2} \int_M^\infty \frac{dE'}{p'} \left[\frac{\sigma_-(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_+(E')}{E' + E} \right] \quad (20)$$

Рассмотрим интеграл от M до ∞ . Согласно нашему предположению, начиная с некоторой энергии E_0 , оба сечения $\sigma_+(E)$ и $\sigma_-(E)$ можно считать равными $\sigma_+(\rho)$ и $\sigma_-(\rho)$. Поэтому при $E \gg E_0$ мы имеем:

$$\frac{E^2}{4\pi^2} \int_M^\infty \frac{dE'}{E'} \left[\frac{\sigma_+(E')}{E' - E} + \frac{\sigma_-(E')}{E' + E} \right] \approx$$

$$\frac{E}{4\pi^2} \int_M^{E_0} \frac{dE'}{E'} [\sigma_+(E') - \sigma_-(E')] + \frac{E}{4\pi^2} \ln \frac{E}{E_0} [\sigma_+(\infty) - \sigma_-(\infty)]. \quad (21)$$

Из этой оценки и соотношений (19) и (20) следует, что амплитуды $D_\pm(E)$ растут как $E \ln \frac{E}{E_0}$ при $E \rightarrow \infty$ если $\sigma_+(\infty) \neq \sigma_-(\infty)$, в противоречии с предположением, что сечения стремятся к постоянным, т.е. $M_\pm(E)$ растут как E . Таким образом, мы имеем:

$$\sigma_+(\infty) = \sigma_-(\infty), \quad (22)$$

т.е. полные сечения взаимодействия частиц и античастицы должны стремиться к общему пределу при $E \rightarrow \infty$. Это утверждение в настоящее время называется теоремой Померанчука.

Различные обобщения и уточнения теоремы Померанчука были даны в работах^{/54-57/}. Исходя из тех же предположений, что и Померанчук, Амати, Фирц и Глазер^{/54/} показали, что интеграл

$$\int_M^\infty \frac{\sigma_+(E) - \sigma_-(E)}{E} dE$$

сходится. Это означает, например, что разность $\Delta\sigma(E) = \sigma_+(E) - \sigma_-(E)$ стремится к нулю быстрее, чем $1/\ln E$. Вейнберг^{/56/} рассмотрел, случай, когда разность $\Delta\sigma(E)$ при достаточно больших энергиях сохраняет знак, т.е. не меняет знака в бесконечном числе раз. В этом случае функция

$$g(E^2) = \frac{M_+(E) - M_-(E)}{E} \quad (23)$$

имеет вид произведения рациональной функции $Q(z)$ на R -функции $H(z)$ ^{/58,59/}:

$$g(z) = Q(z) H(z), \quad (24)$$

где

$$\text{Im } H(z) > 0 \quad \text{для } \text{Im } z > 0. \quad (25)$$

Из этого представления Вейнберг показал, что если функция

$$\frac{M_+(E) - M_-(E)}{E \ln^m E}$$

ограничена при $E \rightarrow \infty$, то разность $\Delta \sigma(E)$ стремится к нулю, если $m \leq 1/2$, и отношение $\sigma_+(E)/\sigma_-(E)$ стремится к единице, если $m \leq 1$. В работе Лемана^{/57/} также была изучена связь между асимптотическими поведением действительной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Результаты этой работы можно сформулировать следующим образом: если мнимая часть имеет асимптотическое поведение

$$\text{Im } T(s, t) \rightarrow s f_1(t) + s^{1-\alpha} f_2(t), \quad (26)$$

то действительная часть ведет себя как

$$\text{Re } T(s, t) \rightarrow s^{1-\alpha} g(t) \quad \text{если } 0 < \alpha < 1$$

и

$$|\text{Re } T(s, t)| \lesssim \ln s g(t) \quad \text{если } \alpha \geq 1. \quad (27)$$

Отметим, что сказанные результаты были получены в работах^{/50, 54-57/} при помощи дисперсионных соотношений. Недавно Н.Н. Мейманом^{/60/} было дано строгое и вместе с тем простое доказательство теоремы Померанчука на основе теоремы Фрагмена-Линделёфа в теории аналитических функций^{/61-62/}. Он доказал равенство полных сечений $\sigma_+(\omega)$ и $\sigma_-(\omega)$ в предположении, что эти пределы существуют и дифференциальные сечения рассеяния вперед ограничены. В этой работе также даны оценки скорости стремления разности $\Delta \sigma(E)$ к нулю. В частности, было показано, что если при $E \rightarrow \infty$ функция (23) имеет свойство

$$\left| \frac{\text{Re } g(E^2)}{\text{Im } g(E^2)} \right| \leq \text{ctg } \alpha, \quad (28)$$

то, начиная с некоторого E_0

$$\left| \frac{\Delta \sigma(E)}{\Delta \sigma(E_0)} \right| < C \left(\frac{E_0}{E} \right)^{\alpha/2}, \quad (29)$$

а если

$$|\text{Im } g(E^2)| \gg |\text{Re } g(E^2)|, \quad (30)$$

то

$$\left| \frac{\Delta \sigma(E)}{\Delta \sigma(E_0)} \right| \leq \left(1 + \frac{\nu-1}{\mu} \ln \frac{E_0}{E} \right)^{-\frac{\nu}{\nu-1}} \quad (31)$$

В настоящей работе также рассматриваются асимптотические соотношения между амплитудами рассеяния на основе теоремы Фрагмена-Линделёфа.

Кроме асимптотических соотношений типа теоремы Померанчука, из общих принципов локальной квантовой теории поля и условия унитарности также можно доказать, что рост сечений рассеяния с возрастанием энергии ограничен сверху, а не может быть произвольным. Исходя из строго доказанной аналитичности амплитуды рассеяния по $\cos \theta$ в эллипсе Лемана^{/63/}, Гринберт и Лоу^{/64/} получили верхние ограничения на рост полных и дифференциальных сечений. Более жёсткие ограничения были получены в работе Фруассарт^{/65/} с помощью представления Мандельштама. В частности, он показал, что при $\lambda \rightarrow \infty$ полные сечения не могут расти быстрее $\ln^2 \lambda$

$$\sigma_{tot}(\lambda) \leq C \ln^2 \lambda. \quad (32)$$

Некоторые обобщения результатов Фруассарт были даны в работах Мартэна и др. ^{/66/}.

В настоящей работе на основе теоремы Фрагмена-Линделёфа изучаются асимптотические соотношения между амплитудами перекрёстных процессов рассеяния.

В главе I на примере рассеяния скалярных частиц подробно иллюстрируется метод доказательства и, в частности, устанавливается равенство между дифференциальными сечениями перекрёстных процессов. С помощью теоремы Фрагмена-Линделёфа также показано асимптотическое равенство пределов формфакторов для процессов рассеяния и процессов аннигиляции. Часть результатов этой главы также была получена другим путем (с помощью дисперсионных соотношений) в недавней работе Ван Хова^{/67/} в предположении, что амплитуда рассеяния вперед ведет себя как λ при $\lambda \rightarrow \infty$ при всех фиксированных передачах импульса t .

В главе II рассматриваются процессы рассеяния частиц со спином: мезон-барионное и барион-барионное рассеяние. Из асимптотических соотношений между амплитудами устанавливаются асимптотические равенства между дифференциальными и полными сечениями, а также между поляризационными эффектами. В этой главе кроме аналитичности и полиномиальной ограниченности амплитуд предполагается также, что взаимодействия инвариантны относительно преобразований пространственного отражения P , зарядового сопряжения C и временного отражения T .

В главе III рассматривается роль этих свойств инвариантности. Показано, что некоторые важные асимптотические соотношения имеют место и в том случае, когда эти свойства инвариантности нарушаются. В частности, асимптотическое равенство дифференциальных сечений упругого рассеяния частицы и античастицы, а также полных сечений взаимодействий частицы и античастицы можно доказать без использования инвариантности относительно отражения времени T .

В главе IV изучаются асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов фоторождения мезона на барионе. Из этих соотношений вытекает асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями перекрестных процессов, а также асимптотическое соотношение между поляризационными параметрами асимметрии в этих процессах.

В главе V рассматриваются некоторые возможности экспериментальной проверки моделей сильных взаимодействий с высшими симметриями: триплетная модель Сакаты^{/43/} и октетная модель Гелл-Манна^{/44/} и Неемана^{/45/} с унитарной симметрией и модель с группой симметрии G_2 /42/. В частности, из полученных в главе II асимптотических соотношений и свойств симметрии вытекают некоторые асимптотические соотношения между сечениями процессов мезон-барионного рассеяния, которые нельзя получить только из свойств симметрии или только из асимптотических соотношений типа теоремы Померанчука.

В главе VI проверяются в теории возмущений асимптотические соотношения, полученные из общих соображений. В частности, показывается, что матричные элементы в каждом порядке теории возмущений удовлетворяют полученным соотношениям, если $\tan^2 \delta_{\pi} \gg 1$.

В главе VII дана сводка результатов. Эти результаты затем сравниваются с имеющимися экспериментальными данными.

Основные результаты настоящей работы были опубликованы в работах^{/86,87,II2,II3,II6,II9,I26,I31,I59/}.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ
И ФОРМФАКТОРОВ

§ I. Постулаты локальной квантовой теории поля и дисперсионные
соотношения

Квантовая электродинамика развивалась в ряде классических работ и достигла больших успехов. Поскольку константа связи в этом случае мала, то при вычислении конкретных эффектов можно разлагать S -матрицу в ряд теории возмущений. Все расходимости устраняются с помощью процедуры перенормировки, так что можно вычислить эффекты не только в низшем, но и в высших порядках теории возмущений. Результаты теории прекрасно согласуются с экспериментом. Однако применить метод теории возмущений в сильных взаимодействиях невозможно, так как в этом случае константа связи не мала. Кроме того, сама процедура перенормировки не имеет ясного физического смысла, так как здесь мы должны работать с бесконечными величинами. Поэтому естественно возникла идея о построении теории сильных взаимодействий на базе основных принципов релятивистской квантовой теории поля без использования теории возмущений. Первыми в этом направлении были работы Гелл-Манна, Гольдбергера и Гирринга^{/68/}, Гольдбергера и др.^{/69,70/}, Карплуса и Рудермана^{/71/}, Оме^{/72,73/} и др. В этих работах были получены дисперсионные соотношения для процессов рассеяния как следствие общих принципов релятивистской квантовой теории поля. Эти принципы были четко сформулированы в книгах Н.Н. Боголюбова и др.^{/46,47/} Основными из этих принципов являются:

1. Инвариантность относительно неоднородной группы Лоренца.
2. Условие микропричинности, которое в форме Н.Н. Боголюбова гласит

$$\frac{\delta}{\delta \varphi_1(x)} \left[\frac{\delta S}{\delta \varphi_2(y)} S^+ \right] = 0 \quad \text{для} \quad x \approx y, \quad (\text{I.I})$$

причем $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ могут быть одним и тем же или различными полями.

3. Условие спектральности, согласно которому существует полная система физических состояний с положительной энергией.

Н.Н. Боголюбов, исходя из этих основных принципов локальной теории поля, разработал метод доказательства дисперсионных соотношений. Этим методом были доказаны дисперсионные соотношения для упругого рассеяния π -мезона на нуклоне при фиксированной передаче импульса^{/47/}. Эти соотношения в частном случае рассеяния вперед также были доказаны независимо в работе Симанзика^{/74/}. А.А. Логунов и др.^{/75-81/} при помощи метода Н.Н. Боголюбова доказали дисперсионные соотношения для ряда неупругих процессов.

Некоторые результаты по этому вопросу также были получены в работе Оме и Гайлора^{/82/}.
 Дальнейший важный результат был получен в работе Лемана^{/63/}, который доказал аналитичность амплитуды рассеяния π -мезона на нуклоне по передаче импульса в некотором эллипсе с помощью дисперсионных соотношений и интегрального представления Йостя и Лемана^{/83/} и Дайсона^{/84/} для причинных коммутаторов (интегральное представление Йоста-Лемана-Лайсона также было применено в работе В.С. Владимирова и А.А. Логунова^{/79/}).

В этих работах было показано, что амплитуда рассеяния при некоторой фиксированной передаче импульса, рассматриваемая как функция от энергии E , например, является крайним значением аналитической функции в плоскости комплексных E с полюсами и разрезами на вещественной оси. Физическая область процесса лежит на правом разрезе (но может не совпадать с этим разрезом). Левый разрез соответствует не физическим значениям энергии, а амплитуда рассеяния на этом разрезе связана с амплитудой рассеяния на правом разрезе условием перекрёстной симметрии. В настоящей работе применение условия перекрёстной симметрии играет существенную роль, так что мы остановимся коротко на получении этого условия.

Для простоты рассмотрим сначала процесс рассеяния скалярных частиц a_i и b_i :

$$a_1 + b_1 \rightarrow a_2 + b_2 \quad (I)$$

Случай частиц со спином будет рассматриваться в следующей главе. Обозначим через p_i 4-импульсы частиц b_i , через M_i их массы, а через q_i и m_i 4-импульсы и массы частиц a_i ,

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2, \quad p_i^2 = M_i^2 \quad \text{и} \quad q_i^2 = m_i^2$$

(на массовой поверхности), и положим

$$s = (p_1 + q_1)^2, \quad u = (p_1 - q_2)^2, \quad t = (p_1 - p_2)^2.$$

На массовой поверхности

$$s + u + t = M_1^2 + M_2^2 + m_1^2 + m_2^2.$$

Матричный элемент имеет вид:

$$\langle f | S - 1 | i \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{\sqrt{16 p_1^0 p_2^0 q_1^0 q_2^0}} M^T(p_2, q_2; p_1, q_1).$$

С помощью метода, изложенного в книгах Н.Н. Боголюбова и др.^{/46,47/}, можно показать, что

$$M^I(p_2, q_2; p_1, q_1) = \sqrt{4 p_1^0 p_2^0} \int d^4 \xi \langle \phi_2(p_2) | \frac{\delta j_{a_2}(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}^+(\xi/2)} | \phi_2(p_1) \rangle e^{-i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi} \quad (I.2)$$

где

$$j_{a_2}(x) = -i \frac{\delta S}{\delta \varphi_{a_2}(x)} \psi^+ \quad (I.3)$$

а φ_{a_2} - поля частиц a_2 . Аналогичная формула также может быть получена методом Лемана, Симанзика и Циммермана^{/85/}. Согласно принципу причинности (I.1)

$$\frac{\delta j_{a_2}(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}^+(\xi/2)} = 0 \quad \text{для } \xi \leq 0.$$

Поэтому из (I.2) следует, что $M^I(p_2, q_2; p_1, q_1)$ может быть продолжена в область комплексных импульсов. Она определена не только для вещественных векторов (\vec{q}_1, q_1^0) , но и для комплексных векторов (\vec{q}_1, q_1^0) с малой мнимой частью, удовлетворяющей условию

$$\text{Im}(q_1 + q_2)^0 > 0, \quad [\text{Im}(q_1 + q_2)]^2 = [\text{Im}(\vec{q}_1 + \vec{q}_2)]^2 - [\text{Im}(q_1 + q_2)^0]^2 < 0. \quad (I.4)$$

Физическая амплитуда рассеяния является крайним значением аналитической функции в этой области.

Теперь рассмотрим амплитуду (I.2), продолженную в нефизическую область импульсов. Предположим, что частицы a_2 имеют нефизические вещественные 4-импульсы q_2' , отличающиеся от физических 4-импульсов знаком. Закон сохранения 4-импульса в этом случае имеет вид:

$$p_1 + q_2' = p_2 + q_1'$$

Для того, чтобы это условие было совместимо формально с законом сохранения 4-импульса в предыдущем случае, мы положим $q_1' = -q_2$, $q_2' = -q_1$. На массовой поверхности $q_1'^2 = -m^2$. При этом квадрат энергии s' равен

$$s' = -(p_1 + q_1')^2 = -(p_1 - q_2)^2 = u.$$

Продолженная амплитуда $M^I(p_2, q_2'; p_1, q_1')$ равна

$$M^I(p_2, q_2'; p_1, q_1') = \sqrt{4 p_1^0 p_2^0} \int d^4 \xi \langle \phi_2(p_2) | \frac{\delta j_{a_2}(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}^+(\xi/2)} | \phi_2(p_1) \rangle e^{-i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi} \quad (I.5)$$

Отметим, что в процессе аналитического продолжения функция $M^{\text{I}}(p_1, q_1; p_2, q_2)$ должна всегда находиться в области аналитичности, поэтому выражение (I.5) при вещественных импульсах должно рассматриваться как краевое значение аналитической функции в области комплексных импульсов (\bar{q}_1, q_1°) , удовлетворяющих условию (I.4), т.е.

$$\text{Im}(q_1 + q_2)^{\circ} = -\text{Im}(q_1 + q_2)^{\circ} > 0, \quad [\text{Im}(q_1 + q_2)]^2 < 0. \quad (\text{I.6})$$

Вместе с процессом (I) мы будем рассматривать также перекрестный процесс

$$\bar{a}_1 + b_1 \rightarrow \bar{a}_1 + b_2, \quad (\text{II})$$

где черта означает переход к античастице. В силу инвариантности относительно отражения времени, амплитуда этого процесса равна амплитуде процесса

$$\bar{a}_1 + b_2 \rightarrow \bar{a}_2 + b_1. \quad (\text{PI})$$

Обозначим через p_1 4-импульсы частиц b_1 , через q_1 4-импульс античастицы \bar{a}_1 и через q_2 4-импульс античастицы \bar{a}_2 . На массовой поверхности $q_1^2 = -m_1^2$, $q_2^2 = -m_2^2$. Амплитуда процессов (II) или (PI) имеет вид:

$$M^{\text{II}}(p_1, q_1; p_2, q_2) = \sqrt{4p_1^0 p_2^0} \int d^4\xi \langle b_1(p_1) | \frac{\delta j_{a_1}^+(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}(\xi/2)} | b_2(p_2) \rangle e^{-i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi}, \quad (\text{I.7})$$

где

$$j_{a_1}^+(x) = -i \frac{\delta S}{\delta \varphi_{a_1}^+(x)} \psi^+ \quad (\text{I.8})$$

Как и (I.2), выражение (I.7) является краевым значением аналитической функции в области комплексных импульсов (I.4).

Выражение (I.5) также можно переписать в виде:

$$M^{\text{I}}(p_1, q_1; p_2, q_2) = \sqrt{4p_1^0 p_2^0} \left[\int d^4\xi \langle b_1(p_1) | \frac{\delta j_{a_1}^+(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}(\xi/2)} | b_2(p_2) \rangle e^{-i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi} \right]^* \quad (\text{I.9})$$

Это условие перекрёстной симметрии. Оно выполняется и вне массовой поверхности, но при этом амплитуды M^J должны рассматриваться как аналитические продолжения физических амплитуд по массам. На массовой поверхности амплитуды $M^J(p_2, q_2; p_1, q_1)$ являются функциями двух переменных, например, s и t . Обозначим эти функции через $T^J(s, t)$.

Теперь находим соотношение перекрёстной симметрии между $T^J(s, t)$. Для этой цели рассмотрим сначала соотношение (I.10) вне массовой поверхности импульсов q_2 , когда массы m_i комплексны

$$q_2^2 = -m_2^2 = \tau_2 > 0,$$

а затем продолжим эти соотношения по массам на массовую поверхность. Возможность аналитического продолжения по массам была доказана при доказательстве дисперсионных соотношений. Как было сказано, функции в (I.10) являются крайними значениями аналитических функций в области комплексных импульсов (I.4) и (I.6). Поэтому это соотношение можно написать явно в виде:

$$\lim_{k \rightarrow 0} M^I(p_2, -q_1 + ik; p_1, -q_2 + ik) = \left[\lim_{k \rightarrow 0} M^II(p_2, q_2 + ik; p_1, q_1 + ik) \right]^* \quad (I.11)$$

Так как $q_2^2 > 0$, то можно выбрать k так, чтобы, например, $q_2 k = 0$. Мы имеем

$$-(q_2 + ik + p_2)^2 = -(p_2 + q_2)^2 - 2ikp_2 = s + i\varepsilon,$$

т.е. в правой части (I.11) мы имеем $T^{II}(s + i\varepsilon, t)$, а

$$-(-q_2 + ik + p_1)^2 = -(p_1 - q_2)^2 - 2ikp_1 = u + i\varepsilon,$$

т.е. в левой части (I.11) мы имеем $T^I(u + i\varepsilon, t)$. Таким образом, после аналитического продолжения на массовую поверхность амплитуды процессов (I) и (II) связаны между собой соотношением перекрёстной симметрии

$$T^I(u, t) = T^{II}(s, t)^* \quad (I.12)$$

причем обе функции в этом соотношении должны рассматриваться как крайние значения аналитической функции в верхней полуплоскости первой переменной, т.е. переменные s и u имеют малые мнимые добавки $i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

§ 2. Теорема Фрагмена-Линделёфа и асимптотическое равенство
 дифференциальных сечений перекрёстных процессов

Теперь перейдём к установлению асимптотического равенства между дифференциальными сечениями процессов (I) и (II). Обозначим через p_1 и q_1 4-импульсы частицы ψ_1 и частицы a_1 или античастицы \bar{a}_1 в начальных состояниях процессов (I) и (II), соответственно, через p_2 и q_2 4-импульсы частицы ψ_2 и частицы a_2 или античастицы \bar{a}_2 в конечных состояниях этих процессов. Для первого процесса $q_1^2 = -m_1^2$, а для второго $-q_1^2 = m_1^2$, $q_2^2 = -m_2^2$. В этих обозначениях s есть квадрат энергии в системе центра масс каждого процесса, а τ и u — передачи импульса.

Дифференциальное сечение каждого из рассматриваемых процессов выражается следующим образом через его инвариантную амплитуду

$$\frac{d\sigma^J(s, \tau)}{d\tau} = \frac{1}{64\pi s k_J^2} |T^J(s, \tau)|^2, \quad J = I, II, \quad (I.13)$$

где k_J — величина трехмерного импульса частиц начального состояния процесса J , $J = I, II$, в системе центра масс. Для первого процесса

$$k_I = \frac{1}{4s} \left[s^2 - 2s(M_1^2 + m_1^2) + (M_1^2 - m_1^2)^2 \right], \quad (I.14)$$

а для второго

$$k_{II} = \frac{1}{4s} \left[s^2 - 2s(M_1^2 + m_2^2) + (M_1^2 - m_2^2)^2 \right]. \quad (I.15)$$

Предположим, что массы M_i и m_i частиц и их взаимодействия таковы, что из принципов локальной квантовой теории поля следует аналитичность амплитуд $T^J(s, \tau)$ при фиксированном τ в комплексной плоскости s с разрезами вдоль вещественной оси /46.47, 75-84/. Кроме разрезов, амплитуды $T^J(s, \tau)$ имеют как правило конечное число полюсов на вещественной оси s . При исследовании асимптотики амплитуд при $s \rightarrow \infty$ удобно вычестить из амплитуд их полюсные члены, которые имеют известную асимптотику $1/s$ и изучать асимптотику остальных функций, ограниченных в конечных точках вещественной оси. В дальнейшем через $\tilde{T}^J(s, \tau)$ будем обозначать амплитуду с вычтенными полюсными членами.

Для того чтобы охватить класс амплитуд с достаточно общим асимптотическим поведением, введём одно вспомогательное понятие. Назовем функцию $\varphi(s, \tau)$ допустимой, если при фиксированном τ из некоторого интервала функция $1/\varphi(s, \tau)$ аналитична и меньше любой экспоненты $e^{\epsilon|s|}$, $\epsilon > 0$, при $s \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости, непрерывна на вещественной

оси s и t , кроме того, если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\varphi(s, t)}{\varphi(-s, t)} = e^{-i\pi\alpha(t)}, \quad (I.16)$$

где $\alpha(t)$ — произвольная вещественная функция. Примером допустимой функции может служить функция вида:

$$\varphi(s, t) = (s+i)^{\alpha(t)} [\ln(s+i)]^{\beta(t)} [\ln \ln(s+i)]^{\gamma(t)}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ вещественны.

Справедлива следующая теорема /86,87/

Теорема I. Пусть для некоторой допустимой функции $\varphi(s, t)$ существуют конечные пределы

$$V^I(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T^I(s, t)}{\varphi(s, t)}, \quad V^{II}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T^{II}(s, t)}{\varphi(-s, t)} \quad (I.17)$$

Тогда в локальной квантовой теории поля эти пределы равны друг другу

$$V^I(t) = V^{II}(t). \quad (I.18)$$

Отсюда следует асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I) и (II)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{dG^I(s, t)}{dt} \left[\frac{dG^{II}(s, t)}{dt} \right]^{-1} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{dG^I(s, t)}{dt} \approx \frac{dG^{II}(s, t)}{dt}. \quad (I.19)$$

Доказательство. В силу сделанных предположений относительно амплитуд $T^J(s, t)$

функция

$$V(s, t) = \frac{T^I(s, t)}{\varphi(s, t)} \quad (I.20)$$

аналитична, не превосходит любой экспонент $e^{\epsilon|s|}$ в верхней полуплоскости s и ограничена на вещественной оси. Кроме того, из (I.17) и условия перекрестной симметрии (I.12), следует, что при $s \rightarrow \pm \infty$ вдоль вещественной оси функция $V(s, t)$ стремится к конечным пределам

$$V^I(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} V(s, t), \quad V^{II}(t) = \lim_{s \rightarrow -\infty} V(s, t). \quad (I.21)$$

Поэтому к функции $V(s, t)$ можно применить следующую теорему Фрагмена-Линделёфа /61,62/.

Теорема П. I. Пусть $f(z)$ аналитическая функция от $z = re^{i\theta}$, регулярная в области \mathcal{D} , заключенной между двумя полупрямыми L_1 и L_2 , которые образуют угол π/τ с вершиной в начале координат, и ограничена на этих полупрямых ($|f(z)| \leq C$ вдоль L_1 и L_2). Тогда имеет место следующая альтернатива: либо $|f(z)| \leq C$ во всех точках области \mathcal{D} , либо существует такая последовательность τ_n , стремящаяся к бесконечности, что

$$M(\tau_n) = \max_{\substack{|z| = \tau_n \\ z \in \mathcal{D}}} |f(z)| \gg \exp[\nu \tau_n^\nu], \quad \nu > 0. \quad (I.22)$$

Если функция $f(z)$ меньше по модулю любой экспоненты $e^{|z|^\nu}$ в угле \mathcal{D} , то должна осуществляться первая возможность, т.е. $f(z)$ ограничена во всей области \mathcal{D} постоянной.

2. Пусть функция $w = f(z)$ регулярна и ограничена в угле \mathcal{D} . Обозначим через E_1, E_2 множество предельных значений w при $z \rightarrow \infty$ вдоль полупрямой L_1 . Тогда, либо множества E_1 и E_2 имеют общую точку, либо одно из них окружает другое, отделяя его от окружности $|w| = C$.

В частности, если существуют конечные пределы a_1 и a_2 , когда $z \rightarrow \infty$ вдоль L_1 и L_2 , то $a_1 = a_2 = a$, и тогда $f(z) \rightarrow a$ при $z \rightarrow \infty$ равномерно в \mathcal{D} .

Функция $V(s, t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы П. В нашем случае область \mathcal{D} есть верхняя полуплоскость, поэтому $\tau = 1$. Так как эта функция полиномиально ограничена, то её предельные значения при $s \rightarrow \pm \infty$ должны совпадать. Таким образом, равенство (I.18) пределов $V^J(s, t)$ доказано.

Если отброшенные полюсные члены убывают при $s \rightarrow \infty$ быстрее чем сама функция $T^J(s, t)$, то при $s \rightarrow \infty$ эта часть амплитуды определяет сечение, и из формулы (I.13) мы получим асимптотическое соотношение (I.19) между дифференциальными сечениями. Если же амплитуда ведёт себя на бесконечности как $1/s$, то непосредственный учёт полюсных членов показывает, что равенство (I.19) остаётся в силе и в этом случае. Теорема I доказана.

§ 3. Случай упругого рассеяния

Рассмотрим частный случай упругого рассеяния

$$a + b \rightarrow a + b \quad \text{и} \quad \bar{a} + b \rightarrow \bar{a} + b. \quad (I.23)$$

В этом случае асимптотическое равенство дифференциальных сечений перекрёстных процессов (I.23) может быть получено при более слабых требованиях. Вместо предположения о существовании пределов отношений (I.17) при $s \rightarrow \infty$ мы будем предполагать, что модули этих отношений имеют пределы. Это означает, что при $s \rightarrow \infty$ дифференциальные сечения имеют определенный рост. Кроме того, мы ещё сделаем некоторое предположение относительно мнимой части амплитуды. Как известно, амплитуду $T^J(s, t)$ можно разложить по парциальным волнам

$$T^J(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right), \quad (I.24)$$

где k - величина трехмерных импульсов частиц в системе центра масс. В силу условия унитарности

$$\text{Im } a_l(s) \geq 0. \quad (I.25)$$

При фиксированном t и $s \rightarrow \infty$, аргумент полиномов Лежандра $P_l(z)$ в (I.24) стремится к единице, а $P_l(1) = 1$. Кроме того, функцию $\varphi(s, t)$ всегда можно выбрать так, чтобы при достаточно больших s она была положительной. При этом каждый из слагаемых в разложении мнимой части отношения $V_o^J(s, t) = T^J(s, t) / \varphi(s, t)$

$$\text{Im } V_o^J(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\text{Im } a_l(s)}{\varphi(s, t)} P_l\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) \quad (I.26)$$

стремится к неотрицательному пределу при $s \rightarrow \infty$. Поскольку ряд (I.26) сходится неравномерно относительно s , то отсюда не следует, что $\text{Im } V_o^J(s, t)$ стремится к неотрицательному пределу. Однако естественно предполагать, что при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ мнимые части $V_o^J(s, t)$ стремятся к неотрицательным пределам. Это эквивалентно предположению, что при $s \rightarrow \infty$ в ряде (I.26) дают главный вклад парциальные волны с моментами $l \sim Ck^{\frac{2}{3}}$. Покажем, что при сделанных предположениях (дифференциальные сечения (а не сами амплитуды) имеют определенный рост и мнимые части $V_o^J(s, t)$ стремятся к неотрицательным пределам) имеет место асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями рассеяния частиц и античастиц.

Действительно, предположение о существовании пределов модулей функции (I.20) при $s \rightarrow \pm \infty$ означает, что предельные множества E_1 и E_2 функции при $s \rightarrow \pm \infty$ лежат на двух концентрических окружностях:

$$|V(t)| = a_1(t) \quad \text{и} \quad |V(t)| = a_2(t).$$

*) При больших k и l мы имеем

$$P_l\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) \approx J_0\left(\frac{l}{k} \sqrt{-t}\right).$$

Первый корень уравнения $J_0(x) = 0$ равен $x_0 = 2,4048$. В области $\frac{l}{k} \sqrt{-t} < x_0$ функция $J_0\left(\frac{l}{k} \sqrt{-t}\right)$ и, следовательно, $P_l\left(1 + \frac{t}{2k^2}\right)$ положительны. Если мы предположим, что основной вклад в (I.26) дают члены с $l \sim Ck^{\frac{2}{3}}$, то при $|t| < \left(\frac{x_0}{C}\right)^2$, т.е. при достаточно малых t , эти главные члены будут неотрицательными. Поскольку $P_l(x) \geq 1$ при $x \geq 1$, то в той части нефизической области $t \geq 0$, в которой ряд (I.26) сходится, мнимая часть амплитуды неотрицательна.

В силу второй части теории II либо множества E_1 и E_2 пересекаются, что возможно только при $a_1(t) = a_2(t)$, либо одно из них окружает второе, т.е. состоит из всех точек окружности $|v(t)| = \max(a_1(t), a_2(t))$. Однако в рассматриваемом случае вторая возможность не осуществляется, так как в силу неотрицательности мнимых частей амплитуд при $s \rightarrow \infty$, каждое из множеств E_2 может занимать не более, чем полукругность, и значит не может окружать второе множество. Отсюда следует, что $a_1(t) = a_2(t)$, и поэтому имеет место асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями.

Другие условия, при которых справедливы асимптотические равенства между дифференциальными сечениями упругого рассеяния частиц и античастиц, даны в недавней работе Меймана^{/88/}. Результаты этой работы могут быть сформулированы следующим образом. Пусть амплитуды упругого рассеяния $T^J(s, t)$ не имеет вещественных нулей и пусть сходятся интегралы

$$\int_{-\rho}^{\rho} |L_n | T^J(s, t) | \frac{ds}{1+s^2} < \rho, \quad J = I, II \quad (I.27)$$

Отсюда следует сходимость произведений Бляшке^{/89/}

$$\Pi^J(s, t) = \prod_k \frac{1 - s/d_k^J(t)}{1 - s/d_k^{J*}(t)}, \quad (I.28)$$

где $d_k^J(t)$ есть нули амплитуд $T^J(s, t)$ в верхней полуплоскости s . На вещественной оси модули произведений (I.28) равны единице, так что вместо амплитуд $T^J(s, t)$ можно рассматривать новые функции

$$\hat{T}^J(s, t) = \frac{T^J(s, t)}{\Pi^J(s, t)} \quad (I.29)$$

Согласно нашему предположению, амплитуды $T^J(s, t)$ не имеют нулей на вещественной оси. Поэтому функции (I.29) не имеют нулей в верхней полуплоскости $\text{Im } s > 0$. Пусть далее существует предел отношения модулей амплитуд процессов (I) и (II) при $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \rho} \left| \frac{T^I(s, t)}{T^{II}(s, t)} \right| = \lim_{s \rightarrow \rho} \left| \frac{\hat{T}^I(s, t)}{\hat{T}^{II}(s, t)} \right| = \gamma, \quad (I.30)$$

и на вещественной оси отношение амплитуд $T^I(s, t)$ и $T^{II}(s, t)$ ограничено по модулю сверху и снизу. Тогда $\gamma = 1$ если фаза отношения $\hat{T}^I(s, t)/\hat{T}^{II}(s, t)$ растет медленнее $\ln s$ или убывает медленнее $1/\ln s$ при $s \rightarrow \rho$; γ равно конечному положительному значению, отличному от единицы, если фаза этого отношения растет как $\ln s$ или убывает как $1/\ln s$; γ равно нулю или бесконечности, если фаза указанного отношения растет быстрее $\ln s$ или убывает быстрее $1/\ln s$. Этот результат также справедлив, если амплитуды имеют конечное

Теперь рассмотрим рассеяние вперед. Как было сказано во введении, аналитичность амплитуд рассеяния и условие унитарности матрицы рассеяния приводят к верхним ограничениям на рост амплитуд упругого рассеяния. Так, например, исходя из представления Мандельштама и условия унитарности, Фруассарт^{/65/} показал, что рост амплитуд упругого рассеяния вперед ограничен следующим образом:

$$|T(s, 0)| \leq A s \ln^2 s. \quad (I.31)$$

Отсюда следует, что полное сечение взаимодействия не может расти быстрее, чем $\ln^2 s$ при $s \rightarrow \infty$. Этот результат обобщается на случай рассеяния частиц со спином. Недавно Мартэн^{/66/} получил неравенство (I.31) при более слабых предположениях об аналитических свойствах амплитуд рассеяния.

Неравенство (I.31) означает, что

$$\alpha(s) \leq 1$$

Рассмотрим упругое рассеяние в крайнем случае $\alpha(s) = 1$. В этом случае соотношения (I.17) и (I.18) вместе с (I.16) дают равенство

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T^I(s, 0)}{T^{\bar{I}}(s, 0)^*} = -1, \quad (I.32)$$

отсюда следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Im } T^I(s, 0)}{\text{Im } T^{\bar{I}}(s, 0)} = 1, \quad (I.33)$$

если действительные части не растут быстрее, чем мнимые части. Однако полные сечения взаимодействий $\sigma_{tt}^I(s)$ и $\sigma_{t\bar{t}}^{\bar{I}}(s)$ частицы a и античастицы \bar{a} с частицей b , соответственно, выражаются через амплитуды упругого рассеяния вперед этих частиц следующим образом:

$$\sigma_{t\bar{t}}^J(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \text{Im } T^J(s, 0). \quad (I.34)$$

Из (I.33) и (I.34) следует известная теорема Померанчука о равенстве полных сечений взаимодействий частиц и античастиц.

Если a - подлинно нейтральная частица, т.е. a и её античастица есть одна и та же частица, то два процесса (I.23) совпадают, т.е.

$$T^I(s, t) = T^{\bar{I}}(s, t) = T(s, t).$$

Поэтому если $\alpha(s) = 1$, то согласно (I.32) мы имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T(s, 0)}{T(s, 0)^*} = -1$$

т.е. в асимптотике амплитуда рассеяния чисто мнимая

$$\lim_{s \rightarrow \rho} \frac{\operatorname{Re} T(s, 0)}{\operatorname{Im} T(s, 0)} = 0 \quad (I.35)$$

Из этого соотношения и выражений (I.13) и (I.34) для дифференциального и полного сечений вытекает следующая асимптотическая связь между дифференциальным и полным сечениями рассматриваемого процесса

$$\left. \frac{d\sigma(s, t)}{dt} \right|_{t=0} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(s)]^2 \quad (I.37)$$

§ 4. Асимптотика формфакторов

Для электромагнитного и слабого взаимодействий можно применить теорию возмущений и ограничиться низшим порядком, поскольку в этих случаях константы взаимодействия малы и высшие приближения несущественны (по крайней мере в области энергий, достигнутых в настоящее время). Учет вклада сильных взаимодействий приводит к появлению формфакторов. Аналитические свойства формфакторов и теорема Фрагмена-Линделёфа также позволяют сделать некоторые заключения относительно асимптотики этих формфакторов.

Рассмотрим сначала электромагнитное рассеяние электрона на протоне

$$e^- + p \rightarrow e^- + p \quad (I.38)$$

и процесс аннигиляции пары протон-антипротон в пару электрон-позитрон

$$p + \bar{p} \rightarrow e^- + e^+ \quad (I.39)$$

В e^2 -приближении оба эти процесса описываются двумя формфакторами $F_1(t)$ и $F_2(t)$ ^{90/}

Обозначим q_1 импульсы электрона и протона в начальном состоянии процесса (I.38) через

q_1 и p_1 , соответственно, а через q_2 и p_2 - те же величины после рассеяния.

Матричный элемент этого процесса имеет вид:

$$T(e_p \rightarrow e_p) = e^2 \bar{u}(q_2) \gamma_\mu u(q_1) \frac{1}{(p_2 - p_1)^2} \bar{u}(p_2) \left[\gamma_\mu F_1[-(p_2 - p_1)^2] + i \sigma_{\mu\nu} (p_1 - p_2)_\nu \frac{\kappa}{2M} F_2[-(p_2 - p_1)^2] \right] u(p_1), \quad (I.40)$$

где M - масса нуклона, а κ - аномальный магнитный момент протона в единице ядерного магнетона. Аналогично, матричный элемент процесса (I.39) равен:

$$T(\bar{p}\bar{p} \rightarrow e\bar{e}^+) = e^2 \bar{u}(q_2) \gamma_\mu \sigma(-q_1) \frac{1}{(p_1+p_2)^2} \bar{v}(-p_2) \left[\gamma_\mu F_1[-(p_1+p_2)^2] + i\sigma_{\mu\nu}(p_1+p_2)_\nu \frac{\kappa}{2M^2} F_2[-(p_1+p_2)^2] \right] u(p_1), \quad (I.41)$$

где p_1 и p_2 - 4 импульсы протона и антипротона, а q_1 и q_2 4-импульсы позитрона и электрона. Для первого процесса аргумент формфакторов отрицателен или равен нулю, а для второго процесса этот аргумент больше чем $4M^2$. В работе^{/91/} было показано, что вместо формфакторов $F_1(t)$ и $F_2(t)$ удобно воспользоваться формфакторами

$$G_E(t) = F_1(t) + \frac{t}{4M^2} \kappa F_2(t), \quad (I.42)$$

$$G_\mu(t) = F_1(t) + \kappa F_2(t), \quad (I.43)$$

причем для первого процесса $t = -(p_1 - p_2)^2$ есть передачи импульс, а для второго $t = -(p_1 + p_2)^2$ есть квадрат энергии. Дифференциальные сечения рассматриваемых процессов выражаются через квадраты модулей формфакторов $G_E(t)$ и $G_\mu(t)$.

Аналогичная ситуация имеет место в теории слабых взаимодействий. Например, в низшем порядке теории возмущений по слабым взаимодействиям матричные элементы двух процессов:

$$p + n \rightarrow p + p \quad (I.44)$$

$$\bar{p} + n \rightarrow p + \bar{v} \quad (I.45)$$

также выражаются через одни и те же формфакторы. В универсальной V-A теории слабых взаимодействий Фейнмана и Гелл-Манна^{/92/} и Сударшана и Маршака^{/93/} эти матричные элементы равны^{/94,95/}

$$T(pn \rightarrow pp) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u(q_1) \bar{u}(p_2) \left[\gamma_\mu H_1(t) + i\sigma_{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\nu H_2(t) + \gamma_\mu \gamma_5 H_3(t) + i\gamma_5 (p_1 - p_2)_\mu H_4(t) \right] u(p_1), \quad t = -(p_1 - p_2)^2, \quad (I.46)$$

$$T(\bar{p}n \rightarrow p\bar{v}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \sigma(-q_1) u(-p_2) \left[\gamma_\mu H_1(s) + i\sigma_{\mu\nu}(p_1 + p_2)_\nu H_2(s) + \gamma_\mu \gamma_5 H_3(s) + i\gamma_5 (p_1 + p_2)_\mu H_4(s) \right] u(p_2), \quad s = -(p_1 + p_2)^2, \quad (I.47)$$

причем для первого процесса f_1, f_2, q_1, q_2 есть 4-импульсы нейтрона, протона, нейтрино и μ -мезона, соответственно, а для второго процесса f_1, f_2, q_1, q_2 есть 4-импульсы нейтрона, антипротона, антинейтрино и μ -мезона.

Дисперсионные соотношения для электромагнитных формфакторов были получены в работах^{/96,97/}, а для формфакторов слабых взаимодействий (I.44) и (I.45) в работах^{/94,95/}. Эти дисперсионные соотношения ещё не были строго доказаны из общих принципов локальной квантовой теории поля. Однако на основании теории возмущений можно утверждать, что рассматриваемые формфакторы $F_i(t), H_i(t)$ являются аналитическими функциями в плоскости комплексных t с разрезом вдоль положительной вещественной оси^{/98,99/}. Более того, в локальной квантовой теории поля формфакторы возрастают не быстрее полинома в комплексной плоскости t . Предположим, что при $t \rightarrow \pm \infty$ формфакторы имеют определенный рост, а не осциллируют. При этом из теоремы Фрагмена-Линделёфа следует, что модуль отношения формфакторов $F_i(t)/F_i(-t)$ или $H_i(t)/H_i(-t)$ стремится к единице при $t \rightarrow \infty$. Это позволяет связывать сечения процессов (I.38) и (I.39), а также сечения процессов (I.44) и (I.45), если низший порядок теории возмущений по электромагнитному слабому взаимодействию хорошо описывает рассматриваемые процессы.

В связи с асимптотическим равенством модулей формфакторов при $t \rightarrow \pm \infty$ представляет особый интерес случай, когда формфакторы стремятся к постоянным при $t \rightarrow \pm \infty$. Предположим, что это имеет место с некоторым формфактором $F_i(t)$. Из теоремы II следует, что предельные значения этого формфактора при $t \rightarrow \pm \infty$ должны совпадать, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_i(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F_i(t). \quad (I.48)$$

Но на отрицательной вещественной оси формфактор $F_i(t)$ не имеет мнимой части. Поэтому при $t \rightarrow +\infty$ мнимая часть $I_m F_i(t)$ стремится к нулю и сходится интеграл^{*}

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{I_m F_i(t')}{t'-t} dt'$$

Интеграл по большому кругу с радиусом R равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{F_i(e^{i\varphi} R)}{(e^{i\varphi} R - t)} R e^{i\varphi} d\varphi.$$

Согласно теореме II, $F_i(e^{i\varphi} R)$ стремится равномерно к $F_i(\infty)$ при $R \rightarrow \infty$, поэтому интеграл по большому кругу стремится к конечному пределу $F_i(\infty)$, и дисперсионные соотношения имеют вид:

$$F(t) = F(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{I_m F_i(t')}{t'-t} dt', \quad I_m F(\infty) = 0. \quad (I.49)$$

* Сходимость этого интеграла можно доказать методом работы^{/54/}.

Г Л А В А П
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД МЕЗОН-БАРИОННОГО
И БАРИОН-БАРИОННОГО РАССЕЙНИЙ

Введение

Изложенный в предыдущей главе метод теперь применим к изучению асимптотических соотношений для процессов мезон-барионного и барион-барионного рассеяния. Эти асимптотические соотношения являются следствиями аналитических свойств амплитуд и условия перекрёстной симметрии. Соотношения перекрёстной симметрии мы будем устанавливать для каждого процесса, причем будем предполагать, что имеет место инвариантность относительно преобразований P (пространственное отражение), C (зарядовое сопряжение) и T (временное отражение). Что касается аналитичности амплитуд рассеяния, то здесь необходимо сделать следующее замечание.

Дисперсионные соотношения по энергии при фиксированной передаче импульса для упругого рассеяния π -мезона на нуклоне были впервые доказаны Н.Н. Боголюбовым^{/46,47/} на основе общих принципов локальной квантовой теории поля. С помощью метода Н.Н. Боголюбова и интегрального представления Иоста-Лемана-Дайсона^{/83,84/} для причинных коммутаторов в ряде работ были доказаны дисперсионные соотношения и для других процессов. Так, например, А.А. Логунов и др.^{/75-81/} доказали дисперсионные соотношения для ряда неупругих процессов. Дисперсионные соотношения для нуклон-нуклонного рассеяния были изучены в работе Бремермана, Оме и Тайлора^{/100/}. Авторы этой работы показали, что исходя из основных принципов локальной теории поля, можно доказать дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне (без учёта свойств симметрии) только для нефизических значений масс нуклона и π -мезона

$$m_{\pi} \gg (\sqrt{2} - 1) m_N.$$

В связи с этим представляет большой интерес работа Иоста^{/101/}. В этой работе автор нашел пример нуклонной вершины, удовлетворяющей линейным постулатам локальной теории поля и дисперсионным соотношениям только при нефизических значениях масс

$$m_{\pi} > \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) m_N.$$

Для физических значений m_{π} и m_N появляется дополнительная комплексная особенность. В работе Тодорова^{/81/} дисперсионные соотношения для амплитуд процессов с участием странных частиц были доказаны также только для случая, когда массы частиц удовлетворяют некоторому соотношению, которое в действительности не имеет места. Отметим, что в указанных работах

не было использовано условие унитарности матрицы рассеяния (нелинейное условие), а были использованы только линейные постулаты локальной теории поля. Некоторые попытки в этом направлении были сделаны в ряде работ /102-106/, но не дали значительных результатов.

В связи с указанной проблемой теории дисперсионных соотношений, в настоящее время во многих работах дисперсионные соотношения и аналитические свойства амплитуд рассеяния изучаются на основе теории возмущений. При этом нелинейное условие унитарности автоматически учитывается. Требуемые для применения теоремы П аналитические свойства амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне и амплитуды мезон-барионного рассеяния были доказаны в любом порядке теории возмущений /107-109/. Что касается амплитуды рассеяния гиперона на нуклоне, то обычные дисперсионные соотношения не имеют места в низших порядках теории возмущений даже для рассеяния вперед, как это было показано в работе Наканиши /110/. В этом случае аналитические свойства, из которых следует асимптотическое равенство между сечениями перекрестных процессов, являются гипотетическими.

I. МЕЗОН-БАРИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

§ I. Свойства перекрестной симметрии

Рассмотрим связанные между собой следующие процессы мезон-барионного рассеяния

$$a_1 + b_1 \rightarrow a_2 + b_2, \quad (I)$$

$$\bar{a}_2 + b_1 \rightarrow \bar{a}_1 + b_2, \quad (II)$$

$$a_1 + \bar{b}_2 \rightarrow a_2 + \bar{b}_1, \quad (III)$$

где частицы a_i имеют спин 0, а частицы b_i - спин 1/2. Массы частиц a_i обозначим через m_i , а частиц b_i - через M_i .

Матричный элемент процесса (I) имеет вид:

$$\langle b_2(p_2) a_2(q_2) | S-1 | b_1(p_1) a_1(q_1) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{\sqrt{4q_1^0 q_2^0}} \bar{u}_{b_2}(p_2) M^T(p_1, q_1; p_2, q_2) u_{a_2}(p_2), \quad (2.1)$$

где p_1 и q_1 - 4-импульсы частиц b_1 и a_1 в начальном состоянии, а p_2 и q_2 - те же величины в конечном состоянии, $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$;

$$\bar{u}_{b_2}(p_2) M^T(p_1, q_1; p_2, q_2) u_{a_2}(p_2) = \int d^4\xi \langle b_2(p_2) | \frac{\delta j_{a_2}(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}^+(\xi/2)} | b_1(p_1) \rangle e^{-i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi}, \quad (2.2)$$

$j_{a_2}(x)$ определяется формулой (1.3). Принцип микропричинности позволяет рассматривать (2.2) как краевое значение функции, аналитичной в области комплексных импульсов, удовлет-

положим, что частица a_1 имеет 4-импульс $-q_2$, а частица a_2 - 4-импульс $-q_1$, где q_1 и q_2 - физические 4-импульсы с квадратом $q_1^2 = -m_1^2$, $q_2^2 = -m_2^2$. Мы имеем

$$\bar{u}_{b_2}(p_2) M^I(p_2 - q_1, p_1 - q_2) u_{b_1}(p_1) = \int d^4\xi \langle b_2(p_2) | \frac{\delta j_{a_1}(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}(\xi/2)} | b_1(p_1) \rangle e^{i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi} \quad (2.3)$$

Как и в случае скалярных частиц, удобно переписать это выражение в виде:

$$\bar{u}_{b_2}(p_2) M^I(p_2 - q_1, p_1 - q_2) u_{b_1}(p_1) = \left[\int d^4\xi \langle b_2(p_2) | \frac{\delta j_{a_1}^+(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}(\xi/2)} | b_1(p_1) \rangle e^{-i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi} \right]^+ \quad (2.4)$$

причем мнимые добавки к импульсам удовлетворяют условию (I.6). Отметим, что выражение в скобке в правой части (2.4) есть амплитуда процесса

$$\bar{a}_1 + b_2 \rightarrow \bar{a}_2 + b_1. \quad (IV)$$

Действительно, обозначим через p_2 и q_2 4-импульсы частиц b_2 и \bar{a}_2 в начальном состоянии (IV), а p_1 и q_1 - те же величины в конечном состоянии. При этом матричный элемент процесса (IV) имеет вид:

$$\langle b_1(p_1) \bar{a}_2(q_2) | S^{-1} | b_2(p_2) \bar{a}_1(q_1) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{\sqrt{4q_1^0 q_2^0}} \bar{u}_{b_2}(p_2) M^{IV}(p_1, q_1, p_2, q_2) u_{b_1}(p_1) \quad (2.5)$$

где

$$\bar{u}_{b_2}(p_2) M^{IV}(p_1, q_1, p_2, q_2) u_{b_1}(p_1) = \int d^4\xi \langle b_1(p_1) | \frac{\delta j_{a_1}^+(-\xi/2)}{\delta \varphi_{a_2}(\xi/2)} | b_2(p_2) \rangle e^{-i \frac{q_1 + q_2}{2} \xi} \quad (2.6)$$

Сравнивая (2.4) и (2.5), мы получим

$$M^I(p_2 - q_1, p_1 - q_2) = \gamma_{a_1} \left[M^{IV}(p_1, q_1, p_2, q_2) \right]^+ \gamma_{a_2} \quad (2.7)$$

Процессы (II) и (IV) связаны между собой посредством преобразования слабого отражения времени. Матричный элемент процесса (II) напишем в виде:

$$\langle b_2(p_2) \bar{a}_1(q_1) | S^{-1} | b_1(p_1) \bar{a}_2(q_2) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{\sqrt{4q_1^0 q_2^0}} \bar{u}_{b_2}(p_2) M^{II}(p_1, q_1, p_1, q_1) u_{b_1}(p_1) \quad (2.8)$$

Из инвариантности относительно преобразования слабого отражения пространства-времени

PT следует, что амплитуды M^{II} и M^{IV} связаны следующим соотношением

$$M^{\text{IV}}(p_1, q_1; p_2, q_2) = \gamma [B M^{\text{II}}(p_1, q_2; p_2, q_1) B^{-1}]^T, \quad (2.9)$$

где верхний индекс T означает транспонирование матрицы, матрица B имеет свойства /III/

$$B \gamma_r B^{-1} = \gamma_r^T, \quad B^T = -B, \quad (2.10)$$

γ - фазовый множитель, $|\gamma| = 1$. В случае упругого рассеяния $\gamma = 1$. Отметим, что в выражениях для сечения, поляризации, параметра симметрии и т.д. всегда содержится произведение $\gamma \gamma^*$, поэтому произвольный множитель γ не играет никакой роли. Для простоты в дальнейшем положим его равным 1. Из (2.7) и (2.9) вытекает следующее соотношение перекрёстной симметрии между амплитудами процессов (I) и (II)

$$M^{\text{I}}(p_1, -q_1; p_2, -q_2) = \gamma_n \left[B M^{\text{II}}(p_2, q_2; p_1, q_1) B^{-1} \right]^* \gamma_n. \quad (2.11)$$

Что касается процессов (III) и (IV), то они связаны между собой посредством преобразования зарядового сопряжения C. Из инвариантности относительно этого преобразования следует, что матричные элементы процессов (III) и (IV) равны друг другу, если произвольный фазовый множитель для неупругих процессов положим равным единице. В дальнейшем для удобства, состояния античастиц будем характеризовать с помощью спиноров с положительной энергией. При этом матричный элемент процесса (III) имеет вид:

$$\langle \bar{u}_1(p_1) u_2(q_1) | S^{-1} | \bar{u}_2(p_2) u_1(q_2) \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{\sqrt{4q_1^0 q_2^0}} \bar{u}_1(p_1) M^{\text{III}}(p_1, q_1; p_2, q_2) u_2(p_2). \quad (2.12)$$

и, как было сказано,

$$M^{\text{III}}(p_1, q_1; p_2, q_2) = M^{\text{IV}}(p_1, q_1; p_2, q_2), \quad (2.13)$$

т.е. имеет место следующее соотношение перекрёстной симметрии между амплитудами процессов (I) и (III)

$$M^{\text{I}}(p_2, -q_2; p_1, -q_1) = \gamma_n \left[M^{\text{III}}(p_1, q_1; p_2, q_2) \right]^* \gamma_n. \quad (2.14)$$

Из соображений инвариантности следует, что амплитуды M^{J} имеют вид:

$$M^{\text{J}}(p_1, q_1; p_2, q_2) = F_1^{\text{J}}(s, t) + i \frac{q_1^+ + q_2^+}{2} F_2^{\text{J}}(s, t), \quad (2.15)$$

если относительные четности частиц в начальном и конечном состояниях, I_i и I_f ,

$$M^J(p_1, q_2; p_1, q_1) = \left[F_1^J(s, t) + i \frac{q_1 + q_2}{2} F_2^J(s, t) \right] \gamma_s, \quad (2.16)$$

если относительные четности противоположны, $I_i = -I_f$; $s = (p_1 + q_1)^2$, $u = (p_1 - q_2)^2$, $t = (p_1 - p_2)^2$.
 Из соотношений (2.11) и (2.14) нетрудно получить соотношения перекрестной симметрии между инвариантными амплитудами рассматриваемых процессов. В случае одинаковых четностей,

$I_i = I_f$, мы имеем

$$F_2^I(u, t) = (-1)^{i+1} F_2^{II}(s, t)^*, \quad (2.17)$$

$$F_2^I(u, t) = (-1)^{i+1} F_2^{III}(s, t)^*, \quad (2.18)$$

а в случае противоположных четностей, $I_i = -I_f$,

$$F_2^I(u, t) = (-1)^i F_2^{II}(s, t)^*, \quad (2.19)$$

$$F_2^I(u, t) = - F_2^{III}(s, t)^*. \quad (2.20)$$

Отметим, что в написанных соотношениях амплитуды $F_2^J(s, t)$ или $F_2^J(u, t)$ рассматриваются как краевые значения функций комплексной переменной s на верхних берегах разрывов вещественной оси.

§ 2. Асимптотические равенства между дифференциальными сечениями

Дифференциальные сечения рассматриваемых процессов равны

$$\frac{d\sigma^J(s, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k_y^2} \mathcal{F}^J(s, t) \quad (2.21)$$

$$\mathcal{F}^J(s, t) = A_1^J |F_1^J(s, t)|^2 + A_2^J |F_2^J(s, t)|^2 + A_{12}^J \operatorname{Re} F_1^J(s, t) F_2^J(s, t)^*, \quad (2.22)$$

где k_y - величина трехмерного импульса частиц начального состояния процесса J в системе центра масс, а кинематические коэффициенты A_1^J и A_{12}^J определяются следующим образом. В случае одинаковых четностей, $I_i = I_f$,

$$\left. \begin{aligned} A_1^I &= (M_1 + M_2)^2 - t, \\ A_2^I &= \frac{1}{4} \left\{ (s-u)^2 - (m_1^2 - m_2^2)^2 - [t - 2(m_1^2 + m_2^2)] [t - (M_1 - M_2)^2] \right\} \\ A_{12}^I &= (M_1 + M_2)(u-s) + (M_2 - M_1)(m_1^2 - m_2^2); \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

в случае противоположных четностей, $I_i = -I_f$,

$$\begin{aligned}
 A_{\pm}^I &= (M_1 - M_2) \pm t, \\
 A_{\pm}^I &= \frac{1}{h} \left\{ (s, u) \pm (m_1^2 - m_2^2) \pm [t - \lambda(m_1^2 + m_2^2)] [t - (M_1 + M_2)] \right\}, \\
 A_{\pm}^I &= (M_1 - M_2)(u - s) + (M_2 + M_1)(m_1^2 - m_2^2); \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

A_{\pm}^{II} и A_{\pm}^{III} получаются из A_{\pm}^I и A_{\pm}^I заменой $m_1 \leftrightarrow m_2$, а A_{\pm}^{II} и A_{\pm}^{III} - заменой $M_1 \leftrightarrow M_2$.

Докажем асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I), (II) и (III) при фиксированном $t \leq 0$ и $s \rightarrow \infty$. Если среди двух амплитуд $F_{\pm}^J(s, t)$, $i=1,2$ только одна даёт главный вклад в асимптотику сечений, то достаточно рассматривать эту амплитуду, и асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями непосредственно следует из теоремы I. Поэтому мы будем рассматривать общий случай, когда обе амплитуды $F_{\pm}^J(s, t)$ дают вклады одинакового порядка в асимптотику сечений. В этом случае при некотором выборе допустимой функции $\varphi(s, t)$, функции

$$V_{\pm}^J(s, t) = \frac{F_{\pm}^J(s, t)}{\varphi(s, t)} \quad \text{и} \quad V_{\pm}^J(s, t) = \frac{s F_{\pm}^J(s, t)}{\varphi(s, t)} \quad (2.25)$$

имеют конечные пределы при $s \rightarrow \infty$, поскольку, согласно выражениям (2.21)-(2.24) для дифференциальных сечений, обе инвариантные амплитуды $F_{\pm}^J(s, t)$ могут давать вклад в асимптотику сечений только если $F_{\pm}^J(s, t)$ и $s F_{\pm}^J(s, t)$ имеют одинаковое асимптотическое поведение при $s \rightarrow \infty$. Согласно теореме II, предельные значения функций (2.25) равны друг другу

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V_{\pm}^J(s, t) = \lim_{s \rightarrow \infty} V_{\pm}^J(s, t) \quad (2.26)$$

Это соотношение вместе с условием перекрёстной симметрии - соотношениями (2.17) - (2.20), и соотношением (I.16) дают

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_{\pm}^I(s, t)}{F_{\pm}^{\text{II}}(s, t)^*} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_{\pm}^I(s, t)}{F_{\pm}^{\text{II}}(s, t)^*} = \pm e^{-i\pi \alpha(t)}, \quad (2.27)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_{\pm}^I(s, t)}{F_{\pm}^{\text{III}}(s, t)^*} = \pm \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_{\pm}^I(s, t)}{F_{\pm}^{\text{III}}(s, t)^*} = \pm e^{-i\pi \alpha(t)}, \quad (2.28)$$

где верхний знак соответствует случаю одинаковых четностей, $I_i = I_f$, а нижний знак - случаю противоположных четностей, $I_i = -I_f$.

Из асимптотических соотношений (2.27) и (2.28) между инвариантными амплитудами и

следует асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I), (II) и (III) при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$.
 Отсюда, например, имеет место асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов/II2/:

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \quad \text{и} \quad \pi^- p \rightarrow \pi^- p, \quad (2.29)$$

$$K^+ p \rightarrow K^+ p \quad \text{и} \quad K^- p \rightarrow K^- p, \quad (2.30)$$

$$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+ \quad \text{и} \quad K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+, \quad (2.31)$$

$$K^+ p \rightarrow K^+ \Xi^0 \quad \text{и} \quad \bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Xi^0 \quad (2.32)$$

(если Ξ - гиперон имеет спин 1/2),

$$\Sigma^+ He \rightarrow p + He_\lambda \quad \text{и} \quad \bar{p} + He \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + He_\lambda. \quad (2.33)$$

§ 3. Асимптотические соотношения для полных сечений и дифференциальных сечений упругого рассеяния вперед

Теперь рассмотрим процессы упругого рассеяния мезона на нуклоне вперед в предположении, что $\alpha(0) = 1$. Отметим, что это значение соответствует верхнему ограничению на рост амплитуд рассеяния, вытекающему из аналитичности по передаче импульса/64-56/. Покажем, что в этом случае можно установить асимптотическое равенство между полными сечениями взаимодействия частицы и античастицы, а также и некоторые другие соотношения. В случае рассеяния π -мезона на нуклоне учёт изотопической инвариантности увеличивает число экспериментально проверяемых соотношений.

Согласно (2.21)-(2.23), дифференциальное сечение упругого рассеяния мезона на нуклоне вперед равно

$$\frac{d\sigma^J(s, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{64\pi s k^2} \left| 2M F_2^J(s, 0) - (s - M^2 - m^2) F_2^J(s, 0) \right|^2 \quad (2.34)$$

(в этом случае массы частиц равны: $M_1 = M_2 = M$, $m_1 = m_2 = m$). В силу условия унитарности полное сечение взаимодействия выражается через усредненную по спинам минимую часть амплитуды рассеяния

$$\sigma_{tt}^J(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \left[2M \bar{I}_m F_2^J(s, 0) - (s - M^2 - m^2) \bar{I}_m F_2^J(s, 0) \right]. \quad (2.35)$$

Таким образом, дифференциальное сечение упругого рассеяния вперед и полное сечение взаимодействия выражаются через одну и ту же функцию

$$G^J(\lambda) = 2M F_1^J(\lambda, 0) - (\lambda - M^2 - m^2) F_2^J(\lambda, 0). \quad (2.36)$$

Согласно асимптотическому соотношению (2.27) мы имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{G^I(\lambda)}{G^R(\lambda)^*} = -1 \quad (2.37)$$

т.е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{\operatorname{Re} G^I(\lambda)}{\operatorname{Re} G^R(\lambda)} = -1, \quad (2.38)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{\operatorname{Im} G^I(\lambda)}{\operatorname{Im} G^R(\lambda)} = 1, \quad (2.39)$$

если мнимые и действительные части имеют одинаковое асимптотическое поведение. Если, например, действительные части растут медленнее чем мнимые части, то (2.38) может не иметь места.

В силу оптической теоремы (2.35), соотношение (2.39) дает асимптотическое равенство между полными сечениями взаимодействия частицы и античастицы, если мнимые части растут не медленнее, чем действительные части. Так, например, имеет место асимптотическое равенство между полными сечениями

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) \approx \sigma_{\text{tot}}(\pi^- p), \quad \sigma_{\text{tot}}(K^+ p) \approx \sigma_{\text{tot}}(K^- p).$$

Как и в случае рассеяния скалярных частиц, для процессов, которые переходят в себя в перекрестном преобразовании, имеет место простое соотношение между дифференциальным сечением вперед и полным сечением. Примером таких процессов является процесс

$$K_2^+ p \rightarrow K_2^+ p. \quad (2.40)$$

Для таких процессов, согласно (2.37), мы имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{G(\lambda)}{G(\lambda)^*} = -1,$$

отсюда следует, что в асимптотике амплитуда рассеяния чисто мнима:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{\operatorname{Re} G(\lambda)}{\operatorname{Im} G(\lambda)} = 0. \quad (2.41)$$

Из этого соотношения и выражений (2.34) и (2.35) для дифференциального сечения рассеяния вперед и полного сечения вытекает асимптотическое соотношение между этими сечениями/ИЗ/

$$\left. \frac{d\sigma^J(\lambda, t)}{dt} \right|_{t=0} \approx \frac{1}{46\pi} [\sigma_{\text{tot}}^J(\lambda)]^2. \quad (2.42)$$

Теперь рассмотрим процессы рассеяния π -мезона на нуклоне с учетом изотопической

$$F_i^{j\alpha}(\lambda, t) = F_i^{(+)}(\lambda, t) \delta_{p\alpha} + F_i^{(-)}(\lambda, t) \frac{1}{2} [\tau_p \tau_\alpha], \quad (2.43)$$

где α и β - изотопические индексы π -мезонов в начальном и конечном состояниях. Амплитуды физических процессов

$$\begin{aligned} \pi^+ p &\rightarrow \pi^+ p \quad (a_I), & \pi^+ p &\rightarrow \pi^+ n \quad (b_I), \\ \pi^+ p &\rightarrow \pi^+ p \quad (a_{II}), & \pi^+ p &\rightarrow \pi^+ n \quad (b_{II}), \\ \pi^0 p &\rightarrow \pi^0 p \quad (c) \end{aligned} \quad (2.44)$$

и соответствующих процессов, полученных из (2.44) заменой $n \leftrightarrow p$, $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$, связаны с изотопическими амплитудами в (2.43) следующим образом:

$$\begin{aligned} F_i^{a_I}(\lambda, t) &= F_i^{(+)}(\lambda, t) - F_i^{(-)}(\lambda, t), & F_i^{a_{II}}(\lambda, t) &= F_i^{(+)}(\lambda, t) + F_i^{(-)}(\lambda, t), \\ F_i^{b_I}(\lambda, t) &= -F_i^{b_{II}}(\lambda, t) = \sqrt{2} F_i^{(-)}(\lambda, t), & F_i^c(\lambda, t) &= F_i^{(+)}(\lambda, t). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Как было показано, из теоремы Фрагмена-Линделёфа и соотношений перекрёстной симметрии следует асимптотическое соотношение (2.27) между амплитудами процессов (a_I) и (a_{II}) , (b_I) и (b_{II}) , а также соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{F_i^c(\lambda, t)}{F_i^c(\lambda, t)^*} = e^{-i\pi \alpha(t)}$$

Из этих соотношений следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{F_i^{(+)}(\lambda, t)}{F_i^{(+)}(\lambda, t)^*} = - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{F_i^{(-)}(\lambda, t)}{F_i^{(-)}(\lambda, t)^*} = e^{-i\pi \alpha(t)}. \quad (2.46)$$

Рассмотрим случай рассеяния вперед в предположении, что $\alpha(0) = 1$. Из (2.46) нетрудно видеть, что в этом случае $F_i^{(+)}(\lambda, 0)$ чисто мнимы, а $F_i^{(-)}(\lambda, 0)$ вещественны:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re} F_i^{(+)}(\lambda, 0)}{\operatorname{Im} F_i^{(+)}(\lambda, 0)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} F_i^{(-)}(\lambda, 0)}{\operatorname{Re} F_i^{(-)}(\lambda, 0)} = 0. \quad (2.47)$$

Таким образом, если выполняется изотопическая инвариантность, и если полные сечения взаимодействия π -мезона с нуклоном ведут себя, например, как некоторая степень $\ln \lambda$ или стремятся к постоянным, то амплитуды процесса рассеяния вперед с перезарядкой

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^0 p \quad (2.48)$$

вещественны.

Из соотношений (2.45) и (2.47) ещё следует, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\text{Im } G^{a_1}(\lambda) \approx \text{Im } G^{a_2}(\lambda) \approx \text{Im } G^c(\lambda), \quad (2.49)$$

$$\text{Re } G^{a_1}(\lambda) \approx \text{Re } G^{a_2}(\lambda) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re } G^{b_1}(\lambda). \quad (2.50)$$

Эти соотношения также можно проверить экспериментом. Например, из (2.50) и выражений (2.34)–(2.36) можно получить следующее асимптотическое соотношение между дифференциальными и полными сечениями:

$$\left[\frac{d\sigma^{a_1}(\lambda, t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma^{b_1}(\lambda, t)}{dt} \right]_{t=0} \approx \frac{1}{46\pi} [\sigma_{tot}^{a_1}(\lambda)]^2. \quad (2.51)$$

Это соотношение есть обобщение соотношения (2.42). Соотношение (2.49) означает, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\sigma_{tot}(\pi^+p) \approx \sigma_{tot}(\pi^-p) \approx \sigma_{tot}(\pi^0p). \quad (2.52)$$

Первое равенство в (2.52) есть теорема Померанчука, а второе было предложено в работах^{1,2} на основе анализа экспериментальных данных.

§ 4. Асимптотические свойства поляризационных эффектов

Теперь рассмотрим асимптотические соотношения между поляризациями и параметрами асимметрии в перекрестных процессах на основе полученных асимптотических соотношений (2.27) и (2.28) между инвариантными амплитудами. Обозначим через n_μ единичный пространственно-подобный 4-вектор, пропорциональный $i\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_\alpha q_\beta p_\gamma$ где $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный тензор

$$n_\mu = \frac{i\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_\alpha q_\beta p_\gamma}{\sqrt{(i\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_\alpha q_\beta p_\gamma)^2}} \quad (2.53)$$

В системе центра масс

$$n_\mu = 0, \quad \vec{n} = \frac{[\vec{p}_1, \vec{p}_2]}{|[\vec{p}_1, \vec{p}_2]|} \quad (2.54)$$

Предположим, что фермионы в начальном состоянии неполяризованы. При этом поляризационное состояние фермионов в конечном состоянии характеризуется 4-вектором поляризации

$$\xi_\mu^j = \frac{\text{Sp} \{ i\gamma_5 \gamma_\mu M^j(i\hat{p}_1 - M_1) \overline{M^j(i\hat{p}_2 - M_2)} \}}{\text{Sp} \{ M^j(i\hat{p}_1 - M_1) \overline{M^j(i\hat{p}_2 - M_2)} \}} \quad (2.55)$$

где M^J определяется формулами (2.15) или (2.16), а $M^J = \gamma_n M^{J+} \gamma_n$. Вектор поляризации ξ_μ^J пропорционален единичному вектору n_μ

$$\xi_\mu^J = P^J(s, t) n_\mu \quad (2.56)$$

Из (2.55) следует, что

$$P^J(s, t) = 2s\sqrt{-t} C^J(s, t) \frac{I_m F_1^J(s, t) F_2^J(s, t)^*}{\mathcal{F}^J(s, t)} \quad (2.57)$$

где $\mathcal{F}^J(s, t)$ определяется выражениями (2.22)–(2.24) и указаниями после (2.24), а $C^J(s, t)$ – кинематический множитель, стремящийся к единице при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$. Для первого процесса мы имеем

$$[C^I(s, t)]^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{u}{s}\right)^2 + \frac{(M_1^2 - M_2^2)(m_1^2 - m_2^2)}{2ts} \left(1 - \frac{u}{s}\right) \quad (2.58)$$

а для процессов (II) и (III) $C^J(s, t)$ получается из (2.58) заменой $m_1 \leftrightarrow m_2$ или $M_1 \leftrightarrow M_2$, соответственно, $\lim_{s \rightarrow \infty} C^J(s, t) = 1$.

Из выражения (2.57) и асимптотических соотношений (2.27) и (2.28) между амплитудами можно получить асимптотические соотношения между поляризациями $P^J(s, t)$, $J = I, II, III$. Как было сказано, при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ функции $\mathcal{F}^J(s, t)$ равны между собой для всех рассматриваемых процессов. Поэтому достаточно рассматривать величину

$I_m F_1^J(s, t) F_2^J(s, t)^*$. Из асимптотических соотношений (2.27) и (2.28) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{I_m F_1^I(s, t) F_2^I(s, t)^*}{I_m F_1^{II}(s, t) F_2^{II}(s, t)^*} = \pm \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{I_m F_1^I(s, t) F_2^I(s, t)}{I_m F_2^{III}(s, t) F_2^{III}(s, t)^*} \quad (2.59)$$

где, как в (2.27) и (2.28) верхний знак соответствует случаю одинаковых четностей, а нижний знак – случаю противоположных четностей. Таким образом, при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ поляризации фермионов в конечных состояниях процессов (I), (II) и (III) связаны друг с другом следующими асимптотическими соотношениями /II6/

$$P^I(s, t) \approx -P^{II}(s, t) \approx -P^{III}(s, t) \quad \text{если } I_i = I_f, \quad (2.60)$$

$$P^I(s, t) \approx -P^{II}(s, t) \approx P^{III}(s, t) \quad \text{если } I_i \neq I_f \quad (2.61)$$

Полученные результаты, в частности, применимы к процессам (2.29)–(2.33). Например, поляризации протонов отдачи в процессах (2.29) или в процессах (2.30) при одинаковых значениях

передачи импульса t и стремящейся к бесконечности энергии равны по величине и противоположны по знаку.*) Для поляризаций $\bar{\Sigma}^+$ -гиперонов в процессах (2.31) или $\bar{\Sigma}^0$ -гиперонов в процессах (2.32) также имеет место такое асимптотическое соотношение независимо от относительных частиц. Однако асимптотическое соотношение между поляризациями нуклона и антигиперона в процессах (2.33) зависит от относительной четности $\bar{\Sigma}$ и Λ гиперонов: поляризации \uparrow и $\bar{\Sigma}^+$ равны по величине и противоположны по знаку, если эта четность равна $+1$, и равны как по величине, так и по знаку, если эта четность равна -1 .

Мы рассмотрели общий случай, когда обе инвариантные амплитуды дают вклад в асимптотику сечений. Как нетрудно видеть из формулы (2.57), в этом случае поляризации могут стремиться к пределам, отличным от нуля, при $s \rightarrow \infty$. Если среди этих двух амплитуд только одна даёт вклад в асимптотику сечений, то поляризации стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$.

Теперь покажем, что существует ряд процессов, в которых поляризации фермионов в конечных состояниях стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t , отличном от нуля, независимо от относительного асимптотического поведения инвариантных амплитуд. Это процессы, которые переходят в себя в перекрёстном преобразовании, т.е. для которых $\bar{a}_i = a_i$. В этом случае процессы (I) и (II) совпадают, т.е. $P^I(s,t), P^II(s,t)$ с другой стороны, согласно (2.60) и (2.61), $P^I = P^II$ независимо от относительных четностей частиц. Следовательно, в этом случае $P^I = P^II = 0$. Таким образом, например, поляризации фермионов в конечных состояниях процесса упругого рассеяния K_2^0 -мезона на нуклоне (2.40) или процесса

$$K^+ p \rightarrow K^+ \bar{\Sigma}^- \quad (2.62)$$

(если спин $\bar{\Sigma}^-$ -гиперона равен $1/2$) стремятся к нулю при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ независимо от относительных четностей частиц даже в том случае, когда обе инвариантные амплитуды дают вклад в асимптотику сечений. Если имеет место изотопическая инвариантность, то стремится к нулю и поляризация нейтрона отдачи в процессе перезарядки (2.48). Действительно мы показали, что поляризации нейтрона отдачи в этом процессе и нейтрона отдачи в процессе

$$K^+ p \rightarrow \pi^+ n \quad (2.63)$$

при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t стремятся к противоположным пределам. Однако, из зарядовой независимости сильных взаимодействий следует, что амплитуды этих процессов совпадают с точностью до знака. Поэтому поляризации нейтронов отдачи в обоих процессах должны быть равны между собой. Отсюда следует, что при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ поляризации нейтронов отдачи в рассматриваемых процессах стремятся к нулю.

Рассмотрим теперь некоторые следствия правила Померанчука-Окуни^{1,2}, как было показано*) Асимптотическое равенство поляризаций протонов отдачи в процессах (2.29) было получено впервые в работе Левинтова (ЖЭТФ, 42, 191, 1962) в предположении, что $F_1(s,t)$ и $F_2(s,t)$ ведут себя при $s \rightarrow \infty$ как s при $t \leq 0$.

протоне равны между собой, поэтому поляризации протонов отдачи в этих процессах (см. (2.29))

должны быть равны между собой. С другой стороны, они имеют различные знаки в асимптотике, как это следует из аналитических свойств. Следовательно, эти поляризации должны стремиться к нулю. Таким образом, если имеет место правило Померанчука-Окуня кроме аналитичности, то поляризации протонов отдачи в рассеянии π^+ -мезонов стремиться к нулю при $s \rightarrow \infty$.

Мы рассмотрели случай, когда фермионы в начальных состояниях неполяризованы. Если эти фермионы поляризованы, то в угловом распределении конечных частиц будет лево-правая асимметрия, причем параметр асимметрии $\gamma^J(s, t)$ определяется формулой /115/

$$\gamma^J(s, t) n_\mu = \frac{\text{sp} \{ i \gamma_5 \gamma_\mu (i \hat{p}_1 - M_1) \bar{M}^J (i \hat{p}_2 - M_2) M^J \}}{\text{sp} \{ M^J (i \hat{p}_1 - M_1) \bar{M}^J (i \hat{p}_2 - M_2) \}} \quad (2.64)$$

Из этой формулы и выражений для амплитуд M^J нетрудно показать, что в случае одинаковых четностей параметр асимметрии $\gamma^J(s, t)$ и поляризация $P^J(s, t)$ равны друг другу,

$$\gamma^J(s, t) = P^J(s, t), \quad (2.65)$$

а в случае противоположных четностей

$$\gamma^J(s, t) = -P^J(s, t). \quad (2.66)$$

Отметим, что соотношение (2.65) для случая упругого рассеяния любых неполяризованных частиц на частице со спином 1/2 было установлено в работе /117/ как следствие свойств инвариантности взаимодействий. Из (2.65) и (2.66) следует, что все заключения, относящиеся к поляризации $P^J(s, t)$, также справедливы для параметра асимметрии $\gamma^J(s, t)$. Таким образом, мы видим, что создание поляризованной мишени открыло бы большие возможности по проверке асимптотических соотношений между поляризационными эффектами.

§ 5. Полный опыт для упругого мезон-барионного рассеяния

В предыдущей главе мы показали, что для установления асимптотического равенства дифференциальных сечений перекрестных процессов упругого рассеяния скалярных частиц вместо предположения о существовании пределов амплитуд (комплексных) достаточно предполагать, что дифференциальные сечения имеют пределы или определенный рост, а не осциллируют, при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t , а мнимые части амплитуд знакоопределенны. Теперь мы обобщаем этот результат на случай упругого рассеяния скалярных частиц на спинорных частицах. В этом случае вместо существования пределов функции (2.25) мы предположим, что все физические величины, входящие в полный опыт, имеют пределы или определенный рост, а не осциллируют, при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t .

Отметим, что в некоторых работах, например /118/, полный опыт ограничивается двумя величинами, поскольку при энергии, меньшей порога неупругих процессов, остальные величины можно определить из условия двухчастичной унитарности. Однако здесь этой возможности не имеется, так как мы рассматриваем процессы при больших энергиях. Поэтому в данном случае в качестве величин в полном опыте естественно выбрать все измеримые независимые величины. Для рассеяния мезона на нуклоне это - дифференциальное сечение, поляризация при рассеянии на неполяризованной мишени или параметр асимметрии в конечном состоянии при рассеянии на поляризованной мишени, и поляризация нуклона отдачи при рассеянии на поляризованной мишени.

Для получения выражений для указанных физических величин, входящих в полный опыт, удобно сначала перейти в систему центра масс. Обозначим через \vec{n} единичный вектор, перпендикулярный плоскости рассеяния (см. (2.54)), и через θ угол рассеяния, $t = -2k^2(1 - \cos\theta)$. Амплитуда рассеяния имеет вид:

$$\mathcal{M}^J = f_1^J(\lambda, \theta) + (\vec{\sigma} \vec{n}) \sin\theta f_2^J(\lambda, \theta), \quad (2.67)$$

где

$$f_1^J(\lambda, \theta) = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{E+M}{\sqrt{\lambda}} \left[F_1^J(\lambda, t) - (\sqrt{\lambda}-M) F_2^J(\lambda, t) \right] - \cos\theta \frac{E-M}{\sqrt{\lambda}} \left[F_1^J(\lambda, t) + (\sqrt{\lambda}+M) F_2^J(\lambda, t) \right] \right\},$$

$$f_2^J(\lambda, \theta) = -\frac{1}{8\pi} \frac{E-M}{\sqrt{\lambda}} \left[F_1^J(\lambda, t) + (\sqrt{\lambda}+M) F_2^J(\lambda, t) \right], \quad E = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(1 + \frac{M^2 - m^2}{\lambda} \right). \quad (2.68)$$

Дифференциальные сечения равны

$$\frac{d\sigma^J}{d\Omega} = |f_1^J(\lambda, \theta)|^2 + \sin^2\theta |f_2^J(\lambda, \theta)|^2, \quad (2.69)$$

а параметры асимметрии при рассеянии на поляризованной мишени или поляризация при рассеянии на неполяризованной мишени равны

$$P^J = \mathcal{P}^J = \frac{2 \sin\theta \operatorname{Im} f_1^J(\lambda, \theta) f_2^{J*}(\lambda, \theta)}{|f_1^J(\lambda, \theta)|^2 + \sin^2\theta |f_2^J(\lambda, \theta)|^2} \quad (2.70)$$

Из (2.68) нетрудно видеть, что (2.69) совпадает с (2.21)-(2.23), а (2.70) совпадает с (2.57). Если фермионы в начальных состояниях поляризованы, то поляризации фермионов в конечных состояниях равны

$$\vec{\xi} = P^J(\lambda, t) \vec{n} + \vec{\zeta} + Q^J(\lambda, t) \left[(\vec{\zeta} \vec{n}) \vec{n} - \vec{\zeta} \right], \quad (2.71)$$

где $\vec{\zeta}$ - вектор поляризации фермиона в начальном состоянии, а

$$Q^J(\lambda, t) = \frac{2 \sin^2\theta |f_2^J(\lambda, \theta)|^2}{|f_1^J(\lambda, \theta)|^2 + \sin^2\theta |f_2^J(\lambda, \theta)|^2} \quad (2.72)$$

$$Q^J(\lambda, t) = -32t [c(\lambda, t)]^2 \frac{\lambda^2}{[(\sqrt{\lambda^2 + M^2} - m^2)^2]^2} \frac{|F_1^J(\lambda, t) + (\sqrt{\lambda^2 + M^2}) F_2^J(\lambda, t)|^2}{\mathcal{F}^J(\lambda, t)} \quad (2.73)$$

Предположим, что измеряемые величины $d\sigma^J(\lambda, t)/dt$, $P^J(\lambda, t)$ и $Q^J(\lambda, t)$ не осциллируют, а имеют определенные росты или конечные пределы при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t .

Положим

$$G^J(\lambda, t) = 8\pi \sqrt{\lambda} [f_1^J(\lambda, \theta) + (1 - \cos \theta) f_2^J(\lambda, \theta)] \quad (2.74)$$

Из (2.68) нетрудно показать, что

$$G^J(\lambda, t) = 2M F_1^J(\lambda, t) - (\lambda - M^2 - m^2) F_2^J(\lambda, t) \quad (2.75)$$

в аналогии с (2.36). Согласно формулам (2.21)-(2.23), (2.57) и (2.73), величины $d\sigma^J(\lambda, t)/dt$, $P^J(\lambda, t)$ и $Q^J(\lambda, t)$ выражаются через произведения $F_1^J(\lambda, t) G^J(\lambda, t)^*$ (как действительную, так и мнимую части) и модули амплитуд $F_1^J(\lambda, t)$ и $G^J(\lambda, t)$. Поэтому предположение об отсутствии осцилляции физических величин $d\sigma^J(\lambda, t)/dt$, $P^J(\lambda, t)$ и $Q^J(\lambda, t)$ означает, что при $\lambda \rightarrow \infty$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{F_1^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)} \right|, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{G^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)} \right| \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \arg \frac{G^J(\lambda, t)}{F_1^J(\lambda, t)} \quad (2.76)$$

Здесь мы рассматриваем случай, когда обе амплитуды $F_1^J(\lambda, t)$ и $F_2^J(\lambda, t)$ (или $G^J(\lambda, t)$) дают вклад в асимптотику сечений, так как в противном случае достаточно рассмотреть одну из них и повторить все рассуждения, относящиеся к случаю рассеяния скалярных частиц. Выражение (2.69) показывает, что обе амплитуды $f_1^J(\lambda, \theta)$ и $f_2^J(\lambda, \theta)$ будут давать вклад в асимптотику сечений, если $f_1^J(\lambda, \theta)$ и $\sqrt{\frac{t}{s}} f_2^J(\lambda, \theta)$ ведут себя одинаково при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t^* . В этом случае второй член в правой части (2.74)

$$(1 - \cos \theta) f_2^J(\lambda, \theta) = -\frac{t}{2k^2} f_2^J(\lambda, \theta)$$

пренебрежимо мал по сравнению с первым, и можно положить

$$G^J(\lambda, t) \approx 8\pi \sqrt{\lambda} f_1^J(\lambda, \theta) \quad (2.77)$$

* Это также следует из (2.68) и того факта, что функции $F_1^J(\lambda, t)$ и $\lambda F_2^J(\lambda, t)$ имеют одинаковое асимптотическое поведение.

Амплитуду $f_2^J(\lambda, \theta)$ можно разложить по парциальным волнам следующим образом /II4/

$$f_2^J(\lambda, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[(\ell+1) a_{\ell}^+(\lambda) + \ell a_{\ell}^-(\lambda) \right] P_{\ell} \left(1 + \frac{t}{2k^2} \right) \quad (2.78)$$

где a_{ℓ}^{\pm} - амплитуда рассеяния в состоянии с полным моментом $j = \ell \pm \frac{1}{2}$, причем в силу условия унитарности

$$\text{Im } a_{\ell}^{\pm} \geq 0. \quad (2.79)$$

Мы можем выбрать допустимую функцию $\varphi(\lambda, t)$ так, чтобы при достаточно больших λ она была положительной. При этом каждый член в разложении

$$\text{Im } V^J(\lambda, t) = \text{Im} \frac{G^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)} = \frac{2\pi \sqrt{\lambda}}{\varphi(\lambda, t)} \sum \left[(\ell+1) \text{Im } a_{\ell}^+ + \ell \text{Im } a_{\ell}^- \right] P_{\ell} \left(1 + \frac{t}{2k^2} \right) \quad (2.80)$$

стремится к неотрицательному пределу. Как и в случае рассеяния скалярных частиц, рассмотренного в главе I, мы будем предполагать, что при достаточно малых t мнимая часть (2.80) стремится к неотрицательному пределу при $\lambda \rightarrow \infty$. Из этого предположения и предположения о существовании пределов (2.76) можно доказать асимптотические равенства между физическими измеряемыми величинами $d\sigma^J(\lambda, t)/d\Omega$, $P^J(\lambda, t)$ и $Q^J(\lambda, t)$ /II9/.

Действительно, модули функций

$$V^J(\lambda, t) = \frac{G^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)} \quad (2.81)$$

имеют пределы при $\lambda \rightarrow \infty$, а их фазы в асимптотике могут меняться только в интервале от 0 до π . Отсюда следует равенство пределов модулей этих функций. Вместо $F_i^J(\lambda, t)$ мы рассмотрим

$$U^J(\lambda, t) = \frac{F_i^J(\lambda, t)}{G^J(\lambda, t)} \quad (2.82)$$

Согласно предположению, эти функции имеют определенные пределы при $\lambda \rightarrow \infty$. Нули функций $G^J(\lambda, t)$ всегда можно факторизовать с помощью произведений Бляшке (см. главу I, § 3, а также /88, 89/), так что функции (2.82) можно считать аналитическими в верхней полуплоскости λ . В силу теоремы П, пределы этих функций должны совпадать друг с другом. Отсюда следуют асимптотические равенства физических величин $d\sigma^J(\lambda, t)/d\Omega$, $P^J(\lambda, t)$ и $Q^J(\lambda, t)$.

II. БАРИОН-БАРИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

§ I. Свойства перекрёстной симметрии

Теперь перейдем к изучению процессов рассеяния частиц со спином 1/2. В этом случае процессы (II) и (III) отличаются друг от друга только обозначениями, поэтому достаточно рассматривать процессы (I) и (II). Как и раньше, мы обозначим через p_1 и q_1 4-импульсы частиц b_1 и a_1 в начальном состоянии процесса (I), а через p_2 и q_2 те же величины в конечном состоянии, $q_1^2 = -m_1^2$, $p_1^2 = -M_1^2$, $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$,
 $s = -(p_1 + q_1)^2$, $u = -(p_1 - q_2)^2$, $t = -(p_1 - p_2)^2$.

Матричный элемент процесса (I) при этом имеет вид:

$$\langle a_2(q_2) b_2(p_2) | S-1 | b_1(p_1) a_1(q_1) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \bar{u}_{b_2}(p_2) M^I(p_2, q_2; p_1, q_1) u_{a_1}(p_1), \quad (2.83)$$

$$M^I(p_2, q_2; p_1, q_1) = \int d^4 \xi \langle a_2(q_2) | \frac{\delta \bar{j}_{b_2}(-\xi/2)}{\delta \psi_{b_2}(\xi/2)} | a_1(q_1) \rangle e^{-i \frac{p_2 + p_1}{2} \xi} \quad (2.84)$$

Здесь мы используем обозначения как в книге /46/: вариационные производные по $\bar{\psi}$ есть производные слева, а производные по ψ - справа,

$$j_b(x) = -i \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}_b(x)} S^+, \quad \bar{j}_b(x) = -i \frac{\delta S}{\delta \psi_b(x)} S^+, \quad (2.85)$$

$$\bar{j}_b(x) = j_b(x)^+ \gamma_4.$$

Теперь рассмотрим амплитуду (2.84), продолженную в область нефизических импульсов p_2 . Чтобы сохранить предыдущий вид закона сохранения импульсов, положим, что частицы b_1 и b_2 имеют нефизические импульсы $-p_1$ и $-p_2$, соответственно, $p_2^2 = -M_1^2$, $p_1^2 = -M_2^2$. Мы имеем

$$M^I(-p_2, q_2; -p_1, q_1) = \int d^4 \xi \langle a_2(q_2) | \frac{\delta \bar{j}_{b_2}(-\xi/2)}{\delta \psi_{b_2}(\xi/2)} | a_1(q_1) \rangle e^{-i \frac{p_2 + p_1}{2} \xi} \quad (2.86)$$

Это выражение удобно переписать в виде:

$$\gamma_4 [M^I(-p_2, q_2; -p_1, q_1)]^+ \gamma_4 = \int d^4 \xi \langle a_1(q_1) | \frac{\delta j_{b_1}(-\xi/2)}{\delta \psi_{b_1}(\xi/2)} | a_2(q_2) \rangle e^{-i \frac{p_2 + p_1}{2} \xi} \quad (2.87)$$

Из принципа причинности следует, что (2.84) можно рассматривать как краевое значение функции, аналитичной в области комплексных импульсов, удовлетворяющих условию, аналогичному (I.4), а (2.86) - краевое значение функции, аналитичной в области (I.6).

Отметим, что выражение в правой части (2.87) также входит в матричный элемент процесса

$$a_2 + \bar{b}_1 \rightarrow a_1 + \bar{b}_2 \quad (V)$$

Действительно, матричный элемент этого процесса имеет вид:

$$\langle a_1(q_1) \bar{b}_2(p_2) | S^{-1} | \bar{b}_1(p_1) a_2(q_2) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) u_{b_1}(-p_2) M^{\bar{I}}(p_1, q_1; p_2, q_2) u_{b_2}(-p_1), \quad (2.88)$$

где q_2 и p_2 — 4-импульсы частиц a_2 и \bar{b}_2 , а q_1 и p_1 — 4-импульсы частиц a_1 и \bar{b}_1 . С другой стороны мы имеем

$$M^{\bar{I}}(p_1, q_1; p_2, q_2) = - \int d^4 \xi \langle a_1(q_1) | \frac{\delta j_{b_1}(-\xi/2)}{\delta \psi_{b_2}(\xi/2)} | a_2(q_2) \rangle e^{-i \frac{p_1 + p_2}{2} \xi} \quad (2.89)$$

Таким образом, сравнивая (2.87) и (2.89), мы получим

$$\delta_n [M^{\bar{I}}(-p_1, q_1; -p_2, q_2)]^+ \delta_n = - M^{\bar{I}}(p_1, q_1; p_2, q_2). \quad (2.90)$$

Из инвариантности относительно преобразования зарядового сопряжения C следует, что матричные элементы процессов (П) и (У) равны друг другу, т.е. матричный элемент процесса (П) также имеет вид (2.88). В этом выражении содержатся волновые функции с отрицательной энергией. Однако для нашей цели удобно характеризовать состояние античастиц также с помощью волновых функций с положительной энергией. Поэтому матричный элемент процесса (П) напомним в виде:

$$\langle \bar{a}_1(q_2) b_2(p_2) | S^{-1} | b_1(p_1) \bar{a}_2(q_1) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \bar{u}_{b_2}(p_2) M^{\bar{II}}(p_1, q_1; p_2, q_2) u_{b_1}(p_1). \quad (2.91)$$

Сравнивая (2.88) и (2.91) и используя соотношения

$$u(p) = C \bar{v}^T(-p), \quad \bar{u}(p) = [C^{-1} v(-p)]^T, \quad (2.92)$$

где C — матрица зарядового сопряжения со свойствами

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \quad C^T = -C, \quad (2.93)$$

мы получим

$$M^{\bar{II}}(p_1, q_1; p_2, q_2) = - [C^{-1} M^{\bar{I}}(p_1, q_1; p_2, q_2) C]^T. \quad (2.94)$$

Из (2.90) и (2.94) следует, что

$$\delta_n [M^{\bar{I}}(-p_1, q_1; -p_2, q_2)]^+ \delta_n = [C^{-1} M^{\bar{II}}(p_1, q_1; p_2, q_2) C]^T. \quad (2.95)$$

Это искомое соотношение перекрёстной симметрии между амплитудами процессов (I) и (II). Оно было дано, например, в работе /120/. Отметим, что это соотношение в точности совпадает с соотношением перекрёстной симметрии для мезон-барионного рассеяния (2.11). Действитель-

но, матрицы B и C связаны между собой следующим образом (см./III/)

$$B = C^{-1} \gamma_5 \quad (2.96)$$

Поэтому (2.II) можно переписать в виде:

$$\chi_h \left[\gamma_5 M^T(p_1, q_1; p_2, q_2) \gamma_5 \right]^T \gamma_h = \left[C^{-1} M^T(p_1, q_1; p_2, q_2) C \right]^T \quad (2.97)$$

Однако из условия релятивистской инвариантности следует, что/III/

$$\gamma_5 M^T(p_1, q_1; p_2, q_2) \gamma_5 = M^T(-p_1, q_1; -p_2, q_2), \quad (2.98)$$

поэтому (2.97) совпадает с (2.95)

Из соображений инвариантности следует, что амплитуды $M^T(p_1, q_1; p_2, q_2)$ имеют вид:

$$M^T(p_1, q_1; p_2, q_2) = \sum_{i=1}^8 \Gamma_i^{(a)}(q) \bar{u}_{a_2}(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_{a_1}(q_1) F_i^T(s, t), \quad (2.99)$$

$$M^T(p_1, q_1; p_2, q_2) = \sum_{i=1}^8 \Gamma_i^{(b)}(q) \bar{u}_{a_1}(q_1) \Gamma_i^{(b)}(p) u_{a_2}(q_2) F_i^T(s, t), \quad (2.100)$$

где

$$p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2),$$

$$\Gamma_i^{(a)}(p) = \left\{ 1, 1, i\hat{p}, i\hat{p}, \gamma_5, \gamma_5, i\hat{p}\gamma_5, i\hat{p}\gamma_5 \right\}, \quad (2.101)$$

а

$$\Gamma_i^{(b)}(q) = \left\{ 1, i\hat{q}, i\hat{q}, 1, \gamma_5, i\hat{q}\gamma_5, \gamma_5, i\hat{q}\gamma_5 \right\} \quad (2.102)$$

если относительные четности частиц в начальном и конечном состояниях I_i и I_f одинаковы, $I_i = I_f$, и

$$\Gamma_i^{(b)}(q) = \left\{ \gamma_5, i\hat{q}\gamma_5, i\hat{q}\gamma_5, \gamma_5, 1, i\hat{q}, 1, i\hat{q} \right\} \quad (2.103)$$

если четности I_i и I_f противоположны $I_i = -I_f$. Из условия (2.95) следует, что инвариантные амплитуды $F_i^T(s, t)$ удовлетворяют следующему соотношению перекрестной симметрии:

$$F_i^T(s, t) = \pm (-1)^{i+1} F_i^T(s, t)^* \quad (2.104)$$

где верхний знак соответствует случаю $I_i = I_f$, а нижний - случаю $I_i = -I_f$.

Отметим, что в процессах упругого рассеяния относительной четности частиц в начальном и конечном состояниях одинаковы $I_i = I_f$. В этом случае прямые и обратные процессы совпадают. Из инвариантности относительно преобразования слабого отражения времени следует, что амплитуды должны удовлетворять соотношению

$$\sum_{i=1}^8 [F_i^{(b)}(a)] [\Gamma_i^{(a)}(p)] F_i^J(a, t) = \sum_{i=1}^8 [B \Gamma_i^{(b)}(a) B^{-1}]^T [B \Gamma_i^{(a)}(p) B^{-1}]^T F_i^J(a, t), \quad (2.105)$$

и отсюда /I20/

$$F_6^J(a, t) = F_7^J(a, t) = 0. \quad (2.106)$$

Таким образом для процессов упругого рассеяния матричные элементы зависят только от шести независимых инвариантных амплитуд. В случае, когда все частицы a_i и b_i принадлежат одному и тому же изотопическому мультиплету, две амплитуды $F_6^J(a, t)$ и $F_7^J(a, t)$ совпадают из-за тождественности частиц, и существуют только пять независимых инвариантных амплитуд /I20/.

§ 2. Асимптотические равенства между сечениями

Теперь докажем асимптотическое равенство дифференциальных сечений процессов (I) и (II) при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$. Дифференциальные сечения этих процессов равны

$$\frac{d\sigma^J(a, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k_J^2} \mathcal{F}^J(a, t), \quad (2.107)$$

$$\mathcal{F}^J(a, t) = \sum_{i=1}^8 A_i^J B_i^J |F_i^J(a, t)|^2 + \sum_{i < j} A_{ij}^J B_{ij}^J \operatorname{Re} F_i^J(a, t) F_j^J(a, t)^* \quad (2.108)$$

Здесь кинематические множители A_i^J , B_i^J , A_{ij}^J и B_{ij}^J связаны между собой следующим образом

$$\begin{aligned} A_1^J &= A_2^J = A_{12}^J, & A_3^J &= A_4^J = A_{34}^J, & A_{13}^J &= A_{14}^J = A_{23}^J = A_{24}^J, \\ A_5^J &= A_6^J = A_{56}^J, & A_7^J &= A_8^J = A_{78}^J, & A_{57}^J &= A_{58}^J = A_{67}^J = A_{68}^J, \\ B_1^J &= B_2^J = B_{12}^J, & B_3^J &= B_4^J = B_{34}^J, & B_{13}^J &= B_{14}^J = B_{23}^J = B_{24}^J, \\ B_5^J &= B_6^J = B_{56}^J, & B_7^J &= B_8^J = B_{78}^J, & B_{57}^J &= B_{58}^J = B_{67}^J = B_{68}^J, \end{aligned} \quad (2.109)$$

Кoeffициенты A_1^I , A_3^I , A_{13}^I , A_{57}^I , A_{57}^I равны

$$\begin{aligned} A_1^I &= (m_1 + m_2)^2 - t, \\ A_3^I &= \frac{1}{\mu} \left\{ (s-u)^2 - (M_1^2 - M_2^2)^2 - [t - 2(M_1^2 + M_2^2)] [t - (m_1 - m_2)^2] \right\}, \\ A_{13}^I &= (m_1 + m_2)(u-s) + (m_2 - m_1)(M_1^2 - M_2^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_5^I &= (m_1 - m_2)^2 - t, \\
 A_7^I &= \frac{1}{\mu} \left\{ (\delta - u)^2 - (M_1^2 - M_2^2) - [t - 2(M_1^2 + M_2^2)] [t - (m_1 + m_2)^2] \right\}, \\
 A_{57}^I &= (m_2 - m_1)(u - \delta) + (m_2 + m_1)(M_1^2 - M_2^2),
 \end{aligned}
 \tag{2.110}$$

а коэффициенты B_{ij}^I и $B_{ij}^{\bar{I}}$ определяются в зависимости от относительных четностей частиц следующим образом: в случае одинаковых четностей $I_i = I_f$ коэффициенты $B_1^I, B_2^I, B_{12}^I, B_5^I, B_6^I$ и B_{56}^I получаются из $A_1^I, A_3^I, A_{13}^I, A_5^I, A_7^I$ и A_{57}^I , соответственно, заменой $m_i \leftrightarrow M_i$, а в случае противоположных четностей $I_i = -I_f$ они получаются той же заменой из $A_1^{\bar{I}}, A_3^{\bar{I}}, A_{57}^{\bar{I}}, A_{13}^{\bar{I}}, A_5^{\bar{I}}$ и $A_{13}^{\bar{I}}$, соответственно. Что касается кинематических коэффициентов для второго процесса, то они получаются из соответствующих коэффициентов для первого процесса заменой $m_i \leftrightarrow m_i$.

Мы будем рассматривать общий случай, когда все восемь амплитуд $F_i^J(\lambda, t)$ дают вклад в асимптотику сечений. В остальных случаях достаточно рассматривать те амплитуды, которые дают вклад в асимптотику и проводит аналогичные рассуждения. В рассматриваемом случае из формул для сечений (2.107)–(2.110) следует, что функции

$$F_1^J, \lambda F_2^J, \lambda^2 F_3^J, \lambda F_4^J, F_5^J, \lambda F_6^J, \lambda F_7^J, \lambda^2 F_8^J
 \tag{2.111}$$

имеют одинаковое асимптотическое поведение при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t . Как и в случае рассеяния скалярных частиц на спинорных частицах, из теоремы Фрагмена–Линделёфа и соотношений перекрёстной симметрии (2.104) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{F_i^I(\lambda, t)}{F_i^{\bar{I}}(\lambda, t)^*} = \begin{cases} \pm e^{-i\pi\alpha(t)} & , i = 1, 2, \dots, 6, \\ \mp e^{-i\pi\alpha(t)} & , i = 7, 8. \end{cases}
 \tag{2.112}$$

Из этих асимптотических соотношений и выражений для дифференциальных сечений процессов (I) и (II) нетрудно видеть, что дифференциальные сечения этих процессов асимптотически равны [119]. При этом следует отметить, что согласно (2.109) мы имеем

$$\operatorname{Re} F_i^I(\lambda, t) F_j^{\bar{I}}(\lambda, t)^* = - \operatorname{Re} F_i^{\bar{I}}(\lambda, t) F_j^I(\lambda, t)^*
 \tag{2.113}$$

для $j = 7, 8$ и $i \neq 7, 8$. Однако, согласно (2.109) и (2.110), кинематические коэффициенты A_{ij}^J для этих членов либо равны нулю, либо в асимптотике пропорциональны разности масс $m_1 - m_1$, т.е. имеют разные знаки для процессов (I) и (II), а коэффициенты B_{ij}^J равны между собой для этих процессов. В результате каждые из членов в (2.108) равны между собой для процессов (I) и (II).

Например, при фиксированном t и $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство между

дифференциальными сечениями процессов

$$p+p \rightarrow p+p \quad \text{и} \quad \bar{p}+\bar{p} \rightarrow \bar{p}+\bar{p}, \quad (2.II4)$$

$$\Sigma^+p \rightarrow \Sigma^+p \quad \text{и} \quad \bar{\Sigma}^+p \rightarrow \bar{\Sigma}^+p, \quad (2.II5)$$

$$\Sigma^-p \rightarrow \lambda+n \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}+\bar{p} \rightarrow \bar{\Sigma}^-+n, \quad (2.II6)$$

$$\Sigma^+p \rightarrow p+\Sigma^+ \quad \text{и} \quad \bar{p}+\bar{p} \rightarrow \bar{\Sigma}^++\Sigma^+, \quad (2.II7)$$

$$\Sigma^-p \rightarrow n+\lambda \quad \text{и} \quad \bar{n}+\bar{p} \rightarrow \bar{\Sigma}^-+\lambda. \quad (2.II8)$$

Отметим, что в двух последних процессах (2.II7) и (2.II8) передача импульса t измеряется между начальным протоном и конечным гипероном. Эта передача обычно обозначается через u . Поэтому в этих случаях мы имеем на самом деле равенство между дифференциальным сечением упругого или неупругого рассеяния гиперона на протоне назад и дифференциальным сечением аннигиляции пары протон-антипротон на пару гиперон-антигиперон.

Теперь рассмотрим случай упругого рассеяния. Мнимые части амплитуд этих процессов, усредненных по спинам частиц, определяют соответствующие полные сечения взаимодействия

$$\sigma_{tot}^J(\Delta) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \operatorname{Im} \left\{ 4M_m F_1^J(\Delta, 0) + 2M(M^2+m^2-\Delta) F_2^J(\Delta, 0) + (M^2+m^2-\Delta)^2 F_3^J(\Delta, 0) + 2m(M^2+m^2-\Delta) F_4^J(\Delta, 0) \right\}. \quad (2.II9)$$

Предположим, что при $s \rightarrow \infty$ эти сечения ведут себя как некоторые степени от \ln^2/M^2 или стремятся к постоянным. В этом случае $\alpha(0) = 1$ и из асимптотических соотношений (2.II2) для инвариантных амплитуд и выражения (2.II9) для полных сечений следует асимптотическое равенство между полными сечениями взаимодействия частицы и античастицы, если мнимые части растут не медленнее действительных частей. В частности, было доказано асимптотическое равенство между полными сечениями взаимодействия

$$\sigma_{tot}(pp) \approx \sigma_{tot}(\bar{p}p), \quad \sigma_{tot}(\Sigma^+p) \approx \sigma_{tot}(\bar{\Sigma}^+p).$$

Как было показано, в случае упругого рассеяния мезона на барионе существует некоторые простые соотношения между мнимыми или вещественными частями амплитуд рассеяния частицы и античастицы вперед. Покажем, что это также имеет место и в случае упругого рассеяния фермиона на фермионе. В этом случае вместо (2.I01) и (2.I02) с $F_6^J(\Delta, t) = F_7^J(\Delta, t)$ удобно использовать следующие матрицы

$$\Gamma_i^{(a)}(p) = \left\{ 1, \delta_2, \delta_5, i\hat{p}, i\hat{p}, 1 \right\}, \quad (2.I20)$$

$$\Gamma_i^{(b)}(q) = \{1, \gamma_4, \gamma_5, 1, i\hat{q}, i\hat{q}\} \quad (2.121)$$

В случае рассеяния нуклона на нуклоне мы имеем $F_n^J(\lambda, t) = F_c^J(\lambda, t)$. Соотношение перекрёстной симметрии (2.95) даёт

$$F_i^I(\lambda, t) = (-1)^{i+1} F_i^{II}(\lambda, t)^* \quad (2.122)$$

а из выражения для дифференциального сечения и теоремы Фрагмена-Линделёфа следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{F_i^I(\lambda, t)}{F_i^{II}(\lambda, t)^*} = e^{-i\pi\alpha(t)} \quad (2.123)$$

Выбор матриц $\Gamma_i^{(a,b)}$ (2.120) и (2.121) удобен в частности тем, что при этом выборе выделяется амплитуда $F_n^J(\lambda, t)$ с той же матричной структурой, что и кулоновская. Эрмитова и антиэрмитова части амплитуды равны

$$\mathcal{D}^J(p_2, q_2; p_1, q_1) = \sum_{i=1}^6 \bar{u}(p_2) \Gamma_i^{(b)}(q) u(p_1) \bar{u}(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u(q_1) \operatorname{Re} F_i^J(\lambda, t) \quad (2.124)$$

$$\mathcal{A}^J(p_2, q_2; p_1, q_1) = \sum_{i=1}^6 \bar{u}(p_2) \Gamma_i^{(b)}(q) u(p_1) \bar{u}(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u(q_1) \operatorname{Im} F_i^J(\lambda, t) \quad (2.125)$$

В случае рассеяния вперед из (2.123) следует, что мнимые и вещественные части амплитуд рассеяния частицы и античастицы удовлетворяют асимптотическим соотношениям

$$\mathcal{D}^I(p_2, q_2; p_1, q_1) \approx -\mathcal{D}^{II}(p_2, q_2; p_1, q_1) \quad (2.126)$$

$$\mathcal{A}^I(p_2, q_2; p_1, q_1) \approx \mathcal{A}^{II}(p_2, q_2; p_1, q_1) \quad (2.127)$$

если $\alpha(\infty) = 1$, \mathcal{D}^J и \mathcal{A}^J имеют одинаковое поведение. Если \mathcal{A}^J , например, растут быстрее \mathcal{D}^J , то имеет место (2.127).

§ 3. Асимптотические соотношения между поляризациями и параметрами асимметрии

Теперь изучаем асимптотические свойства поляризационных эффектов. Обозначим через ξ_μ^{Ja} и ξ_μ^{Jb} 4-векторы поляризации частиц a_2 и b_2 соответственно, в конечном состоянии процесса (I), или 4-векторы поляризации частиц \bar{a}_1 и \bar{b}_1 , соответственно, в конечном состоянии процесса (II). Если частицы в начальных состояниях неполяризованы, то векторы поляризации ξ_μ^{Ja} и ξ_μ^{Jb} пропорциональны единичному вектору n_μ , определяемому формулой (2.53)

$$\xi_\mu^{Ja} = P^{Ja}(\lambda, t) n_\mu, \quad \xi_\mu^{Jb} = P^{Jb}(\lambda, t) n_\mu \quad (2.128)$$

Вычислим поляризации частиц \bar{b}_2 в конечных состояниях процессов (I) и (II). Мы имеем

$$P^{Ja}(\lambda, t) = 2\lambda\sqrt{-t} \frac{C^J(\lambda, t)}{\mathcal{F}^J(\lambda, t)} \text{Im} \left\{ A_{12}^J F_1^J(\lambda, t) F_2^J(\lambda, t)^* + A_{13}^J F_1^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* \right. \\
 + A_{24}^J F_2^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* + A_{34}^J F_3^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* + A_{56}^J F_5^J(\lambda, t) F_6^J(\lambda, t)^* \\
 \left. + A_{78}^J F_7^J(\lambda, t) F_8^J(\lambda, t)^* + A_{67}^J F_6^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* + A_{58}^J F_5^J(\lambda, t) F_8^J(\lambda, t)^* \right\} \quad (2.129)$$

где $C^J(\lambda, t)$ определяется формулой (2.58) и указанием после этой формулы, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C^J(\lambda, t) = 1$, а $\mathcal{F}^J(\lambda, t)$ определяется выражениями (2.108)-(2.110).

Как было показано, при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t функции $\mathcal{F}^J(\lambda, t)$ асимптотически равны между собой для обоих процессов. Из асимптотических соотношений (2.112) для амплитуд следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\text{Im} F_i^I(\lambda, t) F_j^I(\lambda, t)^*}{\text{Im} F_i^II(\lambda, t) F_j^II(\lambda, t)^*} = -1 \quad (2.130)$$

для шести первых членов в (2.129), а для двух последних

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\text{Im} F_i^I(\lambda, t) F_j^I(\lambda, t)^*}{\text{Im} F_i^II(\lambda, t) F_j^II(\lambda, t)^*} = 1. \quad (2.131)$$

Однако коэффициенты A_{58}^J и A_{67}^J этих членов в асимптотике пропорциональны разности масс $m_2 - m_1$ (см. (2.109) и (2.110)), а так как при переходе от процесса (I) к процессу (II) нужно сделать замену $m_1 \leftrightarrow m_2$, то в этом случае коэффициенты A_{58}^J и A_{67}^J изменят знак, а другие останутся без изменения (асимптотически). Таким образом, в асимптотике поляризации $P^{Ie}(\lambda, t)$ и $P^{IIe}(\lambda, t)$ равны по величине и противоположны по знаку независимо от относительных четностей частиц

$$P^{Ie}(\lambda, t) = -P^{IIe}(\lambda, t). \quad (2.132)$$

Теперь рассмотрим свойства поляризации частиц a_2 и \bar{a}_2 в процессах (I) и (II), соответственно. Для этих поляризаций мы имеем

$$P^{Ja}(\lambda, t) = 2\lambda\sqrt{-t} \frac{C^J(\lambda, t)}{\mathcal{F}^J(\lambda, t)} \text{Im} \left\{ B_{13}^J F_1^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* + B_{24}^J F_2^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* \right. \\
 + B_{23}^J F_2^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* + B_{24}^J F_2^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* + B_{57}^J F_5^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* \\
 \left. + B_{57}^J F_5^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* + B_{67}^J F_6^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* + B_{68}^J F_6^J(\lambda, t) F_8^J(\lambda, t)^* \right\} \quad (2.133)$$

где $C^J(\lambda, t)$, $\mathcal{F}^J(\lambda, t)$ и B_{ij}^J определяются как и раньше. Отметим, что в асимптотике кинематические множители B_{ij}^J не зависят от знака разности масс $m_2 - m_1$, поэтому они не меняются при переходе от процесса (I) к процессу (II) (в асимптотике). Из асимптотических

соотношений (2.112) для инвариантных амплитуд следует, что для четырех первых членов в (2.133) имеет место (2.130), а для четырех последних имеет место (2.131). Таким образом, в общем случае, когда все инвариантные амплитуды $F_i^J(s,t)$ дают вклад в асимптотику сечений, не существует простого соотношения между $P^{I_a}(s,t)$ и $P^{II_a}(s,t)$.

Рассмотрим частный случай упругого рассеяния частиц. В этом случае, как было указано, имеет место (2.106), т.е. три последних члена в (2.133) равны нулю. Более того, в этом случае $M_1 = M_2$, и согласно (2.109), (2.110) коэффициенты b_{ST}^J равны нулю, т.е. пятый член в (2.133) также не даёт вклада. Таким образом, в случае упругого рассеяния поляризации $P^{J_a}(s,t)$ в асимптотике определяются четырьмя первыми членами в (2.133), для которых имеет место (2.130). Поэтому имеет место следующее асимптотическое равенство между поляризациями частиц a_2 и $\bar{a}_2 = \bar{a}_2$ в процессах (I) и (II)

$$P^{I_a}(s,t) \approx - P^{II_a}(s,t). \quad (2.134)$$

Приведем некоторые примеры. В силу (2.132) при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ поляризации протонов отдачи в процессах (2.114) или (2.115), а также поляризации нейтронов отдачи в процессе (2.116), имеют одинаковую величину и разные знаки. Поляризации гиперонов в процессах (2.117) или (2.118) также противоположны по знаку и равны по абсолютной величине. В силу (2.134) противоположны также поляризации протона (соответственно, гиперона) и антипротона (соответственно, антигиперона) в процессах упругого рассеяния (2.114) и (2.115).

Как уже отмечалось, для процессов упругого рассеяния поляризация фермионов в конечном состоянии при рассеянии неполяризованных частиц равна параметру асимметрии при рассеянии неполяризованной частицы на поляризованной частице или поляризованной частицы на неполяризованной частице^{/117/}. Поэтому для этих случаев все выводы, относящиеся к поляризациям

$$P^{J_a}(s,t) \text{ и } P^{J_b}(s,t),$$

применимы также и к параметрам асимметрии. Рассмотрим случай неупругих процессов. Предположим, что частицы b_1 в обоих процессах поляризованы, а частицы a_1 и \bar{a}_2 неполяризованы. Параметры асимметрии в этом случае обозначим через ζ .

Мы имеем

$$\zeta^{J_b}(s,t) = \pm 2 \cdot \sqrt{-t} \frac{C^J(s,t)}{\mathcal{F}^J(s,t)} I_{in} \left\{ A_{12}^J F_1^J(s,t) F_2^J(s,t)^* + A_{13}^J F_4^J(s,t) F_5^J(s,t)^* \right. \\
 + A_{24}^J F_2^J(s,t)^* F_4^J(s,t) + A_{34}^J F_3^J(s,t)^* F_4^J(s,t) + A_{56}^J F_5^J(s,t)^* F_6^J(s,t) \\
 \left. + A_{78}^J F_7^J(s,t)^* F_8^J(s,t) + A_{67}^J F_6^J(s,t) F_7^J(s,t)^* + A_{68}^J F_6^J(s,t)^* F_8^J(s,t) \right\}, \quad (2.135)$$

где $C^J(s,t)$, $\mathcal{F}^J(s,t)$ и A_{ij}^J определяются как и раньше, верхний знак соответствует случаю $I_c = I_f$, а нижний знак - случаю $I_c = -I_f$. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве соотношения (2.132), можно установить асимптотическое равенство

* В асимптотике.

$$\eta^{Ia}(s,t) \approx -\eta^{IIa}(s,t), \quad (2.136)$$

которое имеет место независимо от относительных четностей частиц и относительного поведения независимых амплитуд. Обозначим, аналогично, через η^{Ja} параметры асимметрии при рассеянии поляризованных частиц a_1 и \bar{a}_2 на неполяризованных частицах b_1 . Мы имеем

$$\begin{aligned} \eta^{Ja}(s,t) = 2s\sqrt{-t} \frac{C^J(s,t)}{F^J(s,t)} \operatorname{Im} \left\{ \beta_{13}^J F_1^J(s,t) F_3^J(s,t)^* + \beta_{14}^J F_1^J(s,t) F_4^J(s,t)^* \right. \\ \left. + \beta_{23}^J F_2^J(s,t) F_3^J(s,t)^* + \beta_{24}^J F_2^J(s,t) F_4^J(s,t)^* - \beta_{5p}^J F_5^J(s,t) F_p^J(s,t)^* \right. \\ \left. - \beta_{5r}^J F_5^J(s,t) F_r^J(s,t)^* - \beta_{6r}^J F_6^J(s,t) F_r^J(s,t)^* - \beta_{6g}^J F_6^J(s,t) F_g^J(s,t)^* \right\}. \quad (2.137) \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что в общем случае, когда все инвариантные амплитуды дают вклад в асимптотику сечений, не существует простого соотношения между параметрами асимметрии $\eta^{Ia}(s,t)$ и $\eta^{IIa}(s,t)$. Однако, в случае упругого рассеяния, четыре последних члена в (2.137) равны нулю, и параметры $\eta^{Ja}(s,t)$ равны поляризациям $P^{Ja}(s,t)$. Поэтому в этом случае между параметрами асимметрии $\eta^{Ia}(s,t)$ и $\eta^{IIa}(s,t)$ также имеет место асимптотическое равенство

$$\eta^{Ia}(s,t) \approx -\eta^{IIa}(s,t). \quad (2.138)$$

Таким образом, все выводы, относящиеся к поляризациям $P^{Ja}(s,t)$ и $P^{Jb}(s,t)$, также справедливы и для параметров асимметрии $\eta^{Ja}(s,t)$ и $\eta^{Jb}(s,t)$.

Мы показали, что в случае неупругих процессов вообще не имеется простого соотношения между поляризациями $P^{Ja}(s,t)$ для процессов (I) и (II), а также соотношения между параметрами $\eta^{Ja}(s,t)$ для этих процессов. Однако из выражений (2.133) и (2.137) для $P^{Ja}(s,t)$ и $\eta^{Ja}(s,t)$ и асимптотических соотношений между инвариантными амплитудами (2.112) нетрудно показать следующие асимптотические соотношения между поляризацией $P^{Ja}(s,t)$ в одном процессе и параметром асимметрии $\eta^{Ja}(s,t)$ в другом процессе

$$P^{Ia}(s,t) \approx -\eta^{IIa}(s,t), \quad (2.139)$$

$$P^{IIa}(s,t) \approx -\eta^{Ia}(s,t). \quad (2.140)$$

Г Л А В А Ш

СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ РАССЕЙЯНИЯ

Введение

В предыдущей главе были установлены асимптотические соотношения между амплитудами мезон-барийонного и барийон-барийонного рассеяний, с помощью которых затем получены асимптотические соотношения между дифференциальными и полными сечениями, а также между поляризациями и параметрами асимметрии. Кроме аналитичности и полиномиальной ограниченности мы также предположили, что взаимодействия инвариантны относительно пространственного отражения P , зарядового сопряжения C и слабого отражения времени T . В настоящей главе мы будем рассматривать роль этих свойств инвариантности в установлении полученных асимптотических соотношений между измеряемыми физическими величинами. Следующий факт делает весьма желательным наше изучение роли указанных свойств инвариантности. Как известно, в низшем порядке по теории возмущений (для слабых взаимодействий) интегральное сечение упругого рассеяния нейтринно на электроны, например, примерно в три раза больше интегрального сечения упругого рассеяния антинейтринно на электроны, если справедлива $V-A$ теория слабых взаимодействий Фейнмана и Гелл-Манна^{/92/} и Сударшана и Маршака^{/93/}. Это различие имеет чисто кинематическое происхождение, потому что в данном порядке инвариантности амплитуды равны постоянным и, следовательно, имеют равные модули для этих двух процессов. Однако, дифференциальные сечения рассматриваемых процессов равны

$$\frac{d\sigma^{ve}(s,t)}{dt} = \frac{G^2}{4\pi} \frac{(s-m^2)^2}{k^2_s} = \frac{G^2}{\pi},$$
$$\frac{d\sigma^{\bar{v}e}(s,t)}{dt} = \frac{G^2}{4\pi} \frac{(u-m^2)^2}{k^2_s} = \frac{G^2}{\pi} \left(\frac{u-m^2}{s-m^2} \right)^2,$$

где G - универсальная константа слабых взаимодействий, а m - масса электрона. Из этих выражений нетрудно видеть, что при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ дифференциальные сечения рассматриваемых процессов асимптотически равны между собой. Мы покажем в дальнейшем, что асимптотические равенства дифференциальных сечений перекрестных процессов, полученные в предыдущей главе, имеют место и при несохранении четности.

Отметим, что здесь речь идет не об асимптотических соотношениях в слабых взаимодействиях, а об асимптотических соотношениях в сильных взаимодействиях. Согласно предположению ряда работ^{/121,122/}, область асимптотики слабых взаимодействий есть область очень больших энергий, когда эти слабые взаимодействия становятся сильными, а область асимптотики

сильных взаимодействий, может быть, соответствует энергиям, достигнутым в ближайшем будущем или даже в настоящее время. Более того, в настоящее время теория слабых взаимодействий есть неперенормируемая теория. В такой теории полиномиальной ограниченности амплитуд рассеяния может и не быть.

Мы рассмотрим сначала случай, когда взаимодействия инвариантны относительно преобразования слабого отражения времени T , но четность не сохраняется, и затем случай, когда каждая из указанных инвариантностей P , C и T нарушается. В этих случаях нужно рассматривать не только поперечные, но и продольные поляризации. Однако сами эффекты, связанные с продольными поляризациями, малы. Поэтому мы будем рассматривать только поляризации по направлению нормали к плоскости рассеяния при рассеянии неполяризованных частиц и параметры лево-правой асимметрии при рассеянии поперечно-поляризованной частицы на поляризованной мишени или неполяризованной частицы на поперечно-поляризованной мишени.

I. МЕЗОН-БАРИОННОЕ РАССЕЙНИЕ

§ I. Несохранение четности

Мы рассмотрим теперь случай, когда четность не сохраняется, но имеет место инвариантность относительно слабого отражения времени. В этом случае, согласно CP -теореме, доказанной только из общих принципов релятивистской локальной теории поля /123-125/, имеет место также инвариантность относительно преобразования CP и, следовательно, C -инвариантность нарушается. Если четность не сохраняется, то не имеет смысла введение относительных четностей частиц. Однако, для удобства мы предполагаем, что все относительные четности одинаковы и разделяем амплитуду M^J на две части, одна из них M_a^J сохраняет четность, а другая M_ω^J полностью меняет четность состояний

$$M^J(p_2, q_2; p_1, q_1) = M_a^J(p_2, q_2; p_1, q_1) + M_\omega^J(p_2, q_2; p_1, q_1) \quad (3.1)$$

Одновременно с процессами (I), (II) и (III) мы рассматриваем также процесс (IV). Соотношение (2.7) между амплитудой этого процесса и амплитудой процесса (I) остаётся в силе и в данном случае. Из T -инвариантности и определения M_a^J и M_ω^J следует, в аналогии с (2.9), что

$$M_a^{IV}(p_2, q_2; p_1, q_1) = \left[B M_a^{II}(p_2, q_2; p_1, q_1) B^{-1} \right]^T \quad (3.2)$$

$$M_\omega^{IV}(p_2, q_2; p_1, q_1) = - \left[B M_\omega^{II}(p_2, q_2; p_1, q_1) B^{-1} \right]^T \quad (3.3)$$

Поэтому между амплитудами процессов (I) и (II) имеют место следующие соотношения перекрёст-

ной симметрии

$$M_a^I(p_{21}, q_{11}, p_{11}, -q_{21}) = \gamma_4 \left[B M_a^{II}(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}) B^{-1} \right]^* \gamma_4, \quad (3.4)$$

$$M_a^I(p_{21}, -q_{11}, p_{11}, -q_{21}) = -\gamma_4 \left[B M_a^{II}(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}) B^{-1} \right]^* \gamma_4. \quad (3.5)$$

Из соображений инвариантности следует, что амплитуды M_a^J и M_a^J имеют вид:

$$M_a^J(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}) = F_2^J(\lambda, t) + i \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} F_2^J(\lambda, t), \quad (3.6)$$

$$M_a^J(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}) = \left[F_2^J(\lambda, t) + i \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} F_4^J(\lambda, t) \right] \gamma_5. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6) и (3.7) в (3.4) и (3.5) соответственно, мы получим соотношения перекрёстной симметрии между инвариантными амплитудами процессов (I) и (II)

$$F_i^I(\lambda, t) = (-1)^{i+1} F_i^{II}(\lambda, t)^* \quad (3.8)$$

Теперь рассмотрим процесс (III). Как было сказано, этот процесс связан с процессом (IV) преобразованием зарядового сопряжения. Из CP-инвариантности и определения M_a^J и M_a^J следует, что с точностью до общего фазового множителя

$$M_a^{III}(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}) = M_a^{IV}(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}), \quad (3.9)$$

$$M_a^{III}(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}) = -M_a^{IV}(p_{21}, q_{21}, p_{11}, q_{11}). \quad (3.10)$$

Из этих соотношений и (2.7) мы получим

$$M_a^I(p_{21}, q_{11}, p_{11}, -q_{21}) = \gamma_4 \left[M_a^{III}(p_{11}, q_{11}, p_{21}, q_{21}) \right]^* \gamma_4, \quad (3.11)$$

$$M_a^I(p_{21}, -q_{11}, p_{11}, -q_{21}) = -\gamma_4 \left[M_a^{III}(p_{11}, q_{11}, p_{21}, q_{21}) \right]^* \gamma_4. \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.11) и (3.12) выражения (3.6) и (3.7), нетрудно установить соотношения перекрёстной симметрии между инвариантными амплитудами

$$F_i^I(\lambda, t) = F_i^{III}(\lambda, t)^*, \quad i = 1, 3, 4, \quad F_2^I(\lambda, t) = -F_2^{III}(\lambda, t)^*. \quad (3.13)$$

В данном случае дифференциальные сечения рассматриваемых процессов равны

$$\frac{d\sigma^J(\lambda, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k_J^2} F^J(\lambda, t), \quad (3.14)$$

$$F^J(\lambda, t) = \sum_i A_i^J |F_i^J(\lambda, t)|^2 + \sum_{i < j} A_{ij}^J \operatorname{Re} F_i^J(\lambda, t) F_j^J(\lambda, t)^*, \quad (3.15)$$

причем кинематические множители A_i^J и A_{ij}^J определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_{1,1}^{\text{I}} &= (M_1 + M_2)^2 - t, \\
 A_{2,2}^{\text{I}} &= \frac{1}{4} \left\{ (\lambda - u)^2 - (m_1^2 - m_2^2)^2 - [t - 2(m_1^2 + m_2^2)] [t - (M_1 - M_2)^2] \right\}, \\
 A_{1,2}^{\text{I}} &= (M_1 + M_2)(u - \lambda) + (M_2 - M_1)(m_1^2 - m_2^2), \\
 A_{3,3}^{\text{I}} &= (M_1 - M_2)^2 - t, \\
 A_{4,4}^{\text{I}} &= \frac{1}{4} \left\{ (\lambda - u)^2 - (m_1^2 - m_2^2)^2 - [t - 2(m_1^2 + m_2^2)] [t - (M_1 + M_2)^2] \right\} \\
 A_{3,4}^{\text{I}} &= (M_2 - M_1)(u - \lambda) + (M_1 + M_2)(m_1^2 - m_2^2)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

а $A_{i,j}^{\text{II}}$, $A_{i,j}^{\text{X}}$ и $A_{i,j}^{\text{III}}$, $A_{i,j}^{\text{IV}}$ получаются из $A_{i,j}^{\text{I}}$, $A_{i,j}^{\text{I}}$ заменами $m_1 \leftrightarrow m_2$ и $M_1 \leftrightarrow M_2$, соответственно. Из этих выражений для дифференциальных сечений и соотношений перекрёстной симметрии (3.8) и (3.15) можно доказать асимптотические равенства между дифференциальными сечениями процессов (I), (II) и (III) при фиксированном t и $\lambda \rightarrow \infty$. Для этого достаточно повторить все рассуждения, приведенные в соответствующем месте предыдущей главы/126/.

Асимптотические равенства между полными сечениями взаимодействия частиц и античастиц также можно доказать аналогично. Отметим, что эти полные сечения взаимодействия определяются формулой (2.35) и в рассматриваемом случае, когда четность не сохраняется, так как не сохраняющий четность член M_a^{J} не даёт вклада в полные сечения. Однако, как это нетрудно проверить, в этом случае равенства (2.42) и (2.51) превращаются в неравенства, например,

$$\left[\frac{d\sigma^{\text{I}}(\lambda, t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma^{\text{II}}(\lambda, t)}{dt} \right]_{t \rightarrow \infty} \geq \frac{1}{16\pi} \left[\sigma_{\text{tot}}^{\text{I}}(\lambda) \right]^2 \tag{3.17}$$

Предположим, что фермионы в начальных состояниях неполяризованы и рассмотрим поляризации $P^{\text{J}}(\lambda, t)$ фермионов в конечных состояниях по направлению 4-вектора n_μ , определяемого формулами (2.53) и (2.54). Из выражений для матричных элементов мы получим

$$P^{\text{J}}(\lambda, t) = 2\lambda\sqrt{-t} C(\lambda, t) \frac{\text{Im} \left\{ F_1^{\text{J}}(\lambda, t) F_2^{\text{J}}(\lambda, t)^* + F_3^{\text{J}}(\lambda, t) F_4^{\text{J}}(\lambda, t)^* \right\}}{\mathcal{F}^{\text{J}}(\lambda, t)} \tag{3.18}$$

где $C^{\text{J}}(\lambda, t)$ и $\mathcal{F}^{\text{J}}(\lambda, t)$ определяются как и раньше. Аналогично, если фермионы в начальных состояниях поляризованы по направлению вектора n_μ , то будет асимметрия в конечных состояниях, причем параметры асимметрии равны

$$\eta^{\text{J}}(\lambda, t) = 2\lambda\sqrt{-t} C(\lambda, t) \frac{\text{Im} \left\{ F_1^{\text{J}}(\lambda, t) F_2^{\text{J}}(\lambda, t) - F_3^{\text{J}}(\lambda, t) F_4^{\text{J}}(\lambda, t)^* \right\}}{\mathcal{F}^{\text{J}}(\lambda, t)} \tag{3.19}$$

CIA-RDP80-00247A002400260001-5 параметрам асимметрии $\eta^J(\lambda, t)$. Однако из соотношений перекрёстной симметрии (3.8) и с помощью теоремы Фрагмена-Линделёфа можно показать, что эти поляризации или параметры асимметрии для процессов (I) и (II) в асимптотике равны между собой по величине и противоположны по знаку

$$P^I(\lambda, t) \approx -P^{II}(\lambda, t), \quad (3.20)$$

$$\eta^I(\lambda, t) \approx -\eta^{II}(\lambda, t). \quad (3.21)$$

Что касается процессов (I) и (III), то между поляризациями $P^J(\lambda, t)$, а также между параметрами асимметрии $\eta^J(\lambda, t)$, в общем случае не существует простого соотношения. Однако из полученных соотношений можно показать, что поляризация $P^J(\lambda, t)$ для одного процесса равна параметру асимметрии $\eta^J(\lambda, t)$ для другого процесса по величине и противоположна по знаку

$$P^I(\lambda, t) \approx -\eta^{III}(\lambda, t), \quad (3.22)$$

$$\eta^I(\lambda, t) \approx -P^{III}(\lambda, t). \quad (3.23)$$

В случае упругого рассеяния из инвариантности относительно слабого отражения времени следует, что амплитуда $F_s^J(\lambda, t)$ должна быть равна нулю. В этом случае поляризация $P^J(\lambda, t)$ и параметр асимметрии $\eta^J(\lambda, t)$ для каждого процесса равны друг другу, так что соотношения (3.20)–(3.23) справедливы для всех пар процессов /I26/.

§ 2. Нарушение инвариантности относительно отражения времени

Теперь изучим асимптотические соотношения между амплитудами перекрёстных процессов мезон-барионного рассеяния, исходя только из основных постулатов релятивистской квантовой теории поля и не предполагая инвариантности взаимодействия относительно указанных дискретных преобразований P , C и T . В этом случае имеет место только соотношение перекрёстной симметрии между амплитудами процессов (I) и (IV)

$$a_1 + b_1 \rightarrow a_2 + b_2, \quad (I)$$

$$\bar{a}_1 + b_2 \rightarrow \bar{a}_2 + b_1. \quad (IV)$$

(см соотношение (2.7)). Согласно CPT - теореме /I23-I25/ амплитуда последнего процесса (IV) связана с амплитудой процесса (V)

$$a_2 + \bar{b}_1 \rightarrow a_1 + \bar{b}_2. \quad (V)$$

Поскольку никакой из указанных инвариантностей не имеется, то процесс (IV) не связан с

процессами (П) или (Ш). Подставляя выражения (3.6) и (3.7) для амплитуд в соотношение перекрёстной симметрии (2.7), мы получим

$$F_1^I(a, t) = F_1^{IV}(a, t)^*, \quad F_1^I(a, t) = -F_1^{IV}(a, t)^* \quad (3.24)$$

Это соотношение перекрёстной симметрии между инвариантными амплитудами процессов (I) и (IV). Используя эти соотношения и выражения (3.14)–(3.16) для дифференциальных сечений и применяя теорему Фрагмена-Линделёфа, мы также можем доказать асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I) и (IV) при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$. В частном случае, когда процесс (I) есть процесс упругого рассеяния какой-нибудь частицы α на частице \mathcal{L} , процесс (IV) есть соответствующий процесс с античастицей $\bar{\alpha}$. Таким образом, асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями упругого рассеяния частицы и античастицы может быть доказано и без применения свойств инвариантности взаимодействий относительно дискретных преобразований P, C и T. В рассматриваемом случае полные сечения взаимодействий также имеют вид (2.35), и асимптотическое равенство полных сечений взаимодействия частицы и античастицы также можно доказать аналогично /126/.

Теперь рассмотрим некоторые поляризационные эффекты. Из выражений (3.18) и (3.19) для поляризаций $P^J(a, t)$ и параметров асимметрии $\eta^J(a, t)$, соответственно, и соотношений перекрёстной симметрии (3.24), нетрудно видеть, что в общем случае не существует простого соотношения между поляризациями $P^J(a, t)$, а также соотношения между параметрами асимметрии $\eta^J(a, t)$. Однако имеют место асимптотические равенства между поляризацией в одном процессе и параметром асимметрии в другом

$$P^I(a, t) \approx -\eta^{II}(a, t), \quad (3.25)$$

$$\eta^I(a, t) \approx -P^{IV}(a, t). \quad (3.26)$$

II. БАРИОН-БАРИОННОЕ РАССЕЯНИЕ

§ I. Несохранение четности

Теперь мы обобщаем результаты, полученные для случая мезон-барионного рассеяния, на случай барион-барионного рассеяния. Как и раньше, сначала предполагаем, что четность не сохраняется, но имеет место инвариантность относительно слабого отражения времени T. Для удобства мы также предполагаем, что все частицы имеют одинаковую четность и разделяем амплитуду на две части, для одной из них четность сохраняется, а для другой четность меняется полностью:

$$M^J(p_1, q_1; p_1, q_1) = M_s^J(p_1, q_1; p_1, q_1) + M_a^J(p_1, q_1; p_1, q_1). \quad (3.27)$$

Одновременно с процессами (I) и (II) мы рассматриваем также процесс (V). Между амплиту-

дами процессов (I) и (Y) имеет место соотношение перекрестной симметрии (2.90). Однако соотношение (2.94) между амплитудами процессов (II) и (Y) несправедливо, потому что при получении этого соотношения мы предположили инвариантность относительно преобразования зарядового сопряжения C. Из определения амплитуд M_{Δ}^J и M_a^J и CP-инвариантности следует, что вместо (2.94) мы имеем

$$M_{\Delta}^{\bar{Y}}(p_2, q_2; p_1, q_1) = - [C^{-1} M_{\Delta}^{\bar{II}}(p_2, q_2; p_1, q_1) C]^T, \quad (3.28)$$

$$M_a^{\bar{Y}}(p_2, q_2; p_1, q_1) = [C^{-1} M_a^{\bar{II}}(p_2, q_2; p_1, q_1) C]^T. \quad (3.29)$$

Из этих соотношений и (2.90) следует, что имеют место следующие соотношения перекрестной симметрии между амплитудами процессов (I) и (II), вместо (2.95);

$$\delta_h [M_{\Delta}^I(-p_2, q_2; -p_1, q_1)]^{\dagger} \delta_h = [C^{-1} M_{\Delta}^{\bar{II}}(p_2, q_2; p_1, q_1) C]^T, \quad (3.30)$$

$$\delta_h [M_a^I(-p_2, q_2; -p_1, q_1)]^{\dagger} \delta_h = - [C^{-1} M_a^{\bar{II}}(p_2, q_2; p_1, q_1) C]^T. \quad (3.31)$$

Из соображений инвариантности следует, что амплитуды M_{Δ}^J и M_a^J имеют вид:

$$M_{\Delta}^I(p_2, q_2; p_1, q_1) = \sum_{i=1}^g \Gamma_i^{(h)}(q) \bar{u}_{a_i}(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_{a_i}(q_1) F_i^I(\Delta, t), \quad (3.32)$$

$$M_a^I(p_2, q_2; p_1, q_1) = \sum_{i=1}^g \lambda_i^{(h)}(q) \bar{u}_{a_i}(q_2) \lambda_i^{(a)}(p) u_{a_i}(q_1) G_i^I(\Delta, t), \quad (3.33)$$

$$M_{\Delta}^{\bar{II}}(p_2, q_2; p_1, q_1) = \sum_{i=1}^g \Gamma_i^{(h)}(q) \bar{u}_{a_i}(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_{a_i}(q_1) F_i^{\bar{II}}(\Delta, t), \quad (3.34)$$

$$M_a^{\bar{II}}(p_2, q_2; p_1, q_1) = \sum_{i=1}^g \lambda_i^{(h)}(q) \bar{u}_{a_i}(q_2) \lambda_i^{(a)}(p) u_{a_i}(q_1) G_i^{\bar{II}}(\Delta, t), \quad (3.35)$$

где $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, $q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$,

$$\Gamma_i^{(a)}(p) = \lambda_i^{(a)}(p) = \{1, 1, i\hat{p}, i\hat{p}, \delta_5, \delta_5, i\hat{p}\delta_5, i\hat{p}\delta_5\}, \quad (3.36)$$

$$\Gamma_i^{(h)}(q) = \{1, i\hat{q}, i\hat{q}, 1, \delta_5, i\hat{q}\delta_5, \delta_5, i\hat{q}\delta_5\}, \quad (3.37)$$

$$\lambda_i^{(h)}(q) = \{\delta_5, i\hat{q}\delta_5, i\hat{q}\delta_5, \delta_5, 1, i\hat{q}, 1, i\hat{q}\}. \quad (3.38)$$

Подставляя выражения (3.32)–(3.38) в соотношения (3.30) и (3.31), мы получим соотношения перекрестной симметрии между инвариантными амплитудами $F_i^I(\Delta, t)$ и $G_i^{\bar{II}}(\Delta, t)$ рассматриваемых процессов

$$F_i^I(\Delta, t) = (-1)^{i+1} F_i^{\bar{II}}(\Delta, t)^*, \quad G_i^I(\Delta, t) = (-1)^{i+1} G_i^{\bar{II}}(\Delta, t)^*. \quad (3.39)$$

В данном случае дифференциальные сечения рассматриваемых процессов равны

$$\frac{d\sigma^J(\lambda, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi\lambda k_J^2} \mathcal{F}^J(\lambda, t), \quad (3.40)$$

$$\mathcal{F}^J(\lambda, t) = \sum_{i=1}^5 A_i^J B_i^J |F_i^J(\lambda, t)|^2 + \sum_{i,j} A_{ij}^J B_{ij}^J \operatorname{Re} F_i^J(\lambda, t) F_j^J(\lambda, t)^* + \sum_{i=1}^5 A_i^J D_i^J |G_i^J(\lambda, t)|^2 + \sum_{i,j} A_{ij}^J D_{ij}^J \operatorname{Re} G_i^J(\lambda, t) G_j^J(\lambda, t)^*, \quad (3.41)$$

причем кинематические коэффициенты A_i^J и A_{ij}^J определяются как в формулах (2.109), (2.110) и аналогичных формулах, а коэффициенты B_i^J , B_{ij}^J , D_i^J и D_{ij}^J определяются следующим образом: они удовлетворяют соотношениям для B_i^J и B_{ij}^J в (2.109); B_1^I , B_2^I , B_{12}^I , B_5^I , B_6^I и B_{56}^I получаются из A_1^I , A_3^I , A_{13}^I , A_5^I , A_7^I и A_{57}^I , соответственно, заменой $m_1 \leftrightarrow m_2$; D_1^J , D_2^J , D_{12}^J , D_5^J , D_6^J и D_{56}^J получаются из A_1^I , A_3^I , A_{13}^I , A_5^I , A_7^I и A_{57}^I , соответственно, той же заменой; B_{ij}^I , B_{ij}^J , D_{ij}^I и D_{ij}^J получаются из B_i^I , B_j^I , D_i^I и D_j^I соответственно, заменой $m_1 \leftrightarrow m_2$.

Из полученных выражений для дифференциальных сечений и соотношений перекрёстной симметрии (3.39) и с помощью теоремы Фрагмена-Линделёфа мы также можем доказать асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями рассматриваемых процессов (I) и (II) при фиксированном t и $\lambda \rightarrow \infty$. Для этого достаточно повторить все рассуждения, приведенные в доказательстве аналогичного равенства для случая барион-барионного рассеяния с сохранением четности.

Асимптотические равенства между полными сечениями взаимодействия частиц и античастиц также можно доказать аналогично. Отметим, что в рассматриваемом случае, когда четность не сохраняется, полные сечения взаимодействия также определяются формулой (2.119), так как нарушающий сохранение четности член не дает вклада в эти полные сечения.

Изучим теперь поляризационные эффекты. Предположим, что фермионы в начальных состояниях неполяризованы и рассмотрим поляризации $P^{JK}(\lambda, t)$ по направлению 4-вектора n_μ , определяемого формулами (2.53) и (2.54), частиц ℓ_2 в конечных состояниях процессов (I) и (II). Из выражений для матричных элементов мы получим

$$P^{JK}(\lambda, t) = 2\lambda\sqrt{-t} \frac{C^J(\lambda, t)}{\mathcal{F}^J(\lambda, t)} I_m \left\{ A_{12}^J \left[F_1^J(\lambda, t) F_2^J(\lambda, t)^* + G_1^J(\lambda, t) G_2^J(\lambda, t)^* \right] + A_{13}^J \left[F_1^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* + G_1^J(\lambda, t) G_3^J(\lambda, t)^* \right] + A_{24}^J \left[F_2^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* + G_2^J(\lambda, t) G_4^J(\lambda, t)^* \right] + A_{34}^J \left[F_3^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* + G_3^J(\lambda, t) G_4^J(\lambda, t)^* \right] + A_{56}^J \left[F_5^J(\lambda, t) F_6^J(\lambda, t)^* + G_5^J(\lambda, t) G_6^J(\lambda, t)^* \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{78}^J \left[F_7^J(a,t) F_8^J(a,t)^* + G_7^J(a,t) G_8^J(a,t)^* \right] + A_{67}^J \left[F_6^J(a,t) F_7^J(a,t) + G_6^J(a,t) G_7^J(a,t) \right] \\
 & + A_{58}^J \left[F_5^J(a,t) F_8^J(a,t)^* + G_5^J(a,t) G_8^J(a,t)^* \right], \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

где $C^J(a,t)$, $F^J(a,t)$ и A_{ij}^I , A_{ij}^II определяются как и раньше. Аналогично, если частицы a_2 в начальных состояниях процессов (I) и (II) поляризованы по направлению 4-вектора η_μ , то в конечных состояниях будет лево-правая асимметрия с параметрами асимметрии равными

$$\begin{aligned}
 \eta^J(a,t) = & 2s\sqrt{-t} \frac{C^J(a,t)}{F^J(a,t)} \text{Im} \left\{ A_{12}^J \left[F_1^J(a,t) F_2^J(a,t)^* - G_1^J(a,t) G_2^J(a,t)^* \right] \right. \\
 & A_{13}^J \left[F_1^J(a,t) F_3^J(a,t)^* - G_1^J(a,t) G_3^J(a,t)^* \right] + A_{24}^J \left[F_2^J(a,t) F_4^J(a,t) - G_2^J(a,t) G_4^J(a,t) \right] \\
 & + A_{34}^J \left[F_3^J(a,t) F_4^J(a,t)^* - G_3^J(a,t) G_4^J(a,t)^* \right] + A_{56}^J \left[G_5^J(a,t) G_6^J(a,t)^* - F_5^J(a,t) F_6^J(a,t) \right] \\
 & + A_{78}^J \left[G_7^J(a,t) G_8^J(a,t)^* - F_7^J(a,t) F_8^J(a,t)^* \right] + A_{67}^J \left[G_6^J(a,t) G_7^J(a,t) - F_6^J(a,t) F_7^J(a,t) \right] \\
 & \left. + A_{58}^J \left[G_5^J(a,t) G_8^J(a,t)^* - F_5^J(a,t) F_8^J(a,t)^* \right] \right\}. \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что в общем случае поляризации $P^{Jl}(a,t)$ не равны параметрам асимметрии $\eta^{Jl}(a,t)$. Однако из соотношений перекрестной симметрии (3.39) и с помощью теоремы Фрагмена-Линделёфа можно доказать, что асимптотические соотношения между поляризациями $P^{I6}(a,t)$ и $P^{II6}(a,t)$ и между параметрами асимметрии $\eta^I(a,t)$ и $\eta^{II}(a,t)$, полученные в случае сохранения четности, также имеют место в рассматриваемом случае несохранения четности

$$P^{I6}(a,t) \approx -P^{II6}(a,t), \quad (3.44)$$

$$\eta^{I6}(a,t) \approx -\eta^{II6}(a,t). \quad (3.45)$$

Что касается поляризаций $P^{Ja}(a,t)$ по направлению η_μ частиц a_2 и \bar{a}_1 в процессах (I) и (II), соответственно, для неполяризованных начальных частиц, и параметров асимметрии $\eta^{Ja}(a,t)$ при рассеянии частиц a_2 и \bar{a}_1 , поляризованных по направлению η_μ , в процессах (I) и (II), соответственно, то мы имеем

$$P^{Ja}(a,t) = 2s\sqrt{-t} \frac{C^J(a,t)}{F^J(a,t)} \text{Im} \left\{ B_{13}^J F_1^J(a,t) F_3^J(a,t)^* + B_{14}^J F_1^J(a,t) F_4^J(a,t)^* \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + B_{23}^J F_2^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* + B_{24}^J F_2^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* + B_{57}^J F_5^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* \\
 & + B_{57}^J F_5^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* + B_{67}^J F_6^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* + B_{69}^J F_6^J(\lambda, t) F_9^J(\lambda, t)^* \\
 & + D_{13}^J G_1^J(\lambda, t) G_3^J(\lambda, t)^* + D_{14}^J G_1^J(\lambda, t) G_4^J(\lambda, t)^* + D_{23}^J G_2^J(\lambda, t) G_3^J(\lambda, t)^* \\
 & + D_{24}^J G_2^J(\lambda, t) G_4^J(\lambda, t)^* + D_{57}^J G_5^J(\lambda, t) G_7^J(\lambda, t)^* + D_{57}^J G_5^J(\lambda, t) G_7^J(\lambda, t)^* \\
 & + D_{67}^J G_6^J(\lambda, t) G_7^J(\lambda, t)^* + D_{69}^J G_6^J(\lambda, t) G_9^J(\lambda, t)^* \} \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma^{Ja}(\lambda, t) = & \lambda \sqrt{-t} \frac{C^J(\lambda, t)}{\mathcal{F}^J(\lambda, t)} I_m \left\{ B_{13}^J F_1^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* + B_{14}^J F_1^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* \right. \\
 & + B_{23}^J F_2^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* + B_{24}^J F_2^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* - B_{57}^J F_5^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* \\
 & - B_{67}^J F_6^J(\lambda, t) F_7^J(\lambda, t)^* - B_{69}^J F_6^J(\lambda, t) F_9^J(\lambda, t)^* \\
 & + D_{13}^J G_1^J(\lambda, t) G_3^J(\lambda, t)^* + D_{14}^J G_1^J(\lambda, t) G_4^J(\lambda, t)^* + D_{23}^J G_2^J(\lambda, t) G_3^J(\lambda, t)^* \\
 & + D_{24}^J G_2^J(\lambda, t) G_4^J(\lambda, t)^* - D_{57}^J G_5^J(\lambda, t) G_7^J(\lambda, t)^* - D_{57}^J G_5^J(\lambda, t) G_7^J(\lambda, t)^* \\
 & \left. - D_{67}^J G_6^J(\lambda, t) G_7^J(\lambda, t)^* - D_{69}^J G_6^J(\lambda, t) G_9^J(\lambda, t)^* \right\}, \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

причем функции $\mathcal{F}^J(\lambda, t)$, $C^J(\lambda, t)$ и кинематические множители B_{ij}^I , B_{ij}^{II} , D_{ij}^I , D_{ij}^{II} определяются как и раньше. Из этих выражений следует, что в общем случае, когда все инвариантные амплитуды дают вклад в асимптотику сечений, не существует простого соотношения между поляризациями $P^{Ia}(\lambda, t)$ и $P^{IIa}(\lambda, t)$, а также соотношения между параметрами асимметрии $\gamma^{Ia}(\lambda, t)$ и $\gamma^{IIa}(\lambda, t)$. Однако можно доказать следующие асимптотические соотношения между поляризацией $P^{Ja}(\lambda, t)$ в одном процессе и параметром асимметрии $\gamma^{Ja}(\lambda, t)$ в другом

$$P^{Ia}(\lambda, t) \approx -\gamma^{IIa}(\lambda, t), \quad (3.48)$$

$$\gamma^{Ia}(\lambda, t) \approx -P^{IIa}(\lambda, t). \quad (3.49)$$

Для доказательства этих соотношений достаточно использовать выражения (3.46) и (3.47) для

полноризации и параметров асимметрии и асимптотические соотношения между инвариантными амплитудами, полученные из соотношений перекрёстной симметрии (3.39) с помощью теоремы Фрагмена-Линделёфа.

§ 2. Нарушение инвариантности относительно отражения времени

Мы рассмотрим, наконец, асимптотические соотношения между амплитудами перекрёстных процессов барион-барионного рассеяния, исходя из основных постулатов релятивистской квантовой теории поля и не предполагая инвариантности взаимодействия относительно дискретных преобразований P , C и T . В этом случае имеет место только соотношение перекрёстной симметрии между амплитудами процессов (I) и (Y)

$$a_1 + b_1 \rightarrow a_2 + b_2, \quad (I)$$

$$a_2 + \bar{b}_1 \rightarrow a_1 + \bar{b}_2. \quad (Y)$$

Отметим, что согласно СРТ-теореме^{/94-96/} матричные элементы процесса (Y) и процесса (IV)

$$\bar{a}_1 + b_2 \rightarrow \bar{a}_2 + b_1, \quad (IV)$$

связаны друг с другом. Однако эти матричные элементы не связаны с матричным элементом процесса (II), так как в данном случае не выполняется инвариантность относительно каждого из преобразований P , C и T . Если запишем матричный элемент процесса (Y) в виде (2.88) со спинорами с отрицательной энергией, то между амплитудами M^I и M^Y существует соотношение (2.90). Однако, как и раньше, для удобства мы также характеризуем состояния античастиц с помощью волновых функций с положительной энергией. При этом справедливо следующее соотношение перекрёстной симметрии между амплитудами рассматриваемых процессов

$$\delta_n [M^I(-p_1, q_1; -p_2, q_2)]^+ \delta_n = [C^{-1} M^Y(p_2, q_2; p_1, q_1) C]^T. \quad (3.50)$$

Подставляя в это соотношение выражения (3.32)-(3.38) для амплитуд M^J , мы получим соотношение перекрёстной симметрии между инвариантными амплитудами

$$\bar{F}_i^I(u, t) = (-1)^{i+1} F_i^Y(u, t)^*, \quad G_i^I(u, t) = (-1)^i G_i^Y(u, t)^*. \quad (3.51)$$

Используя выражения (3.40) и (3.41) для дифференциальных сечений и соотношения перекрёстной симметрии (3.51), и применяя теорему Фрагмена-Линделёфа, мы также можем доказать асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I) и (Y) при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t в данном общем случае. Отметим, что если процесс (I) является процессом упругого рассеяния какой-нибудь частицы k на частице α , то процесс (Y) есть

процесс упругого рассеяния античастицы $\bar{\psi}$ на частице ψ . Таким образом, асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями упругого рассеяния частицы и античастицы имеет место и в общем случае. Это равенство можно доказать без использования инвариантностей относительно дискретных преобразований P , C и T . В рассматриваемом случае полные сечения взаимодействия также имеют вид (2.119) и асимптотические равенства между полными сечениями взаимодействия частиц и античастиц также можно доказать аналогично.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД ФОТОРОЖДЕНИЯ И КОМПОН-ЭФФЕКТА

Введение

В настоящей главе метод, развитый в предыдущих главах, применяется к изучению асимптотических соотношений между амплитудами процессов фоторождения, а также асимптотических свойств амплитуд комптон-эффекта. Эти электромагнитные процессы мы будем рассматривать в низшем порядке теории возмущений по электромагнитному взаимодействию. Дисперсионные соотношения для процессов фоторождения π -мезона на нуклоне были установлены в ряде работ^{/75, 127-129/} и были доказаны на основе общих принципов локальной квантовой теории поля^{/79,82/}. Аналогично дисперсионные соотношения для комптон-эффекта в e^2 -приближении были доказаны А.А. Логуновым и др.^{/130/}. Используя соотношения перекрёстной симметрии и применяя теорему Фрагмена-Линделёфа, мы докажем асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями перекрёстных процессов фоторождения, а также некоторые асимптотические соотношения между поляризационными эффектами в этих процессах. Теорема Фрагмена-Линделёфа и соотношения перекрёстной симметрии также позволяют сделать некоторые заключения относительно поляризации нуклона отдачи или параметра лево-правой асимметрии в комптон-эффекте.

§ I. Свойства перекрёстной симметрии амплитуд фоторождения мезона на барионе

Как мы видели в предыдущих главах, для нашей цели соотношения перекрёстной симметрии играют очень важную роль. Поэтому мы сначала остановимся на получении этих соотношений для процессов фоторождения мезона на барионе. Отметим, что в случае мезон-барионного рассеяния большинство перекрёстных наблюдаемых процессов есть процессы, переходящие друг в друга при замене мезонов в начальных состояниях античастицами мезонов в конечных состояниях и обратно. Однако в случае процессов фоторождения такое определение не годится, так как при этом определении второй процесс, в котором фотон рождается в конечном состоянии, наблюдать достаточно трудно. Поэтому мы будем называть перекрёстными следующие процессы фоторождения мезона на нуклоне

$$\gamma + b_2 \rightarrow a + b_2, \quad (I)$$

$$\gamma + b_2 \rightarrow \bar{a} + b_2, \quad (II)$$

где мезон \bar{a} есть античастица мезона a . Примерами таких процессов являются

$$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n \quad (4.I)$$

$$u \quad \gamma + n \rightarrow \pi + p \quad (4.2)$$

Между амплитудами этих процессов мы будем установить асимптотические соотношения.

Обозначим через M_1 и M_2 массы барионов ψ_1 и ψ_2 , через m массу мезона α . Матричный элемент процесса (I) имеет вид:

$$\langle \psi_2(p_2) | S^{-1} | \delta(k) \psi_1(p_1) \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(k+p_1-q-p_2) \frac{1}{\sqrt{4k^0 q^0}} \bar{u}_{\psi_2}(p_2) M^I(p_2, q; p_1, k) u_{\psi_1}(p_1), \quad (4.3)$$

где p_1 и p_2 - 4-импульсы барионов в начальном и конечном состоянии, соответственно, а k и q - 4-импульсы фотона и мезона, соответственно, $p_1+k = p_2+q$. Мы имеем

$$\bar{u}_{\psi_2}(p_2) M^I(p_2, q; p_1, k) u_{\psi_1}(p_1) = \epsilon_\mu \int d^4\xi \langle \psi_2(p_2) | \frac{\delta j_\mu(-\xi/2)}{\delta \varphi_\alpha^+(\xi/2)} | \psi_1(p_1) \rangle e^{-i \frac{k+q}{2} \xi}, \quad (4.4)$$

$$j_\mu(x) = -i \frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} S^+ \quad (4.5)$$

Здесь ϵ_μ - 4-вектор поляризации фотона, $A_\mu(x)$ - оператор электромагнитного поля. Так как электромагнитное поле эрмитово $A_\mu^+(x) = A_\mu(x)$, $i=1, 2, 3, 0$, то из (4.5) и условия унитарности $S^+S = 1$ следует, что

$$j_i^+(x) = j_i(x), \quad i=1, 2, 3, 0 \quad (4.6)$$

Принцип микропричинности позволяет рассматривать (4.4) как краевое значение функции, аналитической в области комплексных импульсов с малой мнимой частью, удовлетворяющей условию

$$\text{Im} \langle q+k \rangle^0 > 0, \quad [\text{Im} \langle q+k \rangle]^2 < 0. \quad (4.7)$$

Теперь рассмотрим амплитуду (4.4), продолженную в нефизическую область импульсов, где фотон и мезон имеют 4-импульсы k и $-q$. Для того, чтобы записать закон сохранения импульса в прежнем виде $p_1+k = p_2+q$, мы обозначим импульс начального бариона ψ_1 через p_1 , а конечного через p_2 , $p_1^2 = M_1^2$, $p_2^2 = M_2^2$. Мы имеем:

$$\bar{u}_{\psi_2}(p_2) M^I(p_2, q; p_1, k) u_{\psi_1}(p_1) = \epsilon_\mu \int d^4\xi \langle \psi_2(p_2) | \frac{\delta j_\mu(-\xi/2)}{\delta \varphi_\alpha^+(\xi/2)} | \psi_1(p_1) \rangle e^{-i \frac{k+q}{2} \xi} \quad (4.8)$$

Как и в рассмотренных случаях рассеяния, удобно переписать (4.8) в виде:

$$\bar{u}_{\psi_2}(p_2) M^I(p_2, q; p_1, k) u_{\psi_1}(p_1) = \epsilon_\mu^+ \left[\int d^4\xi \langle \psi_2(p_2) | \frac{\delta j_\mu(-\xi/2)}{\delta \varphi_\alpha^+(\xi/2)} | \psi_1(p_1) \rangle e^{-i \frac{k+q}{2} \xi} \right]. \quad (4.9)$$

При переходе от (4.8) к (4.9) мы воспользовались (4.6). Выражение в скобке в правой части (4.9) определяет матричный элемент процесса (П) в физической области импульсов. Действительно, матричный элемент этого процесса имеет вид:

$$\langle \psi_2(p_2) \bar{a}(q) | S^{-1} | \psi(k) \psi_2(p_1) \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k - p_2 - q) \frac{1}{\sqrt{k^0 q^0}} \bar{u}_{\psi_2}(p_2) M^{\text{II}}(p_2, q; p_1, k) u_{\psi_2}(p_1), \quad (4.10)$$

$$\bar{u}_{\psi_2}(p_2) M^{\text{II}}(p_2, q; p_1, k) u_{\psi_2}(p_1) = \varepsilon_{\mu} \int d^4 \xi \langle \psi_2(p_2) | \frac{\delta j_{\mu}(-\xi/2)}{\delta \varphi_{\alpha}(\xi/2)} | \psi_2(p_1) \rangle e^{-i \frac{k+q}{2} \xi}. \quad (4.11)$$

Сравнивая (4.9) и (4.11), мы получим соотношение перекрёстной симметрии между амплитудами M^{I} и M^{II}

$$M^{\text{I}}(p_1, -q; p_2, -k) = \gamma_{\mu} [M^{\text{II}}(p_2, q_2; p_1, k)]^{\dagger} \gamma_{\mu}. \quad (4.12)$$

Из соображений инвариантности следует, что амплитуды $M^{\text{J}}(p_2, q_2; p_1, k)$ имеют вид:

$$M^{\text{J}}(p_2, q_2; p_1, k) = \sum_{i=1}^4 T_i F_i^{\text{J}}(s, t), \quad (4.13)$$

где ковариантные матрицы T_i можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 &= i \gamma_5 \hat{\varepsilon} \hat{k}, \\ T_2 &= 2i \gamma_5 [(\not{p}_2)(\not{q}_2) - (\not{p}_1)(\not{q}_1)], \\ T_3 &= \gamma_5 [\hat{\varepsilon}(\not{q}_2) - \hat{k}(\not{q}_1)], \\ T_4 &= 2\gamma_5 [\hat{\varepsilon}(\not{p}_2) - \hat{k}(\not{p}_1)], \quad P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \end{aligned} \quad (4.14)$$

а $s = -(k + p_1)^2$, $u = -(p_1 - q)^2$, $t = -(k - q)^2$. Подставляя выражения (4.13) и (4.14) для амплитуд M^{J} в равенстве (4.12), мы получим соотношения перекрёстной симметрии для инвариантных амплитуд рассматриваемых процессов /131/

$$F_i^{\text{I}}(s, t) = F_i^{\text{II}}(s, t)^*, \quad i=1, 2, 4, \quad F_3^{\text{I}}(s, t) = -F_3^{\text{II}}(s, t)^*. \quad (4.15)$$

Этим соотношениям удовлетворяют, например, инвариантные амплитуды процессов (4.1) и (4.2).

Среди реальных процессов фоторождения мезона на барионе существуют процессы, переходящие в себя в перекрёстном преобразовании. Это процессы с $b_1 = b_2$ и $\bar{a} = a$, например,

$$\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p, \quad (4.16)$$

$$\gamma + n \rightarrow \pi^0 + n \quad (4.17)$$

Инвариантные амплитуды этих процессов удовлетворяют соотношениям перекрёстной симметрии

$$F_i(u, t) = F_i(s, t)^* \quad ; \quad i = 1, 2, 4, \quad F_3(u, t) = F_3(s, t)^* \quad (4.18)$$

Отметим, что мы доказали соотношения перекрёстной симметрии (4.15) для процессов (4.1), (4.2), и (4.18) для процессов (4.16), (4.17) без использования изотопической инвариантности сильных взаимодействий. В работах /128, 129/ процессы фоторождения Λ -мезона на нуклоне были изучены с учётом изотопической инвариантности сильных взаимодействий. В этом случае амплитуды процессов (4.1), (4.2), (4.16) и (4.17) выражаются через три независимых изотопических амплитуды. Из полученных в /128, 129/ соотношений перекрёстной симметрии для изотопических амплитуд также можно получить указанные соотношения перекрёстной симметрии между амплитудами этих процессов. В дальнейшем соотношения (4.15) мы также используем для некоторых процессов фоторождения странных частиц.

§ 2. Равенство между дифференциальными сечениями фоторождения мезона на барионе

Теперь мы покажем асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I) и (II) с неполяризованными частицами при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$. Эти дифференциальные сечения равны

$$\frac{d\sigma^J(s, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k_3^2} \mathcal{F}^J(s, t), \quad (4.19)$$

$$\mathcal{F}^J(s, t) = \sum_{i=1}^4 A_i^J |F_i^J(s, t)|^2 + \sum_{i \neq j} A_{ij}^J \operatorname{Re} F_i^J(s, t) F_j^J(s, t)^* \quad (4.20)$$

Кинематические коэффициенты A_i^J и A_{ij}^J определяются следующим образом. Для первого процесса они имеют вид:

$$A_1^I = (s - M_1^2)(M_2^2 - u),$$

$$A_2^I = \frac{1}{8} \left[(M_1 - M_2)^2 - t \right] \left\{ -t \left[(s - u)^2 - (M_1^2 - M_2^2)^2 \right] - 2m^2 (M_1^2 - M_2^2) (u - s + M_1^2 - M_2^2) + (t - m^2)^2 \left[t - 2(M_1^2 + M_2^2) \right] \right\},$$

$$A_3^I = -\frac{t}{4} \left[(s - M_1^2)(s - M_2^2) + (u - M_1^2)(u - M_2^2) \right] + \frac{m^2}{4} (M_1^2 - M_2^2) (s - u + M_2^2 - M_1^2)$$

$$A_4^I = + \frac{M_1 M_2}{2} (t - m^2)^2,$$

$$A_{12}^I = \frac{1}{4} \left[2(M_1^2 + M_2^2) - t \right] \left[(s - M_1^2)^2 + (u - M_2^2)^2 \right] + \frac{M_1 M_2}{2} (u - s + M_1^2 - M_2^2)^2 +$$

CIA-RDP80-00247A002400260001-5

$$A_{12}^I = \frac{1}{h} (u-\lambda + M_1^2 - M_2^2) [(u-\lambda) + (u-\lambda) - (M_1^2 - M_2^2)] - \frac{1}{h} (t-m^2)^2 [t-2(M_1^2 + M_2^2)],$$

$$A_{13}^I = (t-m^2) [M_1(u-M_2^2) + M_2(M_1^2-\lambda)],$$

$$A_{14}^I = (u-\lambda + M_1^2 - M_2^2) [M_1(u-M_2^2) + M_2(M_1^2-\lambda)],$$

$$A_{23}^I = -\frac{1}{h} (M_1 - M_2) \left\{ (t-m^2)^2 [t-2(M_1^2 + M_2^2)] - t [(u-\lambda)^2 - (M_1^2 - M_2^2)^2] + m^2 (M_1^2 - M_2^2) [u-\lambda + M_1^2 - M_2^2] \right\},$$

$$A_{24}^I = -\frac{1}{h} (M_1 + M_2) \left\{ -t [(u-\lambda)^2 - (M_1^2 - M_2^2)^2] + (t-m^2)^2 [t-2(M_1^2 + M_2^2)] + 2m^2 (M_1^2 - M_2^2) [u-\lambda + M_1^2 - M_2^2] \right\},$$

$$A_{34}^I = \frac{1}{2} (t-m^2) [t - (M_1 + M_2)^2] (u-\lambda + M_1^2 - M_2^2).$$

Коэффициенты A_{ij}^I и A_{ij}^{II} для второго процесса получаются из соответствующих коэффициентов для первого процесса заменой $M_1 \leftrightarrow M_2$.

Из выражений (4.21) нетрудно видеть, что при $\lambda \rightarrow \rho$ и фиксированном t интерференционные члены

$$A_{13}^J \Re F_1^J(\lambda, t) F_3^J(\lambda, t)^* \quad \text{и} \quad A_{34}^J \Re F_3^J(\lambda, t) F_4^J(\lambda, t)^* \quad (4.22)$$

пренебрежимо малы по сравнению с квадратными членами

$$A_1^J |F_1^J(\lambda, t)|^2 + A_3^J |F_3^J(\lambda, t)|^2$$

и

$$A_3^J |F_3^J(\lambda, t)|^2 + A_4^J |F_4^J(\lambda, t)|^2,$$

соответственно. Поэтому интерференционных членов (4.22) рассматривать мы не будем, и достаточно рассматривать остальные члены в (4.20). Согласно (4.21), все соответствующие кинематические коэффициенты A_{ij}^J и $A_{ij}^{J'}$ для процессов (I) и (II) асимптотически равны между собой при $\lambda \rightarrow \rho$ и фиксированном t , кроме коэффициентов A_{23}^I и A_{23}^{II} , которые в асимптотике равны по величине и противоположны по знаку.

Рассмотрим общий случай, когда все инвариантные амплитуды дают вклад в асимптотику сечений и предположим, что сечения имеют определенный рост при $\lambda \rightarrow \rho$ и фиксированном t . В этом случае функции

$$V_i^J(\lambda, t) = \frac{F_i^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)} \quad (4.23)$$

имеют конечные пределы при $\lambda \rightarrow \rho$ и фиксированном t с некоторой допустимой функцией $\varphi(\lambda, t)$. Применяя к функциям (4.23) теорему Фрагмена-Линделёфа, мы получим

CIA-RDP80-00247A002400260001-5

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V_i^J(\lambda, t) = \lim_{s \rightarrow \infty} V_i^J(\lambda, t) \quad (4.24)$$

Эти предельные соотношения, перекрёстная симметрия (4.18) и условие (I.16) для допустимой функции $\varphi(\lambda, t)$ приводят к следующим асимптотическим равенствам между амплитудами процессов (I) и (II)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_i^J(\lambda, t)}{F_i^{\bar{J}}(\lambda, t)^*} = e^{-i\pi \alpha(t)}, \quad i=1, 2, 4,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_3^J(\lambda, t)}{F_3^{\bar{J}}(\lambda, t)^*} = -e^{-i\pi \alpha(t)} \quad (4.25)$$

Из этих асимптотических соотношений между инвариантными амплитудами и выражений для сечений нетрудно установить асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I) и (II) при фиксированном t и $s \rightarrow \infty /|31/$.

§ 3. Асимптотические свойства поляризационных эффектов в процессах фоторождения

Перейдем теперь к изучению асимптотических свойств поляризационных эффектов в рассматриваемых процессах. Рассмотрим сначала поляризацию барионов отдачи в процессах с неполяризованными барионами и фотонами в начальных состояниях. Эта поляризация характеризуется 4-вектором поляризации ξ_μ^J , пропорциональным вектору $i\varepsilon_{\mu\alpha\rho\tau} p_\alpha k_\rho p_{2\tau}$. Обозначим через n_μ единичный пространственно-подобный 4-вектор, определяемый равенством

$$n_\mu = \frac{i\varepsilon_{\mu\alpha\rho\tau} p_\alpha k_\rho p_{2\tau}}{\sqrt{(i\varepsilon_{\mu\alpha\rho\tau} p_\alpha k_\rho p_{2\tau})^2}}$$

Мы имеем

$$\xi_\mu^J = P^J(\lambda, t) n_\mu \quad (4.26)$$

Вычисляя ξ_μ^J с помощью формулы

$$\xi_\mu^J = \frac{\sum_{sp} \{ i\delta_s \delta_p M^J(i\hat{p}_1 - M_1) \overline{M^J(i\hat{p}_2 - M_2)} \}}{\sum_{sp} \{ M^J(i\hat{p}_1 - M_1) \overline{M^J(i\hat{p}_2 - M_2)} \}} \quad (4.27)$$

где \sum обозначает суммирование по поляризациям фотона, мы получим

$$P^J(\lambda, t) = \frac{1}{2} \lambda \sqrt{-t} \frac{C^J(\lambda, t)}{F^J(\lambda, t)} \sum_{i, j} V_{ij}^J \operatorname{Im} F_i^J(\lambda, t) F_j^J(\lambda, t)^* \quad (4.28)$$

где $\mathcal{F}^J(\lambda, t)$ определяются выражениями (4.20), (4.21) и указаниями после этих формул,

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2014/04/25 :

$$\text{CIA-RDP80-00247A002400260001-5} \quad \frac{u^2}{2t\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) - \frac{1}{4t\lambda^2} (M_1^2 - M_2^2)^2 (t - 2m^2)$$

$$- \frac{1}{4\lambda^2} [t - 2m^2] [t - 2(M_1^2 + M_2^2)] - \frac{m^4}{4t\lambda^2} [t - 2(M_1^2 + M_2^2)], \quad (4.29)$$

$C^{\mathbb{R}}(\lambda, t)$ получается из (4.29) заменой $M_1 \leftrightarrow M_2$. В асимптотике, когда $\lambda \rightarrow \infty$ при фиксированном t , $C^{\mathbb{J}}(\lambda, t) \rightarrow 1$. Кинематические коэффициенты $B_{ij}^{\mathbb{J}}$ для первого процесса равны

$$\begin{aligned} B_{12}^{\mathbb{I}} &= \frac{1}{2} (M_1 - M_2) (u - \lambda + M_1^2 - M_2^2) - \frac{1}{2} (M_1 + M_2) (t - m^2), \\ B_{13}^{\mathbb{I}} &= B_{24}^{\mathbb{I}} = u - M_1^2, \\ B_{23}^{\mathbb{I}} &= -\frac{1}{2} [t(u - \lambda) + m^2(M_1^2 - M_2^2)], \\ B_{24}^{\mathbb{I}} &= -\frac{1}{2} \left\{ (M_1^2 - M_2^2)(u - \lambda + M_1^2 - M_2^2) + (t - m^2)[t - 2(M_1^2 + M_2^2)] \right\}, \\ B_{34}^{\mathbb{I}} &= (M_1 + M_2)(M_1^2 - \lambda). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Соответствующие коэффициенты $B_{ij}^{\mathbb{R}}$ для второго процесса получаются из (4.30) заменой $M_1 \leftrightarrow M_2$.

Аналогично, если фотоны или барионы в начальных состояниях поляризованы, то в угловом распределении частиц в конечных состояниях будет лево-правая асимметрия. Параметры асимметрии в процессах с поляризованными барионами и неполяризованными фотонами в начальных состояниях равны

$$\gamma^{\mathbb{J}}(\lambda, t) = \frac{1}{2} \lambda \sqrt{t} \frac{C^{\mathbb{J}}(\lambda, t)}{\mathcal{F}^{\mathbb{J}}(\lambda, t)} \sum_{i, j} D_{ij}^{\mathbb{J}} \text{Im} F_i^{\mathbb{J}}(\lambda, t) F_j^{\mathbb{J}}(\lambda, t)^*, \quad (4.31)$$

где $C^{\mathbb{J}}(\lambda, t)$ и $\mathcal{F}^{\mathbb{J}}(\lambda, t)$ определяются как и раньше. Функции $D_{ij}^{\mathbb{I}}$ равны:

$$\begin{aligned} D_{12}^{\mathbb{I}} &= -\frac{1}{2} (M_1 - M_2) (u - \lambda + M_1^2 - M_2^2) + \frac{1}{2} (M_1 + M_2) (t - m^2) \\ D_{13}^{\mathbb{I}} &= -D_{24}^{\mathbb{I}} = u - M_1^2, \\ D_{23}^{\mathbb{I}} &= \frac{1}{2} [t(u - \lambda) + m^2(M_1^2 - M_2^2)], \\ D_{24}^{\mathbb{I}} &= \frac{1}{2} \left\{ (M_1^2 - M_2^2)(u - \lambda + M_1^2 - M_2^2) + (t - m^2)[t - 2(M_1^2 + M_2^2)] \right\}, \\ D_{34}^{\mathbb{I}} &= - (M_1 + M_2)(M_1^2 - \lambda). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Функции D_{ij}^{II} получаются из соответствующих D_{ij}^{I} заменой $M_1 \leftrightarrow M_2$.

Из выражений для коэффициентов β_{ij}^{I} и D_{ij}^{I} следует, что при $\lambda \rightarrow \rho$ и фиксированном t мы имеем асимптотические соотношения

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{\beta_{ij}^{\text{I}}}{D_{ij}^{\text{I}}} = 1 \quad \text{для } i, j \neq 3$$

$$= -1 \quad \text{для } i=3, j \neq 3 \quad \text{или } i \neq 3, j=3. \quad (4.33)$$

С другой стороны, из асимптотических соотношений (4.25) между инвариантными амплитудами рассматриваемых процессов (I) и (II) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{\text{Im } F_i^{\text{I}}(\lambda, t) F_j^{\text{I}}(\lambda, t)^*}{\text{Im } F_i^{\text{II}}(\lambda, t) F_j^{\text{II}}(\lambda, t)^*} = 1 \quad \text{для } i, j \neq 3$$

$$= -1 \quad \text{для } i=3, j \neq 3 \quad \text{или } i \neq 3, j=3. \quad (4.34)$$

С помощью (4.33) и (4.34) мы получим следующее асимптотическое соотношение между поляризацией $P^{\text{I}}(\lambda, t)$ в первом процессе и параметром асимметрии $\eta^{\text{I}}(\lambda, t)$ во втором

$$P^{\text{I}}(\lambda, t) \approx -\eta^{\text{II}}(\lambda, t). \quad (4.35)$$

Аналогично

$$P^{\text{II}}(\lambda, t) \approx -\eta^{\text{I}}(\lambda, t).$$

Теперь рассмотрим процессы с $b_1 = b_2$, $\bar{a} = a$. Это - процессы, переходящие в себя в перекрёстном преобразовании, т.е. процессы, для которых (I) совпадает с (II). В этом случае из соотношений перекрёстной симметрии (4.18) и теоремы Фрагмена-Линделёфа можно получить следующие асимптотические соотношения для инвариантных амплитуд:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{F_i(\lambda, t)}{F_i(\lambda, t)^*} = e^{-i\pi\alpha(t)}, \quad i=1,2,3, \quad (4.36)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{F_3(\lambda, t)}{F_3(\lambda, t)^*} = -e^{-i\pi\alpha(t)}$$

Поэтому для этих процессов вместо (4.34) мы имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \rho} \frac{\text{Im } F_i(\lambda, t) F_j(\lambda, t)^*}{\text{Re } F_i(\lambda, t) F_j(\lambda, t)^*} = 0 \quad \text{для } i, j \neq 3. \quad (4.37)$$

Из (4.33) и (4.37) для процессов рассматриваемого типа нетрудно получить следующее асимптотическое соотношение между поляризацией $P(\lambda, t)$ и параметром асимметрии $\eta(\lambda, t)$

$$P(\lambda, t) \approx \eta(\lambda, t) \quad (4.38)$$

Примерами процессов с поляризацией $P(\lambda, t)$ и параметром асимметрии $\eta(\lambda, t)$, связанными между собой соотношением (4.38), являются процессы фоторождения нейтральных π^0 -мезонов (4.16) и (4.17).

В главе У мы покажем, что в модели Сакаты с унитарной симметрией^{/43/} инвариантные амплитуды процесса

$$\gamma + n \rightarrow K^* + \lambda \quad (4.39)$$

имеют свойства перекрёстной симметрии, выраженные соотношениями (4.18). Поэтому поляризация $P(\lambda, t)$ и параметр асимметрии $\eta(\lambda, t)$ для этого процесса также связаны между собой асимптотическим соотношением (4.38). Аналогично в октетной модели с унитарной симметрией^{/44, 45/} инвариантные амплитуды процесса

$$\gamma + p \rightarrow K^* + \Sigma^+ \quad (4.40)$$

удовлетворяют соотношениям перекрёстной симметрии (4.18). Для этих процессов асимптотическое соотношение (4.38) также имеет место, если унитарная симметрия октетной модели справедлива при больших энергиях.

§ 4. Асимптотические свойства амплитуд комптон-эффекта

Рассмотрим теперь упругое рассеяние фотона на нуклоне. Обозначим через p_1 и q_1 4-импульсы нуклона и фотона в начальном состоянии, через p_2 и q_2 те же величины в конечном состоянии, через ϵ_{μ}^1 и ϵ_{μ}^2 4-векторы поляризации фотона до и после рассеяния. Положим

$$q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad k = p_1 - p_2 = q_2 - q_1, \\ p' = p - \frac{pq}{q^2} q, \quad N_{\mu} = i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p'_\nu q_\rho k_\sigma. \quad (4.41)$$

Нетрудно видеть, что 4-векторы q , p' , k и N ортогональны друг другу.

Матричный элемент рассматриваемого процесса имеет вид :

$$\langle N(p_2) \delta(q_2) | S - 1 | \chi(q_1) N(p_1) \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \frac{1}{\sqrt{4q_1^0 q_2^0}} \bar{u}(p_2) M(p_2, q_1, p_1, q_2) u(p_1), \quad (4.42)$$

$$M(p_2, q_1, p_1, q_2) = \sum_i T_i F_i(\lambda, t), \quad (4.43)$$

где ковариантные матрицы T_i можно выбрать следующим образом ^{/132,133/}

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{(\epsilon^i p^j)(\epsilon^k p^l)}{p'^2}, & T_2 &= \frac{(\epsilon^i p^j)(\epsilon^k p^l)}{p'^2} i\hat{q}, \\ T_3 &= \frac{(\epsilon^i N^j)(\epsilon^k N^l)}{N^2}, & T_4 &= \frac{(\epsilon^i N^j)(\epsilon^k N^l)}{N^2} i\hat{q}, \\ T_5 &= \frac{(\epsilon^i p^j)(\epsilon^k N^l) - (\epsilon^i p^l)(\epsilon^k N^j)}{\sqrt{2p'^2 N^2}} : Y_5, & & (4.44) \\ T_6 &= \frac{(\epsilon^i p^j)(\epsilon^k N^l) + (\epsilon^i p^l)(\epsilon^k N^j)}{\sqrt{2p'^2 N^2}} : Y_5 \hat{q}. \end{aligned}$$

Дифференциальное сечение равно

$$\frac{d\sigma(\lambda, t)}{dt} = \frac{1}{128 \pi \lambda k^2} \mathcal{F}(\lambda, t), \quad (4.45)$$

$$\mathcal{F}(\lambda, t) = \sum_i A_i |F_i(\lambda, t)|^2 + \sum_{i,j} A_{ij} \operatorname{Re} F_i(\lambda, t) F_j(\lambda, t)^* \quad (4.46)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= A_3 = 4M^2 - t, \\ A_2 &= A_4 = \frac{1}{4} [(u-s)^2 - t], \\ A_5 &= -t, \quad A_6 = M^2 - \lambda u, \\ A_{12} &= A_{34} = 2M(u-s), \end{aligned} \quad (4.47)$$

а остальные A_{ij} равны нулю. Здесь M — масса нуклона.

Рассмотрим общий случай, когда все инвариантные амплитуды дают вклад в асимптотику сечений. В этом случае, если при некоторой допустимой функции $\varphi(\lambda, t)$ существуют пределы при фиксированном t и $\lambda \rightarrow \infty$ для функций:

$$\begin{aligned} V_i(\lambda, t) &= \frac{F_i(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)}, \quad i = 1, 3, 5 \\ V_i(\lambda, t) &= \frac{\lambda F_i(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)}, \quad i = 2, 4, 6 \end{aligned} \quad (4.48)$$

то согласно теореме Фрагмена-Линделёфа

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} V_i(\lambda, t) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} V_i(\lambda, t). \quad (4.49)$$

Из этих соотношений и соотношений перекрёстной симметрии

$$F_i(u, t) = (-1)^{i+1} F_i(\lambda, t)^* \quad (4.50)$$

следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_i(s, t)}{F_i(s, t)^*} = e^{-i\pi\alpha(t)} \quad (4.51)$$

Поляризация нуклона отдачи при рассеянии на неполяризованном нуклоне равна

$$P(s, t) = 2s\sqrt{-t} \frac{C(s, t)}{F(s, t)} \operatorname{Im} \left[F_1(s, t) F_2(s, t)^* + F_3(s, t) F_4(s, t)^* \right], \quad (4.52)$$

где $F(s, t)$ определяется выражениями (4.46) и (4.47), а

$$C(s, t) = \left[-\frac{4}{s} + \frac{M^4}{s^2} \right]^{1/2}. \quad (4.53)$$

Из асимптотических соотношений (4.51) для инвариантных амплитуд следует, что поляризация

$P(s, t)$ стремится к нулю при фиксированном t и $s \rightarrow \infty$ независимо от относительного поведения инвариантных амплитуд. Такое заключение справедливо и для параметра асимметрии при рассеянии на поляризованном нуклоне.

Г Л А В А У

ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ
АМПЛИТУДАМИ МЕЗОН-БАРИОННОГО РАССЕЯНИЯ И
ФОТОРОЖДЕНИЯ

Введение

После создания схемы классификации элементарных частиц Гелл-Манна и Нишизимы, в которой имеет место изотопическая инвариантность, были сделаны попытки построить схемы сильных взаимодействий с высшими симметриями: глобальная симметрия Гелл-Манна^{/134/} и Швингера^{/135/}, дублетная симметрия Пайса^{/136,137/}, космическая симметрия Сакурая^{/138/}, универсальная векторная теория сильных взаимодействий Сакурая^{/139/} и Кобзарева и Окуня^{/140/}, унитарная симметрия (группы SU_3) в триплетной модели Сакаты^{/141,142,43/} и в октетной модели Гелл-Манна^{/44/} и Неемана^{/45/}, симметрия группы G_2 в семимерном зарядовом пространстве Бехрандса и Сэрлина^{/42/}, теория с вырождением в состояниях с гиперзарядом равным нулю Балдина и Комара^{/143/} и другие симметрии. В настоящее время большое внимание уделяется унитарной симметрии и симметрии группы G_2 . В ряде работ уже обсуждались возможности экспериментальной проверки этих симметрий. В частности, для этих моделей были получены некоторые соотношения между сечениями процессов мезон-барионного и барион-барионного рассеяний^{/144-147/}, а также между амплитудами фоторождения мезона на нуклоне^{/144, 148/}.

В обсуждаемых симметричных схемах сильных взаимодействий все мезоны и их античастицы принадлежат одному и тому же мультиплету. Если полные сечения мезон-барионного взаимодействия частиц и античастиц стремятся к постоянным пределам при $\varphi \rightarrow \infty$, то, согласно теореме Померанчука^{/50/}, эти пределы равны между собой. Это обстоятельство уменьшает число независимых амплитуд рассеяния в моделях с высшими симметриями^{/149,150/}.

Как было показано в предыдущих главах, дифференциальные сечения перекрестных процессов при фиксированной передаче импульса и больших энергиях асимптотически равны, и между их амплитудами имеются некоторые асимптотические соотношения. Поскольку в моделях с высшими симметриями мезоны и их античастицы принадлежат одному и тому же мультиплету, и среди процессов мезон-барионного рассеяния имеются перекрестные процессы, то асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов вместе с свойствами симметрии взаимодействий приводят к дополнительным асимптотическим равенствам между сечениями рассматриваемых процессов. Например, в главе II было показано, что из асимптотических соотношений между амплитудами рассеяния π -мезонов на нуклонах и изотопической инвариантности следует асимптотическое равенство между полными сечениями взаимодействия заряженных и

нейтрального Λ -мезонов с протоном

$$\sigma_{tot}(\pi^+p) \approx \sigma_{tot}(\pi^-p) \approx \sigma_{tot}(\pi^0p),$$

а также асимптотическое соотношение

$$\left[\frac{d\sigma(\pi^+p \rightarrow \pi^+p)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^0n)}{dt} \right]_{t \rightarrow 0} \approx \frac{1}{16} [\sigma_{tot}(\pi^+p)]^2.$$

В настоящей главе мы установим некоторые асимптотические соотношения между сечениями процессов мезон-барионного рассеяния в триплетной и октетной моделях унитарной симметрии и модели с группой симметрии G_2 , а также асимптотические соотношения для поляризационных эффектов в процессах мезон-барионного рассеяния и фоторождения мезона на нуклоне. При малых энергиях обсуждаемые высшие симметрии нарушаются. Однако во всех работах по высшим симметриям сильных взаимодействий высказывается надежда, что эти симметрии восстанавливаются при больших энергиях и передачах импульса или, по крайней мере, когда одна из этих величин велика. Полученные соотношения между сечениями и поляризациями есть следствия высших симметрий при больших энергиях. Сравнение этих соотношений с экспериментальными данными может пролить свет на обсуждаемые свойства симметрии сильных взаимодействий при высоких энергиях.

Мы будем рассматривать следующие процессы мезон-барионного рассеяния

$$\pi^+p \rightarrow \pi^+p \quad (5.1a)$$

$$\pi^+p \rightarrow \pi^+p \quad (5.1b)$$

$$\pi^+p \rightarrow \pi^+n \quad (5.2a)$$

$$\pi^-p \rightarrow \pi^0n \quad (5.2b)$$

$$K^+p \rightarrow K^+p \quad (5.3a)$$

$$K^+p \rightarrow K^+p \quad (5.3b)$$

$$K^+p \rightarrow K^+p \quad (5.4a)$$

$$\bar{K}^0p \rightarrow \bar{K}^0p \quad (5.4b)$$

$$K^0p \rightarrow K^+n \quad (5.5a)$$

$$K^-p \rightarrow \bar{K}^0n \quad (5.5b)$$

$$\pi^+p \rightarrow K^+\Sigma^+ \quad (5.6a)$$

$$K^-p \rightarrow \pi^+\Sigma^+ \quad (5.6b)$$

$$\pi^-p \rightarrow K^+\Sigma^- \quad (5.7a)$$

$$K^+p \rightarrow \pi^+\Sigma^- \quad (5.7b)$$

$$\pi^+p \rightarrow K^+\Sigma^0 \quad (5.8a)$$

$$\bar{K}^0p \rightarrow \pi^+\Sigma^0 \quad (5.8b)$$

$$\pi^+ p \rightarrow K^0 \Lambda \quad (5.9a)$$

$$\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ \Lambda \quad (5.9b)$$

$$\pi^0 p \rightarrow K^+ \Sigma^0 \quad (5.10a)$$

$$K^- + p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0 \quad (5.10b)$$

$$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Lambda \quad (5.11a)$$

$$K^- + p \rightarrow \pi^0 \Lambda \quad (5.11b)$$

$$\pi^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^+ \quad (5.12a)$$

$$\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^0 \Sigma^+ \quad (5.12b)$$

$$\bar{K}^0 + p \rightarrow K^+ \Xi^0 \quad (5.13a)$$

$$K^- + p \rightarrow K^+ \Xi^0 \quad (5.13b)$$

$$K^- + p \rightarrow K^+ \Xi^-, \quad (5.14)$$

а также следующие процессы фоторождения мезона на нуклоне

$$\gamma + p \rightarrow K^+ \Lambda, \quad (5.15)$$

$$\gamma + n \rightarrow K^0 \Lambda, \quad (5.16)$$

$$\gamma + p \rightarrow K^0 \Sigma^+. \quad (5.17)$$

Отметим, что в перекрёстном преобразовании процессы (5.9a) переходят в процессы (5.9b), а процесс (5.14) переходит в себя. Для удобства мы также рассматриваем некоторые нефизические процессы с π^0 -мезонами в начальных состояниях.

Кроме процессов (5.1a,в)-(5.14) существуют процессы, полученные заменой $n \leftrightarrow p$, $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$, $K^+ \leftrightarrow K^-$, $\Sigma^+ \leftrightarrow \Sigma^-$ и $\Xi^0 \leftrightarrow \Xi^-$, амплитуды которых совпадают с амплитудами соответствующих процессов в (5.1a,в)-(5.14) с точностью до знака. Для этих процессов также справедливы все полученные ниже соотношения. Исключительным случаем являются процессы с нейтральными K^0 -мезонами в начальных состояниях, например, процессов (5.4a) и (5.4в). Вместо этих процессов мы будем рассматривать соответствующие зеркальные процессы

$$K^+ n \rightarrow K^+ n \quad (5.4a') \quad K^- n \rightarrow K^- n, \quad (5.4b')$$

амплитуды которых равны амплитудам процессов (5.4a) и (5.4в), соответственно, и физические процессы

$$K_{1+}^0 p \rightarrow K_{2+}^0 p, \quad (5.4c)$$

$$K_{2+}^0 p \rightarrow K_{1+}^0 p. \quad (5.5d)$$

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2014/04/25 :
 CIA-RDP80-00247A002400260001-5 процессов (5.4a), ..., (5.4d) через $F_i^{ka}(\lambda, t)$
 ..., $F_i^{kb}(\lambda, t)$ соответственно, $i=1, 2$, и пренебречь слабыми взаимодействиями, то мы
 имеем

$$F_i^{kc}(\lambda, t) = \frac{1}{2} [F_i^{ka}(\lambda, t) + F_i^{kb}(\lambda, t)], \quad (5.18)$$

$$F_i^{kd}(\lambda, t) = \frac{1}{2i} [F_i^{ka}(\lambda, t) - F_i^{kb}(\lambda, t)]. \quad (5.19)$$

Вместо процессов (5.5a), (5.8в), (5.9в), (5.12) и (5.13a) на опыте наблюдаются
 только соответствующие физические процессы с K_2^0 -мезонами в начальных состояниях

$$K_2^0 + p \rightarrow K^+ + n, \quad (5.5c)$$

$$K_2^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^0, \quad (5.8c)$$

$$K_2^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda, \quad (5.9c)$$

$$K_2^0 + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^+, \quad (5.12c)$$

$$K_2^0 + p \rightarrow K^+ + \bar{\Sigma}^0, \quad (5.13c)$$

сечения которых равны сечения соответствующих процессов с нейтральными K^0 - или \bar{K}^0 -
 мезонами в начальных состояниях, умноженным на 1/2.

Для указанных процессов мезон-барионного рассеяния мы получим некоторые соотношения
 между сечениями, а также между поляризациями, как следствия свойств симметрии взаимодейст-
 вий и теоремы Фрагмена-Линделёфа, а для процессов фоторождения (5.16)-(5.17) мы уста-
 новили некоторые асимптотические свойства поляризованных эффектов. Мы изучим сначала
 унитарную симметрию, а затем симметрию группы G_2 . Все эти симметрии включают в себя изо-
 топическую инвариантность, из которой вытекают следующие соотношения между амплитудами
 рассматриваемых процессов

$$F_i^{1a}(\lambda, t) - F_i^{1b}(\lambda, t) = -\sqrt{2} F_i^{2a}(\lambda, t) = \sqrt{2} F_i^{2b}(\lambda, t), \quad (5.20)$$

$$F_i^{3a, b}(\lambda, t) + F_i^{5a, b}(\lambda, t) = F_i^{3a, b}(\lambda, t), \quad (5.21)$$

$$F_i^{6a, b}(\lambda, t) - F_i^{7a, b}(\lambda, t) = \sqrt{2} F_i^{8a, b}(\lambda, t) = -\sqrt{2} F_i^{12a, b}(\lambda, t), \quad (5.22)$$

$$F_i^{6a,b}(s,t) + F_i^{7a,b}(s,t) = e F_i^{10a,b}(s,t), \quad (5.23)$$

$$F_i^{9a,b}(s,t) = \sqrt{2} F_i^{11a,b}(s,t), \quad (5.24)$$

$$F_i^{13a}(s,t) + F_i^{13b}(s,t) = -F_i^{14}(s,t). \quad (5.25)$$

Эти соотношения имеют место во всех рассматриваемых моделях.

§ I. Унитарная группа и её неприводимые представления

Теперь рассмотрим унитарную симметрию. Группа этой симметрии есть унитарная уни-
 модулярная группа второго ранга в комплексном трехмерном пространстве (группа SU_3)^{/43-}
 -45,142,151-155/. Восемь инфинитезимальных операторов F_i этой группы удовлетворяют ком-
 мутационным соотношениям

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k, \quad (5.26)$$

где коэффициенты f_{ijk} были даны, например, в работе Гелл-Манна^{/44/}. Для удобства мы поло-
 жим

$$\begin{aligned} F_1 &= I_1, & F_2 &= I_2, & F_3 &= I_3, & F_4 &= M, \\ F_5 &= K_1, & F_6 &= K_2, & F_7 &= L_1, & F_8 &= L_2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

и

$$I_{\pm} = I_1 \pm i I_2, \quad K_{\pm} = K_1 \pm i K_2, \quad L_{\pm} = L_1 \pm i L_2, \quad (5.28)$$

и введем двухмерный вектор J_n с компонентами

$$J_1 = I_3, \quad J_2 = M, \quad [J_1, J_2] = 0. \quad (5.29)$$

Первый оператор J_1 является оператором третьей компоненты изотопического спина, а второй
 связан с гиперзарядом. При этом коммутационные соотношения (5.26) можно написать в виде
 /154/:

$$[J_n, I_{\pm}] = \pm i_n I_{\pm}, \quad [J_n, K_{\pm}] = \pm k_n K_{\pm}, \quad [J_n, L_{\pm}] = \pm l_n L_{\pm}, \quad (5.30)$$

$$[I_+, I_-] = 2(i_n J_n), \quad [K_+, K_-] = 2(k_n J_n), \quad [L_+, L_-] = 2(l_n J_n), \quad (5.31)$$

$$e_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad l_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

На языке общей теории полупростых групп Ли векторы $\pm e_n, \pm k_n, \pm l_n$ называются корнями. Они выражаются векторами на корневых диаграммах с абсциссами $\pm e_n, \pm k_n, \pm l_n$ и ординатами $\pm e_n, \pm k_n, \pm l_n$, соответственно (см. рис. I).

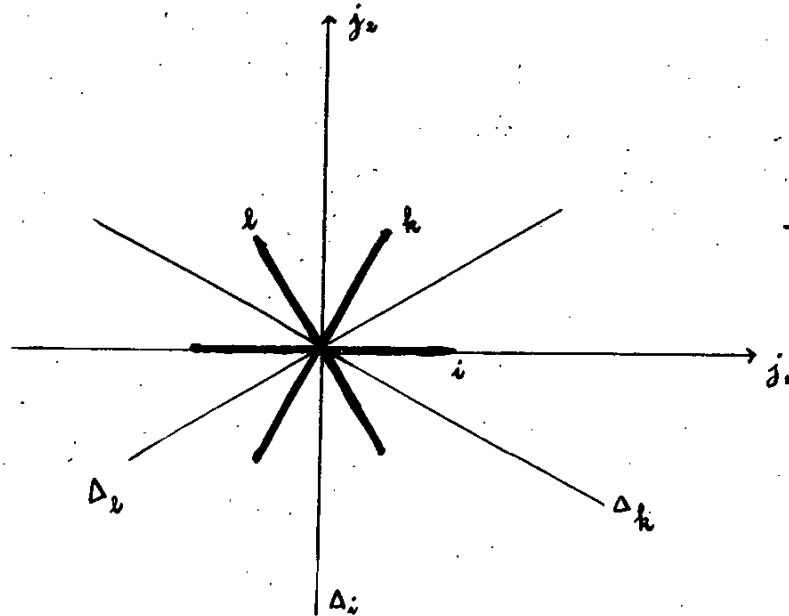


Рис. I.

Корневая диаграмма унитарной группы SU_3 .

Изотопическая группа является подгруппой рассматриваемой унитарной группы. Её инфинитезимальными операторами являются I_i . Как известно, в случае изотопической группы играет важную роль вращение вокруг второй оси на угол π - преобразование зарядовой симметрии

$$P_i = e^{i\pi I_2}. \quad (5.33)$$

В случае унитарной группы кроме этого преобразования существуют два других аналогичных преобразования

$$P_k = e^{i\pi K_2} \quad (5.34)$$

и

$$P_l = e^{i\pi L_2}. \quad (5.35)$$

Между операторами P_i, P_k, P_l и операторами $J_n, n=1,2$, имеют место коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [J_n, P_i] &= -\varepsilon_{in} P_i (i_n J_n), \\ [J_n, P_k] &= -\varepsilon_{kn} P_k (k_n J_n), \\ [J_n, P_l] &= -\varepsilon_{ln} P_l (l_n J_n), \end{aligned} \quad (5.36)$$

а между P_i, P_k, P_l и $I_{\pm}, K_{\pm}, L_{\pm}$ - соотношения

$$P_i^{-1} I_{\pm} P_i = -I_{\pm}, \quad P_i^{-1} K_{\pm} P_i = L_{\pm}, \quad P_i^{-1} L_{\pm} P_i = -K_{\pm}, \quad (5.37)$$

$$P_k^{-1} I_{\pm} P_k = L_{\pm}, \quad P_k^{-1} K_{\pm} P_k = -K_{\pm}, \quad P_k^{-1} L_{\pm} P_k = -I_{\pm}, \quad (5.38)$$

$$P_l^{-1} I_{\pm} P_l = K_{\pm}, \quad P_l^{-1} K_{\pm} P_l = -I_{\pm}, \quad P_l^{-1} L_{\pm} P_l = -L_{\pm}. \quad (5.39)$$

Группа вполне определяется инфинитезимальными операторами $I_{\pm}, K_{\pm}, L_{\pm}, M$. Однако, соотношения (5.36)-(5.39) показывают, что задание изотопических инфинитезимальных операторов и операторов дискретных преобразований P_i и P_k эквивалентно заданию всех инфинитезимальных операторов унитарной группы. Таким образом, вся унитарная группа исчерпывается суперпозицией изотопической группы и дискретных преобразований (5.34) и (5.35). В дальнейшем это свойство будет применяться для получения соотношений между амплитудами.

Теперь изучим физический смысл преобразований (5.34) и (5.35). Отметим, что операторы $J_n, n=1,2$ коммутируют. Поэтому они имеют общие собственные векторы. Обозначим через $|j_n\rangle$ собственный вектор этих операторов с собственными значениями j_n :

$$J_n |j_n\rangle = j_n |j_n\rangle. \quad (5.40)$$

Из второго коммутационного соотношения (5.36) следует, что

$$J_n P_k |j_n\rangle = [j_n - \varepsilon_{kn} (k_n j_n)] P_k |j_n\rangle. \quad (5.41)$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение: если $|j_n\rangle$ есть собственный вектор операторов J_n с собственными значениями j_n , то $P_k |j_n\rangle$ также есть собственный вектор этих операторов с собственными значениями $j_n - \varepsilon_{kn} (k_n j_n)$. Аналогичные утверждения для P_i, P_l также можно доказать. Если мы выразим собственные состояния $|j_n\rangle$ с помощью вектора j_n на корневой диаграмме, то переход из $|j_n\rangle$ в $P_k |j_n\rangle$ является отражением относительно прямой Δ_k , перпендикулярной вектору k_n , и аналогично для P_i и P_l . Таким образом, преобразования P_i, P_k и P_l являются отражениями относительно прямых Δ_i, Δ_k и Δ_l .

и является известным преобразованием зарядовой симметрии, а два остальных являются обобщениями этого преобразования зарядовой симметрии.

Различные методы построения неприводимых представлений унитарной группы были даны во многих работах. Например, эти неприводимые представления можно построить, исходя из коммутационных соотношений /152/. Этот метод является обобщением известного метода построения неприводимых представлений группы вращения. Другим удобным методом является обобщение спинорной алгебры /151/. В этом методе все высшие неприводимые представления унитарной группы являются тензорными, а основные представления составляют 3-спиноры e_α и $e_{\bar{\alpha}}$, преобразующиеся по неэквивалентным представлениям

$$e'_\alpha = A_{\alpha\rho} e_\rho, \quad e'_{\bar{\alpha}} = A^*_{\alpha\rho} e_{\bar{\rho}} \quad (5.42)$$

Базисными векторами каждого неприводимого представления являются тензоры, построенные из спиноров (5.42), симметричные по всем пунктирным индексам, и имеющие шпуры равные нулю. Числа непунктирных и пунктирных индексов обозначим через r и q . Эти целые числа полностью характеризуют неприводимые представления унитарной группы. Размерность неприводимого представления $\mathcal{D}^{\sim}(r, q)$ равна

$$n(r, q) = \frac{1}{2} (r+1)(q+1)(r+q+2).$$

Например, $n(0,0) = 1$, $n(1,0) = 3$, $n(0,1) = 3^*$, $n(1,1) = 8$, $n(2,0) = 10$, $n(0,2) = 10^*$, $n(2,2) = 27$ и т.д. Здесь звездочка используется для обозначения неэквивалентного сопряженного представления. Произведение двух неприводимых представлений можно разлагать на прямую сумму неприводимых представлений

$$\mathcal{D}(r_1, q_1) \times \mathcal{D}(r_2, q_2) = \sum_{r, q} \mathcal{D}(r, q).$$

Это разложение можно осуществить с помощью коэффициентов Клебша-Гордона или с помощью мезона 3-спинорной алгебры (см. работу Я.А. Смородинского /151/).

Октетная модель Гелл-Манна и Неемана и триплетная модель Сакаги основаны на группе SU_3 (*). Они отличаются тем, что в первой модели все восемь барионов принадлежат одному и тому же унитарному мультиплету, соответствующему представлению $\mathcal{D}^3(1, 1)$, также как и восемь мезонов (включая η -мезон), а во второй модели нуклоны и Λ -гиперон образуют триплет, соответствующий представлению $\mathcal{D}^3(1, 0)$ (в случае триплетной модели мы будем рассматривать только процессы с участием нуклонов и Λ -гиперона). Классификация элементарных

*) В некоторых работах триплетная модель Сакаги рассматривается на основе унитарной группы U_3 , а не унимодулярной унитарной группы SU_3 . Однако разница между этими группами не оказывает влияния на полученные соотношения.

частиц на основе унитарной симметрии в рассматриваемых моделях может быть осуществлена с помощью корневых диаграмм. Эти диаграммы даны на рис. 2а-2с. Они имеют оси симметрии Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 . Отражение относительно прямой Δ_1 есть известное преобразование зарядовой симметрии, а отражения относительно Δ_2 и Δ_3 осуществляются следующим образом*) для триплетной модели

$$P_2 \begin{pmatrix} p \\ n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ n \\ p \end{pmatrix}, \quad P_3 \begin{pmatrix} p \\ n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \lambda \\ n \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

для октетной модели

$$P_2 \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \\ \Lambda \\ \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Xi^- \\ \Sigma^- \\ -\Xi^0 \\ \frac{1}{2}\Sigma^+ + \frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda \\ -n \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma^0 - \frac{1}{2}\Lambda \\ \Sigma^+ \\ -p \end{pmatrix}, \quad P_3 \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \\ \Lambda \\ \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Xi^0 \\ p \\ \frac{1}{2}\Sigma^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Lambda \\ \Xi^- \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\Sigma^0 - \frac{1}{2}\Lambda \\ n \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

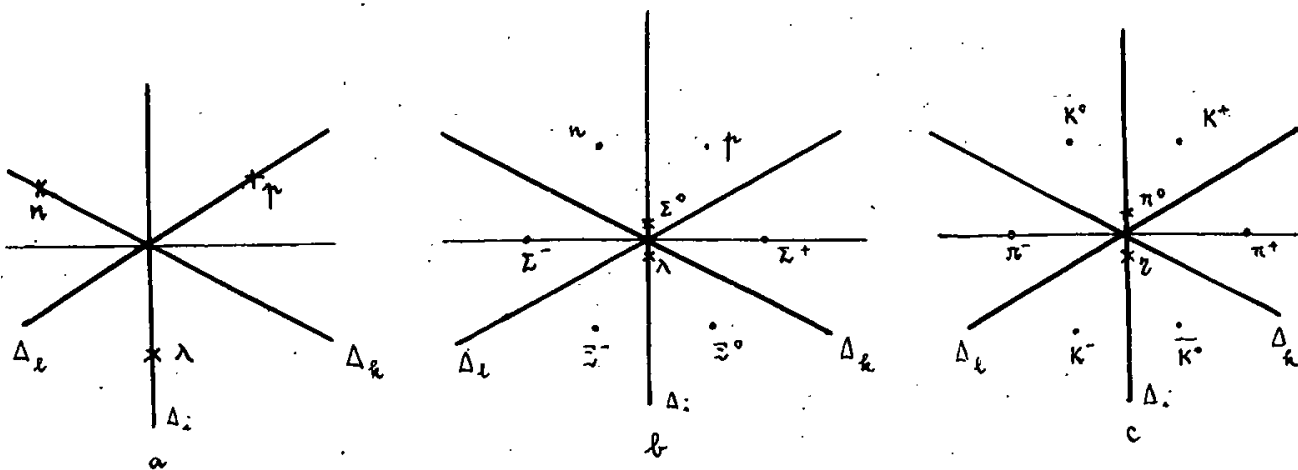


Рис. 2.

- а) Классификация барионов в триплетной модели
- б) Классификация барионов в октетной модели
- в) Классификация мезонов в обоих моделях

*) Знаки в формулах преобразования (5.43)-(5.45) были выбраны как в работе /155/.

а для обеих моделей

$$P_{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \\ \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \\ \eta \\ \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K^- \\ \pi^- \\ -\bar{K}^0 \\ \frac{1}{2}\pi^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \\ -K^0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi^0 - \frac{1}{2}\eta \\ \pi^+ \\ -K^+ \end{pmatrix}, \quad P_{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \\ \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \\ \eta \\ \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \bar{K}^0 \\ K^+ \\ \frac{1}{2}\pi^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \\ K^- \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^0 - \frac{1}{2}\eta \\ K^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

В рамках теории с унитарной симметрией взаимодействие должно быть инвариантным относительно преобразований (5.43)-(5.45). Отметим, что эти дискретные преобразования вместе с изотопическими вращениями исчерпывают всю унитарную группу. В работе Гелл-Манна^{/44/} рассматривалась также инвариантность относительно отражения через центр корневой диаграммы. Это свойство называется R -инвариантностью. Для R -отражения (в октетной модели) мы имеем

$$R \begin{pmatrix} \Upsilon \\ \omega \\ \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \\ \Lambda \\ \Xi^0 \\ \Xi^- \\ K^+ \\ K^0 \\ \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \\ \eta \\ \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Xi^- \\ \Xi^0 \\ -\Sigma^- \\ \Sigma^0 \\ -\Sigma^+ \\ \Lambda \\ \omega \\ -\Upsilon \\ -K^- \\ -\bar{K}^0 \\ -\pi^- \\ \pi^0 \\ -\pi^+ \\ \eta \\ K^0 \\ -K^+ \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$$R \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \\ \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \\ \eta \\ \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K^- \\ -\bar{K}^0 \\ -\pi^- \\ \pi^0 \\ -\pi^+ \\ \eta \\ K^0 \\ -K^+ \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

§ 2. Унитарная симметрия и соотношения между амплитудами
мезон-барионного рассеяния

Теперь мы установим соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов (5.1а,в)-(5.14) как следствия унитарной симметрии. Эти соотношения можно получить с помощью трех различных методов. Первый метод основывается на указанном свойстве унитарной группы : задание изотопических инфинитезимальных операторов I_3 и операторов дискретных преобразований P_R и P_L эквивалентно заданию всей инвариантной группы. Это означает, что вся унитарная группа исчерпывается изотопической подгруппой и дискретными преобразованиями P_R и P_L . Поэтому можно получить все возможные следствия унитарной симметрии из изотопических соотношений (5.20)-(5.25) и инвариантности относительно дискретных преобразований (5.43)-(5.45). Во втором методе используются коэффициенты Клебша-Гордона. Этот метод заключается в следующем. Волновые функции начальных и конечных состояний рассматриваемых процессов являются произведениями неприводимых представлений унитарной группы. Эти произведения можно разложить на прямые суммы неприводимых представлений. Поэтому матричные элементы рассматриваемых процессов имеют вид линейных комбинаций матричных элементов S -матрицы между состояниями, осуществляющими неприводимые представления унитарной группы. Коэффициенты в этих комбинациях выражаются через коэффициенты Клебша-Гордона унитарной группы. Инвариантность взаимодействий относительно преобразований унитарной группы требует, чтобы матричные элементы между состояниями, принадлежащими неэквивалентным неприводимым представлениям, были равны нулю. Это существенно уменьшает число независимых амплитуд. В конечном счете матричные элементы рассматриваемых процессов выражаются через некоторые независимые амплитуды. Отсюда можно получить соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов. В третьем методе неприводимые представления унитарной группы рассматриваются как тензор 3 -спинорной алгебры. В то время как волновые функции частиц преобразуются как тензоры в унитарных преобразованиях, амплитуды должны быть инвариантными относительно этих преобразований. Поэтому амплитуды рассматриваемых процессов выражаются через некоторые независимые инвариантные амплитуды. Отсюда также можно получить все возможные соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов.

Теперь перейдем к установлению соотношений между амплитудами процессов (5.1а,в) - (5.14). Три указанных метода полностью эквивалентны друг другу. Здесь мы применяем второй метод. Рассмотрим сначала октетную модель. В этой модели волновые функции начальных и конечных состояний в процессах (5.1а,в)-(5.14) являются произведениями двух представлений $D^8(1,1)$. Эти произведения разлагаются на неприводимые представления следующим образом:

$$\mathcal{D}^{(1,1)} \times \mathcal{D}^{(1,1)} = \sim \mathcal{D}^{(2,2)} + \sim \mathcal{D}^{(1,1)}_a + \mathcal{D}^{(3,0)} + \mathcal{D}^{(0,3)} + \mathcal{D}^{(2,2)} \quad (5.48)$$

В рассматриваемом произведении имеются два представления $\mathcal{D}^{(1,1)}$. Для дальнейшего удобно выбрать эти представления таким образом, чтобы волновые функции одного из них были четными относительно R -отражения (5.46) и (5.47), а волновые функции другого - нечетными. Эти представления обозначим через $\mathcal{D}^{(1,1)}_s$ и $\mathcal{D}^{(1,1)}_a$. Инвариантность взаимодействий относительно унитарных преобразований требует, чтобы матричные элементы между состояниями, принадлежащими неэквивалентным неприводимым представлениям были равны нулю. Так как R -отражение не входит в группу, то матричные элементы между состояниями, одно из них принадлежит $\mathcal{D}^{(1,1)}_s$, а другое - $\mathcal{D}^{(1,1)}_a$, не равны нулю. Более того, из инвариантности относительно отражения времени следует, что матричный элемент с начальным состоянием $\mathcal{D}^{(1,1)}_s$ и конечным состоянием $\mathcal{D}^{(1,1)}_a$ равен матричному элементу с начальным состоянием $\mathcal{D}^{(1,1)}_a$ и конечным состоянием $\mathcal{D}^{(1,1)}_s$. Таким образом, матричные элементы рассматриваемых процессов выражаются через семь независимых амплитуд

$$\begin{aligned} T^{(00)} &= \langle \mathcal{D}^{(0,0)} | T | \mathcal{D}^{(0,0)} \rangle, \quad T^{(22)} = \langle \mathcal{D}^{(2,2)} | T | \mathcal{D}^{(2,2)} \rangle, \\ T^{(11)_s} &= \langle \mathcal{D}^{(1,1)}_s | T | \mathcal{D}^{(1,1)}_s \rangle, \quad T^{(11)_a} = \langle \mathcal{D}^{(1,1)}_a | T | \mathcal{D}^{(1,1)}_a \rangle, \\ T^{(11)_{sa}} &= \langle \mathcal{D}^{(1,1)}_s | T | \mathcal{D}^{(1,1)}_a \rangle = T^{(11)_{as}} = \langle \mathcal{D}^{(1,1)}_a | T | \mathcal{D}^{(1,1)}_s \rangle, \\ T^{(30)} &= \langle \mathcal{D}^{(3,0)} | T | \mathcal{D}^{(3,0)} \rangle, \quad T^{(03)} = \langle \mathcal{D}^{(0,3)} | T | \mathcal{D}^{(0,3)} \rangle, \quad (5.49) \\ &S = 1 + i T. \end{aligned}$$

Коэффициенты при этих независимых амплитудах могут быть вычислены с помощью коэффициентов Клебша-Гордона унитарной группы $^{1/44,145,154,156,157/}$ и даны в следующей таблице

Таблица I.

	(00)	(22)	(11) _s	(11) _a	(11) _{sa}	(11) _{as}	(30)	(03)
$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$	0	1/2	0	0	0	0	1/3	0
$\pi^- p \rightarrow \pi^- p$	0	1/5	3/10	1/6	-1/2√5	-1/2√5	1/6	1/6
$\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p$	0	-3/10√2	3/10√2	1/6√2	-1/2√10	-1/2√10	-1/3√2	1/6√2
$\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$	0	3/10√2	-3/10√2	-1/6√2	1/2√10	1/2√10	1/3√2	-1/6√2
$K^+ p \rightarrow K^+ p$	0	1	0	0	0	0	0	0
$K^- p \rightarrow K^- p$	1/8	7/40	1/5	1/3	0	0	1/12	1/12

$K_p^0 \rightarrow K_p^0$	0	1/2	0	0	0	0	0	1/2
$\bar{K}_p^0 \rightarrow \bar{K}_p^0$	0	1/5	3/10	1/6	1/2√5	1/2√5	1/6	1/6
$K_p^0 \rightarrow K_p^+ \pi$	0	1/2	0	0	0	0	0	-1/2
$K_p^0 \rightarrow \bar{K}_p^+ \pi$	1/8	-1/40	-1/10	1/6	-1/2√5	-1/2√5	-1/12	-1/12
$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$	0	1/2	0	0	0	0	-1/2	0
$K_p^0 \rightarrow \pi^+ \Sigma^+$	1/8	-1/40	-1/10	1/6	1/2√5	1/2√5	-1/12	-1/12
$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^0$	0	1/5	3/10	-1/6	-1/2√5	1/2√5	-1/6	-1/6
$\bar{K}_p^0 \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$	1/8	-1/40	-1/10	-1/6	1/2√5	-1/2√5	1/12	1/12
$\pi^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^0$	0	3/10√2	-3/10√2	1/6√2	1/2√10	-1/2√10	-1/3√2	1/6√2
$\bar{K}_p^0 \rightarrow \pi^+ \Sigma^0$	0	0	0	1/3√2	0	1/√10	-1/6√2	-1/6√2
$\pi^+ p \rightarrow K^0 \lambda$	0	√3/10√2	-√3/10√2	-1/2√6	√6/12√5	√6/4√5	0	1/2√6
$\bar{K}_p^0 \rightarrow \pi^+ \lambda$	0	-√3/5√2	3/5√2	0	1/√30	0	-1/2√6	1/2√6
$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^0$	0	7/20	3/20	-1/12	-1/4√5	1/4√5	-1/3	-1/12
$K_p^0 \rightarrow \pi^0 \Sigma^0$	1/8	-1/40	-1/10	0	1/2√5	0	0	0
$\pi^0 p \rightarrow K^+ \lambda$	0	√3/20	-√3/20	-√3/12	√3/12√5	√3/4√5	0	√3/12
$K_p^0 \rightarrow \pi^0 \lambda$	0	-√3/10	√3/10	0	1/2√15	0	-√3/12	√3/12
$\pi^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^+$	0	-3/10√2	3/10√2	-1/6√2	-1/2√10	1/2√10	1/3√2	-1/6√2
$\bar{K}_p^0 \rightarrow \pi^0 \Sigma^+$	0	0	0	1/3√2	0	1/√10	-1/6√2	-1/6√2
$\bar{K}_p^0 \rightarrow K^+ \Xi^0$	0	1/5	3/10	-1/6	1/2√5	-1/2√5	-1/6	-1/6
$K_p^0 \rightarrow K^0 \Xi^0$	1/8	-1/40	-1/10	-1/6	-1/2√5	1/2√5	1/12	1/12
$\bar{K}_p^0 \rightarrow K^+ \Xi^-$	1/8	7/40	1/5	-1/3	0	0	-1/12	-1/12

*) Часть этой таблицы была дана в работе /I45/. В настоящей таблице были исправлены некоторые неточности работы /I57/.

$$F_i^{1a, \lambda}(\lambda, t) + F_i^{6a, \lambda}(\lambda, t) = F_i^{3a, \lambda}(\lambda, t), \quad (5.50)$$

$$\sqrt{6} F_i^{9a, \lambda}(\lambda, t) - \sqrt{2} F_i^{2a, \lambda}(\lambda, t) = 2 \left[F_i^{7a, \lambda}(\lambda, t) - F_i^{5a, \lambda}(\lambda, t) \right], \quad (5.51)$$

$$\sqrt{3} F_i^{11a, \lambda}(\lambda, t) + \sqrt{2} F_i^{2a, \lambda}(\lambda, t) = F_i^{10a, \lambda}(\lambda, t) - F_i^{5a, \lambda}(\lambda, t) \quad (5.52)$$

$$F_i^{13a, \lambda}(\lambda, t) = F_i^{7a, \lambda}(\lambda, t). \quad (5.53)$$

Если имеет место R - инвариантность, то

$$\langle \mathcal{D}^8(1,1)_a | T | \mathcal{D}^8(1,1)_a \rangle = \langle \mathcal{D}^8(1,1)_a | T | \mathcal{D}^8(1,1)_a \rangle = 0, \quad (5.54)$$

$$\langle \mathcal{D}^{10}(3,0) | T | \mathcal{D}^{10}(3,0) \rangle = \langle \mathcal{D}^{10}(0,3) | T | \mathcal{D}^{10}(0,3) \rangle, \quad (5.55)$$

и мы получим ещё соотношения

$$F_i^{2a, \lambda}(\lambda, t) = F_i^{4a, \lambda}(\lambda, t), \quad (5.56)$$

$$F_i^{5a, \lambda}(\lambda, t) = F_i^{6a, \lambda}(\lambda, t), \quad (5.57)$$

$$F_i^{8a}(\lambda, t) - F_i^{8b}(\lambda, t) = F_i^{2b}(\lambda, t), \quad (5.58)$$

$$F_i^{9a}(\lambda, t) - F_i^{9b}(\lambda, t) = \sqrt{3} F_i^{2b}(\lambda, t), \quad (5.59)$$

$$F_i^{9a}(\lambda, t) - F_i^{9b}(\lambda, t) = \sqrt{3} \left[F_i^{8a}(\lambda, t) - F_i^{8b}(\lambda, t) \right], \quad (5.60)$$

$$F_i^{9a}(\lambda, t) + F_i^{9b}(\lambda, t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[F_i^{8a}(\lambda, t) + F_i^{8b}(\lambda, t) \right]. \quad (5.61)$$

Соотношения между амплитудами процессов с участием нуклонов и λ -гиперона в триплетной модели Сакаты с унитарной симметрией также можно получить аналогично. Для этих процессов волновые функции начальных и конечных состояний являются произведениями неприводимых представлений $\mathcal{D}^3(1,0)$ и $\mathcal{D}^1(1,1)$. Эти произведения разлагаются на неприводимые представления следующим образом

$$\mathcal{D}^3(1,0) \times \mathcal{D}^1(1,1) = \mathcal{D}^3(1,0) + \mathcal{D}^6(0,2) + \mathcal{D}^{15}(2,1) \quad (5.62)$$

Поэтому матричные элементы процессов мезон-барионного рассеяния с участием нуклонов и Λ -гиперонов в триплетной модели Сакаты с унитарной симметрией выражаются через независимые амплитуды

$$T^{(10)} = \langle \mathcal{D}^3(1,0) | T | \mathcal{D}^3(1,0) \rangle, \quad T^{(02)} = \langle \mathcal{D}^6(0,2) | T | \mathcal{D}^6(0,2) \rangle, \quad (5.63)$$

$$T^{(21)} = \langle \mathcal{D}^{15}(2,1) | T | \mathcal{D}^{15}(2,1) \rangle;$$

Коэффициенты при этих независимых амплитудах также можно вычислить с помощью коэффициентов Клебша-Гордона группы SU_3 . Они даны в следующей таблице^{*)}

Таблица II.

	(10)	(02)	(21)
$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$	0	0	1
$\pi^- p \rightarrow \pi^- p$	3/8	1/4	3/8
$\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p$	$3/8\sqrt{2}$	$1/4\sqrt{2}$	$-5/8\sqrt{2}$
$\pi^+ n \rightarrow \pi^+ n$	$-3/8\sqrt{2}$	$-1/4\sqrt{2}$	$5/8\sqrt{2}$
$K^+ p \rightarrow K^+ p$	0	0	1
$K^- p \rightarrow K^- p$	3/8	1/4	3/8
$K^0 p \rightarrow K^0 p$	0	1/2	1/2
$\bar{K}^0 p \rightarrow \bar{K}^0 p$	0	1/2	1/2
$K^+ n \rightarrow K^+ n$	0	-1/2	1/2
$K^- n \rightarrow K^- n$	-3/8	1/4	1/8
$\bar{K}^0 n \rightarrow \bar{K}^0 n$	-3/8	1/4	1/8
$\pi^+ p \rightarrow K^0 \Lambda$	-3/8	1/4	1/8
$\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda$	0	-1/2	1/2
$\pi^0 p \rightarrow K^+ \Lambda$	$-3/8\sqrt{2}$	$1/4\sqrt{2}$	$1/8\sqrt{2}$
$K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda$	0	$-1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{2}$

*) Настоящая таблица отличается от таблицы в работе /144/ знаком у некоторых коэффициентов.

$$F_i^{2a,b}(\lambda, t) = F_i^{3a,b}(\lambda, t), \quad (5.64)$$

$$F_i^{4a}(\lambda, t) = F_i^{4b}(\lambda, t), \quad (5.65)$$

$$F_i^{5a,b}(\lambda, t) = F_i^{3a,b}(\lambda, t). \quad (5.66)$$

Кроме этих соотношений имеют место ещё изотопические соотношения (5.20)-(5.25).

§ 3. Группа G_2 , семимерное зарядовое пространство и соотношения между амплитудами процессов мезон-барионного рассеяния

Модель сильных взаимодействий в семимерном зарядовом пространстве с группой симметрии G_2 была предложена в работе /42/. Группа G_2 является группой второго ранга с 14 параметрами. Два коммутирующих инфинитезимальных оператора обозначим через J_n , $n=1, 2$, 2 а двенадцать остальных - через $F_{\pm\alpha}$, $\alpha=1, 2, \dots, 6$. Коммутационные соотношения имеют вид /152/

$$[J_1, J_2] = 0, \quad [J_n, F_{\pm\alpha}] = \pm f_n^\alpha F_{\pm\alpha}, \quad (5.67)$$

где двухмерные векторы $\pm f_n^\alpha$ с компонентами $\pm f_1^\alpha$ и $\pm f_2^\alpha$, $\alpha=1, 2, \dots, 6$, называются корнями и выражаются на корневой диаграмме на рис. 3, и

$$[F_\alpha, F_{-\alpha}] = (f_n^\alpha J_n), \quad (5.68)$$

$$[F_\alpha, F_\beta] = N_{\alpha\beta} F_\gamma \quad \text{если} \quad f_n^\alpha + f_n^\beta = f_n^\gamma, \quad (5.69)$$

причем

$$N_{26} = N_{4-6} = N_{-24} = N_{2-1} = N_{31} = N_{-23} = N_{5-6} = N_{16} \\ = N_{-15} = N_{3-4} = N_{-54} = N_{-3-5} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ N_{15} = N_{3-5} = N_{-13} = \sqrt{2}.$$

(5.70)

Остальные коммутаторы равны нулю.

*Интересно отметить, что соотношения (5.64)-(5.66) можно получить очень просто из инвариантности относительно дискретных преобразований (5.43) и (5.45). Однако здесь мы следуем стандартному методу с коэффициентами Клебша-Гордона для того, чтобы показать, что соотношения (5.64)-(5.66) вместе с (5.20), (5.21) и (5.24) исчерпывают все возможные соотношения.

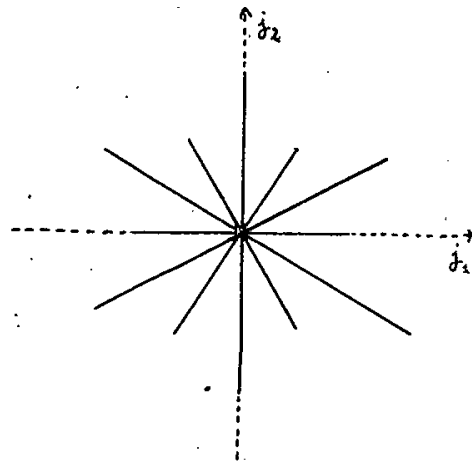


Рис. 3

Корневая диаграмма группы G_2 .

В случае группы G_2 мы также можем доказать следующее утверждение, аналогичное утверждению после формулы (5.41) для унитарной группы, а именно: Для некоторого неприводимого представления, если j_n является собственным значением J_n , то $j_n - 2f_n^\alpha (f_n^\alpha j_n) / (f_n^\alpha f_n^\alpha)$ также является собственным значением J_n (*). Таким образом, если выразить собственные векторы J_n в каждом неприводимом представлении с помощью векторов j_n на корневой диаграмме, то полученная диаграмма будет симметрична относительно прямых, перпендикулярных векторам-корням f_n^α . Однако эти векторы f_n^α ортогональны по паре. Поэтому распределение векторов собственного значения j_n симметрично относительно векторов-корней f_n^α . Из инвариантности взаимодействий относительно преобразований группы G_2 , в частности, следует инвариантность относительно отражений через оси, лежащие на векторах-корнях f_n^α .

Каждое неприводимое представление $\mathcal{D}^{\nu}(\lambda_1, \lambda_2)$ группы G_2 также характеризуется двумя числами λ_1 и λ_2 . Размерность неприводимого представления $\mathcal{D}^{\nu}(\lambda_1, \lambda_2)$ равна /152/

$$n(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{120} (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(2 + \lambda_1 + \lambda_2)(3 + \lambda_1 + 2\lambda_2)(4 + \lambda_1 + 3\lambda_2)(5 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2).$$

Например, $n(0,0) = 1$, $n(1,0) = 7$, $n(0,1) = 14$, $n(2,0) = 27$, $n(1,1) = 64$.

В модели с группой симметрии G_2 Λ -гиперон является синглетом, соответствующим одномерному представлению $\mathcal{D}^{\nu}(0,0)$, а все семь остальных барионов принадлежат мультиплету, соответствующему неприводимому представлению $\mathcal{D}^{\nu}(1,0)$, также как и семь мезонов. Классификация барионов и мезонов в рассматриваемой модели с группой симметрии G_2 дана на рис. 4а и 4в.

Теперь установим соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов. Поскольку Λ -гиперон является синглетом, то волновые функции конечных состояний в рассматриваемых процессах с участием Λ -гиперона (5.9а,в) и (5.11а,в) принадлежат представлению $\mathcal{D}^{\nu}(1,0)$

* Это свойство является общим свойством всех полупростых групп Ли /158/.

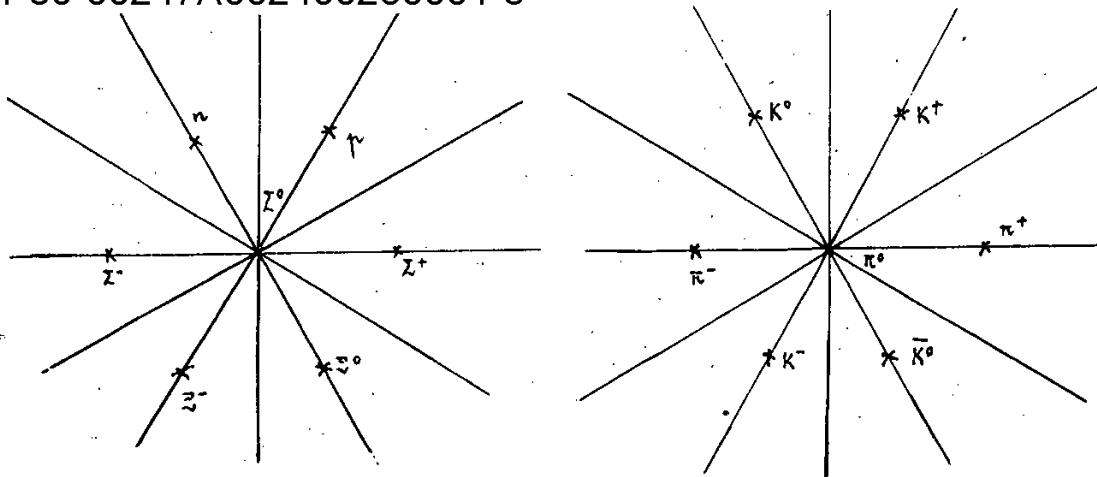


Рис. 4.

Классификация барионов и мезонов в теории с группой симметрии G_2 .

Волновые функции других состояний являются произведениями двух представлений $D^{\dagger}(4,0)$. Эти произведения разлагаются на неприводимые представления следующим образом

$$D^{\dagger}(4,0) \times D^{\dagger}(4,0) = D^{\dagger}(0,0) + D^{\dagger}(4,0) + D^{\dagger}(6,1) + D^{\dagger}(2,0) \quad (5.71)$$

Поэтому матричные элементы процессов с участием Λ -гиперона выражаются через одну и ту же амплитуду

$$\langle D^{\dagger}(4,0) | T | D^{\dagger}(4,0) \rangle \quad (5.72)$$

Они пропорциональны друг другу

$$F_i^{9a}(A,t) = - F_i^{9b}(A,t), \quad (5.73)$$

$$F_i^{11a}(A,t) = - F_i^{11b}(A,t). \quad (5.74)$$

Напомним, что между этими амплитудами имеет место изотопическое соотношение (5.24). Что касается амплитуд остальных рассматриваемых процессов, то они выражаются через четыре независимых амплитуды

$$T^{(00)} = \langle D^{\dagger}(0,0) | T | D^{\dagger}(0,0) \rangle, \quad T^{(40)} = \langle D^{\dagger}(4,0) | T | D^{\dagger}(4,0) \rangle, \quad (5.75)$$

$$T^{(01)} = \langle D^{\dagger}(0,1) | T | D^{\dagger}(0,1) \rangle, \quad T^{(20)} = \langle D^{\dagger}(2,0) | T | D^{\dagger}(2,0) \rangle.$$

Коэффициенты при этих независимых амплитудах можно вычислить с помощью коэффициентов Клебша-Гордона группы G_2 / I_{46} . Они даны в следующей таблице*

Таблица III.

	(00)	(10)	(01)	(20)
$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$	0	0	1/2	1/2
$\pi^- p \rightarrow \pi^- p$	0	1/3	1/6	1/2
$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ n$	0	1/3√2	-1/3√2	0
$\pi^- p \rightarrow \pi^- n$	0	-1/3√2	1/3√2	0
$K^+ p \rightarrow K^+ p$	0	0	0	1
$K^- p \rightarrow K^- p$	1/7	1/6	1/3	5/14
$K^0 p \rightarrow K^0 p$	0	0	1/2	1/2
$\bar{K}^0 p \rightarrow \bar{K}^0 p$	0	1/3	1/6	1/2
$K^0 p \rightarrow K^+ n$	0	0	-1/2	1/2
$K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$	1/7	-1/6	1/6	-1/7
$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$	0	0	1/2	-1/2
$K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+$	-1/7	1/6	-1/6	1/7
$\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$	0	1/3	1/6	-1/2
$K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-$	-1/7	-1/6	1/6	1/7
$\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^0$	0	-1/3√2	1/3√2	0
$\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0$	0	1/3√2	-1/3√2	0
$\pi^0 p \rightarrow K^+ \Sigma^0$	0	1/6	1/3	-1/2
$K^- p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0$	-1/7	0	0	1/7
$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+$	0	1/3√2	-1/3√2	0
$\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+$	0	-1/3√2	1/3√2	0
$\bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Xi^0$	0	1/3	1/6	-1/2
$K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0$	-1/7	-1/6	1/6	1/7
$K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-$	1/7	-1/6	-1/3	5/14

*) Часть этой таблицы была дана в работе /146/.

Из этой таблицы мы получим следующие соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов

$$F_i^{1a,b}(\lambda, t) = F_i^{2a,b}(\lambda, t), \quad (5.76)$$

$$F_i^{5a,b}(\lambda, t) = - F_i^{6a,b}(\lambda, t), \quad (5.77)$$

$$F_i^{8a,b}(\lambda, t) = - F_i^{2a,b}(\lambda, t), \quad (5.78)$$

$$F_i^{7a,b}(\lambda, t) = F_i^{13a,b}(\lambda, t), \quad (5.79)$$

$$F_i^{1a,b}(\lambda, t) - F_i^{7b,a}(\lambda, t) = F_i^{3b,a}(\lambda, t). \quad (5.80)$$

Кроме этих соотношений имеют место ещё изотопические соотношения (5.20)–(5.25). Отметим, что соотношения (5.76)–(5.79) можно получить из инвариантности относительно указанных дискретных преобразований.

§ 4. Соотношения между сечениями и поляризациями

Теперь мы установим соотношения между сечениями рассматриваемых процессов и между поляризациями в этих процессах. Рассмотрим сначала следствия унитарной симметрии в октетной модели с R -инвариантностью. Из соотношений (5.53) и (5.57) следуют равенства между дифференциальными сечениями /I45 - I47/

$$\frac{d\sigma(\bar{\pi}^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-)}{dt} = \frac{d\sigma(\bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Xi^0)}{dt} = 2 \frac{d\sigma(K^0_2 p \rightarrow K^+ \Xi^0)}{dt}, \quad (5.81)$$

$$\frac{d\sigma(K^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-)}{dt} = \frac{d\sigma(K^+ p \rightarrow K^0 \Xi^0)}{dt}, \quad (5.82)$$

$$\frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+)}{dt} = \frac{d\sigma(K^0_2 p \rightarrow K^+ n)}{dt} = 2 \frac{d\sigma(K^0_2 p \rightarrow K^+ n)}{dt}, \quad (5.83)$$

$$\frac{d\sigma(K^+ p \rightarrow \bar{K}^0 n)}{dt} = \frac{d\sigma(K^+ p \rightarrow \pi^- \Sigma^+)}{dt}. \quad (5.84)$$

Как было сказано, амплитуды процессов (5.4а') и (5.4 в') равны амплитудам процессов (5.4а) и (5.4в) соответственно. Поэтому из (5.56) следуют равенства между дифференциальными и полными сечениями /I45, I47/

$$\frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)}{dt} = \frac{d\sigma(K^+ n \rightarrow K^+ n)}{dt}, \quad (5.85)$$

$$\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p) = \sigma_{tot}(K^{\pm}n) \quad (5.86)$$

Между поляризациями барионов в процессах в соотношениях (5.81)-(5.85) также имеют место аналогичные равенства.

Если применять полученные в главе II асимптотические соотношения между амплитудами перекрёстных процессов

$$F_i^{j^*}(\lambda, t) \approx e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{j^*}(\lambda, t)^*, \quad i=1,2, \quad j=1,2, \dots, 13, \quad (5.87)$$

то мы можем получить ещё другие асимптотические соотношения^{/159/}. Действительно, в силу

(5.56) соотношения (5.18) и (5.19) можно переписать в виде:

$$F_i^{*c}(\lambda, t) = \frac{1}{2} [F_i^{1a}(\lambda, t) + F_i^{1b}(\lambda, t)], \quad (5.88)$$

$$F_i^{*d}(\lambda, t) = \frac{1}{2i} [F_i^{1a}(\lambda, t) - F_i^{1b}(\lambda, t)]. \quad (5.89)$$

Подставляя (5.87) в эти соотношения, мы получим

$$F_i^{*c}(\lambda, t) \approx \frac{1}{2} [F_i^{1a}(\lambda, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{1a}(\lambda, t)^*], \quad (5.90)$$

$$F_i^{*d}(\lambda, t) \approx \frac{1}{2i} [F_i^{1a}(\lambda, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{1a}(\lambda, t)^*]. \quad (5.91)$$

Соотношения (5.90) и (5.91) показывают, что

$$|F_i^{1a}(\lambda, t)|^2 \approx |F_i^{*c}(\lambda, t)|^2 + |F_i^{*d}(\lambda, t)|^2,$$

$$\operatorname{Re} F_i^{1a}(\lambda, t) F_i^{1a}(\lambda, t)^* \approx \operatorname{Re} F_i^{*c}(\lambda, t) F_i^{*c}(\lambda, t)^* + \operatorname{Re} F_i^{*d}(\lambda, t) F_i^{*d}(\lambda, t)^*$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sigma(\pi^{\pm}p \rightarrow \pi^{\pm}p)}{dt} \approx \frac{d\sigma(K_2^{\circ}p \rightarrow K_2^{\circ}p)}{dt} + \frac{d\sigma(K_2^{\circ}p \rightarrow K_1^{\circ}p)}{dt} \quad (5.92)$$

Отметим также, что из (5.20) и (5.89) следует соотношение

$$F_i^{*d}(\lambda, t) = \frac{1}{2i} F_i^{2b}(\lambda, t) \quad (5.93)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sigma(K_2^{\circ}p \rightarrow K_1^{\circ}p)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma(\pi^{\pm}p \rightarrow \pi^{\pm}n)}{dt} \quad (5.94)$$

Кроме полученных равенств, из (5.50)-(5.61) можно получить ряд неравенств треугольника между сечениями рассматриваемых процессов. Мы не будем останавливаться на получении

нии этих неравенств. Рассмотрим другие следствия (5.50)-(5.61). В силу (5.87) соотношение (5.58) имеет вид

$$F_i^{2b}(\lambda, t) \approx F_i^{2a}(\lambda, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{2a}(\lambda, t)^* \quad (5.95)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{2b}(\lambda, t) \right] &= 0 \\ \operatorname{Im} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{2b}(\lambda, t) \right] &= 2 \operatorname{Im} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{2a}(\lambda, t) \right]. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Из (5.96) и выражения для дифференциальных сечений следует асимптотическое неравенство

$$\frac{dG(\pi p \rightarrow k^0 \Sigma^0)}{dt} \gtrsim \frac{1}{4} \frac{dG(\pi p \rightarrow \pi^0 n)}{dt} \quad (5.97)$$

Аналогично, из (5.59) следует

$$\frac{dG(\pi p \rightarrow k^0 \lambda)}{dt} \gtrsim \frac{3}{4} \frac{dG(\pi p \rightarrow \pi^0 n)}{dt} \quad (5.98)$$

Из соотношений (5.60) и (5.61) мы также можем получить некоторые простые неравенства. В силу (5.87) эти соотношения можно переписать следующим образом

$$F_i^{2a}(\lambda, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{2a}(\lambda, t)^* \approx \sqrt{3} \left[F_i^{2a}(\lambda, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{2a}(\lambda, t)^* \right], \quad (5.99)$$

$$F_i^{2a}(\lambda, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{2a}(\lambda, t)^* \approx -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[F_i^{2a}(\lambda, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{2a}(\lambda, t)^* \right]. \quad (5.100)$$

Из этих соотношений и выражения для дифференциальных сечений следует, что

$$\frac{dG^{2a}(\lambda, t)/dt}{dG^{2a}(\lambda, t)/dt} \approx \frac{3 + \frac{1}{3} \frac{G}{E}}{1 + \frac{G}{E}} \quad (5.101)$$

где

$$G = A_1^{2a} \left[\operatorname{Im} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_1^{2a}(\lambda, t) \right]^2 + A_2^{2a} \left[\operatorname{Im} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_2^{2a}(\lambda, t) \right]^2 \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned} &+ A_{12}^{2a} \left[\operatorname{Im} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_1^{2a}(\lambda, t) \right] \left[\operatorname{Im} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_2^{2a}(\lambda, t) \right], \\ E = &A_1^{2a} \left[\operatorname{Re} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_1^{2a}(\lambda, t) \right]^2 + A_2^{2a} \left[\operatorname{Re} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_2^{2a}(\lambda, t) \right]^2 \\ &+ A_{12}^{2a} \left[\operatorname{Re} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_1^{2a}(\lambda, t) \right] \left[\operatorname{Re} e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_2^{2a}(\lambda, t) \right], \end{aligned} \quad (5.103)$$

а кинематические коэффициенты A_1^{2a} , A_2^{2a} и A_{12}^{2a} определяются формулами (2.23). Отношение G/E может меняться от 0 до ∞ . Поэтому из (5.101) следует, что

$$\frac{1}{3} \lesssim \frac{dG(\pi p \rightarrow k^0 \Sigma^0)/dt}{dG(\pi p \rightarrow k^0 \lambda)/dt} \lesssim 3. \quad (5.104)$$

Теперь изучаем следствия унитарной симметрии в триплетной модели Сакаты. Из равенства (5.64) следует, что

$$\frac{d\sigma(\pi^+p \rightarrow \pi^+p)}{dt} = \frac{d\sigma(K^+p \rightarrow K^+p)}{dt}, \quad (5.105)$$

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+p) = \sigma_{\text{tot}}(K^+p). \quad (5.106)$$

Аналогично, из (5.66) мы получим

$$\frac{d\sigma(K^0p \rightarrow K^0p)}{dt} = \frac{d\sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \pi^+\lambda)}{dt} \quad (5.107)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\sigma(K_2^0p \rightarrow K_2^0p)}{dt} = \frac{d\sigma(K_2^0p \rightarrow \pi^+\lambda)}{dt}, \quad (5.108)$$

и

$$\frac{d\sigma(K^-p \rightarrow \bar{K}^0n)}{dt} = \frac{d\sigma(\bar{K}^-p \rightarrow K^0\lambda)}{dt} \quad (5.109)$$

Из (5.18), (5.19) и (5.65) следует, что

$$F_i^{*c}(\lambda, t) = F_i^{*a'}(\lambda, t) = F_i^{*b'}(\lambda, t), \quad (5.110)$$

$$F_i^{*d}(\lambda, t) = 0 \quad (5.111)$$

Таким образом, в модели Сакаты с унитарной симметрией процессы перезарядки нейтральных K-мезонов запрещены

$$\frac{d\sigma(K_2^0p \rightarrow K_1^0p)}{dt} = 0, \quad (5.112)$$

а сечения рассеяния K_2^0 -мезона на протоне и K^+ -мезонов на нейтроне равны между собой

$$\frac{d\sigma(K_2^0p \rightarrow K_2^0p)}{dt} = \frac{d\sigma(K^+n \rightarrow K^+n)}{dt} = \frac{d\sigma(K^-n \rightarrow K^-n)}{dt}, \quad (5.113)$$

$$\sigma_{\text{tot}}(K_2^0p) = \sigma_{\text{tot}}(K^+n) = \sigma_{\text{tot}}(K^-n) \quad (5.114)$$

Боле того, подставляя (5.65) в (5.87), мы получим

$$F_i^{ka', b'}(s, t) \approx e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{ka', b'}(s, t)^* \quad (5.115)$$

Из этого соотношения и выражения для поляризации следует, что поляризации нейтронов отдачи в процессах (5.4a) и (5.4b) должны стремиться к нулю при $s \rightarrow \rho$ и фиксированном t

$$P(k^{\pm n} \rightarrow k^{\pm n}) = 0 \quad (5.116)$$

Рассмотрим, наконец, модель с группой симметрии G_2 . Соотношения (5.73) и (5.87) дают

$$F_i^{ga, b}(s, t) \approx e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{ga, b}(s, t)^* \quad (5.117)$$

Отсюда следует, что поляризации λ -гиперонов в процессах (5.9a) и (5.9b) должны стремиться к нулю при фиксированном t и $s \rightarrow \rho$:

$$P(\pi^{\pm} p \rightarrow k^{\circ} \lambda) \approx P(k^{\circ} p \rightarrow \pi^{\pm} \lambda) \approx 0 \quad (5.118)$$

Аналогично

$$P(k^{\pm} p \rightarrow \pi^{\circ} \lambda) \approx 0 \quad (5.119)$$

Соотношение (5.76) совпадает с (5.56). Поэтому в случае модели с группой симметрии G_2 имеют место (5.85), (5.86), (5.92) и (5.94). Из (5.78) следует, что

$$\frac{d\sigma(\pi^{\pm} p \rightarrow k^{\circ} \Sigma^{\circ})}{dt} = \frac{d\sigma(\pi^{\pm} p \rightarrow \pi^{\circ} n)}{dt} \quad (5.120)$$

а из (5.77) и (5.79) мы также получим (5.81)-(5.84). Отметим, что многие следствия симметрии с группой G_2 совпадают с следствиями унитарной симметрии в октетной модели.

Мы получили некоторые асимптотические соотношения между дифференциальными сечениями рассматриваемых процессов мезон-барионного рассеяния и между поляризациями в этих процессах как следствия высших симметрий сильных взаимодействий. Мы также установили некоторые соотношения между полными сечениями без использования теоремы Померанчука. В дальнейшем мы ещё получим некоторые другие асимптотические соотношения для полных сечений и поляризаций. По поводу соотношений между дифференциальными сечениями мы теперь сделаем одно замечание. Кроме полученных выше соотношений можно получить некоторые другие соотношения, исходя из изотопической инвариантности. Так, например, согласно (5.22) и (5.24) мы имеем:

$$\frac{d\sigma(k_1^+ p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0)}{dt} = \frac{d\sigma(k_2^+ p \rightarrow \pi^0 \Sigma^+)}{dt}, \quad (5.121)$$

$$\frac{d\sigma(k_2^+ p \rightarrow \pi^+ \Lambda)}{dt} = \frac{d\sigma(k_1^+ p \rightarrow \pi^+ \Lambda)}{dt}. \quad (5.122)$$

Поляризации барионов в процессах (5.121) или (5.122) также равны соответственно. Из изотопических соотношений (5.20)-(5.25) нетрудно получить некоторые неравенства треугольника между сечениями рассматриваемых процессов. Кроме того, соотношения (5.20) и (5.25) вместе с (5.87) дают асимптотические неравенства

$$\frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)}{dt} \geq \frac{1}{2} \frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n)}{dt}, \quad (5.123)$$

$$\frac{d\sigma(k_1^+ p \rightarrow K^0 \Sigma^0)}{dt} \geq \frac{1}{4} \frac{d\sigma(k_1^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+)}{dt}. \quad (5.124)$$

Напомним, что если полные сечения и дифференциальные сечения рассеяния вперед ведут себя как некоторые степени $\ln s$ или стремятся к постоянным пределам при $s \rightarrow \infty$, то имеет место асимптотическое равенство

$$\left[\frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n)}{dt} \right]_{t \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(\pi^+ p)]^2. \quad (5.125)$$

Кроме того, из (5.21) и теоремы Померанчука следует асимптотическое неравенство

$$|\sigma_{tot}(k_1^+) - \sigma_{tot}(k_2^+)| \leq \left[16\pi \frac{d\sigma(k_1^+ p \rightarrow k_2^+ n)}{dt} \right]_{t \rightarrow \infty}^{1/2}. \quad (5.126)$$

Теперь установим асимптотические соотношения между полными сечениями. Для этого рассмотрим амплитуду рассеяния вперед. Предположим, что $\alpha(\infty) = 1$, т.е. полные сечения и дифференциальные сечения вперед ведут себя как некоторые степени $\ln s$ или стремятся к постоянным пределам при $s \rightarrow \infty$, и что мнимые части амплитуд растут (или убывают) не медленнее (не быстрее, соответственно) действительных частей. В этом случае из (5.87) следует асимптотическое равенство мнимых частей амплитуд перекрестных процессов

$$\text{Im } F_i^{j^a}(s_0) \approx \text{Im } F_i^{j^b}(s_0). \quad (5.127)$$

Рассмотрим, например, триплетную модель Сакаты с унитарной симметрией. Как было сказано, в этом случае матричные элементы процессов с участием нуклонов и Λ -гиперона выражаются через три амплитуды (5.63), т.е. инвариантные амплитуды $F_i^{j^a}(s, t)$ рассматриваемых процессов выражаются через три унитарных амплитуды $F_i^{(10)}(s, t)$, $F_i^{(02)}(s, t)$ и $F_i^{(22)}(s, t)$ с коэффициентами, данными в таблице П. Из асимптотических соотношений (5.127) и этой таблицы следует с помощью тривиальных алгебраических преобразований, что мнимые части всех

$$\operatorname{Im} F_i^{(10)}(s, 0) \approx \operatorname{Im} F_i^{(02)}(s, 0) \approx \operatorname{Im} F_i^{(21)}(s, 0). \quad (5.128)$$

Из этого асимптотического соотношения и таблицы II следует, что мнимые части амплитуд всех упругих процессов при $s \rightarrow \infty$ равны между собой, а амплитуды неупругих процессов (с перезарядкой) действительны при $s \rightarrow \infty$. В случае октетной модели с унитарной симметрией и модели с группой симметрии G_2 также справедливо аналогичное утверждение.

Таким образом, во всех рассматриваемых моделях для частиц в одном и том же мультиплете справедливо асимптотическое равенство мнимых частей амплитуд всех процессов упругого рассеяния вперед. Мнимые части амплитуд процессов с перезарядкой равны нулю при $s \rightarrow \infty$. Отсюда, в частности, следует асимптотическое равенство всех полных сечений взаимодействий

$$\sigma_{tot}(\pi^+ p) \approx \sigma_{tot}(K^+ p) \approx \dots \approx \sigma_{tot}(m\beta). \quad (5.129)$$

Однако, отсюда нельзя сделать заключения о равенстве дифференциальных сечений без дополнительных предположений относительно действительных частей.

Рассмотрим, наконец, асимптотические свойства поляризации. Для этой цели асимптотические соотношения (5.87) для амплитуд перекрестных процессов перепишем в виде

$$e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{ja}(s, t) \approx e^{-\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{jb}(s, t)^* \approx \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{jb}(s, t) \right]^*, \quad (5.130)$$

отсюда следует, что

$$\operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{ja}(s, t) \right] \approx \operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{jb}(s, t) \right]. \quad (5.131)$$

В рассматриваемых моделях $F_i^{ja, b}(s, t)$ выражается через амплитуды (5.49), (5.63) или (5.75), а $e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{ja, b}(s, t)$ выражаются через эти амплитуды, умноженные на $e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}}$, с коэффициентами, данными в таблицах I, II или III. Из (5.131) и данных таблиц следует, например, что в триплетной модели Сакаты с унитарной симметрией имеет место асимптотическое равенство

$$\operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{(10)}(s, t) \right] \approx \operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{(02)}(s, t) \right] \approx \operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_i^{(21)}(s, t) \right]. \quad (5.132)$$

В частном случае $t=0$, $\alpha(0)=1$, это соотношение сводится к (5.128). Аналогичные *) Этот результат также был получен в недавней работе Ридера и Смита /160/.

асимптотические соотношения также можно получить в других моделях. Отсюда следует, что во всех рассматриваемых моделях с высшими симметриями действительные части функций $e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_{\alpha, \beta}^{\gamma}(s, t)$ для процессов с перезарядкой стремятся к нулю (по сравнению с мнимыми частями) при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t :

$$\operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}} F_{\alpha, \beta}^{\gamma}(s, t) \right] \approx 0 \quad \text{для процессов перезарядки.} \quad (5.133)$$

Если $\alpha(s) = 1$, то (5.133) означает, что амплитуды неупругих процессов действительны при $s \rightarrow \infty$. Из (5.133) и выражения для поляризации следует, что для процессов с перезарядкой поляризации барионов (с неполяризованными начальными барионами), а также параметры лево-правой асимметрии, стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t . Кроме того, из (5.133) следует, что в (5.101) отношение E/G стремится к нулю, и, следовательно, в (5.104) мы имеем равенство

$$\frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^0)}{dt} = \frac{1}{3} \frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Lambda)}{dt} \quad (5.134)$$

§ 5. Унитарная симметрия и асимптотические свойства амплитуд фоторождения странных частиц

Теперь перейдем к установлению асимптотических соотношений для амплитуд фоторождения странных частиц в моделях с унитарной симметрией. Мы будем рассматривать электромагнитное взаимодействие в первом порядке. Полученные ниже соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов являются следствиями инвариантности сильных взаимодействий относительно дискретного преобразования P_L , определяемого формулами (5.35) и (5.43)-(5.45). В этом преобразовании электромагнитный ток переходит в себя. Отсюда, в частности, следует, что в триплетной модели Сакаты с унитарной симметрией имеет место равенство между сечениями^{/144/}

$$\frac{d\sigma(\gamma p \rightarrow \pi^+ n)}{dt} = \frac{d\sigma(\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda)}{dt} \quad (5.135)$$

В главе IV были получены асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов фоторождения мезона на барионе. Из этих соотношений и свойств симметрии можно получить некоторые асимптотические соотношения для поляризационных эффектов ряда процесса.

Рассмотрим сначала модель Сакаты с унитарной симметрией. В этом случае амплитуды процессов

$$\gamma + n \rightarrow K^+ \Lambda \quad (5.136)$$

$$u \quad \gamma + \lambda \rightarrow \bar{K}^0 + n$$

(5.137)

равны между собой, поскольку эти процессы превращаются друг в друга при отражении P_c , определяемом формулами (5.35) и (5.43)–(5.45). С другой стороны, они являются перекрёстными процессами, и их инвариантные амплитуды связаны между собой асимптотическими соотношениями (4.35). Отсюда следует, что эти амплитуды удовлетворяют асимптотическим соотношениям (4.36). Напомним, что (4.36) есть асимптотические соотношения для амплитуд процессов, переходящих в себя в перекрёстном преобразовании. Как было показано в главе IV, для этих процессов имеет место следующее асимптотическое соотношение между поляризацией $P(\delta, t)$ бариона в конечном состоянии при неполяризованном начальном барионе и параметром асимметрии $\gamma(\delta, t)$ при поляризованном барионе в начальном состоянии

$$P(\delta, t) \approx -\gamma(\delta, t). \quad (5.138)$$

Таким образом, в модели Сакаты с унитарной симметрией имеет место асимптотическое соотношение (5.138) для процесса (5.136).

Аналогично в октетной модели с унитарной симметрией равны между собой амплитуды процессов

$$\gamma + p \rightarrow K^0 + \Sigma^+ \quad (5.139)$$

$$u \quad \gamma + \Sigma^+ \rightarrow \bar{K}^0 + p. \quad (5.140)$$

С другой стороны, процессы в этой паре являются перекрёстными. Поэтому для них и, в частности, для процесса (5.139) также имеет место асимптотическое соотношение (5.138).

Г Л А В А У I
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ ПЕРЕКРЁСТНЫХ
ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИИ

Введение

В настоящей главе полученные в главе II асимптотические соотношения между амплитудами перекрёстных процессов проверяются в теории возмущений. Эти соотношения были установлены на основе общих принципов локальной теории поля при некотором предположении о росте амплитуд. Матричные элементы в каждом порядке теории возмущений, конечно, удовлетворяют этим условиям. Однако асимптотическое равенство между сечениями рассеяния частицы и античастицы на первый взгляд не очевидно. Поэтому проверка асимптотических соотношений между амплитудами этих процессов не является тривиальной.

Действительно, в низшем порядке теории возмущений, например, амплитуды рассеяния электрона и позитрона на μ^+ -мезоне равны между собой по величине и имеют разные знаки. В высших порядках имеются диаграммы, вклады которых в матричные элементы рассеяния частицы и античастицы одинаковы как по величине, так и по знаку. Это диаграммы с четными числами фотонов. Поэтому два ряда теории возмущений для амплитуд рассеяния частицы и античастицы вообще не совпадают друг с другом. Мы покажем, что при фиксированном t и $\lambda \rightarrow 0$ амплитуды рассеяния частицы и античастицы в каждом порядке теории возмущений действительно удовлетворяют асимптотическим соотношениям, полученным в главе II*¹). Из рассмотрения матричных элементов конкретных диаграмм мы также выведем некоторые заключения о скорости стремления к общему пределу модулей амплитуд рассеяния частицы и античастицы в каждом порядке.

Из указанного примера видно, что желательно рассмотреть электромагнитное рассеяние заряженных частиц. Поскольку наше рассмотрение имеет методическое значение, мы предположим (для того чтобы избежать инфракрасную катастрофу), что фотон имеет малую, но конечную массу λ . Ясно, что это предположение не является существенным, поскольку зависимость амплитуды рассеяния от λ факторизуется, если λ мало по сравнению со всеми остальными переменными (массами частиц, энергий, передачей импульса и т.д.), а именно $|16I|$.

*¹) Конечно отсюда нельзя вывести никакого заключения относительно асимптотических соотношений для полных амплитуд рассеяния-сумм рядов теории возмущений, так как в настоящее время ещё открыт вопрос о равномерной сходимости этих рядов.

$$M(p_2, q_2; p_1, q_1) = e^{\alpha B(s, u, t; m_\pi, \lambda)} M_\pi(p_2, q_2; p_1, q_1)$$

причем $B(s, u, t; m_\pi, \lambda)$ - известная функция, $\alpha = e^2/4\pi$. Зависимость от λ устраняется при вычислении сечений, если учитывать неупругие процессы с испусканием мягких фотонов, а соотношения между регуляризованными амплитудами $M_\pi(p_2, q_2; p_1, q_1)$ можно получить из соотношений между амплитудами $M(p_2, q_2; p_1, q_1)$.

§ I. Бозон-фермионное рассеяние

В качестве первого примера мы рассмотрим упругое рассеяние заряженного фермиона и его античастицы на заряженном бозоне, например,

$$\mu^- + \pi^+ \rightarrow \mu^- + \pi^+ \quad (6.1)$$

и

$$\mu^+ + \pi^- \rightarrow \mu^+ + \pi^- \quad (6.2)$$

Для простоты предположим, что эти частицы принимают участие только в электромагнитных взаимодействиях. Если μ^- -мезон и π^+ -мезон рассматриваются как частицы с зарядами $-e$ и $+e$, то лагранжиан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{L} = ie A_\mu \psi^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi - e^2 A_\mu A_\mu \psi^\dagger \psi - ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (6.3)$$

где A_μ , ψ и $\bar{\psi}$ - операторы электромагнитного поля, поля π^+ -мезона и поля μ^- -мезона, соответственно. При изучении процесса (6.2) также можно воспользоваться лагранжианом (6.3), но при этом состояния μ^+ -мезонов как античастиц описываются волновыми функциями с отрицательной энергией v , связанными с волновыми функциями положительной энергии u преобразованием зарядового сопряжения

$$v = C \bar{u}^T.$$

Однако для нашей цели удобно сделать заранее преобразование зарядового сопряжения в лагранжиане и рассматривать μ^+ -мезон как частицу с зарядом $+e$, описываемую оператором поля

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T.$$

При этом лагранжиан взаимодействия имеет вид:

$$\mathcal{L} = ie A_\mu \psi^c \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi - e^2 A_\mu A_\mu \psi^c \psi + ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (6.4)$$

Из лагранжианов (6.3) и (6.4) нетрудно видеть, что для рассматриваемых процессов

матричные элементы диаграмм с обменом нечетными числами фотонов (рис. 5) имеют одинаковую величину и разные знаки, а матричные элементы диаграмм с обменом четными числами фотонов (рис. 6) для этих процессов равны между собой как по величине, так и по знаку.

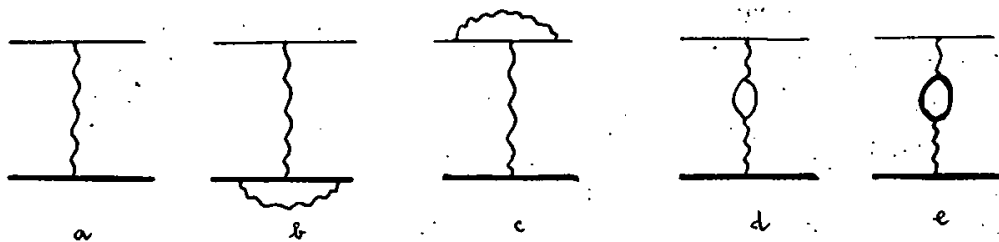


Рис. 5.

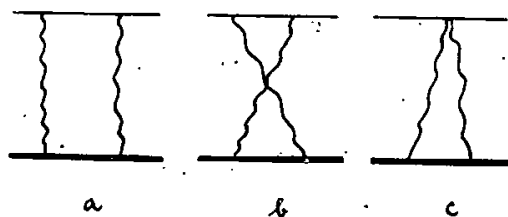


Рис. 6.

Обозначим через M массу фермиона, а через m - массу бозона, через p_1 и q_1 4-импульсы фермиона (или антифермиона) и бозона в начальных состояниях, а через p_2 и q_2 - те же величины в конечных состояниях. Из общих соображений следует, что матричные элементы рассматриваемых процессов имеют вид

$$M^J(p_1, q_1; p_2, q_2) = F_1^J(s, t) + i \frac{q_1 + q_2}{2} F_2^J(s, t),$$

$$s = -(p_1 + q_1)^2, \quad u = -(p_1 - q_2)^2, \quad t = -(p_1 - p_2)^2, \quad (6.5)$$

$J = I, II$ для процессов (6.1) и (6.2), соответственно.

Как было сказано в главе II, обе инвариантные амплитуды $F_i^J(s, t)$ дают вклад в асимптотику сечений при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t , если $F_1^J(s, t)$ и $s F_2^J(s, t)$ ведут себя одинаково. В этом случае из условия перекрёстной симметрии и теоремы Фрагмена-Линделёфа следует, что при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t имеют место следующие асимптотические соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов (6.1) и (6.2).

$$F_i^I(s, t) \approx e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{II}(s, t)^* \quad (6.6)$$

ариантных амплитуд не дает вклада в асимптотику сечений, то достаточно рассматривать только остальную. Мы покажем, что асимптотические соотношения (6.6) удовлетворяются во втором и четвертом порядках теории возмущений несмотря на то, что для процессов (6.1) и (6.2) матричные элементы диаграмм с нечетными числами фотонов противоположны по знаку, а матричные элементы диаграмм с четными числами фотонов равны между собой.

Во втором порядке по константе e мы имеем

$$\left[F_1^I(\lambda, t) \right]_2 = 0, \quad \left[F_2^I(\lambda, t) \right]_2 = \frac{2e^2}{t}, \quad (6.7)$$

$$\left[F_1^{II}(\lambda, t) \right]_2 = 0, \quad \left[F_2^{II}(\lambda, t) \right]_2 = -\frac{2e^2}{t}. \quad (6.8)$$

Функция F_2^J ведет себя как λ при $\lambda \rightarrow 0$ и фиксированном t . Поэтому $\alpha(t) = 1$. Амплитуды (6.7) и (6.8) вещественны. Очевидно, что соотношения (6.6) удовлетворяются.

Теперь рассмотрим диаграммы четвертого порядка. Как было сказано, матричные элементы диаграмм с обменом одним фотоном (рис. 5в-5е) для рассматриваемых процессов одинаковы по величине и противоположны по знаку. Поэтому равенство между сечениями процессов (6.1) и (6.2) при учете этих диаграмм очевидно. Однако полезно отметить, что эти матричные элементы не имеют мнимых частей, и если они дают вклад в асимптотику, т.е. $\alpha(t) = 1$, то соотношения (6.6) удовлетворяются. Если α было бы меньше единицы, то рассматриваемые диаграммы не дали бы вклада в асимптотику, и ими можно было бы пренебречь. Конкретное рассмотрение показывает, что для этих диаграмм действительно $\alpha(t) = 1$.

Вычислим матричные элементы диаграмм четвертого порядка с обменом двумя фотонами (рис. 6а-6с). Мы имеем

$$T_{4a} = \frac{e^4}{i(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\bar{u}(p_2) [\hat{q}_1 + \hat{q}_2 + \hat{k}] [i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - M] (\hat{q}_1 + \hat{k}) u(p_1)}{(k^2 - 2k p_1) (k^2 + 2k q_1) (k^2 + \lambda^2) [(k-q)^2 + \lambda^2]}, \quad (6.9)$$

$$T_{4b} = \frac{e^4}{i(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\bar{u}(p_2) [\hat{q}_1 + \hat{q}_2 - \hat{k}] [i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - M] (\hat{q}_2 - \hat{k}) u(p_1)}{(k^2 - 2k p_1) (k^2 - 2k q_2) (k^2 + \lambda^2) [(k-q)^2 + \lambda^2]}, \quad (6.10)$$

$$T_{4c} = \frac{2e^4}{i(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\bar{u}(p_2) \gamma_\mu [i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - M] \gamma_\mu u(p_1)}{(k^2 - 2k p_1) (k^2 + \lambda^2) [(k-q)^2 + \lambda^2]}, \quad (6.11)$$

$$q = p_1 - p_2 = q_2 - q_1$$

После некоторых преобразований можно переписать (6.9)-(6.11) в виде:

$$T_{4a} = \frac{e^4}{16\pi^2} \bar{u}(p_2) \left\{ i(\hat{q}_1 + \hat{q}_2) [4p_1 q_1 J - G^9 - 2\hat{J}\hat{q}_1] + i [4p_1 q_1 \hat{J} - \hat{G}^9 - 2\hat{q}_1 F] \right\} u(p_1), \quad (6.12)$$

$$T_{4b} = \frac{e^4}{16\pi^2} \bar{u}(p_2) \left\{ i(\hat{q}_1 + \hat{q}_2) [4p_1 q_2 J' + G^9 - 2\hat{J}'\hat{q}_2] - i [4p_1 q_2 \hat{J}' + \hat{G}^9 - 2\hat{q}_2 F'] \right\} u(p_1), \quad (6.13)$$

$$T_{4c} = \frac{e^4}{4\pi^2} \bar{u}(p_2) [M G^\dagger - i \hat{G}^\dagger] u(p_1). \quad (6.14)$$

В соотношениях (6.12)-(6.14) имеются некоторые интегралы Фейнмана. Для удобства при записи этих интегралов мы используем следующие обозначения

$$(p_1) = k^2 - 2k p_1, \quad (q_1) = k^2 + 2k q_1, \quad (o) = k^2 + \lambda^2, \quad (q) = (k-q)^2 + \lambda^2. \quad (6.15)$$

При этом мы имеем

$$(J, J_\alpha) = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{(1, k_\alpha)}{(p_1)(q_1)(o)(q)},$$

$$F = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{1}{(p_1)(q_1)(q)}, \quad H = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{1}{(p_1)(q_1)(o)},$$

$$(G^\dagger, G_\alpha^\dagger) = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{(1, k_\alpha)}{(p_1)(o)(q)}, \quad (G^9, G_\alpha^9) = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{(1, k_\alpha)}{(q_1)(o)(q)}, \quad (6.16)$$

а J' , J'_α , F' и H' получаются из (6.16) заменой $q_1 \rightarrow -q_2$. Вычисляя эти интегралы, мы можем показать, что $F = H$, $F' = H'$; F и H зависят только от s и, следовательно, F' и H' зависят только от u . Что касается остальных интегралов, то G^\dagger и G^9 зависят только от t , G_α^\dagger и G_α^9 имеют вид:

$$G_\alpha^\dagger = A^\dagger p_{1\alpha} + B^\dagger q_{1\alpha}, \quad G_\alpha^9 = A^9 q_{1\alpha} + B^9 q_{2\alpha}, \quad (6.17)$$

где $A^{\dagger 9}(t)$ и $B^{\dagger 9}(t)$ также зависят только от t , а

$$J = -\frac{z}{\sqrt{t(t-\lambda^2)}} \ln \frac{\sqrt{-t} - \sqrt{\lambda^2 - t}}{\sqrt{-t} + \sqrt{\lambda^2 - t}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{[\lambda - (M+m)^2][\lambda - (M-m)^2]}} \ln \frac{\sqrt{(M-m)^2 - \lambda} + \sqrt{(M+m)^2 - \lambda}}{\sqrt{(M-m)^2 - \lambda} - \sqrt{(M+m)^2 - \lambda}}, \quad (6.18)$$

$$J_a = a(p_1 - q_1)_x + b(p_1 + q_1)_x + c q_x, \quad (6.19)$$

$$J'_a = a'(p_1 + q_1)_x + b'(p_1 - q_1)_x + c' q_x, \quad (6.20)$$

$$a = \frac{\lambda [tJ + 2F - G^{\uparrow} - G^{\downarrow}] + (m^2 - M^2)(G^{\uparrow} - G^{\downarrow})}{2[(m^2 - M^2)^2 - \lambda \lambda]}, \quad (6.21)$$

$$b = \frac{(m^2 - M^2)[tJ + 2F - G^{\uparrow} - G^{\downarrow}] + \lambda(G^{\uparrow} - G^{\downarrow})}{2[(m^2 - M^2)^2 - \lambda \lambda]}, \quad (6.22)$$

$$c + a = \frac{J}{2}, \quad (6.23)$$

J' , a' , b' и c' получаются из J , a , b и c , соответственно, заменой $\lambda \leftrightarrow \mu$.

Подставляя выражения (6.17), (6.19) и (6.20) в (6.9)-(6.11), мы получим вклады диаграмм ба-бс в амплитуды $F_2^J(\lambda, t)$

$$[F_1^J(\lambda, t)]_{4a} = \frac{e^q}{16\pi^2} 4M(\lambda - M^2)(a + b), \quad (6.24)$$

$$[F_1^J(\lambda, t)]_{4b} = \frac{e^q}{16\pi^2} 4M(a - M^2)(a' + b'), \quad (6.25)$$

$$[F_1^J(\lambda, t)]_{4c} = \frac{e^q}{16\pi^2} 4M(G^{\uparrow} + A^{\uparrow}), \quad (6.26)$$

$$[F_2^J(\lambda, t)]_{4a} = \frac{e^q}{16\pi^2} \left\{ 4(M^2 + m^2 - \lambda)J - 2G^{\uparrow} - A^{\uparrow} - 2F + 2(3\lambda - 5m^2 - M^2)a + 2(\lambda + m^2 + M^2)b - \text{etc.} \right\}, \quad (6.27)$$

$$[F_2^J(\lambda, t)]_{4\ell} = -\frac{e^4}{16\pi^2} \left\{ 4(M^2 + m^2 - u) J' - 2G^1 - A^1 - 2F' + 2(3u - 5m^2 - M^2) a' + 2(u + m^2 + M^2) \ell' - 2tc' \right\}, \quad (6.28)$$

$$[F_2^J(\lambda, t)]_{4c} = 0 \quad (6.29)$$

Отметим, что при $\lambda \rightarrow \infty$ функция $F(\lambda)$ ведет себя как $\frac{m^2}{\lambda} \left(\ln \frac{\lambda}{m^2} \right)^2$. Из этой оценки и выражений (6.18)–(6.23) для коэффициентов, входящих в (6.24)–(6.28), можно показать, что $[F_1^J(\lambda, t)]_{4a}$, $[F_1^J(\lambda, t)]_{4\ell}$ и $[F_2^J(\lambda, t)]_{4c}$ стремятся к постоянным при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t , т.е. не дают вклада в асимптотику сечений, а $[F_2^J(\lambda, t)]_{4a}$ и $[F_2^J(\lambda, t)]_{4\ell}$ ведут себя как $\ln \frac{\lambda}{m^2}$, т.е. могут давать вклад. Однако в сумме $[F_2^J(\lambda, t)]_{4a} + [F_2^J(\lambda, t)]_{4\ell}$ старшие члены в выражениях (6.27) и (6.28) сокращают друг друга, и действительная часть этой суммы ведет себя как $\frac{m^2}{\lambda} \ln \frac{\lambda}{m^2}$, а мнимая часть — как постоянная.

Таким образом, при достаточно больших λ ($\frac{\lambda}{m^2} \gg \ln \frac{\lambda}{m^2}$) матричный элемент диаграмм с обменом двумя фотонами чисто мнимый. Для этого матричного элемента $\kappa = 1$ и асимптотические соотношения (6.6) удовлетворяются.

§ 2. Фермион-фермионное рассеяние

Теперь рассмотрим рассеяние фермиона и его античастицы на фермионе. Для простоты мы будем рассматривать случай рассеяния различных фермионов, например, μ^+ -мезонов на электро-троне:

$$\mu^+ e^- \rightarrow \mu^+ e^-, \quad (6.30)$$

$$\mu^+ e^- \rightarrow \mu^+ e^-. \quad (6.31)$$

Случай рассеяния одинаковых фермионов, например, электрона и позитрона на электро-троне, также можно рассматривать. Этот случай будет сложнее, но все общие заключения, сделанные ниже для процессов (6.30) и (6.31), также справедливы и для этого случая.

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, нетрудно показать, что матричные элементы диаграмм с обменом одним фотоном (рис. 5) для рассматриваемых процессов равны по величине и противоположны по знаку, а матричные элементы диаграмм с обменом двумя фотонами (рис. 6а–6в) для этих процессов равны между собой.

Из соображений инвариантности следует, что матричные элементы рассматриваемых процессов имеют вид:

$$T^J(p_1, q_1; p_2, q_2) = \int_{ic}^c \bar{u}(p_2) \Gamma_i^{(f)}(q) u(p_1) \bar{u}(q_2) \Gamma_i^{(e)}(p) u(q_1) F_i^J(\lambda, t), \quad (6.32)$$

где \hat{p}_1 и \hat{p}_2 - 4-импульсы μ^\pm -мезонов до и после рассеяния, \hat{q}_1 и \hat{q}_2 - 4-импульсы электрона, $J = I$ и II для процессов (6.30) и (6.31), соответственно,

$$\Gamma_i^{(I)}(p) = \left\{ 1, \gamma_4, \gamma_5, 1, i\hat{p}, i\hat{p} \right\}, \quad (6.33)$$

$$\Gamma_i^{(II)}(q) = \left\{ 1, \gamma_4, \gamma_5, i\hat{q}, i\hat{q}, 1 \right\}, \quad (6.34)$$

$$\hat{p} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad \hat{q} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

Соотношения перекрёстной симметрии имеют вид:

$$F_i^I(u, t) = (-1)^{i+1} F_i^{II}(s, t)^* \quad (6.35)$$

Массы μ^\pm -мезона и электрона обозначим через M и m , соответственно. Дифференциальное сечение равно

$$\frac{dG^J(s, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s q^2} \left\{ \sum_i A_i |F_i^J(s, t)|^2 + \sum_{i \neq j} A_{ij} \operatorname{Re} F_i^J(s, t) F_j^J(s, t)^* \right\}, \quad (6.36)$$

где \ast

$$\begin{aligned} A_1 &= (4M^2 - t)(4m^2 - t), \\ A_2 &= 2 \left[(s - M^2 - m^2)^2 + (u - M^2 - m^2)^2 + 2(M^2 + m^2)t \right], \\ A_3 &= t^2, \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{4} (4m^2 - t) \left[(s - u)^2 - t(t - 4M^2) \right], \\ A_5 &= \frac{1}{16} \left[(s - u)^2 - t(t - 4M^2) \right] \left[(s - u)^2 - t(t - 4m^2) \right], \\ A_6 &= \frac{1}{4} (4M^2 - t) \left[(s - u)^2 - t(t - 4m^2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= 8mM(s - u), & A_{14} &= 2M(u - s)(4m^2 - t), \\ A_{15} &= 2mM(u - s), & A_{16} &= 2m(u - s)(4M^2 - t), \\ A_{24} &= -2m \left[(s - u)^2 - t(t - 4M^2) \right], & A_{25} &= \frac{1}{2}(s - u) \left[(s - u)^2 - t^2 + 4t(m^2 + M^2) \right], \\ A_{26} &= -2M \left[(s - u)^2 - t(t - 4m^2) \right], & A_{25} &= \frac{1}{4} m(u - s) \left[(s - u)^2 - t(t - 4m^2) \right], \\ A_{36} &= 2mM(u - s)^2, & A_{56} &= \frac{1}{4} M(u - s) \left[(s - u)^2 - t(t - 4M^2) \right]. \end{aligned}$$

Из выражений (6.36) и (6.37) для сечений следует, что все инвариантные амплитуды будут давать вклад в асимптотику сечений, если функции

\ast) Остальные A_{ij} равны нулю.

$$F_1^J(\lambda, t), \lambda F_2^J(\lambda, t), F_3^J(\lambda, t), \lambda F_4^J(\lambda, t), \lambda^2 F_5^J(\lambda, t) \text{ и } \lambda F_6^J(\lambda, t).$$

ведут себя одинаково при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t . В этом случае при некоторой допустимой функции $\varphi(\lambda, t)$ имеют конечные пределы при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t функции

$$\frac{F_1^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)}, \frac{\lambda F_2^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)}, \frac{F_3^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)}, \frac{\lambda F_4^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)}, \frac{\lambda^2 F_5^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)} \text{ и } \frac{\lambda F_6^J(\lambda, t)}{\varphi(\lambda, t)}.$$

Применяя теорему Фрагмена-Липделёфа к этим функциям и используя соотношения перекрёстной симметрии (6.35), мы получим асимптотические соотношения между инвариантными амплитудами рассматриваемых процессов

$$F_i^I(\lambda, t) \approx e^{-i\pi\alpha(t)} F_i^{\bar{II}}(\lambda, t)^* \quad (6.38)$$

Если некоторые инвариантные амплитуды не дают вклада, то достаточно рассматривать остальные, для которых имеют место асимптотические соотношения (6.38) с некоторым $\alpha(t)$.

Теперь мы проверим соотношения (6.38) во втором и четвертом порядке теории возмущений. Во втором порядке мы имеем

$$[F_2^I(\lambda, t)]_2 = -\frac{e^2}{t}, \quad [F_i^I(\lambda, t)]_2 = 0, \quad i \neq 2, \quad (6.39)$$

$$[F_2^{\bar{II}}(\lambda, t)]_2 = \frac{e^2}{t}, \quad [F_i^{\bar{II}}(\lambda, t)]_2 = 0, \quad i \neq 2. \quad (6.40)$$

В данном случае мы имеем $\alpha(t) = 1$. Очевидно, что амплитуды (6.39) и (6.40) удовлетворяют асимптотическим соотношениям (6.38). Аналогично, в четвертом порядке диаграммы с вершинной частью и поляризацией вакуума (рис. 5в - 5е) также имеют противоположные по знаку матричные элементы, удовлетворяющие (6.38). Поэтому достаточно рассматривать диаграммы с обменом двумя фотонами (рис. 6а и 6в). Матричные элементы этих диаграмм равны

$$T_{4a} = \frac{e^4}{i(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - 2k p_1)(k^2 + 2k q_1)(k^2 + \lambda^2)[(k-q)^2 + \lambda^2]} \quad (6.41)$$

$$\bar{u}(q_2) \gamma_\alpha [i(\hat{q}_1 + \hat{k}) - m] \gamma_\beta u(q_1) \cdot \bar{u}(p_2) \gamma_\alpha [i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m] \gamma_\beta u(p_1),$$

$$i^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - 2k p_1) (k^2 - 2k p_2) (k^2 + \lambda^2) [(k - q')^2 + \lambda^2]}$$

$$\bar{u}(q_1) \delta_{\alpha} [i(\hat{q}_1 - \hat{k}) - m] \delta_p u(q_1) \cdot \bar{u}(p_2) \delta_p [i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m] \delta_{\alpha} u(p_1), \quad (6.42)$$

$$q' = p_1 - p_2 = q_1 - q_2.$$

В соотношениях (6.41) и (6.42) имеются интегралы J , J_{α} из (6.16), $J_{\alpha p}$,

$$J_{\alpha p} = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{k_{\alpha} k_p}{(p_1)(q_1)(0)(q')}, \quad (6.43)$$

и интегралы J' , J'_{α} и $J'_{\alpha p}$, полученные из J , J_{α} и $J_{\alpha p}$ заменой $q_1 \leftrightarrow -q_2$.
 При вычислении интегралов $J'_{\alpha p}$ и J'_{α} нужно знать интегралы (6.16), а также

$$F_{\alpha} = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{k_{\alpha}}{(p_1)(q_1)(q')}, \quad H_{\alpha} = \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \frac{k_{\alpha}}{(p_1)(q_1)(0)} \quad (6.44)$$

и соответствующие интегралы с заменой $q_1 \leftrightarrow -q_2$.

Можно провести все вычисления в общем случае $m \neq M$. Однако для простоты мы изложим только результаты, относящиеся к случаю $m = M$, но сделанные ниже выводы справедливы и в общем случае. Если $m = M$, то мы имеем

$$G^{\Gamma} = G^{\eta} = G(t), \quad G^{\Gamma}_{\alpha} = A(t) p_{1\alpha} + B(t) q'_{\alpha}, \quad G^{\eta}_{\alpha} = -A(t) q_{1\alpha} + B(t) q'_{\alpha}, \quad (6.45)$$

$$J_{\alpha} = a (p_1 - q_1)_{\alpha} + c q'_{\alpha}, \quad (6.46)$$

$$a = -\frac{1}{2\alpha} [tJ + 2F(s) - 2G(t)], \quad c + a = \frac{J}{2}, \quad (6.47)$$

$$H_{\alpha} = D(s) (p_1 - q_1)_{\alpha}, \quad F_{\alpha} = D(s) \cdot (p_2 - q_2) + F(s) q'_{\alpha}, \quad (6.48)$$

$$J_{\alpha p} = I_0 \delta_{\alpha p} + I_1 (p_1 + q_1)_{\alpha} (p_1 + q_1)_p + I_2 (p_1 - q_1)_{\alpha} (p_1 - q_1)_p \quad (6.49)$$

$$+ I_3 [(p_1 - q_1)_{\alpha} q'_p + (p_1 - q_1)_p q'_{\alpha}] + I_4 q'_{\alpha} q'_p,$$

$$\begin{aligned}
 I_0 &= - \left[\frac{\lambda - 4M^2}{2u} F(\lambda) + \frac{t}{2u} A(t) + \frac{t}{u} B(t) + \frac{\lambda - 4M^2}{4u} t J \right], \quad I_1 = \frac{2I_0 - A(t)}{2u}, \\
 I_2 &= \frac{A(t) - t\alpha - 2D(\lambda) + 2I_0}{2u}, \quad I_3 = \frac{(4M^2 - \lambda)c + 2D(\lambda) - A(t) - 2I_0}{2u}, \\
 I_4 &= \frac{(4M^2 - \lambda)c + 2F(\lambda) - 4D(\lambda) - 2B(t)}{2u} + (4M^2 - \lambda) \frac{2D(\lambda) - F(\lambda) + 2I_0}{2tu}.
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

Подставляя выражения (6.45)–(6.50) в матричные элементы (6.41) и (6.42), мы получим вклады диаграмм 6а и 6в в инвариантные амплитуды рассматриваемых процессов (6.30) и (6.31)

$$\begin{aligned}
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_1^J(\lambda, t)]_{4a} &= 4M^2 \left[a + \frac{2M^2 - \lambda}{t} (I_2 - I_1) \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_2^J(\lambda, t)]_{4a} &= \frac{4}{t} \left[(2M^2 - \lambda) F(\lambda) + (2M^2 - \lambda) I_0 + \frac{4\lambda}{2} (I_1 - I_2) \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_3^J(\lambda, t)]_{4a} &= -2M^2 \left[I_2 + 2I_3 + I_4 + \frac{F(\lambda) - I_0}{t} \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_4^J(\lambda, t)]_{4a} &= \frac{16\pi^2}{e^4} [F_6^J(\lambda, t)]_{4a} = 2M \left[-a + \frac{4M^2}{t} I_1 + 2 \frac{t - 2M^2}{t} I_2 \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_5^J(\lambda, t)]_{4a} &= 4 \left[2c + \frac{2M^2 - \lambda}{t} (I_2 - I_1) + \frac{2}{t} (F(\lambda) - I_0) \right];
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_1^J(\lambda, t)]_{4b} &= 4M^2 \left[a' + \frac{2M^2 - u}{t} (I'_2 - I'_1) \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_2^J(\lambda, t)]_{4b} &= -\frac{4}{t} \left[(2M^2 - u) F(u) + (2M^2 - u) I'_0 + \frac{4u}{2} (I'_1 - I'_2) \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_3^J(\lambda, t)]_{4b} &= -2M^2 \left[I'_2 + 2I'_3 + I'_4 + \frac{F(u) - I'_0}{t} \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_4^J(\lambda, t)]_{4b} &= \frac{16\pi^2}{e^4} [F_6^J(\lambda, t)]_{4b} = -2M \left[-a' + \frac{4M^2}{t} I'_1 + 2 \frac{t - 2M^2}{t} I'_2 \right], \\
 \frac{16\pi^2}{e^4} [F_5^J(\lambda, t)]_{4b} &= 4 \left[2c' + \frac{2M^2 - u}{t} (I'_2 - I'_1) + \frac{2}{t} (F(u) - I'_0) \right],
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

где a', c', I'_i получаются из (6.47) и (6.50), соответственно, заменой $\lambda \leftrightarrow u$.

При больших λ и u мы имеем

$$D(\delta) = \frac{2M^2}{\sqrt{\delta(\delta-4M^2)}} \ln \frac{\sqrt{-\delta} + \sqrt{4M^2-\delta}}{2M}, \quad D(u) = \frac{2M^2}{\sqrt{u(u-4M^2)}} \ln \frac{\sqrt{-u} + \sqrt{4M^2-u}}{2M}, \quad (6.53)$$

$$F(\delta) = \frac{2M^2}{\sqrt{\delta(\delta-4M^2)}} \left[\left(\ln \frac{\sqrt{-\delta} + \sqrt{4M^2-\delta}}{2M} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right],$$

$$F(u) = \frac{2M^2}{\sqrt{u(u-4M^2)}} \left[\left(\ln \frac{\sqrt{-u} + \sqrt{4M^2-u}}{2M} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \right]. \quad (6.54)$$

Из полученных выражений можно показать, что при $\delta \rightarrow \infty$ и фиксированном t дают вклад в асимптотику сечений только $[F_2^J(\delta, t)]_A$ и $[F_5^J(\delta, t)]_B$. Для этих амплитуд мы имеем асимптотические выражения

$$\frac{16\pi^4}{e^4} [F_2^J(\delta, t)]_{Aa} \approx -\frac{4\delta}{t} F(\delta) + \frac{t-4M^2}{t} A(t) - \frac{1}{2} G(t) + \frac{2\delta}{t} D(\delta),$$

$$\frac{16\pi^4}{e^4} [F_2^J(\delta, t)]_{Ab} \approx \frac{4u}{t} F(u) - \frac{t-4M^2}{t} A(t) + \frac{1}{2} G(t) - \frac{2u}{t} D(u), \quad (6.55)$$

и

$$\frac{16\pi^4}{e^4} [F_5^J(\delta, t)]_{Aa} \approx 4J + \frac{6}{2} G(t) - 2 \frac{t-4M^2}{t\delta} A(t) - \frac{4}{t} D(\delta) + \frac{8}{t} F(\delta),$$

$$\frac{16\pi^4}{e^4} [F_5^J(\delta, t)]_{Ab} \approx 4J' + \frac{6}{u} G(t) - 2 \frac{t-4M^2}{tu} A(t) - \frac{4}{t} D(u) + \frac{8}{t} F(u). \quad (6.56)$$

Из (6.53) и (6.54) нетрудно видеть, что старшие члены в (6.55), а также в (6.56), сокращают друг друга. Вклады обеих диаграмм 6a и 6b в инвариантные амплитуды равны

$$[F_2^J(\delta, t)]_{Aa, b} \approx \frac{e^4}{2\pi} \frac{1}{t} \left[2i \ln \frac{\delta}{M^2} + \pi \right], \quad (6.57)$$

$$[F_5^J(\delta, t)]_{Aa, b} \approx \frac{e^4}{\pi} \frac{1}{t\delta} \left[2i \ln \frac{\delta}{M^2} + \pi \right]. \quad (6.58)$$

При больших δ ($\ln \frac{\delta}{M^2} \gg 1$) эти выражения чисто мнимы и удовлетворяют асимптотическим соотношениям (6.38).

Таким образом, мы проверили асимптотические соотношения (6.38) во втором и четвертом порядках теории возмущений. Для рассматриваемых процессов (6.30) и (6.31) матричные элементы диаграмм с обменом одним фотоном имеют равные величины и противоположные знаки^{*}). Они вещественны и удовлетворяют (6.38) с $\alpha(t) = 1$. Что касается матричных элементов диаграмм с обменом двумя фотонами, то они равны между собой для процессов (6.30) и (6.31). Однако, при больших s и фиксированном t они чисто мнимы и соотношениям (6.38) также удовлетворяют. Из этого примера мы также видели, что асимптотические соотношения (6.38) имеют место в каждом порядке теории возмущений только при очень высоких энергиях, когда $\ln \frac{s}{M^2} \gg 1$.

^{*}) В четвертом порядке для каждой инвариантной амплитуды $F_A^J(s,t)$ и $F_T^J(s,t)$ диаграммы с обменом двумя фотонами дают существенные вклады. Однако в выражении для сечения вклады этих диаграмм случайно сокращают друг друга.

Г Л А В А У П.

ЗАКЛЮЧЕНИЯ И ОБСУЖДЕНИЯ

§ I. Сводка результатов

Теперь мы резюмируем полученные результаты. Основываясь на основных принципах локальной квантовой теории поля и на некотором общем предположении о поведении амплитуд рассеяния при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t , мы получили асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов. Из этих соотношений для амплитуд можно установить ряд асимптотических соотношений между дифференциальными и полными сечениями, а также между поляризациями, параметрами асимметрии и т.д.

ГЛАВА I. Метод доказательства подробно изложен в главе I. В этой главе, как пример, были рассмотрены перекрестные процессы рассеяния скалярных частиц

$$a_1 + b_2 \rightarrow a_2 + b_1 \quad (I)$$

и

$$\bar{a}_2 + b_1 \rightarrow \bar{a}_1 + b_2 \quad (II)$$

Эти процессы характеризуются инвариантными амплитудами $T^I(\lambda, t)$ и $T^{II}(\lambda, t)$, связанными между собой соотношением перекрестной симметрии. Если при фиксированном t и $\lambda \rightarrow \infty$ эти амплитуды не осциллируют, а имеют определенный (степенной или логарифмический) рост, то из теоремы Фрагмена-Линделёфа и соотношения перекрестной симметрии следует асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями рассматриваемых процессов (I) и (II).

В случае упругого рассеяния это асимптотическое равенство можно получить из более слабых предположений. В этом случае имеется основание предполагать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t , принадлежащем некоторому интервалу, мнимые части $\text{Im} T^J(\lambda, t)$, деленные на модули амплитуды, стремятся к неотрицательным пределам. При этом предположении доказано, что если дифференциальные сечения процессов (I) и (II) не осциллируют, а имеют определенный рост при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном t , то эти дифференциальные сечения асимптотически равны друг другу.

Кроме асимптотического равенства дифференциальных сечений, для амплитуд упругого рассеяния вперед имеется ряд других асимптотических соотношений. Например, если при $\lambda \rightarrow \infty$ дифференциальные сечения упругого рассеяния вперед ($t=0$) и полные сечения

взаимодействия стремятся к постоянным значениям, то эти полные сечения взаимодействия для частицы и античастицы равны между собой. Это известная теорема Померанчука. Отметим, что асимптотическое равенство между полными сечениями можно доказать при более слабых предположениях. Действительно, достаточно предполагать, что при $s \rightarrow \infty$ полные сечения взаимодействия стремятся к постоянным, а дифференциальные сечения рассеяния вперед ограничены^{/60/}. Более того, в этом случае амплитуды упругого рассеяния вперед для процессов, переходящих в себя в перекрестном преобразовании, (т.е. амплитуды упругого рассеяния вперед истинно нейтральных части) чисто мнимы и между дифференциальным сечением на нулевом угле и полным сечением имеет место асимптотическое соотношение

$$\left. \frac{d\sigma(s,t)}{dt} \right|_{t=0} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(s)]^2 \quad (7.1)$$

Отметим, что в доказательстве указанных асимптотических соотношений играет существенную роль основной постулат локальной теории поля, согласно которому при $s \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости s амплитуды рассеяния возрастают не быстрее некоторого полинома. То обстоятельство, что в локальной теории поля формфакторы $F_i(t)$ полиномиально ограничены в комплексной плоскости t , также позволяет сделать некоторое заключение относительно поведения формфакторов $F_i(t)$ при $t \rightarrow \pm \infty$. Если при $t \rightarrow \pm \infty$ эти формфакторы не осциллируют, а имеют определенный рост, то модули отношений $F_i(t)/F_i(-t)$ стремятся к единице. В частном случае, когда $F_i(t)$ стремятся к постоянным $F_i(\infty)$, то на положительной оси мнимые части стремятся к нулю и можно написать дисперсионные соотношения в виде:

$$F_i(t) = F_i(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_t^{\infty} \frac{\text{Im} F_i(t')}{t' - t} dt', \quad \text{Im} f(\infty) = 0 \quad (7.2)$$

ГЛАВА II. В главе II были изучены асимптотические соотношения между амплитудами перекрестных процессов рассеяния частиц со спином: мезон-барионного и барион-барионного рассеяния. Кроме аналитичности и полиномиальной ограниченности амплитуд рассеяния в комплексной плоскости s при фиксированном t , в этой главе предполагается, что имеет место инвариантность взаимодействий относительно дискретных преобразований P , C и T . Из полученных асимптотических соотношений между инвариантными амплитудами перекрестных процессов были установлены асимптотические равенства между дифференциальными сечениями этих процессов при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t , между полными сечениями взаимодействия частицы и античастицы, а также некоторые асимптотические соотношения между поляризациями и параметрами асимметрии.

В частности, было показано, что при больших энергиях и фиксированной передаче импульса имеют место асимптотические равенства между дифференциальными сечениями процессов в каждой из следующих пар

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \quad \text{и} \quad \pi^- p \rightarrow \pi^- p, \quad (7.3)$$

$$K^+ p \rightarrow K^+ p \quad \text{и} \quad K^- p \rightarrow K^- p, \quad (7.4)$$

$$\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+ \quad \text{и} \quad K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+, \quad (7.5)$$

$$\pi^- p \rightarrow K^+ \lambda \quad \text{и} \quad \bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \lambda, \quad (7.6)$$

$$K^+ p \rightarrow K^0 \Xi^0 \quad \text{и} \quad \bar{K}^0 p \rightarrow K^+ \Xi^0, \quad (7.7)$$

$$\Sigma^+ He \rightarrow p + He_\lambda \quad \text{и} \quad \bar{p} + He \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + He_\lambda, \quad (7.8)$$

$$p + p \rightarrow p + p \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \rightarrow \bar{p} + p, \quad (7.9)$$

$$\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p \quad \text{и} \quad \bar{\Sigma}^+ p \rightarrow \bar{\Sigma}^+ p, \quad (7.10)$$

$$\Sigma^- p \rightarrow \lambda + n \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^- + n, \quad (7.11)$$

$$\Sigma^+ p \rightarrow p + \Sigma^+ \quad \text{и} \quad \bar{p} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + \Sigma^+, \quad (7.12)$$

$$\Sigma^- p \rightarrow n + \lambda \quad \text{и} \quad \bar{n} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^- + \lambda \quad (7.13)$$

Во всех этих процессах t определяется как переданный импульс между первой частицей в начальном состоянии и первой частицей в конечном состоянии. Для последних процессов (7.12) и (7.13) эта передача импульса часто обозначается через u . Здесь имеет место асимптотическое равенство между дифференциальным сечением рассеяния гиперона назад и дифференциальным сечением аннигиляции пары нуклон-антинуклон на пару гиперон-антигиперон.

Если полные сечения взаимодействия стремятся к постоянным при $s \rightarrow \infty$, а дифференциальные сечения упругого рассеяния вперед ограничены, то имеют место асимптотические равенства между полными сечениями взаимодействия частиц и античастиц

$$\sigma_{tot}(\pi^+p) \approx \sigma_{tot}(\bar{\pi}^+p), \quad (7.14)$$

$$\sigma_{tot}(K^+p) \approx \sigma_{tot}(K^-p), \quad (7.15)$$

$$\sigma_{tot}(pp) \approx \sigma_{tot}(\bar{p}p), \quad (7.16)$$

$$\sigma_{tot}(\Sigma^+p) \approx \sigma_{tot}(\bar{\Sigma}^+p). \quad (7.17)$$

В этом случае между дифференциальным сечением процесса

$$K_{2^+}^0 p \rightarrow K_{2^+}^0 p \quad (7.18)$$

и полным сечением взаимодействия K_2^0 -мезона с протоном имеет место асимптотическое равенство (7.1)

$$\left. \frac{d\sigma(K_{2^+}^0 p \rightarrow K_{2^+}^0 p)}{dt} \right|_{t \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(K_{2^+}^0 p)]^2. \quad (7.19)$$

Кроме того, процессы упругого рассеяния π -мезонов на нуклоне также были рассмотрены с учетом изотопической инвариантности сильных взаимодействий. В этом случае если дифференциальные сечения рассматриваемых процессов стремятся к постоянным или ведут себя как некоторая степень $\ln s$, то амплитуда процесса перезарядки

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n \quad (7.20)$$

должна быть действительной в асимптотике. Более того, если мнимая и действительная части амплитуды процессов (7.3) имеют одинаковое поведение, то амплитуда процесса (7.20) равна действительной части амплитуды первого процесса (7.3), умноженной на $\sqrt{2}$. Отсюда следует асимптотическое равенство

$$\left[\frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^0 n)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)}{dt} \right]_{t \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(\pi^+ p)]^2. \quad (7.21)$$

Между поляризациями и параметрами асимметрии в рассматриваемых процессах также были получены некоторые асимптотические соотношения. Если протоны в начальных состояниях неполяризованы, то поляризации барионов отдачи в процессах каждой из пар (7.3)-(7.7) равны по величине и противоположны по знаку, независимо от четностей частиц (для неупругих процессов). Параметры асимметрии в соответствующих процессах (7.3)-(7.7) с поля-

CIA-RDP80-00247A002400260001-5 Юянии также равны по величине и противоположны по знаку. Отсюда, в частности, следует, что для процессов, переходящих в себя в перекрёстном преобразовании, например, процесса (7.18), поляризации (при неполяризованных начальных частицах) и параметры асимметрии должны стремиться к нулю при $\Delta \rightarrow \infty$ и фиксированном t независимо от относительного поведения инвариантных амплитуд. Это заключение справедливо и для процесса (7.20), если имеет место зарядовая симметрия. Соотношение между поляризациями барионов в конечных состояниях процессов (7.8) с неполяризованными барионами в начальных состояниях зависит от относительной четности Σ^- и Λ -гиперонов: если эта четность положительна, то поляризации протона и $\bar{\Sigma}^+$ -гиперона противоположны по знаку и равны по величине, а если эта четность отрицательна, то поляризации равны как по величине, так и по знаку. Такое же заключение имеет место для параметров асимметрии в процессах (7.8) с поляризованными гипероном и антипротоном в начальных состояниях. Кроме того, для каждого процесса рассматриваемая поляризация и параметр асимметрии равны друг другу, если четность положительна, и противоположны по знаку, если четность отрицательна. Поэтому между поляризацией в одном процессе и параметром асимметрии в другом имеет место следующее асимптотическое соотношение независимо от относительной четности частиц: они равны по величине и противоположны по знаку. Это свойство ещё встречается в дальнейшем в других случаях.

Для процессов упругого рассеяния мезонов полученные асимптотические соотношения между наблюдаемыми физическими величинами можно установить на основе более слабых предположений. Действительно, для этого достаточно предполагать, что наблюдаемые физические величины, входящие в полный опыт (дифференциальное сечение, параметр асимметрии и корреляция между поляризациями), не осциллируют, а мнимые части амплитуд без поворота спина (деленные на модули этих амплитуд) стремятся к неотрицательным пределам при $\Delta \rightarrow \infty$ и фиксированном t .

Что касается поляризаций и параметров асимметрии в процессах барион-барионного рассеяния, то также были получены аналогичные результаты. В частности, если протоны в начальных состояниях не поляризованы, то в асимптотике поляризации протонов в процессах (7.9), а также (7.10), нейтронов отдачи в (7.11), Σ^+ -гиперонов отдачи в (7.12) и Λ -гиперонов отдачи в (7.13) равны между собой соответственно по величине и противоположны по знаку. Такое же заключение имеет место и для параметров асимметрии в процессах (7.9) - (7.13) с поляризованной мишенью. Эти асимптотические соотношения имеют место независимо от четностей частиц (для неупругих процессов). В процессах упругого рассеяния (7.9) и (7.10) имеют место аналогичные асимптотические соотношения между поляризациями первого протона в первом процессе (7.9) и антипротона во втором (с неполяризованными частицами в начальных состояниях), Σ^+ -гиперона и $\bar{\Sigma}^+$ -гиперона в (7.10), а также между параметрами

асимметрии в этих процессах с поляризованными падающими частицами. Между поляризациями первых частиц в состояниях неупругих процессов в (7.II)-(7.I3): Λ - $\bar{\Sigma}$ -гиперонов в (7.II), протона и $\bar{\Sigma}^+$ -гиперона в (7.I2) и нейтрона и $\bar{\Sigma}^-$ -гиперона в (7.I3) (с неполяризованными начальными частицами), а также между соответствующими параметрами симметрии, в общем случае не имеется простого соотношения. Однако между поляризациями и параметрами асимметрии имеет место следующее асимптотическое соотношение: поляризация первой частицы в одном процессе и соответствующий параметр асимметрии в другом процессе равны между собой для каждой пары по величине и противоположны по знаку независимо от четностей частиц. Это соотношение, конечно, также имеет место для упругих процессов (7.9) и (7.10). Отметим, что аналогичные соотношения были получены для процессов мезон-барионного рассеяния и фоторождения (для фоторождения см. главу IV). Кроме того, если ещё предположим, что при больших энергиях выполняется правило Померанчука, Окуня, то поляризации в $\pi^{\pm}p$ рассеянии должны стремиться к нулю.

ГЛАВА III. В этой главе была рассмотрена роль инвариантностей относительно дискретных преобразований P, C и T в установлении полученных асимптотических соотношений между наблюдаемыми физическими величинами. Был рассмотрен случай, когда четность не сохраняется, но взаимодействия инвариантны относительно отражения времени T и, следовательно, не имеет места инвариантность относительно преобразования зарядового сопряжения C. В этом случае справедливы все полученные ранее соотношения между дифференциальными сечениями, полными сечениями, поляризациями и параметрами асимметрии. Однако многие полученные соотношения существенно зависят от предположения о T-инвариантности, и не имеют места, если T-инвариантность нарушается. В этом случае, однако, имеет место большинство полученных ранее соотношений для процессов упругого рассеяния. В частности, асимптотические равенства между дифференциальными сечениями упругого рассеяния, а также между полными сечениями частицы и античастицы справедливы и в этом случае.

ГЛАВА IV. Эта глава посвящена изучению асимптотических соотношений между амплитудами перекрестных процессов фоторождения мезона на барионе

$$\gamma + b_1 \rightarrow a + b_2, \quad (I)$$

$$\gamma + b_2 \rightarrow \bar{a} + b_1. \quad (II)$$

Из асимптотических соотношений для амплитуд были установлены асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов и следующее асимптотическое соотношение для поляризационных эффектов: поляризация в одном процессе с неполяризованными начальными частицами и параметр асимметрии в другом процессе с поляризованным начальным барионом в

асимптотике равны по величине и противоположны по знаку. Эти заключения, в частности, имеют место для процессов

$$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n \quad (7.22)$$

и

$$\gamma + n \rightarrow \pi^- + p. \quad (7.23,$$

Отметим, что здесь не предполагается изотопическая инвариантность. Для процессов фоторождения истинно нейтральных мезонов, т.е. процессов, переходящих в себя в перекрестном преобразовании из (I) в (II), например,

$$\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p \quad (7.24)$$

и

$$\gamma + n \rightarrow \pi^0 + n \quad (7.25)$$

имеет место следующее асимптотическое соотношение: поляризация (при неполяризованных начальных частицах) и параметр симметрии (при поляризованном начальном нуклоне) равны по величине и противоположны по знаку. Такое же заключение справедливо для некоторых процессов фоторождения странных частиц, если при больших энергиях имеет место унитарная симметрия сильных взаимодействий.

В этой главе также были рассмотрены асимптотические свойства амплитуд комптон-эффекта. В частности, было показано, что поляризация нуклона отдачи, а также параметр асимметрии, стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t , независимо от относительного поведения инвариантных амплитуд.

ГЛАВА У. В главе У были рассмотрены некоторые возможности экспериментальной проверки высших симметрий сильных взаимодействий. Дело состоит в следующем. В моделях сильных взаимодействий с высшими симметриями существуют многие соотношения между амплитудами рассеяния. Однако эти соотношения вообще довольно сложны и из них можно установить очень мало простых соотношений между сечениями. В этих моделях все мезоны и их античастицы принадлежат одному и тому же мультиплету, поэтому среди процессов мезон-барионного рассеяния и фоторождения имеется ряд перекрестных процессов. С помощью полученных в главе II асимптотических соотношений между амплитудами перекрестных процессов можно привести соотношения, полученные как следствия высших симметрий, к более простым видам и отсюда получить некоторые дополнительные соотношения между амплитудами процессов мезон-барионного рассеяния и фоторождения. Эти соотношения не являются известными асимптотическими соотношениями между сечениями перекрестных процессов, а также не могут быть получены

только на основе свойств симметрии взаимодействий. Теперь мы выпишем в виде таблицы все соотношения между сечениями и поляризациями, полученные в настоящей работе и в⁴², I44-I47/. Мы не включим в таблицу известные изотопические соотношения, неравенства треугольника и асимптотические соотношения между сечениями и поляризациями для перекрёстных процессов. Обозначим, например, через $\sigma(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+)$ дифференциальное сечение процесса $K+p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+$ при некотором t , через $P(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+)$ поляризацию Σ^+ -гиперона в этом процессе с неполяризованным протоном, через $P(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ n)$ поляризацию нейтрона в процессе фоторождения $\gamma+p \rightarrow \pi^+ n$ с неполяризованными начальными частицами, и через $\gamma(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ n)$ параметр асимметрии в этом процессе с поляризованным протоном. В таблице также указано, в какой модели имеет место данное соотношение и при доказательстве этого соотношения применяется теорема Фрагмена-Линделёфа (или теорема Померанчука) или нет. Мы используем следующие обозначения для названия моделей:

- I - изотопическая инвариантность
- O - октетная модель с R - инвариантностью
- T - триплетная модель
- G₂ - модель с группой симметрии G₂
- Ф-λ - теорема Фрагмена-Линделёфа.

Мы имеем следующие соотношения:

Таблица IV

Соотношения	Модель и метод	Литература
$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - \frac{1}{2} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ n) \geq 0$	I, Ф-λ	
$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - \frac{1}{2} \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ n) = \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(\pi^+ p)]^2, t=0$	I, Ф-λ	
$\sigma(\bar{K}p \rightarrow K^+ \Xi^+) - \frac{1}{4} \sigma(\bar{K}p \rightarrow K^+ \Xi^0) \geq 0$	I, Ф-λ	
$P(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ n) = \gamma(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ n) = 0$	I, Ф-λ	
$ \sigma_{tot}(K^+ p) - \sigma_{tot}(K^+ n) \leq [16\pi \sigma(\bar{K}p \rightarrow \bar{K}^0 n)]^{1/2}, t=0$	I, Ф-λ	
$\sigma(\bar{K}p \rightarrow \bar{K}^0 n) = \sigma(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+)$	O, G ₂	[42, 145-147]
$\sigma(K^+ p \rightarrow K^+ n) = \sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+)$	O, G ₂	[42, 145-147]
$\sigma(\bar{K}p \rightarrow K^+ \Xi^0) = \sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-)$	O, G ₂	[42, 145-147]
$\sigma(\bar{K}p \rightarrow K^+ \Xi^+) = \sigma(\bar{K}p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-)$	O, G ₂	[42, 145-147]

$\sigma(\pi^{\pm}p \rightarrow \pi^{\pm}p) = \sigma(K^{\pm}n \rightarrow K^{\pm}n)$	O, G_2	[42, 145-147]
$\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p) = \sigma_{tot}(K^{\pm}n)$	O, G_2	[42, 145-147]
$\sigma(K_2^0p \rightarrow K_1^0p) = \frac{1}{2} \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^0n)$	$O, G_2, \Phi-\lambda$	
$\sigma(\pi^{\pm}p \rightarrow \pi^{\pm}p) = \sigma(K_2^0p \rightarrow K_2^0p) + \sigma(K_2^0p \rightarrow K_1^0p)$	$O, G_2, \Phi-\lambda$	
$\sigma(\pi^-p \rightarrow K^0\Sigma^0) = \frac{1}{3} \sigma(\pi^-p \rightarrow K^0\lambda)$	$O, \Phi-\lambda$	
$\sigma(\pi^-p \rightarrow K^0\Sigma^0) - \frac{1}{4} \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) \gg 0$	$O, \Phi-\lambda$	
$\sigma(\pi^-p \rightarrow K^0\lambda) - \frac{3}{4} \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) \gg 0$	$O, \Phi-\lambda$	
$\sigma(\pi^{\pm}p \rightarrow \pi^{\pm}p) = \sigma(K^{\pm}p \rightarrow K^{\pm}p)$	T	[144, 147]
$\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p) = \sigma_{tot}(K^{\pm}p)$	T	[144, 147]
$\sigma(K^-p \rightarrow \bar{K}^0n) = \sigma(\pi^-p \rightarrow K^0\lambda)$	T	[144, 147]
$\sigma(K^0p \rightarrow K^+n) = \sigma(\bar{K}^0p \rightarrow \pi^+\lambda)$	T	[144, 147]
$\sigma(K^+n \rightarrow K^+n) = \sigma(K^-n \rightarrow K^-n)$	T	[144, 147]
$\sigma_{tot}(K^+n) = \sigma_{tot}(K^-n)$	T	[144, 147]
$\sigma(K_2^0p \rightarrow K_2^0p) = \sigma(K^{\pm}n \rightarrow K^{\pm}n)$	T	
$\sigma_{tot}(K_2^0p) = \sigma_{tot}(K^{\pm}n)$	T	
$\sigma(K_2^0p \rightarrow K_1^0p) = 0$	T	
$P(K^{\pm}n \rightarrow K^{\pm}n) = \gamma(K^{\pm}n \rightarrow K^{\pm}n) = 0$	T	
$\sigma(\pi^-p \rightarrow K^0\Sigma^0) = \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^0n)$	G_2	
$\sigma(\gamma p \rightarrow \pi^+n) = \sigma(\gamma p \rightarrow K^+\lambda)$	T	[144]
$P(\gamma n \rightarrow K^0\lambda) = -\gamma(\gamma n \rightarrow K^0\lambda)$	$T, \Phi-\lambda$	
$P(\gamma p \rightarrow K^0\Sigma^+) = -\gamma(\gamma p \rightarrow K^0\Sigma^+)$	$O, \Phi-\lambda$	
$\sigma_{tot}(\pi^{\pm}p) = \sigma_{tot}(K^{\pm}p) = \sigma_{tot}(K_2^0p) = \dots = \sigma_{tot}(m\beta)$	$O, G_2, T, \Phi-\lambda$	
$P(m_1\beta_1 \rightarrow m_2\beta_2) = \gamma(m_1\beta_1 \rightarrow m_2\beta_2) = 0$ <small>если $m_1 \neq m_2$</small>		
<small>или $\beta_1 \neq \beta_2$</small>	$O, G_2, T, \Phi-\lambda$	

ГЛАВА VI. Глава VI посвящена проверке полученных ранее асимптотических соотношений между амплитудами рассеяния в теории возмущений. Были рассмотрены электромагнитные рассеяния некоторого заряженного фермиона и его античастицы на заряженном бозоне и на другом заряженном фермионе. Ряды теории возмущений для каждого процесса и его перекрестного процесса не совпадают: матричные элементы диаграмм с обменом четным числом фотонов равны между собой для перекрестных процессов, а диаграмм с обменом нечетным числом фотонов равны по величине и противоположны по знаку. Однако конкретное рассмотрение показало, что полученные асимптотические соотношения между амплитудами вообще удовлетворяются в каждом порядке, если $\ln \frac{s}{m^2} \gg 1$.

Кроме того, из рассмотренных примеров мы выведем следующее заключение, имеющее методический интерес: асимптотическое соотношение между амплитудами, например,

$$F_2^I(s, t) \approx - F_2^{II}(s, t)^* \quad (7.26)$$

может быть написано в виде:

$$\operatorname{Re} F_2^I(s, t) \approx - \operatorname{Re} F_2^{II}(s, t) \quad \text{или} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Re} F_2^I(s, t)}{\operatorname{Re} F_2^{II}(s, t)} = -1 \quad (7.27)$$

и

$$\operatorname{Im} F_2^I(s, t) \approx \operatorname{Im} F_2^{II}(s, t) \quad \text{или} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} F_2^I(s, t)}{\operatorname{Im} F_2^{II}(s, t)} = 1, \quad (7.28)$$

если мнимые и действительные части имеют одинаковое поведение. Однако, если мнимые части растут быстрее (или убывают медленнее) чем действительные части, например, то соотношение (7.27) для действительных частей может и не выполняться. Дело состоит в том, что асимптотическое соотношение (7.26) только должно выполняться в целом. Если же действительными частями можно пренебречь, например, и (7.28) выполняются, то (7.26) также выполняется независимо от того, что (7.27) выполняется или нет. Так, например, мы показали, что в четвертом порядке инвариантные амплитуды $F_2^J(s, t)$ и $F_2^{\bar{J}}(s, t)$ фермион-фермионного электромагнитного рассеяния чисто мнимы в асимптотике и равны между собой для перекрестных процессов. Мнимые части этих амплитуд в данном порядке удовлетворяют (7.28). Однако соотношение (7.27) для действительных частей не выполняется.

Сказанное заключение играет важную роль в формулировке условий, при которых имеет место асимптотическое равенство полных сечений взаимодействия частицы и античастицы. Предположим, что амплитуды упругого рассеяния вперед ведут себя как некоторые степени $\ln s$, $\alpha(\cdot) = 1$. Если мнимые части растут не медленнее или убывают не быстрее дей-

ствительных частей, то имеет место это асимптотическое равенство для полных сечений. Однако, если действительные части растут быстрее или убывают медленнее мнимых, то это равенство полных сечений может и не иметь места.

§ 2. Сравнение с экспериментом

Теперь сравниваем асимптотические равенства сечений перекрестных процессов с опытом. Полные сечения взаимодействия π^\pm -мезонов с протоном были измерены в ряде работ (см. /162/ и указанную там литературу). Согласно этим данным зависимость полных сечений $\sigma_{tot}(\pi^\pm p)$ от энергии можно выразить в виде:

$$\sigma_{tot}(\pi^\pm p) = a^\pm + \frac{b^\pm}{k}$$

где k - величина импульса налетающего протона в лабораторной системе, причем

$$a^+ = (22,3 \pm 0,3) \text{ мб},$$

$$a^- = (24,4 \pm 0,3) \text{ мб},$$

$$b^+ = (25 \pm 3) \text{ мб} \cdot \text{Бэв}/c,$$

$$b^- = (25 \pm 3) \text{ мб} \cdot \text{Бэв}/c.$$

В интервале k от 4,5 до 10 Бэв/с полные сечения убывают на величины порядка $\sim 10\%$, а в интервале от 10 до 20 Бэв/с - порядка 4%. Если поведение полных сечений действительно имеет вид $\sigma_{tot} = a + \frac{b}{k}$, то от 20 Бэв/с до очень высоких энергий эти сечения убывают только на величины порядка 5%, а разность сечений $\Delta\sigma = \sigma_{tot}(\pi^- p) - \sigma_{tot}(\pi^+ p)$ стремится к ненулевому пределу порядка 2 мб. Это противоречило бы доказанному асимптотическому равенству сечений $\sigma_{tot}(\pi^\pm p)$. Однако эти данные ещё нельзя считать достаточно точными. Поэтому, чтобы вывести убедительные заключения относительно этого равенства, нужно повысить энергию и увеличить точность опыта.

Полные сечения взаимодействия протона и антипротона с протоном были даны в работе /163/. Согласно этим данным, в интервале k от 10 Бэв/с до 20 Бэв/с полное сечение взаимодействия протона приблизительно равно постоянному значению

$$\sigma_{tot}(pp) \approx (39,5 \pm 1) \text{ мб}, \quad 10 \text{ Бэв}/c \leq k \leq 20 \text{ Бэв}/c,$$

а полное сечение взаимодействия антипротона монотонно убывает от

$$\sigma_{tot}(\bar{p}p) \approx (58 \pm 4) \text{ мб}, \quad k = 10 \text{ Бэв}/c$$

до

$$\sigma_{\text{tot}}(\bar{p}p) \approx (18 \pm 4) \text{ мб} , k = 20 \text{ бек/с} .$$

Аналогичная ситуация имеет место в случае взаимодействия K^{\pm} -мезонов с протоном. Экспериментальные значения полных сечений были даны в работе /164/. Согласно этим данным в интервале k от 3,25 до 19 бек/с полное сечение взаимодействия K^+ -мезона с протоном приблизительно равно

$$\sigma_{\text{tot}}(K^+p) \approx (18,4 \pm 0,2) \text{ мб} , 3,5 \text{ бек/с} \leq k \leq 19 \text{ бек/с}$$

а полное сечение взаимодействия K^- -мезона с протоном $\sigma_{\text{tot}}(K^-p)$ больше $\sigma_{\text{tot}}(K^+p)$ и убывает. Разность сечений равна

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}(K^-p) - \sigma_{\text{tot}}(K^+p) &\approx 8 \text{ мб} \quad \text{при} \quad k = 5 \text{ бек/с} \\ &\approx 3 \text{ мб} \quad \text{при} \quad k = 19 \text{ бек/с} . \end{aligned}$$

В отличие от случая взаимодействия π^{\pm} -мезонов с протоном, здесь зависимость $\sigma_{\text{tot}}(K^{\pm}p)$ от k можно выразить в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}(K^+p) &\approx a \\ \sigma_{\text{tot}}(K^-p) &\approx a + \frac{b}{k^{1-\alpha}} , \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &\approx (18,4 \pm 0,2) \text{ мб} \\ b &\approx (22 \pm 6) \text{ мб бек/с} , \\ \alpha &\approx 0,36 \pm 0,1 . \end{aligned}$$

Если полные сечения $\sigma_{\text{tot}}(K^{\pm}p)$ действительно имеют эти поведения, то при достаточно больших k они будут совпадать друг с другом.

Таким образом, имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные ещё не согласуются с предсказанным теоремой Померанчука асимптотическим равенством полных сечений взаимодействия частиц и античастиц. Аналогичное обстоятельство имеет место и для дифферен-

циальных сечений упругого рассеяния π^- -мезона на протоне (см. экспериментальные данные в работах /165,166/) с другой стороны, эти асимптотические равенства сечений перекрёстных-процессов являются следствиями основных принципов релятивистской локальной квантовой теории поля. Поэтому экспериментальное подтверждение этих соотношений означало бы подтверждение основных принципов теории поля. Для этой цели играют существенную роль создание мощных ускорителей элементарных частиц высоких энергий и повышение точности эксперимента.

Благодарность

Мне хочется выразить особую благодарность профессору А.А. Логунову за постоянное внимание, ценные советы и помощь при выполнении работ, вошедших в диссертацию.

Я весьма признателен С.М. Биленькому, Р.М. Рындину, Сян Дин Чану, И.Т.Тодорову и О.А. Хрусталёву, совместно с которыми были получены некоторые результаты настоящей работы.

Я приношу глубокую благодарность профессорам Н.Н. Боголюбову, Д.И. Блохинцеву, М.А. Маркову, Я.А. Смородинскому, а также В.И. Огиевскому и А.Н. Тавхелидзе за интерес к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Я.Померанчук. Изотопическая инвариантность и рассеяние антинуклонов нуклонами. ЖЭТФ 30, 423 (1956).
2. Л.Б.Окунь и И.Я.Померанчук. Изотопическая инвариантность и сечения взаимодействия π -мезонов и нуклонов высокой энергии с нуклонами, ЖЭТФ, 30, 424 (1956).
3. И.М.Граменицкий. Квазиупругие π -мезон-нуклонные взаимодействия. Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий в Кракове, Польша, 1963.
4. D.I.Blokhintsev, V.S.Barashenkov and V.G.Grishin. Elastic Scattering and Structure of Elementary Particles. Nuovo Cim. 9, 249 (1958).
5. D.I.Blokhintsev, V.S.Barashenkov and B.M.Barbashov. Nucleon Structure and Pion-Pion Interaction, Nuovo Cim., 12, 602 (1959).
6. Д.И.Блохинцев, В.С.Барашенков и Б.М.Барбашов. Структура нуклонов, УФН 68, 417 (1959).
7. D.I.Blokhintsev. Diffraction πN Scattering and Spatial Nucleon Structure, Nucl.Phys. 31, 628 (1962).
8. R.Serber, Theory of Scattering with Large Momentum Transfer. Phys.Rev.Lett. 10, 357 (1963).
9. H.H.Aly, D.Lurie and S.Rosendorff. High Energy pp and πp Scattering in Serber's Model. Phys.Lett. 7, 198 (1963).
10. А.И.Ахиезер и И.Я.Померанчук. Дифференциальные явления при столкновениях быстрых частиц с ядрами. УФН 65, 593 (1958).
11. L.Van Hove, A.Phenomenological Discussion of Inelastic Collisions at High Energies. Nuovo Cim. 28, 798 (1963).
12. L.Van Hove. Inelastic Collision and Shadow Scattering of Strongly Interacting Particles at High Energy. Preprint CERN, 7053/TH 368 (1963).
13. L.Van Hove. High Energy Collision of Strongly Interacting Particles, Preprint CERN, 7963/TH392 (1963).
14. T.Regge. Introduction to Complex Orbital Momenta. Nuovo Cim. 14, 951 (1959).
15. T.Regge. Bound States, Shadow States and Mandelstam Representation. Nuovo Cim. 18, 947 (1960).
16. S.Mandelstam. Determination of the Pion-Nucleon Scattering Amplitude from dispersion Relations and Unitarity. General Theory, Phys.Rev. 112, 1344 (1958).

17. В.Н.Грибов. О возможном асимптотическом поведении упругого рассеяния. *ЖЭТФ* 41, 667 (1961).
18. В.Н.Грибов. Парциальные волны с комплексными орбитальными моментами и асимптотическое поведение амплитуды рассеяния, *ЖЭТФ* 41, 1962 (1961).
19. В.Н.Грибов, и И.Я.Померанчук. О некоторых свойствах амплитуды упругого рассеяния при больших энергиях, *ЖЭТФ* 43, 308 (1962).
20. G.F.Chew and S.C.Frautschi. Dynamical Theory for Strong Interaction at Low Momentum Transfer but Arbitrary Energies. *Phys.Rev.*123, 1478 (1961).
21. G.F.Chew and S.C.Frautschi. Principle of Equivalence for all Strongly Interacting Particles within the S-matrix Framework. *Phys.Rev.Lett.* 7, 394 (1961).
22. S.C.Frautschi, M.Gell-Mann and F.Zachariasen. Experimental Consequences of the Hypothesis of Regge Poles. *Phys.Rev.* 126, 2204 (1962).
23. M.Gell-Mann. Applications of Regge Poles, Proceedings of the 1962 International Conference on High Energy Physics at CERN, p.533.
24. G.Domokos, Regge Poles and High Energy Scattering. Proceedings of the 1962 International Conference on High Energy Physics at CERN, p.553.
25. B.A.Arbuzov, A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze and R.N.Faustov. The Asymptotic Behaviour of the Scattering Amplitudes and the R_0 normalization Group Method, *Phys.Lett.* 2, 150 (1962).
26. I.C.Polkinghorn, High Energy Behaviour in Perturbation Theory. *Journ. Math. Phys.* 4, 503 (1963).
27. P.G.Federbush and M.T.Grisaru. The High Energy Behaviour of Scattering Amplitudes in Perturbation Theory, *Ann.Phys.*, 22, 263 (1963).
28. B.W.Lee and R.F.Sawyer. Regge Poles and High Energy Limits in Field Theory, *Phys.Rev.* 127, 2266 (1962).
29. D.Amati, A.Stanghellini and S.Fubini. Theory of High Energy Scattering and Multiple Production, *Nuovo Cim.* 26, 896 (1962).
30. A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze. Quasi Optical Approach in Quantum Field Theory, *Nuovo Cim.* 29, 380 (1963).
31. Б.А.Арбузов, А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаутов и А.Т.Филиппов. Квазиоптическая модель и асимптотика амплитуда рассеяния, *ЖЭТФ* 44, 1409 (1963).
32. D.Amati, S.Fubini and A.Stanghellini. Asymptotic Properties of Scattering and Multiple Production, *Phys.Lett.* 1, 29 (1962).
33. I.C.Polkinghorne. Cancelling Cuts in the Regge Plane, *Phys.Lett.* 4, 24 (1963).

34. S.Mandelstam. Cuts in the Angular Momentum Plane, I and II, Nuovo Cim. 30, 1127 and 1148 (1963).
35. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu, A.N.Tavkhelidze and O.A.Khrustalev. Regge Poles in Quantum Electrodynamics, Nucl.Phys. 44, 275 (1963).
36. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu and O.A.Khrustalev. Regge Poles and Perturbation Theory, Nucl.Phys. 49, 170 (1964).
37. В.Н.Грибов и И.Я.Померанчук. Комплексные орбитальные моменты и соотношения между сечениями различных процессов при высоких энергиях. ЖЭТФ 42, 1141 (1962).
38. В.Н.Грибов, Б.Л.Иоффе, И.Я.Померанчук и А.П.Рудик. Некоторые следствия из гипотезы движущихся полюсов для процессов при больших энергиях, ЖЭТФ 42, 1419 (1962).
39. M.Gell-Mann. Factorization of Coupling to Regge Poles, Phys.Rev.Lett. 8, 263 (1962).
40. S.I.Lindenbaum. High Energy Elastic Scattering of π^{\pm} , p , \bar{p} and K^{\pm} by Protons and Regge Pole Predictions, Report at the Stanford International Conference on Nucleon Structure, 1963.
41. А.А.Логунов, В.Н.Мещеряков и А.Н.Тавхелидзе. О приближенной Y_5 - инвариантности теории сильных взаимодействий, ДАН СССР 142, 317 (1962).
42. R.E.Behrends and A.Sirlin. Weak Coupling Currents and Symmetries of Strong Interactions. Phys.Rev. 121, 324 (1961).
43. M.Ikeda, S.Ogawa and Y.Ohmiki. The Full Symmetry Theory of the Sakata Model. Suppl.Prog.Theor.Phys., 19, 44 (1961).
44. M.Gell-Mann. The Eightfold Way: A Theory of Strong Interaction Symmetry, Cal.Tech. Report CTSL -20 (1961); Symmetries of Baryons and Mesons, Phys.Rev., 125, 1067 (1962).
45. Y.Nee'man. Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance, Nucl.Phys. 26, 222 (1961).
46. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Москва, ГИТЛ, 1957.
47. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, Москва, ГИФМЛ, 1958.

48. В.С.Владимиров. О построении оболочек голоморфности для областей специального вида и их применения. Труды математического института им.В.А.Стеклова 60,101(1961).
49. R.Naag and B.Schroer. Postulates of Quantum Field Theory, Journ.Math.Phys., 3, 248 (1962).
50. И.Я.Померанчук. Равенство полных сечений взаимодействия нуклонов и антинуклонов при больших энергиях, ЖЭТФ 34, 725 (1958).
51. В.Файнберг и Е.Фрадкин. Дисперсионное соотношение для ферми- частиц, ДАН СССР 109, 507 (1956).
52. Б.Л.Иоффе. Дисперсионные соотношения для рассеяния и фоторождения, ЖЭТФ 31, 583 (1956).
53. Ф.М.Куни. Дисперсионное соотношение для рассеяния нуклонов на нуклонах. Вестник Ленинградского университета, № 10, серия физики и химии, выпуск 2, 1957.
54. D.Amati, M.Fierz and W.Glaser. High Energy Limits of Scattering Cross Sections, Phys.Rev.Lett. 4, 89 (1960).
55. M.Sugawara and A.Kanazawa. Subtractions in Dispersion Relations. Phys.Rev.123, 1895 (1961).
56. S.Weinberg. Cross Sections at High Energies. Phys.Rev. 124, 2049 (1961).
57. H.Lehmann. On the High Energy Limit of Ordinary Dispersion Relations. Nucl.Phys. 29, 300 (1962).
58. L.Castillejo, R.H.Dalitz and F.I.Dyson. Low's Scattering Equation for the Charged and Neutral Scalar Theories, Phys.Rev.101, 453 (1956).
59. K.Symanzik. On the Many Particle Structure of Green's Functions in Quantum Field Theory, Journ. Math.Phys. 1, 149 (1960).
60. Н.Н.Мейман. Об асимптотическом равенстве полных сечений частицы и античастицы, ЖЭТФ 43, 2277 (1962).
61. Е.Титчмарш. Теория функций, Москва, ГИТТЛ, 1951.
62. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, Москва, ГИТТЛ, 1941.

63. H.Lehmann. Analytic Properties of Scattering Amplitudes as Functions of Momentum Transfer. Nuovo Cim. 10, 579 (1958).
64. O.W.Greenberg and F.E.Low. Limit on High Energy Cross Section from Analyticity in Lehmann Ellipses. Phys.Rev.124, 2047 (1961).
65. M.Froissart. Asymptotic Behaviour and Subtractions in the Mandelstam Representation, Phys.Rev. 123, 1053 (1961).
66. T.Kinoshita, I.I.Loeffel and A.Martin. New Upper Bound for the High Energy Scattering Amplitude at Fixed Angle, Phys.Rev.Lett. 10, 460 (1963).
67. L.Van Hove. An Extension of Pomeranchuk's Theorem to Diffraction Scattering, Phys.Lett. 5, 252 (1962).
68. M.Gell-Mann, M.L.Goldberger and W.E.Thirring. Use of Causality Condition in Quantum Theory. Phys.Rev. 95, 1612 (1954).
69. M.L.Goldberger. Causality Conditions and Dispersion Relations. Phys.Rev.99, 979 (1955).
70. M.L.Goldberger, H.Miyazawa and R.Oehme. Application of Dispersion Relations to Pion Nucleon Scattering, Phys.Rev.99, 986 (1955).
71. R.Karplus and M.Ruderman. Application of Causality to Scattering, Phys.Rev. 98, 771 (1955).
72. R.Oehme. Dispersion Relation for Pion-Nucleon Scattering, The Spin-Flip Amplitude, Phys.Rev.100, 1503 (1955).
73. R.Oehme, Dispersion Relation for Pion-Nucleon Scattering, No-Spin-Flip Amplitude, Phys.Rev. 102, 1174 (1956).
74. K.Symanzik. Derivation of Dispersion Relations for Forward Scattering, Phys.Rev. 105, 743 (1957).
75. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе. Дисперсионные соотношения для реакций фоторождения π - мезонов на нуклонах ЖЭТФ 32, 1393 (1957).
76. А.А.Логунов. Дисперсионные соотношения для виртуальных процессов, ДАН СССР, 117, 792 (1957).
77. А.А.Логунов, Аналитические свойства антиэрмитовой части амплитуды виртуального процесса, НДВШ, физ.мат.науки, 4, 207 (1958).
78. А.А.Логунов. К теории дисперсионных соотношений для виртуальных процессов, НДВШ. физ.мат.науки, 5, 108 (1958).

79. В.С.Владимиров и А.А.Логунов. Об аналитических свойствах обобщенных функций квантовой теории поля, Известия АН СССР, серия мат., 23, 661 (1959).
80. A.A.Logunov and I.T.Todorov. On the Proof of Dispersion Relations for Inelastic Scattering, Nucl.Phys. 10, 552 (1959).
81. I.T. Todorov. Analytical Properties of the Scattering Amplitudes for Inelastic Processes Involving Strange Particles, Nucl.Phys. 18, 521 (1960).
82. R.Oehme and T.G.Taylor. Proof of Dispersion Relations for the Production of Real Virtual Photons and for Related Processes. Phys.Rev.113, 371 (1959).
83. R.Jost and H.Lehmann. Integral Darstellung Kansaler Kommutatoren, Nuovo Cim. 5, 1598 (1957).
84. F.J.Dyson. Integral Representations of Causal Commutators, Phys.Rev.110, 1460 (1958).
85. H.Lehmann, K.Symanzik and W.Zimmermann, Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, Nuovo Cim. 1, 205 (1955).
86. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu, I.T.Todorov and O.A.Khrustalev, Asymptotic Relations between Cross Sections in Local Field Theory, Phys.Lett. 7, 69 (1963).
87. A.A.Logunov, Nguyen van Hieu, I.T.Todorov and O.A.Khrustalev. Asymptotic Relations between Cross Sections in Local Field Theory, Report at the Sienna International Conference on Elementary Particles, 1963.
88. Н.Н.Мейман. Об асимптотическом равенстве дифференциальных сечений частиц и античастиц, препринт ИТЭФ, № 184 (1963).
89. Н.Г.Чеботарев и Н.Н.Мейман. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды математического института им.В.А.Стеклова, том 26, (1949).
90. L.L.Foldy. The Electromagnetic Properties of Dirac Particles, Phys.Rev.87, 868 (1952).
91. L.N.Hand, D.G.Miller and R.Wilson. Electric and Magnetic Form Factors of the Nucleon, Rev.Mod.Phys. 35, 335 (1963).
92. R.P.Фейнман and M.Gell-Mann. Theory of the Fermi Interaction. Phys.Rev. 109, 193 (1958).

Interaction. Proceeding of the International Conference on Mesons and Recently
Discovered Particles, Padova-Venezia, 1957, p. v. 14.

94. M.L.Goldberger and S.B.Treiman. Decay of the π^- Mesons, Phys.Rev.110, 1178 (1958).
95. M.L.Goldberger and S.B.Treiman. Form Factors in β^- Decay and μ^- Capture, Phys.Rev.111, 354 (1958).
96. G.F.Chew, R.Karplus, S.Gasiorowicz and F.Zachariasen. Electromagnetic Structure of the Nucleon in Local-Field Theory, Phys.Rev.110, 265 (1958).
97. P.Federbush, M.L.Goldberger and S.B.Treiman. Electromagnetic Structure of the Nucleon, Phys.Rev. 112, 642 (1958).
98. М.А.Мествиришвили и И.Т.Тодоров. Аналитические свойства мезонно-нуклонной вершинной части и амплитуды рассеяния псевдоскалярных мезонов в теории возмущений, ДАН 148, 562 (1963).
99. Лю И-чжень и И.Т.Тодоров. Интегральное представление вершинной части в теории возмущений, ДАН СССР, 148, 806 (1963).

100. H.J.Bremermann, R.Oehme and J.C.Taylor, A Proof of Dispersion Relations in Quantized Field Theories, Phys.Rev., 109, 2178 (1958).
101. R.Jost. Ein Beispiel zum Nucleon-Vertex, Helv.Phys.Acta 31, 263 (1958).
102. S.Mandelstam. Some Rigorous Analytic Properties of Transitions Amplitudes, Nuovo Cim. 15, 658 (1960).
103. R.W.Lardner. Unitarity and the Mandelstam Representation, I and II, Nuovo Cim. 19, 77 and 20, 733 (1961).
104. R.Ascoli, A.Bottino and A.Molinari, Unitarity of the S-Matrix and Analyticity, Nuovo Cim. 19, 687 (1961).
105. J.C.Pelkinhorne. Analyticity and Unitarity, I and II, Nuovo Cim. 23, 360 and 25, 901 (1962).
106. R.W.Lardner. Analyticity of the General Unitary Term, Nuovo Cim. 23, 323 (1962)
107. K.Symanzik. Dispersion Relations and Vertex Properties in Perturbation Theory, Prog.Theor.Phys. 20, 690 (1958).
108. А.А.Логунов, И.Т.Тодоров и Н.А.Черников. Обобщение теоремы Симанзика о мажорировании диаграмм Фейнмана, ЖЭТФ 42, 1285 (1962).

109. А.А.Логунов, Лю И-чень, И.Т.Тодоров и Н.А.Черников. Дисперсионные соотношения и аналитические свойства парциальных амплитуд в теории возмущений, Укр.мат.журнал 15, 250 (1963).
110. N.Nakanishi. On the Validity of Dispersion Relations in Perturbation Theory, Prog.Theor.Phys. 21, 135 (1959).
111. П.Мэтьюс. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, Москва, ИИЛ, 1959.
112. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т.Тодоров и О.А.Хрусталеv. Асимптотические соотношения между сечениями в локальной теории поля, ЖЭТФ (в печати), препринт ОИЯИ Р-1353 (1963).
113. А.А. Logunov, Nguyen van Hieu, I.T.Todorov and O.A.Khrustalev. Asymptotic Properties of the Neutral K-Meson Scattering Amplitude, Phys.Lett. 7, 71 (1963).
114. G.F.Chew, M.L.Goldberger, F.E.Low and Y.Nambu. Application of Dispersion Relations to Low Energy Meson-Nucleon Scattering, Phys.Rev.106, 1337 (1957).
115. L.Michel and A.S.Wightman. A Covariant Formalism Describing the Polarization of Spin One-Half Particles, Phys.Rev.98, 1190 (1955).
116. С.М.Биленький, Нгуен Ван Хьеу и Р.М.Рындин. Об асимптотических соотношениях между поляризациями в перекрестных реакциях, ЖЭТФ (в печати), препринт ОИЯИ Р-1404 (1963).
117. L.Wolfenstein and J. Ashkin. Invariance Conditions on the Scattering Amplitude for Spin $\frac{1}{2}$ Particles, Phys.Rev., 85, 947 (1952).
118. Л.Пузиков, Р.Рындин и Я.Смородинский. Восстановление матрицы рассеяния в системе из двух нуклонов, ЖЭТФ 32, 592 (1957).
119. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу и И.Т.Тодоров. Асимптотические соотношения между амплитудами рассеяния в локальной теории поля, УФН (в печати), препринт ОИЯИ Е-1520 (1964).
120. M.L.Goldberger, Y.Nambu and R.Oehme. Dispersion Relations for Nucleon Scattering, Ann.Phys. 2, 226 (1957).
121. Д.И.Блохинцев. Когда слабое взаимодействие становится сильным. УФН 62, 381 (1957).

122. М.А.Марков. On the High Energy Neutrino Physics, Proceedings of the 1960 Annual International Conference on High Energy Physics at Rochester, p.578.
123. В.Паули. Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда, Сборник "Нильс Бор и развитие физики," Москва, ИИЛ, 1958.
124. G.Luders. On the Equivalence of Invariance under Time Reversal and under Particle Antiparticle Conjugation for Relativistic Field Theories, Dan.Mat.Fys.Medd. 28, No.5 (1954).
125. R.Jost, Eine Bemerkung zum CTP-Theorem, Helv.Phys.Acta 30, 409 (1957).
126. Nguyen van Hieu. Invariance Properties and the Asymptotic Relations between Scattering Amplitudes, Phys.Lett.
127. E.Corinaldesi. Dispersion Relations for Photoproduction of Meson, Nuovo Cim. 4, 1384 (1956).
128. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze and L.D.Soloviev. Photoproduction Process and Dispersion Relations, Nucl.Phys. 4, 427 (1957).
129. G.F.Chew, M.L.Goldberger, F.E.Low and Y.Nambu, Relativistic Dispersion Relation Approach to Photomeson Production, Phys.Rev. 106, 1345 (1957).
130. A.A.Logunov and A.R.Frenkin. On the Dispersion Relations for the Compton Effect, Nucl.Phys. 7, 573 (1958).
131. Nguyen van Hieu. Asymptotic Relations between Photoproduction Amplitudes, Phys.Lett.
132. R.E.Prange. Dispersion Relations for Compton Scattering, Phys.Rev. 110, 240 (1958).
133. Л.И.Ландау и Чжоу Гуан чжао. Дисперсионные соотношения для рассеяния γ - квантов нуклонами, ЖЭФ 37, 1714 (1959).
134. M.Gell-Mann. Model of the Strong Coupling, Phys.Rev. 106, 1296 (1957).
135. J.Schwinger. A Theory of the Fundamental Interactions, Ann.Phys. 2, 407 (1957).
136. A.Pais. Symmetries of the Strong Interactions, Phys.Rev. 110, 574 (1958).
137. A.Pais. Note on Relations between Baryon-Meson Coupling Constants, Phys.Rev. 110, 1480 (1958).
138. J.J.Sakurai. Symmetry Laws and Strong Interactions, Phys.Rev. 113, 1679 (1959).
139. J.J.Sakurai. Theory of Strong Interactions. Ann.Phys. 11, 1 (1960).
140. I.Yu.Kobsarev and L.B.Okun. Universal Vector Interaction Model, Nucl.Phys. 35, 311 (1962).
141. S.Sakata. On a Composite Model for the New Particles, Prog.Theor.Phys. 16, 686 (1956).
142. A.Salam and J.C.Ward. Vector Field Associated with the Unitary Theory of the Sakata Model, Nuovo Cim. 20, 419 (1961).
143. A.M.Baldin and A.A.Komar. Symmetry of Strong Interacting Systems with Hypercharge $Y=0$, Phys.Lett. 2, 47 (1962).

144. C.A.Levinson, H.J.Lipkin and S.Meshkov. Experimental Test of Unitary Symmetry, Nuovo Cim. 23, 236 (1962).
145. C.A.Levinson, H.J.Lipkin and S.Meshkov. Unitary Symmetry of Strong Interactions, Phys.Lett. 1, 44 (1962).
146. P.G.O.Freund, H.Ruegg, D.Speiser and A.Morales, Meson-Baryon Scattering in Higher Symmetry Schemes, Nuovo Cim. 25, 307 (1962).
147. Б.М.Шехтер. К вопросу об экспериментальной проверке унитарной симметрии сильных взаимодействий, 43, 205 (1962).
148. C.A.Levinson, H.J.Lipkin and S.Meshkov, Unitary Symmetry in Photoproduction and Other Electromagnetic Interactions, Phys.Lett. 7, 81 (1963).
149. D.Amati, J.Prentki and A.Stanghellini. Higher Symmetries and Pomeranchuk Conditions, Nuovo Cim. 26, 1003 (1962).
150. C.N.Yang. Mathematical Deduction from some Rules Concerning High Energy Total Cross Sections, Journ. Math.Phys. 4, 52 (1963).
151. Я.А.Смородинский. Об алгебре унитарной группы Гелл-Манна, препринт ОИЯИ Д-738 (1961).
152. R.E.Behrends, J.Dreitlein, C.Fronsdal and W.Lee, Simple Strong and Strong Interaction Symmetries, Rev.Mod.Phys. 34, 1 (1962).
153. S.Okubo. Note on Unitary Symmetry in Strong Interactions, Prog.Theor.Phys. 27, 949 (1962).
154. J.J. de Swart. The Octet Model and its Clebsch-Gordan Coefficients, preprint CERN, 6488/TH 345 (1963).
155. P.T.Matthews and A.Salam. Unitary Symmetry. Proc.Phys. Soc. 80, 28 (1962).
156. A.R.Edmonds. Unitary Symmetry in Theories of Elementary Particles. Proc.Roy.Soc. A268, 567 (1962).
157. P.Tarjanne. A Group Theoretical Model for Strong Interaction Dynamics, Ann.Acad.Sci.Fennical. Series A 6, Physika 105 (1962).
158. G.Racah, Group Theory and Spectroscopy, Institute for Advanced Study, Princeton, 1951.
159. A.A.Logunov,Nguyen van Hieu and Hsien Ting-chang. Higher Symmetries of Strong Interactions and Asymptotic Relations between Meson-Baryon Scattering Cross Sections, Phys.Lett.
160. L.H.Lyder and J.Smith. A generalization of the Pomeranchuk Theorem from the Phragmen-Lindelof Theorem and Higher Symmetries, Preprint of Edinburgh University (1963).
161. D.R.Yennie, S.C.Frautschi and H.Suura. The Infrared Divergence Phenomena and High Energy Processes, Ann.Phys. 13, 379 (1961).
162. S.J.Lindenbaum, W.A.Love, J.A.Niederer, S.Ozaki, J.J.Russel and L.C.L.Yuan. $\pi^+ p$ and $\pi^- p$ Total Cross Sections from 8 to 20 BeV/c, Phys.Rev.Lett. 7, 354 (1961).

163. S.J.Lindenbaum, W.A.Love, J.A.Niederer, S.Ozaki, J.J.Russel and L.C.L.Yuan.
Antiproton-Proton and Proton-Proton Total Cross Sections from 4 to 20 BeV/c,
Phys.Rev.Lett. 7, 185 (1961).
164. W.F.Baker, R.L.Cool, E.W.Jenkins, T.F.Kycia, R.H.Phillips and A.L.Read.
 K^+p and K^-p Total Cross Sections in the Momentum Range 3-19 BeV/c ,
Phys.Rev. 129, 2285 (1963).
165. K.J.Foley, S.J.Lindenbaum, W.A.Love, S.Ozaki, J.J.Russel and L.C.L.Yuan.
7 to 20 BeV/c π^+p and $p+p$ Elastic Scattering and Regge Pole
Predictions, Phys.Rev.Lett. 10, 376 (1963).
166. K.J.Foley, S.J.Lindenbaum, W.A.Love, S.Ozaki, J.J.Russel and L.C.L.Yuan.
Elastic π^+p Scattering from 7 to 17 BeV/c , Phys.Rev. Lett. 10,
543 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел.

13 февраля 1964 года.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3572. Тираж 450. Техн. редактор В. Р. Саранцева
Февраль 1964 г. 11,4 уч.-изд. л.

3



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

В.А. Друин, Н.К. Скобелев, Б.В. Фефилов, В.И. Кузнецов,
Ю.В. Лобанов, Ю.Ц. Оганесян

P-1651

СПОНТАННО ДЕЛЯЩИЕСЯ ПРОДУКТЫ
В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ
 $U^{238} + Ne^{20}$ И $U^{238} + O^{16}$

Дубна 1984

Спонтанно делящиеся продукты в ядерных реакциях
 $U^{238} + Ne^{20}$ и $U^{238} + O^{16}$.

При облучении U^{238} ионами Ne^{20} и O^{16} , ускоренными на
310-сантиметровом циклотроне ОИЯИ, обнаружен спонтанно деля-
щийся продукт с $Z \leq 100$ и периодом полураспада, равным
3,5 сек.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1984.

P-1651

Druin V.A., Skobelev N.K., Fefilov B.V., Kuznetsov V.I., Lobanov Yu.V.,
Oganesyanyan Yu.Ts.

Spontaneously Fissionable Products in Nuclear Reactions $U^{238} + Ne^{20}$ and
 $U^{238} + O^{16}$.

In the bombardment of U^{238} with Ne^{20} and O^{16} ions accelerated in the
310-cm cyclotron of the Joint Institute for Nuclear Research, there was found a spon-
taneously fissionable product with $Z \leq 100$ and half-life of 3.5 s.

В.А. Друин, Н.К. Скобелев, Б.В. Фефилов, В.И. Кузнецов,
Ю.В. Лобанов, Ю.Ц. Оганесян

P-1851

СПОНТАННО ДЕЛЯЩИЕСЯ ПРОДУКТЫ
В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ
 $U^{238} + Ne^{20}$ И $U^{238} + O^{16}$

Дубна 1964

1. Введение

В 1961 году группа исследователей Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ обнаружила при облучении урана ускоренными ионами неона и кислорода короткоживущие спонтанно делящиеся ядра с периодом полураспада ≈ 13 мсек.^{/1/}

Было высказано предположение, что значительное увеличение константы спонтанного деления этих ядер обусловлено делением не из основного, а из возбужденного состояния. Последующие, более тщательные, исследования^{/2,3/} привели авторов к заключению, что спонтанно делится, по-видимому, Am^{242} , образующийся в изомерном состоянии. Увеличение скорости распада этого изотопа по отношению к спонтанному делению, по всей вероятности, превышает величину 10^{20} , а энергия возбуждения составляет 3-4 Мэв.

Возможно, что существуют ядра с аномально высокой вероятностью спонтанного деления и при меньших энергиях возбуждения. Поэтому были поставлены эксперименты по поискам короткоживущих изомеров со временем жизни \approx несколько секунд.

Нами была разработана высокочувствительная методика регистрации спонтанного деления продуктов ядерных реакций на тяжелых ионах. Опыты проводились на внутреннем пучке 310-сантиметрового циклотрона Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

2. Методика эксперимента

Работа проводилась с помощью двух специальных пробников. Один из них представлял собой сочетание наклонной мишени и полупроводниковых детекторов для регистрации осколков, другой - бесконечную непрерывно движущуюся ленту, предназначенную для транспортировки ядер-продуктов реакции к детекторам осколков, в качестве которых использовались стекла или органические пленки.

Пробник с наклонной мишенью ранее использовался для изучения спонтанного деления изотопа 102-го элемента с массовым числом 256, и его подробное описание дано в работе^{/4/}.

Пробник с бесконечной лентой схематически изображен на рис. 1. Урановая мишень (3) помещалась внутри головки пробника, наполненного гелием до давления 40 мм. рт. столба. Ядра-продукты реакций выбивались из мишени и собирались на

шириной 40 мм. Полная длина ленты составляла 8 метров, скорость ленты могла изменяться в пределах от 0,05 м/сек до 10 м/сек. Вдоль ленты располагались детекторы осколков - стеклянные пластинки. Расстояние (с) от ленты до стеклянной пластинки составляло 1,5 мм. Общая длина (а) стеклянных детекторов менялась от 0,5 до 1,5 м в разных экспериментах. Расстояние от края первого детектора до мишени (в) равнялось 6 см. Высота детекторов равнялась высоте мишени.

После облучения стекла подвергались химической обработке, и распределение треков осколков по стеклам определялось с помощью микроскопа ^{/5/}.

По этому распределению, с учетом скорости ленты, вычислялся период полураспада продуктов реакции.

3. Измерения и результаты

Поиски короткоживущих изомеров со временем жизни порядка нескольких секунд проводились в реакции, $U^{238} + Ne^{20}$.

В первых же опытах на пробнике с наклонной мишенью были обнаружены спонтанно делящиеся ядра, выход которых значительно больше, чем в реакции $U^{238} + Ne^{22}$ ^{/4/}, а период полураспада близок к 3 секундам.

Измерения велись в следующей последовательности: наклонная урановая мишень с эффективной толщиной 4 мг/см² облучалась в течение 10-18 сек потоком ионов $0,9-1,2 \cdot 10^{13}$ частиц/сек.

Затем пучок ионов выключался, к мишени подводились полупроводниковые детекторы, которые регистрировали осколки спонтанного деления продуктов реакции, накопившихся в мишени за период облучения.

Время регистрации осколков лежало в интервале от 10 до 24 сек. Такой процесс многократно повторялся, что позволяло с необходимой точностью определить период полураспада спонтанно делящихся продуктов реакции. Величина периода полураспада оказалась равной $(3,5 \pm 0,7)$ сек. Результаты опытов приведены на рис. 2.

В экспериментах, проводимых на пробнике с наклонной мишенью, возможен фон из-за деления урана, содержащегося в мишени, запаздывающими нейтронами. Однако контрольными экспериментами было показано, что этот фон не вносит заметной ошибки в результаты измерений периода полураспада ^{/4/}.

Значение периода полураспада спонтанно делящихся ядер, образующихся в реакции $U^{238} + Ne^{20}$, и их выход были также измерены на пробнике с бесконечной лентой, где фон, обусловленный запаздывающими нейтронами, отсутствует. В этом случае облучалась мишень площадью 2 см^2 и толщиной 900 мкг/см^2 ионами Ne^{20} с энергией 120 Мэв.

Результаты измерения с помощью этой методики также приведены на рис. 2. Полученный выход спонтанно делящихся ядер с периодом полураспада 3,5 сек находится в хорошем согласии с величиной, определенной на пробнике с наклонной мишенью.

Изучение реакции $U^{238} + O^{16}$ проводилось в тех же условиях на пробнике с наклонной мишенью. Было обнаружено, что продукты этой реакции испытывают спонтанное деление с таким же значением периода полураспада (рис. 3).

Для оценки выхода продуктов этих реакций необходимо было учесть ошибку, обусловленную фоном от запаздывающих нейтронов. Уровень фона измерялся так же, как и в работе ^{14/}. Относительное число фоновых делений было большим на кислороде и возрастало с увеличением энергии в обеих реакциях. Однако вносимая ими ошибка не превышала 30% при $E_O^{16} \approx 108 \text{ Мэв}$ и 20% при $E_{Ne}^{20} \approx 135 \text{ Мэв}$.

В таблице представлены выходы спонтанно делящихся продуктов этих реакций на один падающий ион для толстой мишени урана. Данные приведены с учетом фона и эффективности регистрации, равной 14%.

Для большинства указанных значений энергии измерялись периоды полураспада ядер-продуктов по отношению к спонтанному делению. Их значения в пределах ошибок оставались постоянными для различных значений энергии в обеих реакциях.

Это постоянство периода позволяет сделать заключение, что обе реакции приводят к образованию одного и того же изотопа, который испытывает спонтанное деление с периодом полураспада $(3,5 \pm 0,7) \text{ сек}$.

4. Обсуждение результатов

Спонтанное деление, сопровождающее реакции $U^{238} + Ne^{20}$ и $U^{238} + O^{16}$ с $T_{1/2} = 3,5 \text{ сек}$ может быть обусловлено распадом ядра с $Z \leq 100$, ибо реакция $U^{238} + O^{16}$ при полном слиянии падающего иона с ядром-мишенью приводит к образованию составного ядра фермия.

Среди известных изотопов трансурановых элементов с $Z \leq 100$ нет ни одного излучателя с периодом полураспада $\approx 3,5$ сек. Самым короткоживущим из известных изотопов по отношению к спонтанному делению является Fm^{256} со значением периода полураспада $T_{\alpha} = 2,7$ часа.

Вероятно, и в данном случае мы имеем дело со спонтанным делением одного и того же ядра из изомерного состояния, к которому приводят обе исследуемые реакции.

Следует заметить, что при изучении свойств распада изотопа 102^{254} , образующегося в реакции $Sm^{246} (C^{12}, 4n) 102^{254}$, калифорнийская группа наблюдала спонтанно делящийся продукт с периодом полураспада ~ 3 сек^{/6/}. Несмотря на неожиданно большую долю распадов путем спонтанного деления (30%), что на много порядков превосходит оценки, авторы приписали наблюдаемый эффект спонтанному делению изотопа 102^{254} /7/ и дали значение периода полураспада по отношению к спонтанному делению T_{α} , равное 7 сек^{/8,9/}. Такое увеличение вероятности деления для 102^{254} теоретически объяснил Юханссон^{/8/}.

Однако столь высокая вероятность спонтанного деления 102^{254} нам кажется удивительной. Разумно предположить, что при облучении кюриевой мишени ионами C^{12} , как и в реакциях $U^{238} + Ne^{20}$ и $U^{238} + O^{16}$, образуется спонтанно делящийся изомер с $T_{\alpha} = 3,5$ сек, распад которого мог быть приписан спонтанному делению 102^{254} .

Идентификация спонтанно делящегося ядра и исследование свойств изомерного состояния будут произведены в дальнейших опытах, где мы намерены изучить реакции под действием более легких частиц.

Авторы весьма признательны Г.Н. Флерову за руководство работой и интерес к ней, Е.Д. Донцу и В.П. Перельгину за помощь в проведении некоторых экспериментов и полезные дискуссии.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Л.П. Челнокова, Э.Г.Имаева, Б.В. Щитова за помощь в работе и сотрудников группы эксплуатации у-300, обеспечивших проведение данных опытов на интенсивных пучках ионов неона и кислорода.

Т а б л и ц а

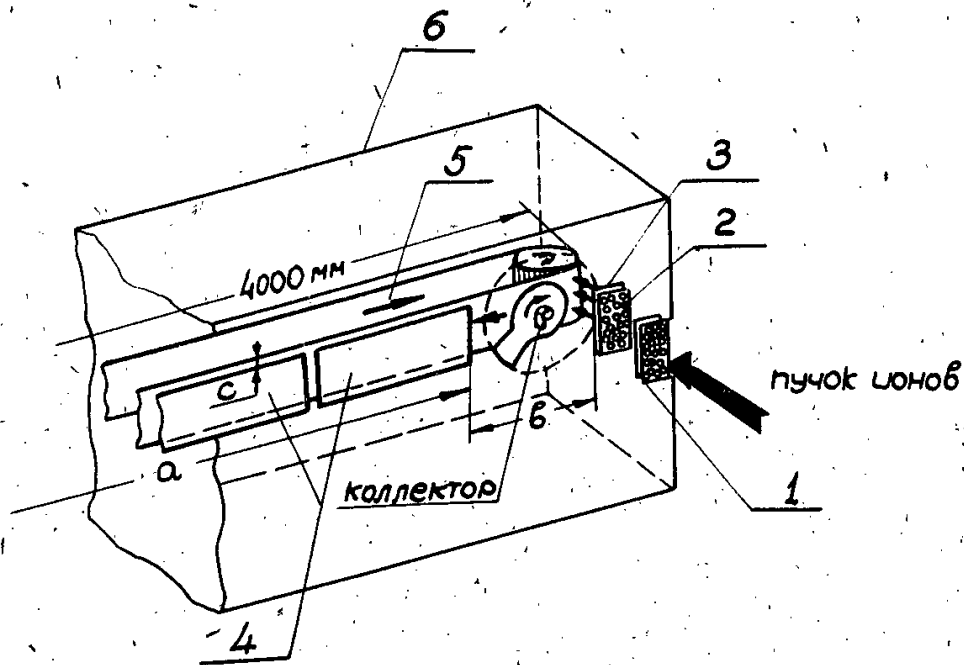
Выход спонтанно делящихся ядер с периодом полураспада $(3,5 \pm 0,7)$ сек при облучении 4 мг/см^2 урана ионами Ne^{20} и O^{16} .

$U^{238} + \text{Ne}^{20}$		$U^{238} + \text{O}^{16}$	
Максим. энергия на слой, Мэв	Выход на один падающий ион	Максим. энергия на слой, Мэв	Выход на один падающий ион
110	$6,5 \cdot 10^{-15}$	95	$4,0 \cdot 10^{-15}$
115	$9,0 \cdot 10^{-15}$	100	$4,5 \cdot 10^{-15}$
135	$1,2 \cdot 10^{-14}$	105	$5,5 \cdot 10^{-15}$

Л и т е р а т у р а

1. С.М. Поликанов, В.А. Друин, В.А. Карнаухов, В.Л. Михеев, А.А. Плева, Н.К. Скобелев, В.Г. Субботин, Г.М. Тер-Акопян, В.А. Фомичев. ЖЭТФ, 42, 1464 (1962).
2. С.М. Поликанов, Ван Тун-сен, Х. Кекк, В.Л. Михеев, Ю.Ц. Оганесян, А.А. Плева, Б.В. Фефилов. ЖЭТФ, 44, 804 (1963).
3. Г.Н. Флеров, С.М. Поликанов, К.А. Гаврилов, В.Л. Михеев, В.П. Перельгин, А.А. Плева. ЖЭТФ, 45, 1398 (1963).
4. В.А. Друин, Н.К. Скобелев, Б.В. Фефилов, Г.Н. Флеров. Препринт ОИЯИ Р-1580, Дубна, 1964.
5. В.П. Перельгин, С.П. Третьякова, И. Звара. Препринт ОИЯИ 1323, Дубна, 1963.
6. А. Гиорсо. Атомная Энергия, 7, 338 (1959). Доклад на VIII Менделеевском съезде (Москва).
7. A.Ghiorso. Proceed. Second Conf. Reaction between Complex Nuclei. Gatlinburg, p. 195 (1960).
8. S.Johansson. Report UCRL - 10474, September 25, 1962.
9. R.Brandt. Report UCRL - 10481 (Ph. D. Thesis). September 26, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1964 г.



Р и с. 1. Схематическое устройство пробника.
1-входное окно, 2-кассета, 3-мишень, 4-детекторы
осколков деления, 5-бесконечная лента, 6-кожух.

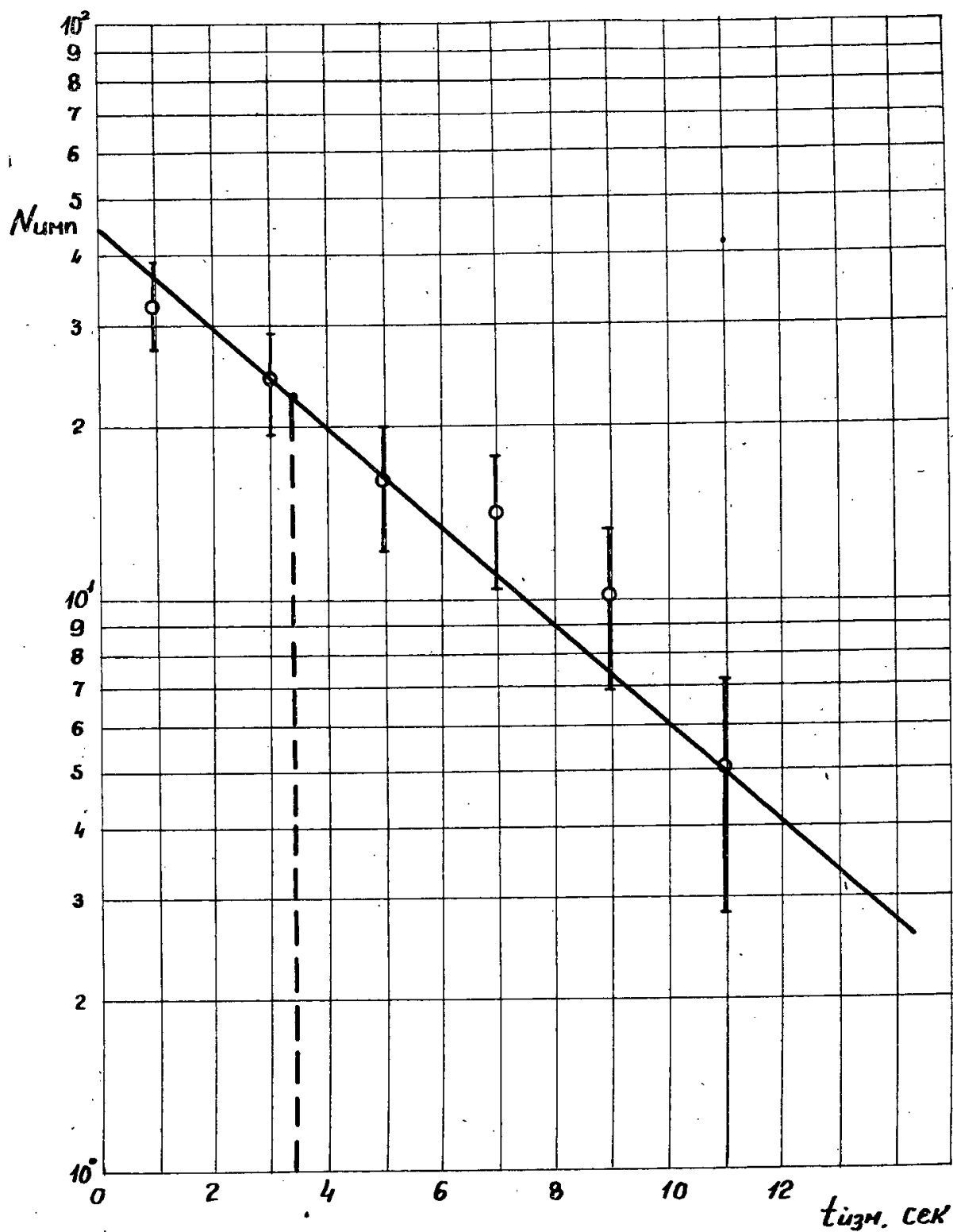
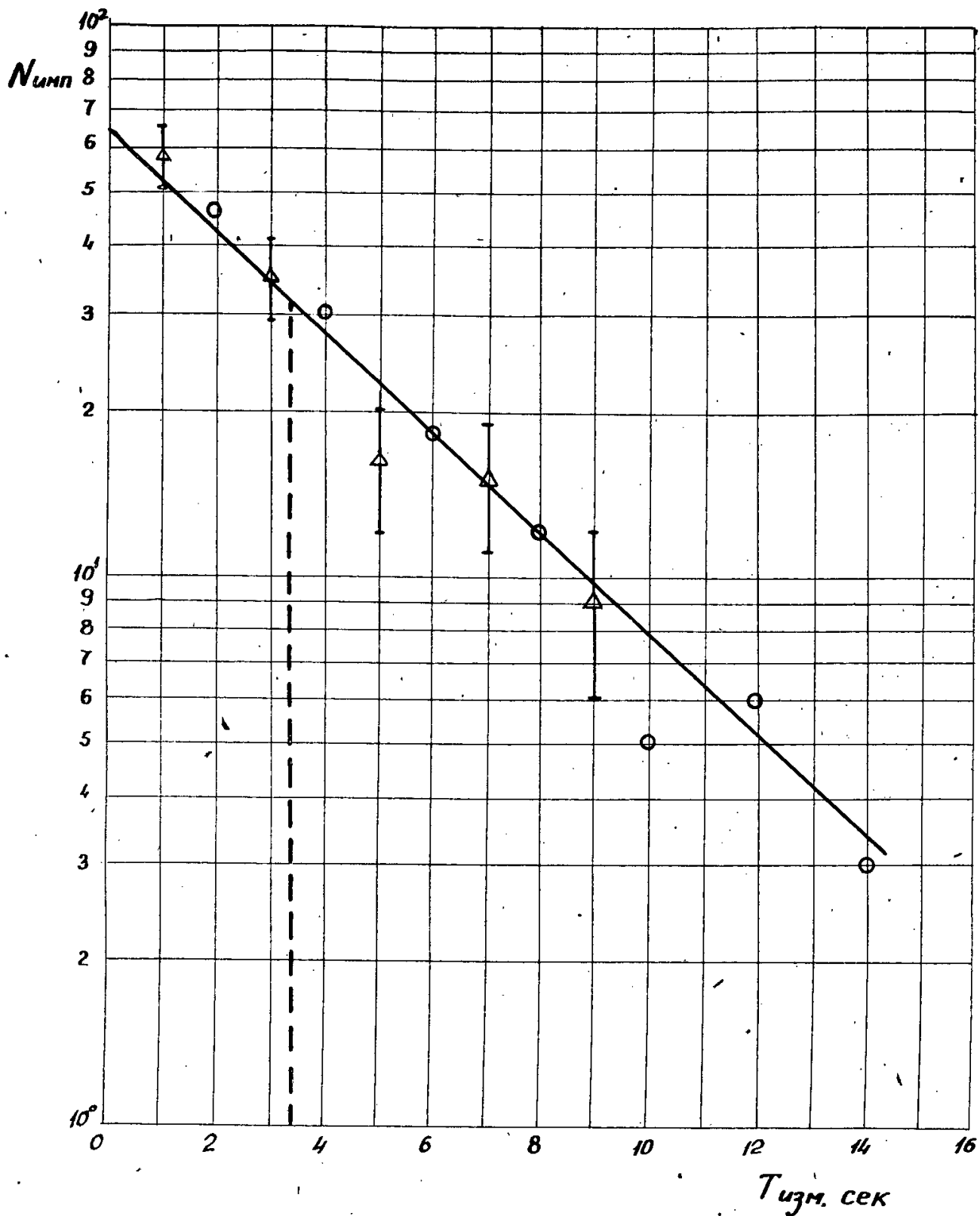


Рис. 3. Кривая распада продуктов ядерной реакции $U^{238} + O^{16}$.



Р. и с. 2. Кривая распада продуктов ядерной реакции $U^{238} + Ne^{20}$.
(O - данные, полученные на пробнике с бесконечной лентой.
Δ - данные, полученные на пробнике с наклонной мишенью).

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ **3734**..... Тираж **310** **0,6** уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. **Апрель** 1984 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

D.K.Kopylova, V.B.Ljubimov and M.Spirchez

E-1557

ON THE MEAN NUMBER OF π^0 MESONS PRODUCED
IN INELASTIC π^- PROTON COLLISIONS AT 6-8 GeV/c

Дубна 1964

E-1557

Копылова Д.К., Любимов В.Б., М. Спыркез

Среднее число π^0 -мезонов, образованных
в неупругих π^- -протон столкновениях при 6-8 Бэв/с

По электронно-позитронным парам определено среднее число π^0 -мезонов, образованных в неупругих двухлучевых $\pi^- p$ -взаимодействиях при 6,8 и 7,5 Гэв/с, сопровождающихся испусканием медленного протона с импульсом от 180 до 500 Мэв/с. Число π^0 -мезонов оказалось равным $0,6 \pm 0,2$. В то же время из распределения событий по недостающим массам следует, что это число не должно быть меньше двух. С этим, возможно, связано наблюдаемое низкое значение среднего продольного импульса всех вторичных частиц. Полученные результаты скорее всего относятся к группе взаимодействий, в которых импульс вторичного π^- -мезона больше 1,5 Гэв/с.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.**

E-1557

Kopylova D.K., Ljubimov V.B., Spirchez M.

On the Mean Number of π^0 Mesons Produced in
Inelastic π^- Proton Collisions at 6-8 GeV/c

The mean number of π^0 mesons produced in inelastic $\pi^- p$ two prong collisions at 6.8 and 7.5 GeV/c has been studied by means of converted electron-positron pairs. A rather small value equal to 0.6 ± 0.2 has been found. At the same time the missing mass distribution for these events is peaked approximately at a value corresponding to $2\pi^0$. The low value of the total longitudinal momentum of secondary particles (4501 ± 446) MeV/c might be connected with the above mentioned results. It is very probable that a great contribution to these results is due to those collisions in which the momentum of the secondary π^- is greater than 1.5 GeV/c.

**Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.**

D.K.Kopylova, V.B.Ljubimov and M.Spirchez

E-1557

ON THE MEAN NUMBER OF π^0 MESONS PRODUCED
IN INELASTIC π^- PROTON COLLISIONS AT 6-8 GeV/c

Дубна 1964

This paper is concerned with the study of the multiplicity of π^0 mesons produced in π^- -proton (πp) two prong inelastic interactions at 6.8 and 7.5 GeV/c incident pion energy. The experiment was performed in the propane bubble chamber (24 litre) exposed at the synchrophasotron in Dubna.

The set of data consists of two samples. The first one was obtained with incident π^- -mesons of momentum (6.8 ± 0.6) GeV/c. It constituted also a part of the material analysed in ^{1,2/}. The other sample was obtained with incident π^- -mesons of momentum (7.5 ± 0.6) GeV/c.

The main purpose of this work was to continue the investigation performed in ^{2/} and to check on an enlarged statistics the validity of some results found there.

1. Selection Criteria

During the scanning the two prong πp interactions were visually selected by the well known criteria described in ^{3/}. The scanning efficiency was 98%. Only those events having a black prong among secondaries were taken for the further analysis. All black prongs of positively charged secondaries were considered protons and negatively ones π^- -mesons.

The events in the first sample were measured and momenta and angles of the outgoing particles were calculated. Further we chose only those events in which the secondary proton had a momentum P ($180 < P < 500$) MeV/c.

For each event we calculated the value

$$M_t = \sum (E_i - P_i \cos \theta_i)$$

where E_i , P_i , θ_i means respectively the energy, momentum and emission angle of the i -th secondary particle, in the laboratory system. The M_t value should not be greater than $1.1 \text{ GeV}/c^2$.

From all two prong events selected by these criteria we excluded the elastic and quasielastic ones imposing kinematical conditions (complanarity, angle-angle relation).

At last the missing mass criterium ^{1/} was applied in order to eliminate quasielastic and pion-carbon collisions. So, as it follows from ^{1,4/} quasielastic events in any case are not altering our sample.

For the first sample, ~ 3000 pictures were scanned. From the total of 279 two prong stars with one black track, only 52 satisfied all the above mentioned criteria and they constituted the first part of our material.

For the second sample, ~ 6000 pictures were scanned and 601 two prong events were selected by the same visual criteria as for the first one. Since we were interested only in the total number of inelastic πp events and not in the kinematical characteristics of the tracks, we considered that it is not necessary to perform complete measurements. However we tried to eliminate more carefully the events which did not fulfil the condition ($180 < P < 500$) MeV/c. In order to do this, we measured all doubtful events. Then, by mere comparison of the ratio of inelastic πp to the total number of two prong events, we evaluated the number of inelastic πp events in the second sample. Because of the nearly equal incoming energy and the equal number of primary tracks which led to an interaction in both samples, we considered that by these means at any rate we do not overestimate the number of inelastic πp collisions. In this way we found it to be 112.

2. Analysis of Electron-Positron Pairs.

All electron-positron pairs which visually emerged from the point of interaction were registered. The events for which at least one pair has been found were completely measured in both samples. The number of πp interactions among them was established by applying all criteria described for the first sample. After calculations it was finally settled which pairs producing gammas really originated in the primary observed star. Altogether we found 6 photons in the first sample and 19 in the second one.

For each photon a correction W ("statistical weight"), which takes into account the dependence of registration effectiveness on geometric conditions and energy, was introduced. We got the total number of photons produced in our set and we calculated the mean number of photons for one interaction (Table I). One must not forget that the main assumption underlying our investigation was that at least one neutral particle is produced in every selected event. In this respect, if we consider that all γ quanta originate from meson decay we see that the average number of these π^0 's within limits of 3 standard errors is smaller than one. The same result is obtained in each sample and in their sum. We thought it interesting too, to plot the missing mass (M_x) distribution (Fig.1). From the already mentioned result of low number of produced π^0 mesons one should expect the maximum to lie approximately at one pion rest mass. The experimental distribution (Fig.1), (missing mass for the first sample) contradicts this fact.

As in the second sample we had at our disposal only the M_x values for events with registered γ (let us call them, hereafter $\pi p \gamma$) we plotted them together with the same kind of events from the first sample (Fig.2). The evaluated mean number of π^0 mesons for $\pi p \gamma$ events is 1.2 ± 0.4 .

Further, we have divided our material into two parts according to the momentum P_{π^-} of the outgoing π^- -meson, as follows: A) - events, with $P_{\pi^-} < 1.5 \text{ GeV}/c$, and B) - events, with $P_{\pi^-} > 1.5 \text{ GeV}/c$. We determined the number of γ 's per interaction, separately for A and B. As is shown in Table II this number is very low for the set B. It is very likely that the small value obtained for the whole material is due mainly to the contribution of the set B. In the set A we obtained a greater value, but unfortunately the statistical error is too large.

A study of the multiplicity of π^0 has been carried out elsewhere^{5,6,7,8/}. We wish to mention that the number of π^0 mesons obtained by analysing the correlated γ quanta^{5,6/} leads to a smaller value than that found by indirect methods (kinematical analysis).

3. Conservation of Longitudinal Momentum.

The constrain of longitudinal momentum conservation was applied both for set A and B and for their sum. As in our sample we found $2V^0$ particles, we included also their contribution. In Table III we give the values of mean longitudinal momentum $P_{||}$ for each secondary particle. The balance of longitudinal momentum is not fulfilled within limits of 3 standard errors for the whole sample, and separately for set B.

A similar analysis has been carried out using the mean value of the quantity M_t , defined above. The mean value of M_t should be equal to the proton rest mass, independently of the primary energy. We considered worth-while to check it because our material consists of two samples of different incident energy. The results are given in the last row of Table III. It turns out that B set continues again to show a significant discrepancy with the expected value. Naturally this feature influences the appropriate value obtained for the whole material.

4. Conclusions

The mean number of π^0 mesons in inelastic πp collisions has been evaluated by studying electron-positron pairs converting in a propane bubble chamber, at two different incident energies (6.8 and 7.5 GeV/c). Events with $P_{\pi^-} > 1.5 \text{ GeV}/c$ could be responsible for the very low value obtained (0.6 \pm 0.2). From the shape of the missing mass distribution one should expect at least $2\pi^0$ to be produced. By summarizing the mean longitudinal momentum of all secondary particles one obtains a value significantly smaller than 6.8 GeV/c , which was the lower primary energy of our samples.

Another advantageous check is the evaluation of the M_t value (which is independent of the incident momentum). We calculated this value and the result is again significantly smaller than the expected one.

It seems that a large contribution to all these results is due to events with $P_{\pi^-} > 1.5 \text{ GeV}/c$.

We should like to express our gratitude to M.I.Podgoretsky for many useful discussions and valuable advices, to Prof. V.I.Veksler, for his permanent interest in this work, and to A.C.Mihul for interesting discussions.

References

1. D.K.Kopylova, V.B.Ljubimov, M.I.Podgoretsky, X.Risaev, Z.Trka. JETP, 44, 1481 (1963).
2. D.K.Kopylova, V.B.Ljubimov, M.I.Podgoretsky. Report LHE, of JINR (1963).
3. N.G.Birger, Van Gan-chan, Van Tsu-tsen, Din Da-Tzao, Ju.V.Katishev, E.N.Kladnitskaja, D.K.Kopylova, V.B.Ljubimov, Nguen Din Tu, A.V.Nikitin, M.I.Podgoretsky, Ju.A.Smorodin, M.I.Soloviev, Z.Trka, JETP, 41, 1461 (1961).
4. K.Kopylova, V.B.Ljubimov, M.I.Podgoretsky, Z.Trka. Preprint JINR 1186 (1963).
5. V.B.Ljubimov, A.V.Nikitin, Z.Trka. Preprint JINR, P-974 (1962).
6. D.T.King. Bull. Am. Phys. Soc., 8, 560, (1963).
7. V.Petrzilka. Proc. of the Rochester Conf., p. 82 (1960).
8. H.Hulubei, C.Besliu, T.Besliu, A.Constantinescu, M.Gavrilas, A.Mihul, E.Balea, O.Balea, V.Balint, I.Curelaru, I.Makarovitsch, D.Mumuianu, T.Ponta, C.Potoceanu, M.Sabau. Preprint Bucharest, HE/50 (1963).

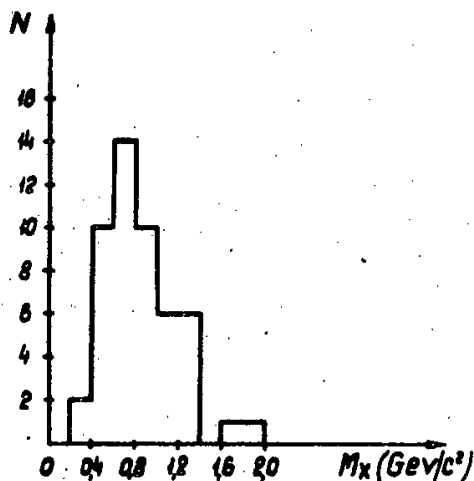


Fig. 1. Distribution of M_x values (first sample).

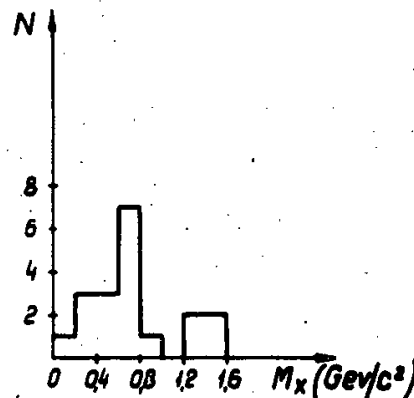


Fig. 2. Distribution of M_x values ($\pi p \gamma$ events from both samples).

Table I

Energy	Number of two prong events	Number of inelastic events	Observed number of photons	Calculated total number of photons	Number of photons per interaction
6.8	279	52	6	49 ± 20	0.9 ± 0.4
7.5	601	112	19	143 ± 33	1.3 ± 0.3
6.8 ± 7.5	880	164	25	192 ± 38	1.1 ± 0.3

Table II

Momentum of secondary π^- (GeV/c)	Number of inelastic events	Observed number of photons	Calculated total number of photons	Number of photons per interaction
$P_{\pi^-} < 1.5$ (A)	44	14	120 ± 32	2.9 ± 1.1
$P_{\pi^-} > 1.5$ (B)	120	11	72 ± 22	0.6 ± 0.2

Table III

	A	B	A+B
$\bar{P}_{ } \pi^-$	787 ± 20	3690 ± 221	2908 ± 243
$\bar{P}_{ } p$	252 ± 38	213 ± 11	225 ± 14
$\bar{P}_{ } \gamma$	3065 ± 1375	562 ± 219	1204 ± 336
$\bar{P}_{ } K^0$	—	164 ± 164	164 ± 164
$\Sigma \bar{P}_{ }$	4396 ± 1380	4629 ± 351	4501 ± 446
M_t	906 ± 42	804 ± 18	830 ± 17

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3594. Тираж 310. 0,4 уч.-изд. л.
Техн. ред. В.Р.Саранцева Февраль 1964 г.

5



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.А.Беляков, В.И.Векслер, Н.М.Вилясов, Е.Н.Кладницкая,
Г.И.Копылов, А.Михул, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев

STAT

P-1506

π -МЕЗОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ,
РОЖДЕННЫЕ СО СТРАННЫМИ ЧАСТИЦАМИ
В π^- -р ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ 7,5 ГЭВ/С

Дубна 1964

Беляков В.А., Векслер В.И., Вирясов Н.М., Р-1506
Кладницкая Е.Н., Копылов Г.И., Михул А., Пенев В.Н.,
Соколова Е.С., Соловьев М.И.

π -мезонные резонансы, рожденные со странными частицами в π - p взаимодействиях при 7,5 Гэв/с.

Исследовались π -мезонные резонансы, образующиеся совместно со странными частицами. Обнаружено рождение ρ -мезонов совместно с ΛK -парами в событиях с множественностью заряженных частиц $n_s = 4$, с сечением $\sigma = (20 \pm 8) \text{ мкбарн}$. Приводятся оценки рождения ω - и η -резонансов. Обсуждается пик в распределении эффективных масс четырех пионов в области 1340 Мэв.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна 1964 .

Belyakov V.A., Veksler V.I., Viryasov N.M., R-1506
Kladnitskaya E.N., Kopylov G.I., Mihul A., Penev V.N.,
Sokolova E.S., Soloviev M.I.,

Pion Resonances Produced Together With Strange
Particles in π - p Interactions at 7 GeV/c

The pion resonances produced together with strange particles have been investigated. It was found that the ρ -meson is produced together with ΛK pairs in the events with the multiplicity of charged particles $n_s = 4$. The cross section for such production σ is equal to $(20 \pm 8) \mu\text{b}$. The estimates for ω and η resonance production are given. The peak in the distribution of the effective masses of four pions in the energy region of 1340 MeV is discussed.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

В.А.Беляков, В.И.Вакслер, Н.М.Вирясов, Е.Н.Кладницкая,
Г.И.Копылов, А.Михул,^{х)} В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев

π -МЕЗОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ,
РОЖДЕННЫЕ СО СТРАННЫМИ ЧАСТИЦАМИ
В π^-p ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ 7,5 ГЭВ/С

Направлено в ЖЭТФ

х) Сотрудник Института Атомной физики Румынской Академии наук, Бухарест.

В в е д е н и е

Работа выполнена с помощью 24-литровой пропановой пузырьковой камеры /1/ и является продолжением работ по изучению генерации странных частиц /2,3,4,5/ и π^- -мезонов в пучке π^- -мезонов 7,5 Гэв.

Изучались резонансы π^- -мезонов, рожденных во взаимодействиях типа:

$$\begin{aligned} \pi^- p &\rightarrow \Lambda(\Sigma^0) + K^0 + m\pi, \\ &\rightarrow \Lambda(\Sigma^0) + K^+ + m\pi, \\ &\rightarrow K^0 + \bar{K}^0 + p(n) + m\pi, \\ &\rightarrow K^0 + K^- + p(n) + m\pi, \\ &\rightarrow \bar{K}^0 + K^+ + p(n) + m\pi, \\ &\rightarrow K^0 + \Sigma^+ + m\pi, \\ &\rightarrow K^0 + \Sigma^- + m\pi; \end{aligned}$$

где m - число π^- -мезонов.

При отборе реакций на протонах использовались следующие критерии:

1. В звезде, к которой принадлежит Λ -гиперон или K^- -мезон (ΛK^- -или $K^- K^-$ -пара), не наблюдается следов протонов испарения.

2. Суммарный заряд вторичных частиц равен нулю.

3. В событии идентифицирован не более чем один барион.

4. Масса мишени /6/ меньше или равна массе нуклона.

5. Недостающая масса /7/ $\omega = (\Delta E^2 - |\Delta \vec{P}|^2)^{1/2}$, где ΔE и $\Delta \vec{P}$ -разности энергий и импульсов между первичными частицами / $\Delta E = E_0 - \sum_{i=1}^n E_i$, $\Delta \vec{P} = \vec{P}_0 - \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$ /, должна быть вещественной. Ввиду разброса в импульсах первичных частиц действие критерия /5/ распространяется лишь на те события, в которых $\Delta E > 0$ и $|\vec{P}_0| - |\sum_{i=1}^n \vec{P}_i| > 0$. В тех случаях, когда указанные условия не выполнялись, при расчете недостающей массы мы изменяли импульс первичного π^- -мезона в допустимых пределах. Если при максимально возможном изменении величины импульса первичной частицы величина ω^2 оставалась отрицательной, то событие из рассмотрения исключалось.

Эффективные массы различных комбинаций π^- -мезонов рассчитывались по формуле

$$M_{\text{эфф.}}^2 = (E_1 + E_2 + \dots + E_{i+n})^2 - (\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_{i+n})^2,$$

где E_i и \bar{p}_i - энергии и импульсы рождающихся π -мезонов. Ошибки в значении эффективной массы определяются точностью определения координат, импульсов и углов в нашей камере^{/8/}. Отношения $\frac{\Delta M_{\text{эфф.}}}{M_{\text{эфф.}}}$, где $\Delta M_{\text{эфф.}}$ - ошибка в значении эффективной массы, почти не зависят от величины $M_{\text{эфф.}}$. Для разных систем π -мезонов они приведены в таблице 1.

В таблице II приведены данные по числу событий, использованных в построениях спектров эффективных масс для разных множественностей n . Все события разделены на 2 группы: первая группа / Λ / состоит из взаимодействий, от которых зарегистрированы либо обе частицы из пары странных частиц / $\Lambda K^0, +$ / , либо только Λ -гиперон; во вторую группу входят такие взаимодействия, от которых в камере видны либо оба K -мезона ($K\bar{K}$ -пары), либо только один из них.

V^0 -события, не поддающиеся однозначной идентификации, считались Λ -гиперонами на основании заключений, сделанных в работе^{/8/}.

Предварительные результаты этой работы были доложены на Женевской конференции по физике высоких энергий в 1962 году^{/9/}. Что касается результатов изучения резонансов, состоящих из странных частиц и π -мезонов, предварительные данные о которых докладывались там же^{/9/}, то они будут опубликованы отдельно.

§ 1. ρ -мезон

Изучению рождения и свойств ρ -мезона посвящено много экспериментальных и теоретических работ (см., например,^{/10/}). Можно считать твердо установленными квантовые числа ρ -мезона ($J^P I G$) = (1, -1, 1, 1). В ряде работ^{/11/} подчеркивался факт преимущественного рождения ρ -мезона в событиях с малыми передачами четырехмерного импульса, а также то, что рождение ρ -мезона сопровождается рождением изобары $N_{3/2, 3/2}$ ^{/12/}. Сведения о генерации ρ -мезона в π - p взаимодействиях с рождением странных частиц сейчас еще недостаточны. Бижи и др.^{/13/}, изучавшие рождение пар / $K^0 \bar{K}^0$ / и / ΛK^0 / π -мезонами с импульсом 10 Гэв/с на водороде, ρ -мезона не обнаружили.

В настоящей работе приводится доказательство рождения ρ -мезона совместно со странными частицами. Нами установлено, что ρ -мезон рождается только в событиях с множественностью заряженных частиц $n_c = 4$. Вклад ρ -мезона в распределение эффективных масс ($\pi^+ \pi^-$)-комбинаций для группы событий, в которых рождается Λ -гиперон, составляет (11 \pm 2)%, что соответствует сечению (20 \pm 8) мкбарн.

На рис. 1а и 1б представлены гистограмма и идеограмма распределений $(\pi^+ \pi^-)$ -комбинаций. В качестве фоновой кривой использовано гладкое распределение $M_{\pi^+ \pi^-}$ от событий с Λ -частицами. Кроме того, там же приведена кривая, рассчитанная по статистической теории (см. далее § 3, п.2). Распределение $M_{\pi^+ \pi^-}$ от случаев с рождением K^0 -мезонов также имеет пик при энергии, соответствующей ρ -мезону (рис. 2), но ρ -мезон составляет здесь не более 5% от всех событий. Если учесть, что примерно 1/3 событий с зарегистрированным K^0 -мезоном относится к случаям с рождением ΛK^0 -пары^{1/3/}, а также учесть установленный процент рождения ρ -мезона с ΛK^0 -парами, то можно заключить, что ρ -мезонный пик в этом распределении обусловлен теми случаями, в которых рождаются ΛK^0 -пары. Положение пика в спектре для звезд с Λ -гипероном и полуширина, оцененные по формуле Брайта-Вигнера $\approx \frac{1}{(M - M_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$, получились равными: $M_0 = 730$ Мэв и $\Gamma/2 = 80$ Мэв. Естественная ширина Γ определялась по соотношению $(\frac{\Gamma}{2})^2 = (\frac{\Gamma'}{2})^2 - \Delta M^2$, где Γ' - ширина, определяемая экспериментально, а ΔM - разрешающая способность, равная для области пика 26 Мэв.

Случаи из области ρ -мезонного пика подвергались дальнейшему анализу. При этом оказалось:

1. Рождение ρ -мезона совсем нечувствительно к величине переданного четырехмерного импульса $|\vec{\Delta}|^2 = |\vec{\Delta}'|^2 - \Delta_0^2$, где $\vec{\Delta}'$ и Δ_0 -разности импульсов и энергий барионов до и после взаимодействия. На рис. 3 представлены распределения $M_{\pi^+ \pi^-}$ для случаев с Λ -гиперонами $n = 4$ для разных переданных импульсов: а) $|\vec{\Delta}'| < 700$ Мэв, б) $|\vec{\Delta}'| < 900$ Мэв и в) $|\vec{\Delta}'| < 1100$ Мэв. Если принять за область, отвечающую ρ -мезону, значения от 650 до 850 Мэв, то вклад этой области относительно остальной части спектра составляет для а) $(31 \pm 9)\%$, для б) $(32 \pm 6)\%$ и для в) $(30 \pm 5)\%$. Видно, что все три величины совпадают. Аналогичный эффект был обнаружен в работе по исследованию множественного рождения π -мезонов при импульсе 10 Гэв/с^{14/}. Для малых энергий первичного пучка в ряде работ отмечалось, что рождение ρ -мезона преобладает при малых передачах импульса, когда $|\vec{\Delta}'| < 400 - 500$ Мэв.

2. Угловое распределение ρ -мезонов (рис. 4) в с.ц.м. пион-протон качественно повторяет распределения π^+ -мезонов, сопровождающих рождение Λ -гиперонов^{1/2/}, но для ρ -мезонов оно сильнее вытянуто вперед. Угловые распределения π^+ , π^- и ρ -мезонов в с.ц.м. можно охарактеризовать соотношениями:

$$\frac{\vec{n}_{\pi^+}}{n_{\pi^+}} = 1,34 + 0,19; \quad \frac{\vec{n}_{\pi^-}}{n_{\pi^-}} = 1,23 + 0,17; \quad \frac{\vec{n}_{\rho}}{n_{\rho}} = 2,6 + 0,7.$$

3. В системе покоя ρ -мезона π^+ -мезоны имеют почти изотропное распределение (рис. 5). По тексту Колмогорова-Смирнова совпадение этого распределения с изотропным оценено в 8%.

4. Из работ, посвященных поискам ρ -мезона, видно, что в ряде случаев (см., например, /12/), когда речь идет о $\pi^+ - \rho^-$ взаимодействиях, ρ -мезон рождается вместе с нуклонной изобарой $N_{3/2, 3/2}$. Наши данные не противоречат факту совместного рождения ρ -мезона и Y_1^* -гиперона с массой 1380 Мэв. На рис. 6 показано распределение масс $(\Lambda \pi^\mp)$ -комбинаций для тех π^\mp -мезонов, которые не попали в область пика ρ -мезона 650-850 Мэв, но родились вместе с π^\mp -мезонами, которые входят в область пика ρ -мезона.

5. Нами получены средние значения импульсов ρ -мезонов, рожденных в наших реакциях:

$$\begin{aligned} \bar{P}_\rho^* &= 0,627 \text{ Гэв/с}, & \bar{P}^* &= 0,250 \text{ Гэв/с}, \\ \bar{P}_\rho &= 2,67 \text{ Гэв/с}, & \bar{P}_{\rho L}^* &= 0,423 \text{ Гэв/с}. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения:

- \bar{P}_ρ^* - средний импульс ρ -мезона в с.ц.м.,
- \bar{P}_ρ - средний импульс ρ -мезона в лаб. системе,
- $\bar{P}_{\rho L}^*$ - продольный импульс в с.ц.м.,
- $\bar{P}_{\rho \perp}$ - поперечный импульс.

§ 2. ω -, η - и δ -мезоны ?

Низкая эффективность регистрации γ -квантов в кашей камере (10%), а также неточное знание импульса первичного пучка не позволяют нам непосредственно исследовать рождение η - и ω -частиц. Мы получили о них лишь косвенные данные.

В распределение эффективных масс $(\pi^+ \pi^-)$ -комбинаций для $n_s = 4$ имеется избыток случаев над фоновыми кривыми (рис. 1) в тех областях, которые соответствуют величинам $M_{\pi^+ \pi^-}$ для η - и ω -мезонов. Величины $M_{\pi^+ \pi^-}$ для π^\pm -мезонов от распада η - и ω -частиц заключены в пределах от $2m_\pi$ до $m_{\eta, \omega} - m_\pi$, т.е. от 0,28 Гэв до 0,64 Гэв для ω -мезона и до 0,31 Гэв для η -мезона. Предполагая, что эти отклонения действительно обусловлены η и ω -частицами, мы можем оценить величину вклада этих резонансов. Используя диаграммы Далитца из работ /12/, /15/, мы получили кривые для $M_{\pi^+ \pi^-}$ от η - и ω -мезонов. Они вместе с фоновой кривой и с кривой Брайта-Вигнера для ρ -мезона подгонялись под экспериментальное распределение. Эти кривые изображены на рис. 16. Результаты свидетельствуют о том, что η -мезон, распадающийся по схеме $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, рождается в $(4 \pm 2)\%$ случаев, и $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ - в $(13 \pm 2)\%$ случаев. Это соответствует сечениям $\sigma_\eta = (7 \pm 5)$ мкбарн и $\sigma_\omega = (24 \pm 9)$ мкбарн. Если считать, что избыток случаев в

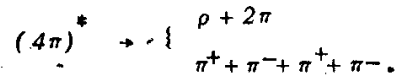
распределении $M_{\pi^+\pi^-}$ в области ≈ 500 Мэв обусловлен распадом ω -частиц, то тогда наши данные обнаруживают факт совместного рождения ρ и ω -мезонов. Действительно, об этом свидетельствует приведенный на рис. 7 спектр $M_{\pi^+\pi^-}$ для событий, в которых эффективная масса двух других π -мезонов попала в область, соответствующую ρ -мезону, т.е. $650 < M_{\pi^+\pi^-} < 850$ Мэв. Сечение совместного рождения ρ и ω -мезонов мы оцениваем в ≤ 10 мкбарн. Рождение ω -частиц, так же как и ρ -мезонов, оказывается нечувствительным к величине переданного импульса (см. рис. 3).

Спектры масс $(\pi^+\pi^-)$ -комбинаций для множественности заряженных частиц, равной 2, одинаковы для случаев с Λ и K^0 -частицами, но имеют совсем другой характер, чем для $n_s = 4$. На рис. 8а представлен суммарный спектр масс $(\pi^+\pi^-)$ -комбинаций для $n_s = 2$. Случаи группируются около значений масс ≈ 400 и $600-700$ Мэв, причем как для звезд с Λ -гипероном, так и для звезд с K^0 -мезоном, спектры подобны. Пик при 400 Мэв можно объяснить наличием в спектрах $M_{\Lambda\pi^\pm}$ возбужденного гиперона Y^* , а также примесью событий с неоднозначно идентифицированными частицами (т.е. примесью случаев, когда K -частица считалась π -мезоном). Максимум при значении $M_{\pi^+\pi^-} = 630$ Мэв можно отождествить с наблюдаемым ранее ζ^0 -мезоном. Поскольку значения массы ζ^0 -мезона колеблются в разных работах, Русс^{/16/} предложил идею о существовании 2-х ζ^0 -мезонов - одного с массой $M(\zeta^\pm) = 565 \pm 10$ Мэв и другого - с массой $M(\delta^\pm) = 625$ Мэв. Доказательства существования ζ -и δ -мезонов сейчас еще недостаточно надежны, а в ряде работ^{/11,12,17/} они не были обнаружены вообще. На основании наших результатов получить дополнительные аргументы в пользу существования этих частиц нельзя, так как наши данные допускают другую интерпретацию пика при $M_{\pi^+\pi^-} = 630$ Мэв, состоящую в том, что этот пик является результатом влияния резонанса в $(K^+\pi^-)$ или $(K^0\pi^+)$ -системах при $M = 880$ Мэв. Распределения $M_{K^+\pi^-}$ для случаев рождения ΛK^+ пар дают указание на то, что в некоторой доле событий рождается резонанс K^* с массой 880 Мэв, причем события, образующие этот резонанс, попадают в область пика ≈ 630 Мэв на распределении $M_{\pi^+\pi^-}$ (рис. 8), если K^+ -мезоны в них заменены π^+ -мезонами. Исследование спектров масс $M_{K^0\pi^+}$ и $M_{K^+\pi^+}$ показало, что в событиях с рождением ΛK^0 пар для множественности заряженных частиц $n_s = 2$ резонансов в $K\pi$ -системе нет. Таким образом, случаи, образующие выброс при ≈ 630 Мэв, по-видимому, принадлежат (ΛK^+) -парам^{х)}.

х) События с одним зарегистрированным K^0 -мезоном состоят на 1/3 из ΛK^0 -пар и на 2/3 из ΛK^+ -пар. К этим событиям мы относим и $(K^0\bar{K}^0)$ -пары, в которых обе частицы зарегистрированы в камере.

§ 3. (4 π) -система

На Женевской конференции 1962 года мы сообщали^{/9/} о возможности образования резонанса в системе из четырех π-мезонов. Масса этого резонанса указывалась равной 1340±70 Мэв и распад по схеме



На рис. 9 приведены $M_{\pi^+\pi^-}$ и $M_{\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-}$ для π^{\mp} -мезонов, образующих пик в распределении $M_{4\pi}$ (рис. 10), ($1,3 < M_{4\pi} < 1,4$ Гэв).

Были сделаны попытки на старом статистическом материале более критически проверить достоверность этого пика и его свойства.

1. Необходимо убедиться, что примеси фоновых случаев не дают неравномерного распределения.

С помощью измерения ионизации, δ-электронов и исследования недостающей массы из общего числа случаев были выделены события, которые можно считать /ΛK⁺/-парами и парами /K⁰(K⁰)K⁻(K⁺)/. Распределения масс $K^+\pi^-\pi^+\pi^-$ или $K^+\pi^+\pi^-\pi^-$ -систем (K⁺ и K⁻ считались π-мезонами) не дают скопления случаев в области пика. На пик не влияют также примеси π⁻-C взаимодействий с квазисвободными нуклонами.

2. Фон в распределении эффективных масс оценивался разными методами. Статистическим фоном для распределения эффективных масс ν-частиц (ν = 1, 2, 3, ...) мы считали кривые, полученные на основании следующего выражения^{/20/}:

$$\frac{dW}{dM_\nu} = f(T) \left\{ \frac{\prod_i (2s_i + 1)^{\sigma_i}}{\prod_i N_i!} \right\} \Omega_i^\nu \frac{dw(M_\nu, M_\nu)}{dM_\nu},$$

где $f(T)$, $\prod_i (2s_i + 1)^{\sigma_i}$ и $\prod_i N_i!$ - коэффициенты, учитывающие спин, изотопический спин и тождественность частиц. Расчет кривых фазового объема $\frac{dw(M_\nu, M_\nu)}{dM_\nu}$ проводился методом, предложенным в^{/20/}. Величина Ω_i - есть лоренцовски сжатый объем взаимодействия. Для π-мезонов он имеет вид:

$$\Omega_{4\pi} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\lambda}{m_\pi} \right)^3 \frac{1}{\gamma_{cm}},$$

где m_π и γ - масса π-мезона и фактор Лоренца, λ - подгоночный параметр.

Поскольку мы имеем дело только с событиями, в которых рождаются странные частицы, и не делаем сравнения с другими реакциями, выбор объема взаимодействия для странных частиц не играет существенной роли. Сложение фазовых кривых, соот-

ветствующих каналам рождения ΛK и $\Lambda K^0 K^0$ -пар, проводилось на основании экспериментально полученного отношения числа пар $\Lambda K^0 / K^0 \bar{K}^0$ ^{x)}.

На рис. 10 приведены фоновые распределения: плавная кривая - результат расчета по статистической теории, пунктирная гистограмма - результат расчета по методу Монте-Карло. Отличие двух фоновых кривых можно объяснить тем, что при расчете по статистической теории не учитывались каналы с рождением резонансов ^{xx)}, которые из-за их большого числа дают все вместе значительный вклад. Расчет по методу Монте-Карло состоял в том, что по случайным выборкам импульсов, энергий и углов из экспериментальных данных рассчитывались значения эффективных масс. Ясно, что при таком расчете резонансные состояния могли повлиять на результат. Из рис. 10 видно, что пик при массе 1340 Мэв все же остается за пределами 2-2,5-кратной стандартной ошибки.

3. Значения $M_{\pi^+\pi^-}$ от событий, входящих в область пика с массой 1340 Мэв в распределении $M_{4\pi}$ ($1,3 \text{ Гэв} \leq M_{4\pi} \leq 1,4 \text{ Гэв}$), группируются около величины 550 Мэв и массы ρ -мезона. Первая область соответствует той части спектра $M_{\pi^+\pi^-}$, которую мы склонны приписать рождению ω -мезона. Рассмотрим, какое влияние могут оказать эти два пика на спектр $M_{4\pi}$.

Если мы имеем 3 частицы и две из них (2,3) образуют связанное соответствие, то на основании свойств диаграммы Далитца мы можем оценить влияние этого связанного состояния на спектр масс частиц (1,2). Если связанное состояние частиц (2, 3) с фиксированной массой m_{23} распадается изотропно и энергия распада этих частиц мала, то в распределении m_{12} может появиться узкий пик, который будет имитировать резонанс частиц 2 и 3. Примем в качестве первой частицы ρ -мезон с массой $m_1 = 0,75 \text{ Гэв}$ и в качестве второй частицы - систему из двух π -мезонов с массой $m_2 = 0,55 \text{ Гэв}$. Третьей частицей будет π^0 -мезон, который вместе со второй образует связанное состояние $\sim \omega$ -мезон с массой $m_{23} = 0,78 \text{ Гэв}$. Если $m_{23} = 0,78 \text{ Гэв}$, то наименьшее значение полной энергии всех трех частиц будет равно $M = m_{23} + m_1 = 1,53 \text{ Гэв}$. При этом значении M в спектре масс частиц 1 и 2, т.е. в спектре $M_{21/4\pi}$ может появиться пик при значении $m_{12} = 1,32 \text{ Гэв}$, вычисляемый по формуле

$$m_{12}^2 = m_{23} m_1 + m_1^2 + m_2^2 + \frac{m_1}{m_{23}} (m_2^2 - m_3^2).$$

x) Подробное сравнение результатов расчета по статистической теории, а также обсуждение выбора объема взаимодействия для странных частиц будет опубликовано позже.

xx) Расчеты по статистической теории без учета каналов рождения резонансов не дают согласия в числе π^0 -мезонов с экспериментом ^{4/}. Введение каналов с известными резонансами изменяет результат расчета, и среднее число π^0 -мезонов становится близким к найденному по γ -квантам ^{4/}.

Если M немного увеличить, например, до 1,6 Гэв, то такой расчет даст для π_{12} пределы $1,32 < m_{12} < 1,43$ Гэв.

Аналогично, предполагая, что спектр мас $(\pi^+ \pi^0)$ -комбинаций от ω - мезона такой же, как спектр $M_{\pi^+ \pi^-}$, и, принимая схему:

N	1	3 2	3
Частицы	$\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\pi^+ \pi^-$	$\pi^+ \pi^0$
Масса (Гэв)	0,75	0,14	0,55
Связанное состояние		$m_{\omega} = 0,78$	

мы рассчитали, что в спектрах $M_{\pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-}$ можно ожидать появления пика, обусловленного ρ - и ω -мезонами при массе ≈ 1000 Мэв. В экспериментальном спектре (рис.11) в области ≈ 1000 Мэв действительно есть пик, выходящий за фазовую кривую.

Приведенное рассуждение может служить дополнительным аргументом в пользу совместного рождения в одном акте взаимодействия ω - и ρ -мезонов. Более того, пик в области ≈ 1340 Мэв может быть отражением резонансного состояния в системе 5π -мезонов $(\pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^- \pi^0)$, соответствующего резонансу ρ - и ω -мезонов. Предполагая, что такой резонанс существует, мы преобразовали ^{/21/} спектр $M_{4\pi}$ в спектр $M_{5\pi}$ и нашли положение возможного $\rho\omega$ -резонанса. Максимум этого распределения расположен в области 1600-1800 Мэв.

Итак, подводя итоги обсуждения, можно утверждать, что пик в распределении $M_{4\pi}$ при 1340 Мэв существует. Возможны следующие его объяснения:

- 1) имеется резонанс в системе четырех π -мезонов $(\pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-)$ с изотопическим спином $T=0$ и полушириной $\Gamma/2 = 70$ Мэв;
- 2) пик обусловлен влиянием совместного рождения ρ - и ω -мезонов в 4-лучевых звездах с $\Lambda K/\bar{\Lambda}$ -парами;
- 3) возможно, что максимум в распределении $M_{4\pi}$ является следствием рождения узкого резонанса с массой в интервале 1600-1800 Мэв, распадающегося каскадно через состояния ρ - и ω -мезонов:

$$(\bar{5}\pi)^* \rightarrow \rho + \omega$$

$$\left(\pi^+ \pi^- \right) \left(\pi^+ \pi^- \pi^0 \right)$$

В заключение мы приносим свою искреннюю благодарность М.И.Подгорецкому и И.В.Чувилу за помощь и полезные обсуждения, Ду Юань-цаю, А.А.Кузнецову, Ким Хи Ину, Нгуен Дин Ты, Ван Юн-чану, принимавшим участие в первой стадии работы. Мы признательны сотрудникам вычислительного центра ОИЯИ Н.Н.Говоруну и Н.Ф.Марковой, а также лаборантам Г.М.Коротковой, С.Н.Комаровой и Л.М.Жуковой за измерения и расчеты.

Т а б л и ц а I

N_p в %	2	3	4
Среднеквадратичная относительная ошибка $\sqrt{\left(\frac{\Delta N \text{ эфф.}}{M \text{ эфф.}}\right)^2}$,	3,5	6	7

Т а б л и ц а II

Частица	n_s	Количество случаев	Количество случаев, исключенных по недостающей массе и массе-мишени	Использовано в работе
Λ	2	255	24	231
	4	116	28	88
K°	2	327	15	312
	4	162	18	144

Л и т е р а т у р а

1. Ван Ган-чан, М.И.Соловьев, Ю.Н.Шкобин. ПТЭ, 1, 41 (1959).
2. Ван Юн-чан, В.И.Векслер, Ду Юань-цай, Е.Н.Кладницкая, А.А.Кузнецов, А.Михул, Нгуен Дин Ты, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев. ЖЭТФ, 43, 815 (1962).
3. В.А.Беляков, Ван Юн-чан, В.И.Векслер, Н.М.Вирясов, И.Врана, Ду Юань-цай, Ким Хи Ин, Е.Н.Кладницкая, И.Патера, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев, Т.Хофмокль, Чен Лин-янь, А.Михул. ЖЭТФ, 44, 431 (1963).

4. В.А.Беляков, Ван Юн-чан, Н.М.Вирясов, Ду Юань-цай, Ким Хи Ин, Е.Н.Кладни-
цкая, А.А.Кузнецов, Нгуен Дин Ты, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев.
ЖЭТФ, 44, 1474 (1963).
5. M.I. Soloviev. Proc. of the 1960 Ann. Intern. Conf. on High Energy Physics
at Rochester, p. 388.
6. Н.Г.Биргер, Ю.А.Сморodin. ЖЭТФ, 37, 1355 (1959).
7. Д.К.Копылова, В.Б.Любимов, М.И.Подгорецкий, Х.Резаев, З.Трка. ЖЭТФ,
44, 1481 (1963).
8. В.И.Векслер, Н.М.Вирясов, И.Врана, Ким Хи Ин, Е.Н.Кладницкая, А.А.Кузнецов,
Нгуен Дин Ты, М.И.Соловьев, Т.Хофмокль, Чен Лин-янь. ЖЭТФ, 44, 84 (1963).
9. V.A. Belyakov, Wang Yung-chang, et al, Proc. of the Intern. Conf. on High
Energy Physics at CERN, 1962, p. 336.
10. Подробную библиографию см. Matts Roes, Rev. of Modern Physics,
35, 314 (1963).
11. J.A. Anderson, V.X. Bang, P.G. Burke, D.D. Garmony and N. Schmitz. Phys.
Rev. Letters, 6, 365 (1961). Rev. Mod. Phys., 33, 431 (1960).
D. Stonehill, C. Baltay, H. Courant, W. Fickinger, E.C. Fowler, H. Kraybill,
J. Sandweisse, J. Sanford and H. Taft. Phys. Rev. Lett., 6, 624 (1961).
E. Pickup, D.K. Robinson and E.O. Salaut. Phys. Rev. Lett., 7, 192(1961).
A.R. Erwin, R. March, W.D. Walker and West. Phys. Rev. Lett., 6, 628
(1961).
12. Например, C. Alff, D. Colley, N. Gelfand, V. Nauenberg, D. Riller, J. Stein-
berger, T.H. Tau, H. Brugger, P. Kramer, R. Plano. Proc. of the In-
tern. Conf. on High Energy Phys. at CERN, 1962, p. 50. Phys. Rev.
Lett., 9, 325, 1962.
13. A. Bigi, S. Brandt, R. Carrara, W.A. Cooper, A. de Marco, G.R. Macleod,
Ch. Peyrou, R. Sosnovski, A. Wroblevski. Proc. of the Intern. Conf. on
High Energy Phys. at CERN, 1962, p. 247.
14. P. Fleury, G. Kayas, F. Muller and Pelletier. Proc. of the Intern. Conf. on
High Energy Phys. at CERN, 1962, p. 597.
15. M. Chretien, F. Bules, H.R. Gronch, Jr. Lauan, Jr. J.T. Massimo, A.M. Shapi-
ro, I.A. Averell, C.A. Bordner, A.E. Brenner, D.R. Firtz, M.E. Law,
E.E. Ronat, R. Strauch, J.C. Street, J.J. Symanski, A. Weinberg, B.Nel-
son, I.A. Pless, L. Rosenson, G.A. Salandin, R.K. Yamomoto, L. Guer-
riero and F. Waldner. Phys. Rev. Lett, 9, 127, 1962.
16. M. Roos. Phys. Rev. Lett., 3, 242 (1963).
17. W. Selove, V. Hagopian, H. Brody, A. Baker, E. Leboy. Phys. Rev. Lett., 9,
272 (1962).
18. C.C. Peck, L.W. Jenex and M.L. Perl. Phys. Rev., 126, 1836 (1962).
19. R. Hagedorn. Nuovo Cim., 15, 246 (1960).
20. Г.И.Копылов. ЖЭТФ, 39, 1091 (1960).
21. Г.И.Копылов. Препринт ОИЯИ Р-1368, Дубна, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря 1963 г.

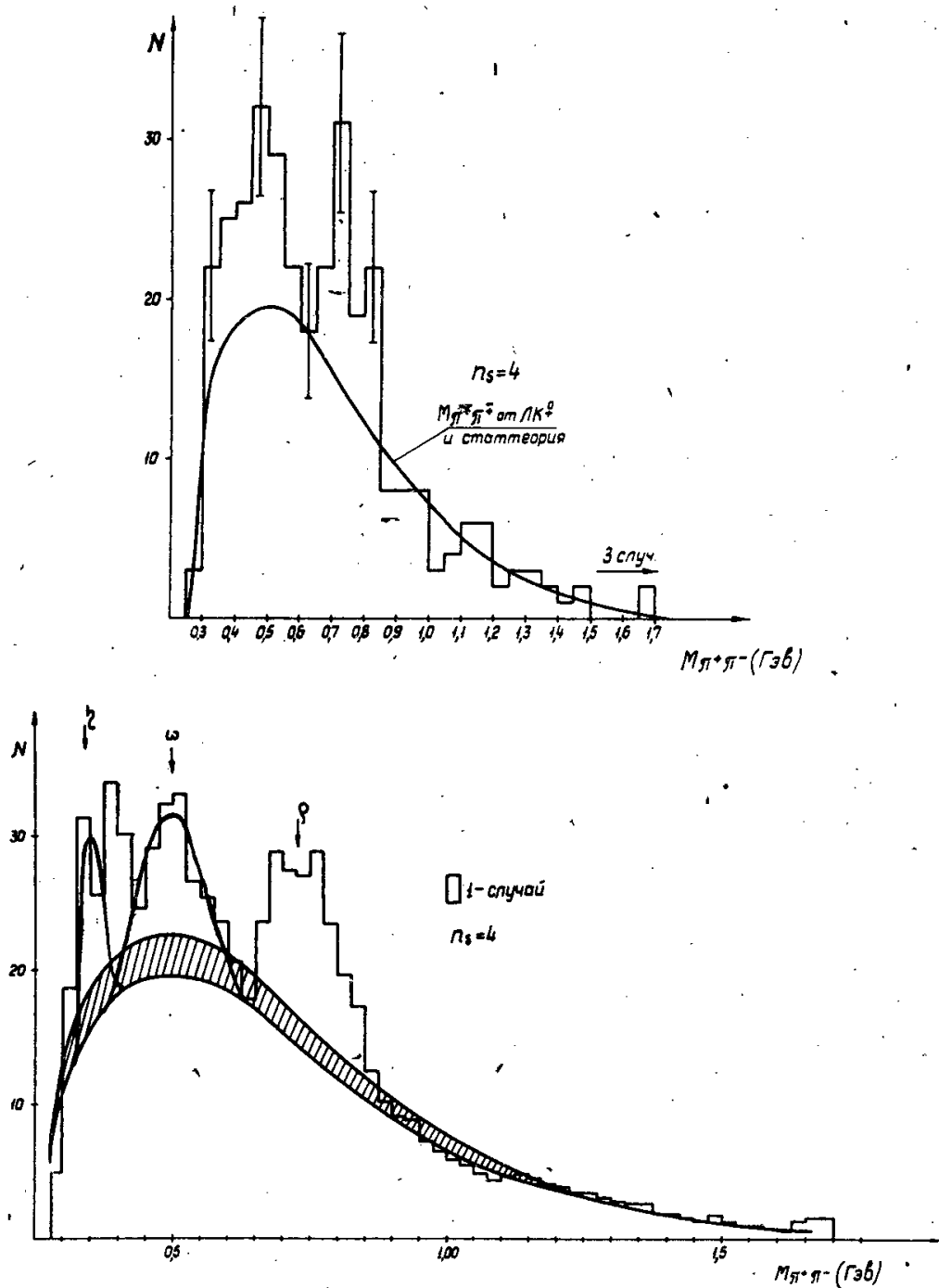


Рис. 1. а) Спектр эффективных масс $(\pi^+\pi^-)$ -комбинаций для случаев $n_s=4$ с Λ -гипероном. Кривая представляет результат расчета по статистической теории, которая хорошо описывает спектр $M_{\pi^+\pi^-}$

б) Идеограмма эффективных масс $(\pi^+\pi^-)$ -комбинаций. Нанесены кривые, соответствующие η, ω из работ/12,15/. Фоновая кривая нормирована по событиям с $M > 0,8$ Гэв. Заштрихованная область представляет разброс ошибок в нормировке.

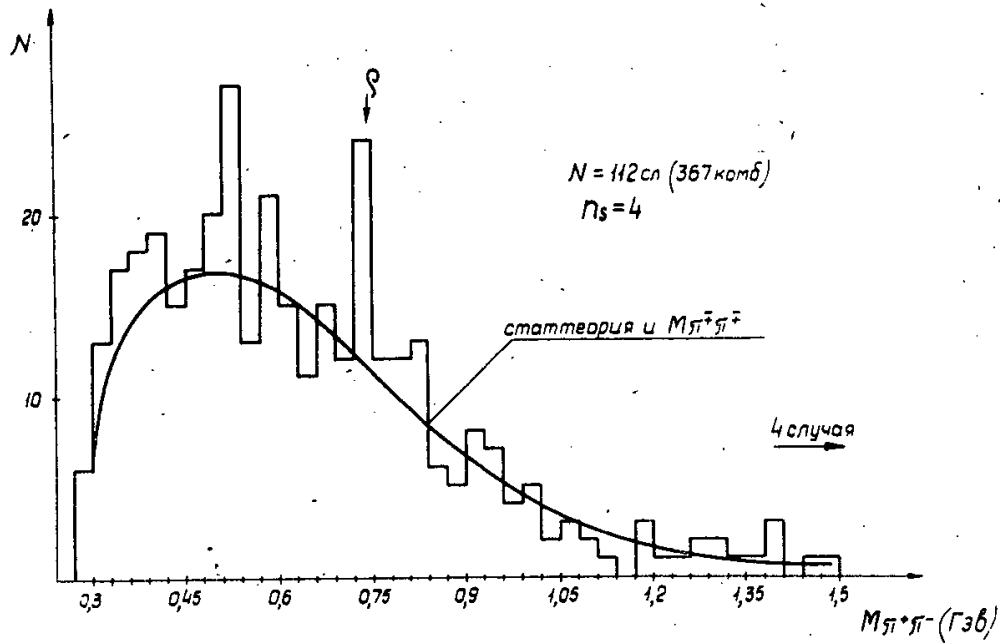


Рис. 2

Рис. 2. Спектр эффективных масс случаев с K^0 -мезоном, для множественности заряженных частиц $n_s = 4$. Плавная кривая представляет результат расчета по статистической теории, а также спектр $M_{\pi^+\pi^-}$

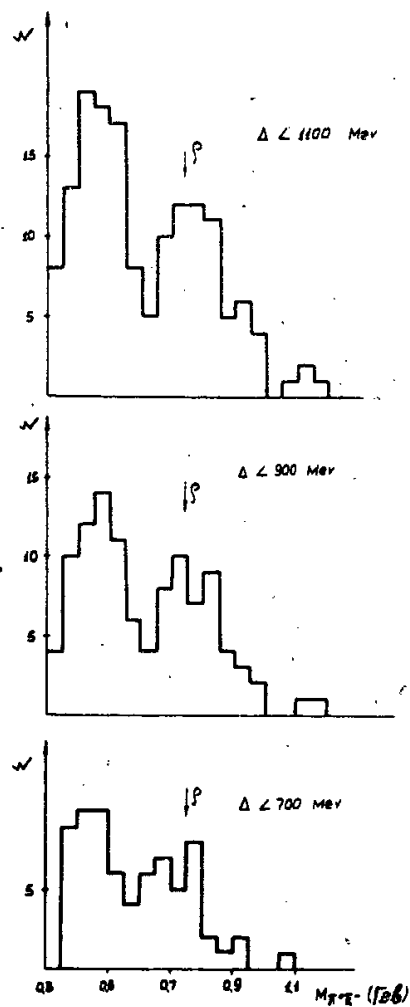


Рис. 3. Спектры масс $M_{\pi^+\pi^-}$ - случаев с Λ -гиперонами ($n = 4$) для разных передаваемых импульсов от бариона к бариону а) $\Delta < 700 \text{ Мэв}$, б) $\Delta < 900 \text{ Мэв}$, в) $\Delta < 1100 \text{ Мэв}$.

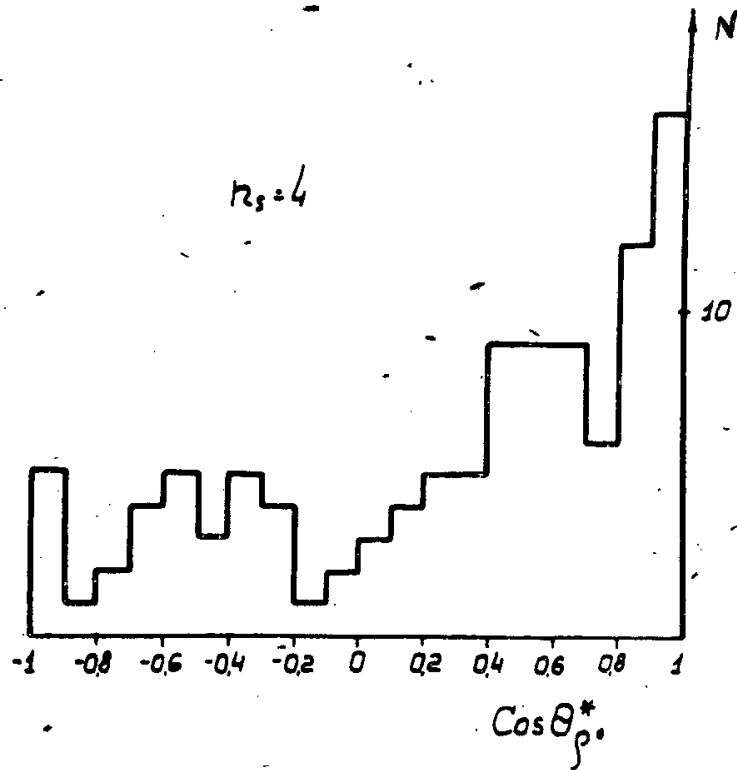


Рис. 4. Распределение углов вылета ρ -мезона в системе π - \bar{p} .

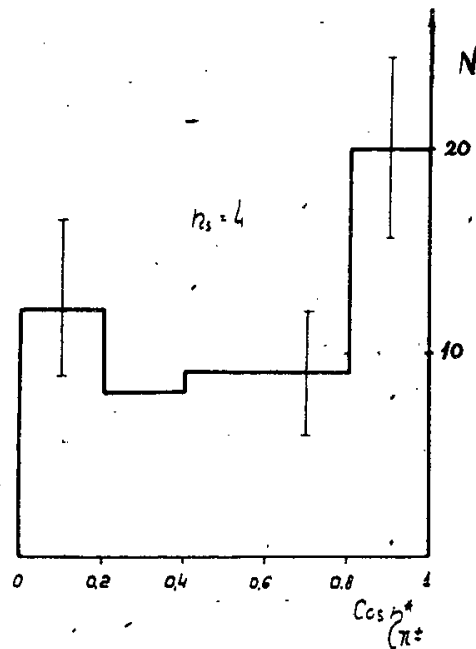


Рис. 5. Распределение углов η^* для π -мезонов от распада ρ -мезона в системе покоя ρ -мезона.

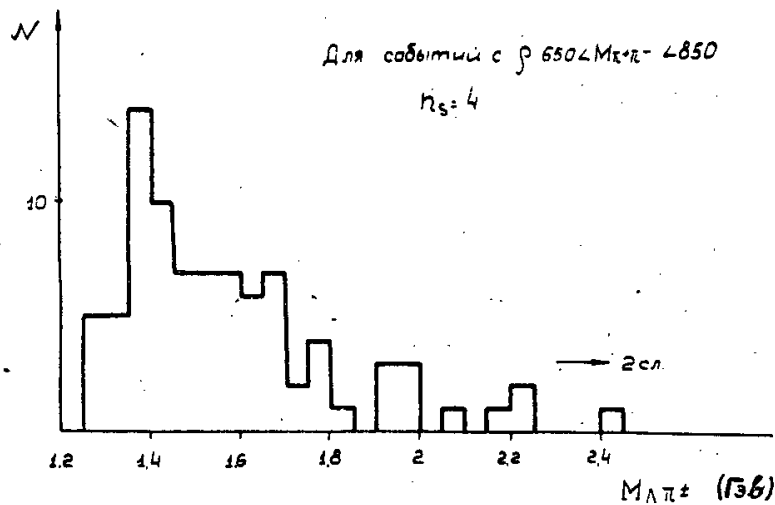


Рис. 6. Распределение $M_{\Lambda\pi^\pm}$ для случаев, в которых $M_{\pi^+\pi^-}$ (другие $\pi^-\pi^-$ -мезоны) попадает в область $650 < M_{\pi^+\pi^-} < 850$ Мэв.

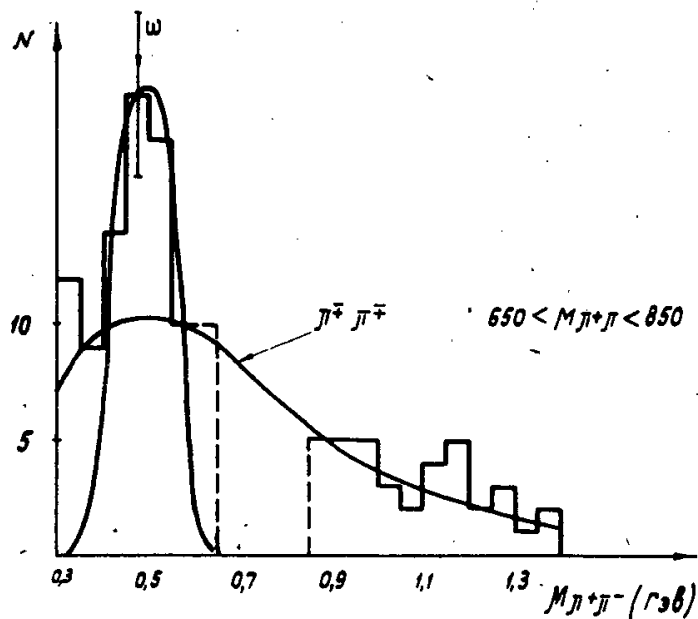


Рис. 7. Спектр $M_{\pi^+\pi^-}$ для случаев, в которых родился ρ^0 -мезон.

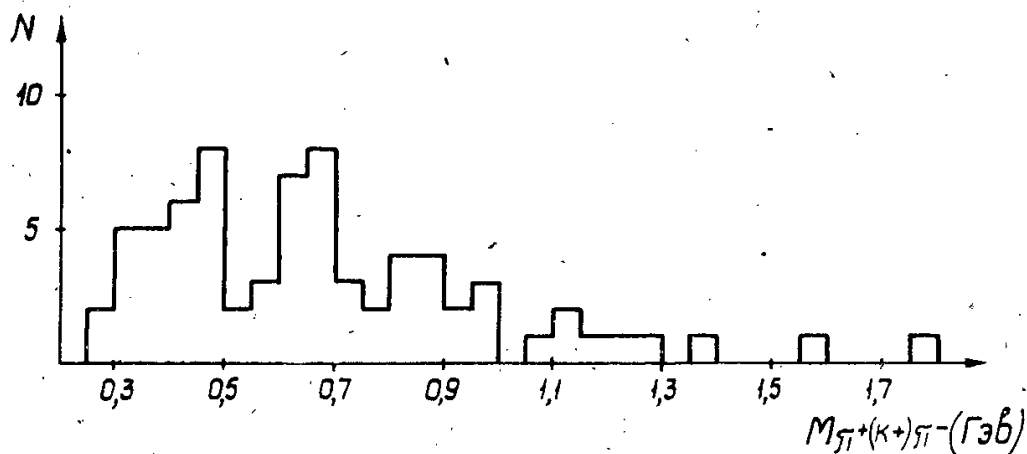
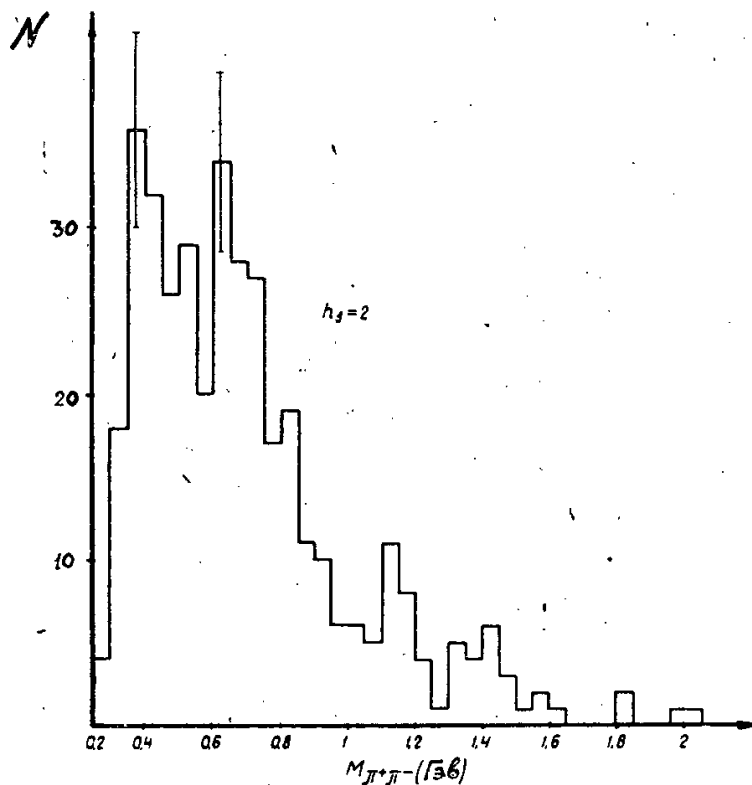


Рис. 8 б

- Рис. 8. а) Спектр масс $M_{\pi^+\pi^-}$ -комбинаций для $n_s=2$. В распределение входят как случаи $\pi^+\pi^-$ с зарегистрированным Λ -гипероном, так и случаи с K^0 -мезоном.
б) Спектр значений $M_{\pi^+(K^+)\pi^-}$, рассчитанных в предположении, что K^+ является $\pi^+\pi^-$ -мезоном.

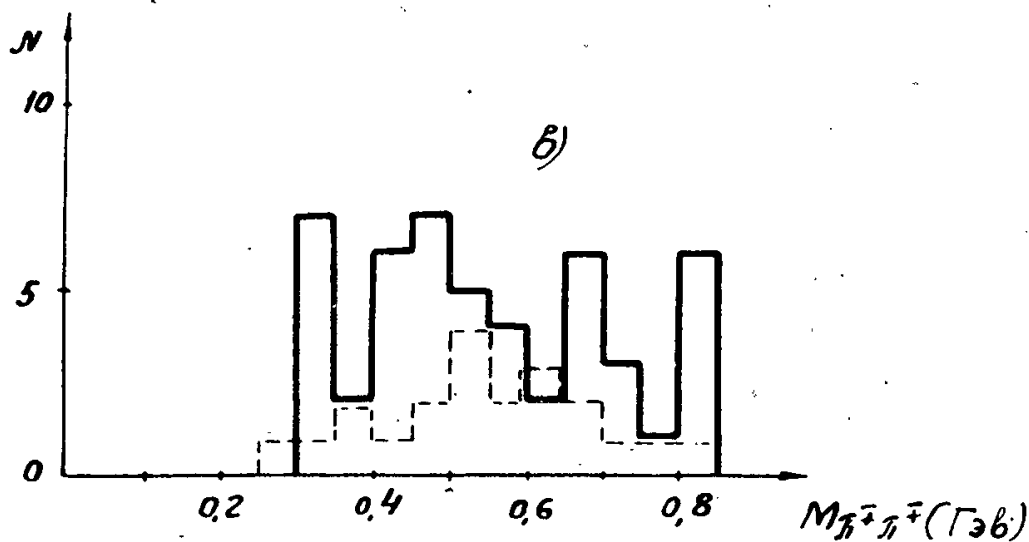
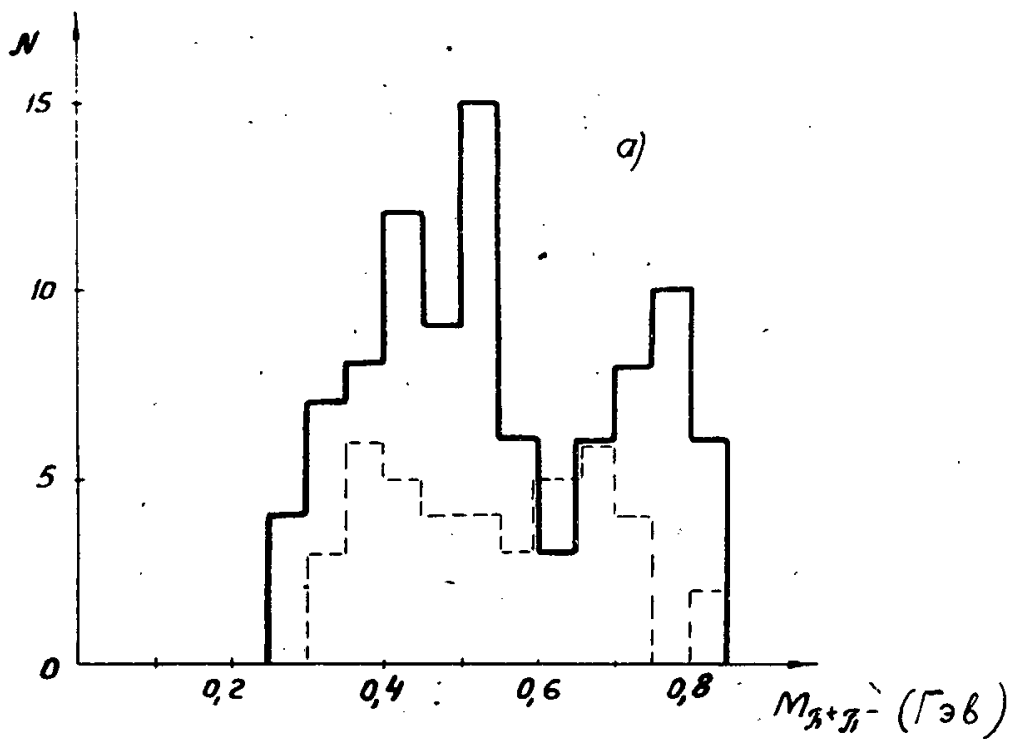


Рис. 9. Спектры $M_{\pi^+\pi^-}$ π -мезонов, образующих пик $M = 1340$ Мэв в распределении масс $\pi^+\pi^-$ системы.
а) $1300 < M_{\pi^+\pi^-} < 1400$ Мэв, б) $1400 < M_{\pi^+\pi^-} < 1600$ Мэв.

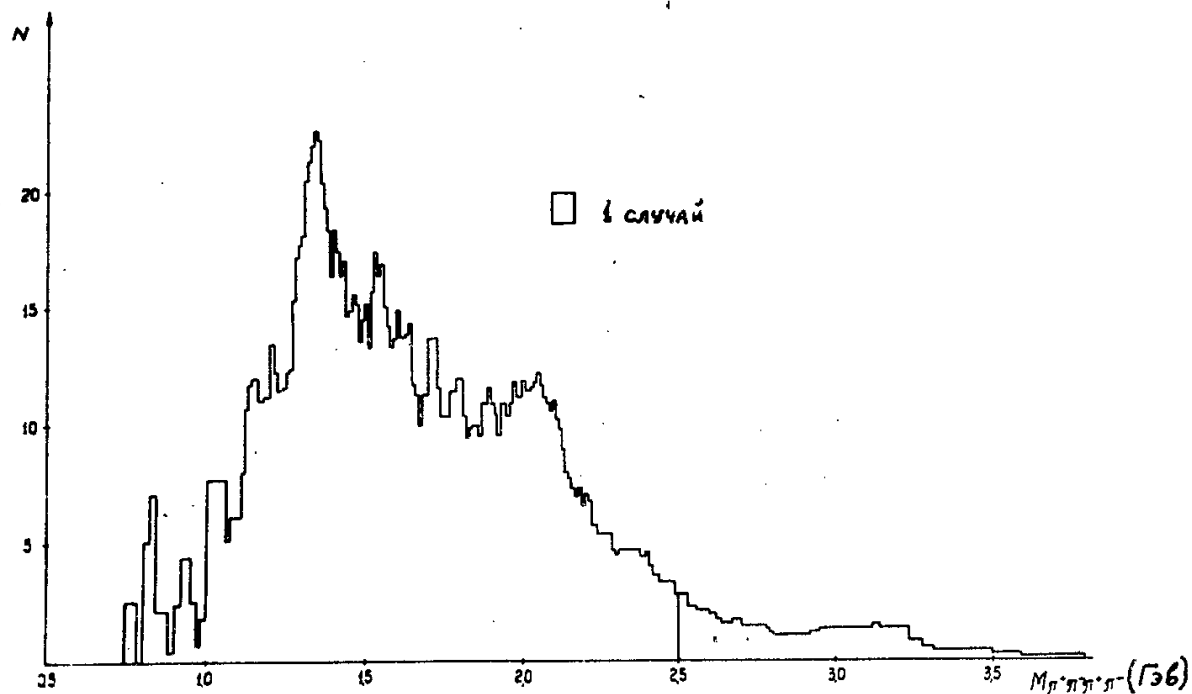
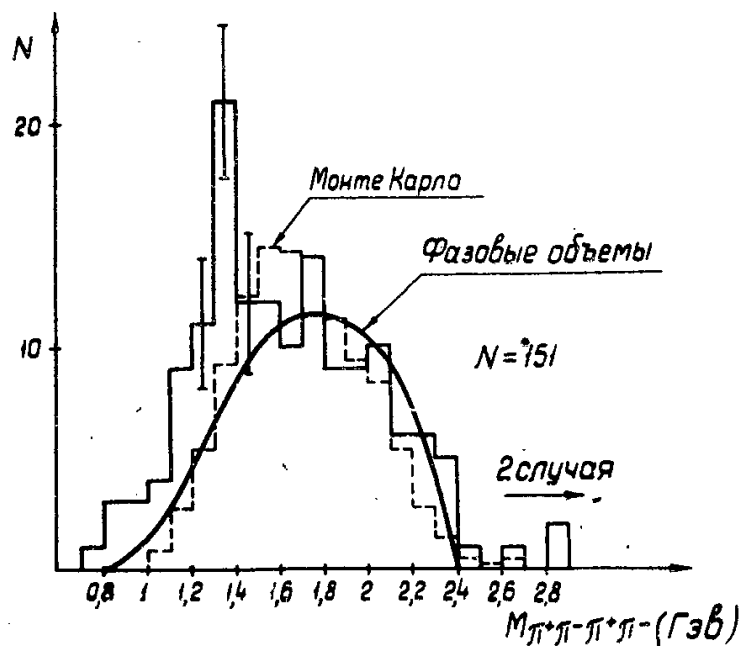


Рис. 10 а, б. Распределение эффективных масс $(\pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-)$ -системы.
Плавная кривая представляет результат, полученный
на основании статистической теории.
Пунктирная гистограмма - результат расчета по
Монте-Карло.

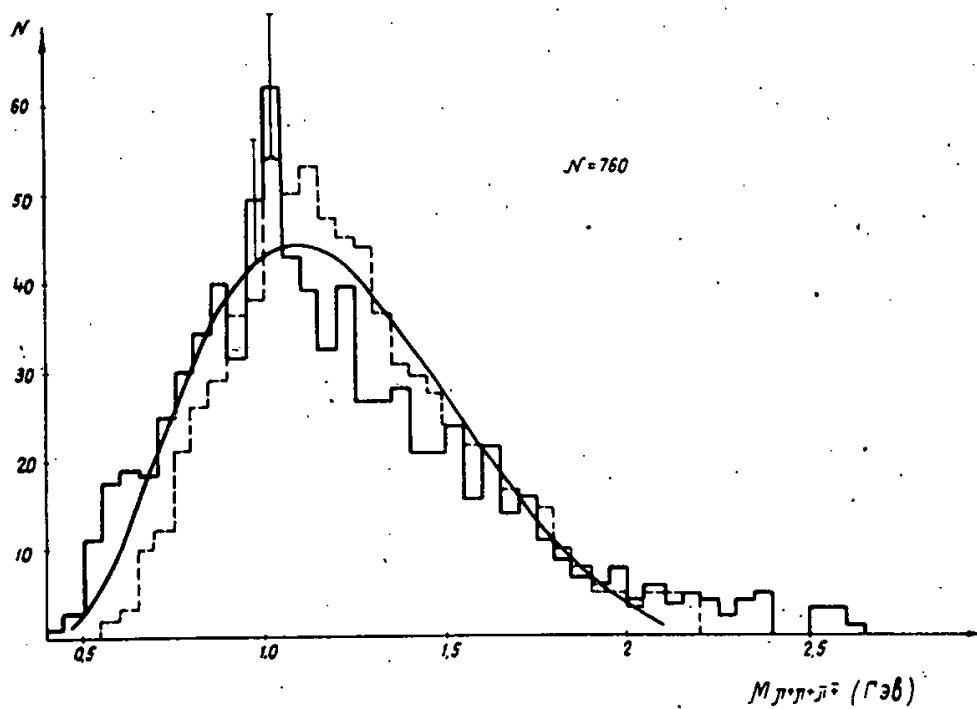


Рис. 11. Распределение эффективных масс (3π) -системы.
Кривая представляет результат, полученный на основании
статистической теории.
Пунктирной гистограммой обозначен результат расчета
по Монте-Карло.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3517. Тираж 350. 1,4 уч.-изд. л.
Гехн. ред. Н.Н.Зрелова. Январь 1964 г.

6



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.Ж. Петков

P - 1575

К ВОПРОСУ О НЕУПРУГОМ РАССЕЯНИИ
ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРАХ

Дубна 1964

Петков И.Ж.

P-1575

К вопросу о неупругом рассеянии поляризованных электронов на ядрах

Получена формула дифференциального сечения неупругого рассеяния продольно поляризованных электронов на ориентированных ядрах. Показано, что в некоторых случаях отдельные матричные элементы можно выразить через экспериментально измеримые величины. Матричный элемент, соответствующий $M1$ переходу ядра между состояниями $\frac{1}{2} + \rightarrow \frac{1}{2} +$, непосредственно связан с опытными величинами.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Petkov I.Zh.

P-1575

On Inelastic Scattering of Polarized Electrons
on Nuclei

A formula has been obtained for the differential inelastic scattering cross section for longitudinally-polarized electrons on oriented nuclei. It is shown that in some cases the individual matrix elements can be expressed in terms of the experimentally measurable quantities. The matrix element corresponding to the $M1$ nuclear transition between the states $\frac{1}{2} + \rightarrow \frac{1}{2} +$ is directly related to the experimental quantities.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

И.Ж.Петков

P - 1575

К ВОПРОСУ О НЕУПРУГОМ РАССЕЯНИИ
ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРАХ

Дубна 1964

1. Дифференциальное сечение неупругого рассеяния быстрых электронов на атомных ядрах в первом борновском приближении выражается в виде суммы приведенных матричных элементов ^{/1/}. Поскольку последние содержат всю информацию о ядре, необходимую для описания процесса, представляет интерес получить их из эксперимента. В общем случае в дифференциальное сечение рассеяния с возбуждением определенного состояния ядра входят по крайней мере два (спины ядра в основном и возбужденном состоянии $\neq 0$) матричных элемента, и поэтому нельзя определить вклад от каждого в отдельности, не прибегая к эксперименту с поляризованными электронами.

2. В настоящей работе получена формула дифференциального сечения неупругого рассеяния продольно поляризованных электронов на ориентированных ядрах. Показано, что в некоторых случаях отдельные матричные элементы можно выразить через экспериментально измеримые величины. В частности оказалось, что матричный элемент, соответствующий $M1$ переходу ядра между состояниями $\frac{1}{2} + - \frac{1}{2} +$, непосредственно связан с измеримыми величинами.

Так как взаимодействие между электроном и ядром рассматривается в первом порядке по константе связи, а электроны описываются плоскими волнами, матричный элемент перехода можно записать с помощью потенциалов Мелера ^{/1/}

$$V_{fi} = \int A_{\mu}(\vec{r}) J_{\mu}^n(\vec{r}) d\vec{r},$$

где

$$A_{\mu}(\vec{r}) = -\frac{4\pi e}{q^2 - q_0^2} (\vec{u}(\vec{p}') \cdot \gamma_{\mu} \psi(\vec{p})) e^{i\vec{q}\vec{r}} = B_{\mu} e^{i\vec{q}\vec{r}}.$$

Здесь $J_{\mu}^n(\vec{r}) = (J_{\mu}^n(\vec{r}), i\rho^n(\vec{r}))$ - ядерные токи перехода, (\vec{p}, iE) , (\vec{p}', iE') - четырехмерные импульсы электрона в начальном и конечном состоянии, $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$, $q_0 = E - E'$ импульс и энергия, передаваемые ядру, соответственно. Используя условие Лоренца для потенциалов Мелера и уравнение непрерывности, которому удовлетворяют ядерные токи перехода, мы можем исключить четвертые компоненты $A_{\mu}(\vec{r})$ и $J_{\mu}^n(\vec{r})$ и записать взаимодействие в виде

$$V_{fi} = (B' \int J_{\mu}^n(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}),$$

где

$$B' = B - \frac{(Bq)}{q_0^2} q.$$

Будем считать, что начальное состояние электрона и ядра являются чистыми. Дифференциальное сечение в этом случае имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (f \leftarrow i) = \frac{4\pi}{v} \rho \sum_{a,b} Q_{ab} I_{ab},$$

где

$$Q_{ab} = \sum_{s_2} B_a'^* B_b'; \quad I_{ab} = \sum_{m_2} \left\{ \int J_a(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \right\} \left\{ \int J_b(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} \right\}$$

v - скорость падающего электрона, ρ - плотность конечных состояний, s_2, m_2 - проекции спина электрона и ядра в конечном состоянии, соответственно, a, b - декартовы координаты. Для удобства переходим к сферическим ортам, т.е. заменяем Q_{ab} и I_{ab} на $Q_{\mu\nu}$ и $I_{\mu\nu}$, где $\mu, \nu = 0, \pm 1$. Выбирая координатную систему, в которой ось направлена вдоль передаваемого импульса \vec{q} , учитывая разложение ^{1/2/}

$$\int J_\nu e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r} = \sqrt{4\pi} \sum_{\ell} i^\ell \sqrt{2\ell+1} (\ell 0 0 | \lambda \nu) \int j_\ell(qr) (Y_{\lambda\nu}(\hat{r}) J(\vec{r})) d\vec{r}$$

и

$$\int j_\ell(qr) (Y_{\lambda\nu}(\hat{r}) J(\vec{r})) d\vec{r} = \langle j_2 m_2 | \mathcal{M}_{\lambda\nu}(q) | j_1 m_1 \rangle = (-1)^{j_1 - j_2} \frac{J_1(j_2 \lambda m_2 - \nu | j_1 m_1)}{\sqrt{2j_1 + 1}} \langle j_2 || \mathcal{M}_{\lambda\nu}(q) || j_1 \rangle$$

и вводя проекционный спиновый оператор ^{3/4/} в $Q_{\mu\nu} = (1 - 2is_1 y_s y_4 \frac{(\vec{Y} \cdot \vec{p})}{|p|})$ после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (f \leftarrow i) = & \left(\frac{e}{hc} \right)^2 \frac{4\pi}{p^2} \frac{1}{4} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} I_0 + \left(\frac{e}{hc} \right)^2 \frac{4\pi}{p^2} \frac{1}{8} \frac{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} I_1 + \\ & + \left(\frac{e}{hc} \right)^2 \frac{4\pi}{p^2} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} s I_2; \quad s = \pm 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$I_0 = (-1)^{j_2 - j_1} \frac{q^2}{q^2} \sum_{\lambda \lambda' \ell \ell'} (-1)^{\ell + \ell'} \sqrt{\frac{(2j_1' + 1)(2\ell + 1)(2\ell' + 1)}{2j_1 + 1}} (\ell 0 0 | \lambda 0) (\ell' 0 0 | \lambda' 0) \langle j_1 j_1' m_1 0 | j_1 m_1 \rangle \times \\ \times W(j_1 \lambda j_1 \lambda'; j_2 j_2') \langle j_2 || \mathcal{M}_{\lambda \ell} || j_1 \rangle \langle j_2 || \mathcal{M}_{\lambda' \ell'} || j_1 \rangle;$$

$$I_1 = 2(-1)^{j_2 - j_1} \sum_{\lambda \lambda' \ell \ell'} (-1)^{\ell + \ell'} \sqrt{\frac{(2j_1' + 1)(2\ell + 1)(2\ell' + 1)}{2j_1 + 1}} (\ell 1 0 | \lambda 1) (\ell' 1 0 | \lambda' 1) (\lambda \lambda' 1 - 1 | j_1' 0) \times \\ \times \langle j_1 j_1' m_1 0 | j_1 m_1 \rangle W(j_1 \lambda j_1 \lambda'; j_2 j_2') \langle || \mathcal{M}_{\lambda \ell} || \rangle \langle || \mathcal{M}_{\lambda' \ell'} || \rangle;$$

$$j' = 0, 2, \dots$$

I_2 - то же самое выражение, только что $j' = 1, 3, \dots$

Во избежание громоздких выражений, мы ограничились случаем, когда $\sin \frac{\theta}{2} \gg \frac{\Delta E}{E}$, где θ - угол рассеяния.

Формула (1) для сечения имеет следующие особенности. Нетрудно убедиться, что после суммирования по m_i - проекция спина ядра в основном состоянии - (1) переходит в обычную формулу для сечения рассеяния неполяризованных электронов на неориентированных ядрах^{1/1}. При суммировании по $s = 2s_i$ - знак проекции спина электрона на направление импульса падающего электрона, последний член в (1) исчезает. Это означает, что поляризационные эффекты имеют место только при одновременной поляризации электронов и ядер. Если спин ядра $j_i = 0$, поляризационный член тоже исчезает, как это легко проверить, например, в случае переходов $0^+ - 0^+$, $0^+ - 1^+$ и др.

3. Рассмотрим подробнее рассеяние поляризованных электронов с возбуждением ядра начального и конечного состояния которого имеют спин $\frac{1}{2}$ и положительную четность $\frac{1}{2}^+ \leftarrow \frac{1}{2}^+$. В этом случае вклад из-за ориентации ядра исчезает; остается член, обусловленный поляризацией электронов и ядер (в начальном состоянии) одновременно

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \left(\frac{1}{2}^+ \leftarrow \frac{1}{2}^+ \right) &= \left(\frac{e}{hc} \right)^2 \frac{4\pi}{p^2} \frac{1}{4} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2} \left| \frac{q}{q_0} \langle \| \mathfrak{M}_{01} \| \rangle \right|^2 + \\ &+ \left(\frac{e}{hc} \right)^2 \frac{4\pi}{p^2} \frac{1}{8} \frac{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \theta/2} \frac{1}{2} \left| \langle \| \mathfrak{M}_{11} \| \rangle \right|^2 + \left(\frac{e}{hc} \right)^2 \frac{4\pi}{p^2} \frac{1}{4} \frac{1}{\sin^2 \theta/2} \frac{s}{\sqrt{2}} \left| \langle \| \mathfrak{M}_{11} \| \rangle \right|^2; \end{aligned}$$

(в формуле мы положили $m_i = +\frac{1}{2}$). Приведенный матричный элемент $\langle \| \mathfrak{M}_{11} \| \rangle$, соответствующий $M1$ переходу ядра, можно выразить через отношение

$$W = \frac{d\sigma^{(+)} - d\sigma^{(-)}}{d\sigma^{(+)} + d\sigma^{(-)},}$$

где $d\sigma^{(+)}$ и $d\sigma^{(-)}$ сечения с $s=1$, $s=-1$ соответственно.

Тогда

$$W \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = \left(\frac{e}{hc} \right)^2 \frac{4\pi}{p^2} \frac{1}{4} \frac{1}{\sin^3 \theta/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \langle \| \mathfrak{M}_{11} \| \rangle \right|^2,$$

т.е. матричный элемент выражается через измеримые на опыте величины. $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0$ - сечение неполяризованных электронов с возбуждением вышеуказанного перехода. Он равен сумме двух первых членов в (2). В длинноволновом приближении $qr \ll 1/$

$$\left| \langle \| \mathfrak{M}_{11} \| \rangle \right|^2 \sim q^2 = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{и, следовательно,}$$

$$W \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \sim \frac{1}{\sin^2 \theta/2}.$$

В других, более сложных переходах выделение матричных элементов связано с использованием формулы (1) и выражения для $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0$.

В заключение автор выражает благодарность С.М.Биленькому и Б.Н.Калинину за обсуждение работы.

Л и т е р а т у р а

1. R.S. Willey. Nucl. Phys. 40, 529 (1963).
2. М.Роуз. Поля мультиполей. ИИЛ, М., 1957.
3. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, Москва, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3613. Тираж 400. 0,3 уч.-изд. л.
Техн. ред. В.Р.Саранцева М а р т 1984 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.В. Пашкевич, Р.А. Сардарян

P-1574

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ
НЕАКСИАЛЬНЫХ НЕЧЕТНЫХ АТОМНЫХ ЯДЕР

Дубна 1964

Пашкевич В.В., Сардарян Р.А.

P-1574

Возбужденные состояния неаксиальных нечетных атомных ядер.

Рассчитывается последовательность спинов и энергии возбужденных состояний нечетных атомных ядер без разделения возбуждений на одночастичные и коллективные. Результаты теоретических расчетов сравниваются с экспериментальными данными.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Pashkevitch V.V., Sardarian R.A.

P-1574

Excited States of Non-Axial Odd-mass Atomic Nuclei.

The sequence of the spins and energies of the excited states of odd-mass non axial atomic nuclei are calculated without differentiating between one-particle and collective excitations. The results of the theory are compared with experiments.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

В.В. Пашкевич, Р.А. Сардарян

P-1574

ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ
НЕАКСИАЛЬНЫХ НЕЧЕТНЫХ АТОМНЫХ ЯДЕР

Направлено в "Изв. АН СССР" и

"Nuclear Physics"

Дубна 1964

В в е д е н и е

За последнее время было выполнено несколько работ ^{/3-6/}, посвященных исследованию энергетических состояний несферических нечетных атомных ядер. В большинстве этих работ энергетические состояния нечетных ядер подразделяются на одночастичные и коллективные, по аналогии с четно-четными ядрами.

В несферических четно-четных ядрах коллективные возбуждения можно исследовать в адиабатическом приближении, т.е. считая, что при коллективных возбуждениях одночастичные состояния не меняются. Это возможно, так как спектр одночастичных состояний, отделен от основного состояния "щелью" порядка 2 Мэв.

Однако адиабатическое приближение, при котором вращение ядра исследуется при фиксированном состоянии внешнего нуклона, в нечетных ядрах является грубым и во многих случаях мало оправданным, так как энергия одночастичных состояний в нечетных ядрах одного порядка с энергией вращения и колебания поверхности. В качестве модели нечетного ядра часто рассматривается система, состоящая из остова и движущегося в его поле внешнего нуклона. Равновесная форма аппроксимируется либо эллипсоидом вращения, либо трехосным эллипсоидом. Внешний нуклон движется в несферическом поле остова, поэтому, вообще говоря, ни полный момент, ни его проекция на любое направление, связанное с ядром, не сохраняются. Но если не существует близких друг к другу состояний с разными орбитальными моментами ℓ и при условии сильной спин-орбитальной связи, угловой момент внешнего нуклона можно приближенно считать хорошим квантовым числом.

Таким образом, приближения, используемые в теории нечетных атомных ядер, можно схематически представить в виде следующей таблицы:

	адиабатическое приближение, j - не сохраняется	отказ от адиабатики, j сохраняется
аксиальная теория	1. Нильссон ^{/1/} 2. Моттельсон, Нильссон ^{/2/}	Давыдов, Сардарян ^{/3,4/}
неаксиальная теория	1. Гехт, Саулер ^{/5/} 2. Персон, Расмуссен ^{/6/} 3. Ньютон ^{/7/}	настоящая работа

В первой строке таблицы даны ссылки на теории с аксиально-симметричным полем остова, во второй строке - с неаксиальным полем остова. В первом столбце указаны теории, использующие адиабатическое приближение, во втором - теории, которые не разделяют одночастичные и коллективные возбуждения, однако при этом вводится ограничение, от которого свободны адиабатические теории, а именно: момент внешнего нуклона считается хорошим квантовым числом.

Модель ядра с фиксированным моментом j внешнего нуклона позволила удовлетворительно описать^{/3,4/} единым образом несколько вращательных полос в рамках аксиальной теории с учетом малых отклонений от аксиальной симметрии. Дальнейшим естественным развитием теории^{/3,4/} является распространение ее на случай неаксиального поля остова.

В настоящей работе рассчитывается последовательность спинов и энергии возбужденных состояний нечетных атомных ядер без разделения возбуждений на одночастичные и коллективные при следующих предположениях. Равновесная форма остова аппроксимируется трехосным эллипсоидом. Деформация остова описывается в переменных β, γ, θ_i ; где β и γ характеризуют форму поверхности остова, θ_i - углы Эйлера, которые определяют ориентацию ядра в пространстве. Поверхность ядра может совершать малые β - и γ -колебания относительно равновесных значений $\beta_0 \neq 0$ и $\gamma_0 \neq 0$. Момент j внешнего нуклона сохраняется. Рассматриваются ядра, спин основного состояния которых равен $5/2$. Ядра, спин основного состояния которых равен $1/2$ и $3/2$ требуют специального исследования /см., например,^{/8,9/}. Развиваемая теория в принципе применима и к ядрам, спин основного состояния которых больше $5/2$.

Получены формулы, позволяющие рассчитать последовательность спинов и энергии возбужденных состояний нечетных ядер через некоторое число параметров. В адиабатическом приближении по β - колебаниям поверхности ядра формулы значительно упрощаются. Последовательность спинов и энергии возбужденных вращательно-одночастичных состояний выражаются через два параметра и рассчитывались на электронно-счетных вычислительных машинах. Результаты теории сравниваются с экспериментальными данными.

§ 1. Уравнения модели

При малых отклонениях от равновесных значений $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$ возбужденные состояния рассматриваемой системы определяются уравнением Шредингера

$$(H_v + H_{rot} + H_p(x) + H_{int} - E) \Psi = 0, \quad /1/$$

где $H_p(x) + H_{int}$ - оператор Гамильтона внешнего нуклона в поле остова ядра;
 $H_p(x)$ учитывает центрально-симметричную часть поля;

$$H_{int} = -T(r)\beta\{\cos\gamma(3\hat{j}_3^2 - \hat{j}^2) + \sqrt{3}\sin\gamma(\hat{j}_1^2 - \hat{j}_2^2)\} - \quad /2/$$

оператор, учитывающий несферическую часть поля остова ядра; r - расстояние нуклона от центра ядра; $\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3$ - операторы проекций углового момента внешнего нуклона на оси координатной системы, связанной с ядром; x - пространственные и спиновые координаты нуклона;

$$H_v = -\frac{\hbar^2}{2B\beta^2}\left\{\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\right\} - \quad /3/$$

$$-\frac{C}{2}(\beta - \beta_0)^2 - \frac{B\omega\gamma\beta_0^2}{2}(\gamma - \gamma_0)^2 -$$

оператор, характеризующий β и γ - колебания поверхности остова ядра;

$$H_{rot} = \frac{\hbar^2}{8B\beta^2}\sum_{\kappa=1}^3 \frac{(\tau_{\kappa} - f_{\kappa})^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}\kappa)} - \quad /4/$$

оператор вращательной энергии ядра; $\hat{I}, \hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ - соответственно операторы полного углового момента и его проекции на оси координат, связанные с ядром. Оператор вращательной энергии удобно представить в виде:

$$H_{rot} = \frac{\hbar^2}{6B\beta^2}\left\{\Gamma_1(\gamma)\left[\hat{I}^2 + \hat{J}^2 - \hat{I}_3^2 - \hat{j}_3^2\right] - \quad /5/$$

$$- 2\Gamma_1(\gamma)(\hat{I}_1\hat{j}_1 + \hat{I}_2\hat{j}_2) - 2\Gamma_2(\gamma)(\hat{I}_1\hat{j}_1 - \hat{I}_2\hat{j}_2) + \right.$$

$$\left. + \Gamma_2(\gamma)(\hat{I}_1^2 - \hat{I}_2^2) + \Gamma_2(\gamma)(\hat{j}_1^2 - \hat{j}_2^2) + \frac{1}{4}\Gamma_3(\gamma)(\hat{I}_3 - \hat{j}_3)^2\right\},$$

где

$$\Gamma_1(\gamma) = \frac{3\sin^2\gamma}{\sin^2 3\gamma}(2 + \cos 2\gamma), \quad \Gamma_2(\gamma) = -\frac{3\sqrt{3}\sin^2\gamma}{\sin^2 3\gamma}\sin 2\gamma, \quad \Gamma_3(\gamma) = \frac{3}{\sin^2\gamma} \quad /6/$$

Оператор Гамильтона уравнения /1/ коммутирует с оператором квадрата полного момента ядра. Волновая функция уравнения /1/, удовлетворяющая необходимым условиям симметрии /8/, может быть записана в виде:

$$\Psi^{II} = F^{II}(\beta)\Phi^{III}(x, y, \theta_1). \quad /7/$$

Тогда β - колебания можно приближенно рассматривать независимо. Для β - колебаний получается следующее уравнение:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2}{d\beta^2} - W_{\Lambda}(\beta) + (E - E_{j_r}) \right\} \beta^2 F_{\Lambda}^{(j_r)}(\beta) = 0, \quad /8/$$

где

$$W_{\Lambda}(\beta) = \frac{C}{2} (\beta - \beta_0)^2 + \frac{\hbar^2 (\Lambda + 2^2)}{2B\beta^2} \quad /9/$$

играет роль потенциальной энергии; Λ - параметр разделения переменных; E_{j_r} - энергия внутреннего состояния, соответствующая оператору $H_p(\mathbf{x})$. Уравнение, относящееся к другим переменным системы, имеет вид:

$$(\hat{L} + \hat{\Omega} - \Lambda) \Phi^{(j_r)}(x, y, \theta_1) = 0, \quad /10/$$

где

$$\hat{L} = - \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + D(\gamma - \gamma_0)^2, \quad /11/$$

$$\hat{\Omega} = - \frac{1}{3\xi} \left\{ \cos \gamma [3j_3^2 - j^2] + \sqrt{3} \sin \gamma (j_1^2 - j_2^2) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{3} \left\{ \Gamma_1(\gamma) [l^2 + j^2 - l_3^2 - j_3^2] - 2\Gamma_1(\gamma) (\hat{l}_1 \hat{j}_1 + \hat{l}_2 \hat{j}_2) - \right. \quad /12/$$

$$\left. - 2\Gamma_2(\gamma) (\hat{l}_1 \hat{j}_1 - \hat{l}_2 \hat{j}_2) + \Gamma_2(\gamma) (\hat{l}_1^2 - \hat{l}_2^2) + \Gamma_2(\gamma) (\hat{j}_1^2 - \hat{j}_2^2) + \frac{1}{4} \Gamma_3(\gamma) (\hat{l}_3 - \hat{j}_3)^2 \right\},$$

$$D = \left(\frac{B \omega \gamma \beta_0^2}{\hbar} \right)^2, \quad \xi = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^3 \langle T \rangle}. \quad /13/$$

В гамильтониане взаимодействия /2/ $T(r)$ заменен его средним значением $\langle T \rangle$ по внутренним состояниям внешнего нуклона и нулевым колебанием поверхности ядра.

При фиксированных значениях j_r уравнение /10/ позволяет вычислить параметр Λ для каждого значения полного углового момента системы, характеризуемого квантовым числом $l = 1/2, 3/2, \dots$. С помощью найденных значений Λ можно из уравнения /8/ вычислить разности энергий $E - E_{j_r}$, которые будут определять возбужденные состояния системы, соответствующие внутреннему состоянию E_{j_r} .

§ 2. Вычисление параметров Λ

Введем новую функцию

$$\Psi = \sqrt{|\sin 3\gamma|} \Phi, \quad /14/$$

тогда вместо уравнения /10/ можно получить следующее уравнение для функции Ψ :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{g}{4} + \frac{g}{4 \sin^2 3\gamma} - D(\gamma - \gamma_0)^2 - \hat{\Omega}(\gamma \theta_1) + \Lambda \right] \Psi(\gamma \theta_1) = 0. \quad /15/$$

Допустим, что оператор $\hat{\Omega}(\gamma \theta_1)$ мало меняется при колебаниях поверхности остова ядра около положения равновесия γ_0 . Тогда можно заменить оператор $\hat{\Omega}(\gamma \theta_1)$ его значением при $\gamma = \gamma_0$. Сделав замену переменных $z = \gamma - \gamma_0$ и заменив еще $\sin 3\gamma$ его значением при $\gamma = \gamma_0$, получим вместо /15/ следующее уравнение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Dz^2 - \hat{\Omega}(\gamma_0 \theta_1) + \Lambda' \right] \Psi(z \theta_1) = 0, \quad /16/$$

где

$$\Lambda' = \Lambda + \frac{g}{4} + \frac{g}{4 \sin^2 3\gamma_0}. \quad /17/$$

В уравнении /16/ переменные z и θ_1 разделяются. Ищем решение уравнения /16/ в виде

$$\Psi(z \theta_1) = g(z) u(\theta_1). \quad /18/$$

Получаем два уравнения:

$$[\hat{\Omega}(\gamma_0 \theta_1) - \epsilon] u(\theta_1) = 0 \quad /19/$$

и

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - Dz^2 + \mathcal{L} \right] g(z) = 0, \quad /20/$$

где

$$\mathcal{L} = \Lambda' - \epsilon. \quad /21/$$

Решения уравнения /19/ ищутся в виде

$$u^{I\tau}(\theta_1) = \sum_{K,m} A_{K,m}^I(\gamma_0) |IjKm\rangle, \quad /22/$$

где

$$|IjKm\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi^2}} \left\{ D_{MK}^I(\theta_1) \phi_{K-2m}^{I\tau}(x) + (-1)^{I-j} D_{M,-K}^I(\theta_1) \phi_{2m-K}^{I\tau}(x) \right\}, \quad /23/$$

K - проекция углового момента ядра на ось 3, связанную с ядром; $\Omega = K - 2m$ - проекция углового момента внешнего нуклона на ту же самую ось. Здесь использованы свойства симметрии волновых функций нечетных ядер, согласно которым

$$K - \Omega = 2m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad /24/$$

В выражении /22/ суммирование по K производится по значениям $K = 1/2, 3/2, \dots$, суммирование по m производится по целочисленным значениям m , удовлетворяющим неравенству $1/2 - j \leq 2m \leq 1 + j$; причем $|K - 2m| \leq j$; $\phi_{\Omega}^{j\tau}(x)$ - собственные функции оператора $H_p(x)$, соответствующие собственным значениям $E_{j\tau}$; τ характеризует другие квантовые числа. Подставляем /22/ в /19/, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{K,m} a_{K m}^{K' m'} A_{K m}(\gamma_0) - \epsilon(I) A_{K' m'}(\gamma_0) = 0. \quad /25/$$

Для того, чтобы система /25/ имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы равнялся нулю следующий детерминант:

$$\| a_{K m}^{K' m'}(\gamma_0) - \epsilon(I) \delta_{K' K} \delta_{m' m} \| = 0, \quad /26/$$

где

$$a_{K m}^{K' m'}(\gamma_0) = \langle I j K' m' | \hat{\Omega} | I j K m \rangle, \quad /27/$$

т.е. матричные элементы оператора $\hat{\Omega}(\gamma_0, \theta_1)$ на базисных функциях /23/. Отличные от нуля матричные элементы оператора $\hat{\Omega}(\gamma_0, \theta_1)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle I j K m | \hat{\Omega} | I j K m \rangle &= \frac{1}{3} \Gamma_1(\gamma_0) \{ [I(I+1) + j(j+1)] - \\ &- K^2 - (K - 2m)^2 \} - (-1)^{I-j} (I + \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) \delta_{K \frac{1}{2}} \delta_{m 0} \} + \quad /28/ \\ &+ \frac{1}{3} \Gamma_3(\gamma_0) m^2 - \frac{\cos \gamma_0}{3\xi} [3(K - 2m)^2 - j(j+1)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle I j K m | \hat{\Omega} | I j K \pm 1, m \rangle &= - \frac{1}{3} \Gamma_1(\gamma_0) \times \\ &\times \sqrt{(j \mp K \pm 2m)(j \pm K \mp 2m + 1)(I \mp K)(I \pm K + 1)}; \quad /29/ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle I j K m | \hat{\Omega} | I j K \pm 1, m \pm 1 \rangle &= - \frac{1}{3} \Gamma_2(\gamma_0) \times \sqrt{(j \pm K \mp 2m)(j \mp K \pm 2m + 1)(I \mp K)(I \pm K + 1) - \\ &- (\frac{1}{2})(-1)^{I-j} (I + \frac{1}{2}) \sqrt{(I + 3/2)(I - \frac{1}{2})} \delta_{K, \mp \frac{1}{2} + 1} \delta_{m, \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} \}]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle IjKm | \hat{\Omega} | IjK \mp 2, m \mp 1 \rangle &= (1/6) \Gamma_2(\gamma_0) \times \\ &\times \sqrt{(I \pm K)(I \pm K - 1)(I \mp K + 1)(I \mp K + 2)} ; \end{aligned} \quad /31/$$

$$\begin{aligned} \langle IjKm | \hat{\Omega} | IjK, m \pm 1 \rangle &= (1/6) (\Gamma_2(\gamma_0) - \frac{1}{\xi} \sqrt{3} \sin \gamma_0) \times \\ &\times \sqrt{(j \pm K \mp 2m)(j \pm K \mp 2m - 1)(j \mp K \pm 2m + 1)(j \mp K \pm 2m + 2)} - \\ &- (1/3) (-1)^{I-j} \Gamma_2(\gamma_0) (I + \frac{1}{2}) \sqrt{(j + 3/2)(j - 1/2)} \delta_{K \frac{1}{2}} \delta_{m, \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}} ; \end{aligned} \quad /32/$$

$$\begin{aligned} \langle IjKm | \hat{\Omega} | IjK, -m \rangle &= - (1/3) (-1)^{I-j} \Gamma_1(\gamma_0) \times \\ &\times (I + \frac{1}{2}) \sqrt{(j + \frac{1}{2} + 2m)(j + \frac{1}{2} - 2m)} \delta_{K \frac{1}{2}} \cdot (1 - \delta_{m0}) ; \end{aligned} \quad /33/$$

$$\begin{aligned} \langle IjKm | \hat{\Omega} | IjK, -m + 1 \rangle &= - (1/3) (-1)^{I-j} \Gamma_2(\gamma_0) \times \\ &\times (I + \frac{1}{2}) \sqrt{(j - \frac{1}{2} + 2m)(j + 3/2 - 2m)} \delta_{K \frac{1}{2}} \cdot (1 - \delta_{m0} - \delta_{m1}) ; \end{aligned} \quad /34/$$

$$\begin{aligned} \langle IjKm | \hat{\Omega} | IjK \pm 1, -m + 1 \rangle &= (1/6) (-1)^{I-j} \Gamma_2(\gamma_0) \times \\ &\times (I + \frac{1}{2}) \sqrt{(I + 3/2)(I - \frac{1}{2})} \delta_{K, \mp \frac{1}{2} + 1} \cdot (1 - \delta_{m, \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}}) . \end{aligned} \quad /35/$$

Решения уравнения /20/ выражаются через полиномы Эрмита $H_\lambda(x)$ и имеют вид:

$$\psi_{\mathcal{L}}(z) = \exp(-\frac{1}{2} \sqrt{D} z^2) H_\lambda(z \sqrt{D}^{\frac{1}{2}}), \quad /36/$$

$$\mathcal{L} = \sqrt{D} (2\lambda + 1), \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots \quad /37/$$

Таким образом, зная решение уравнения /28/, можно определить параметр Λ следующим образом:

$$\Lambda = \epsilon(I) + \sqrt{D} (2\lambda + 1) - 9/4 - \frac{9}{4 \sin^2 3\gamma_0}, \quad /38/$$

где $\epsilon(I)$ - решение уравнения /26/.

§ 3. Вычисление энергии возбужденных состояний

Вычисленный в § 2 параметр Λ /38/ определяет потенциальную энергию β - колебаний с помощью соотношения /8/. Разлагая /9/ в ряд относительно значения β_Λ , соответствующего минимуму $W_\Lambda(\beta)$, можно написать

$$W_{\Lambda}(\beta) = W_{\Lambda}(\beta_{\Lambda}) + \frac{C_{\Lambda}}{2} (\beta - \beta_{\Lambda})^2, \quad /39/$$

где

$$C_{\Lambda} = C \left(1 + \frac{3\hbar^2 (\Lambda + 2)}{B C \beta_{\Lambda}^4} \right), \quad \beta_{\Lambda} = \beta_0 + \frac{\hbar^2 (\Lambda + 2)}{B C \beta_{\Lambda}^3}. \quad /40/$$

После подстановки /39/ в уравнение /8/ получаем уравнение, решение которого исследовалось в работе А.С. Давыдова /10/. В этой работе было показано, что волновая функция уравнения /8/ имеет вид:

$$F_{\Lambda}(\beta) = \frac{N}{\beta^2} e^{-\frac{z^2}{2}} H_{\nu}(z), \quad /41/$$

где

$$H_{\nu}(z) = [2\Gamma(-\nu)]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right) (z/2)^n = \quad /42/$$

функции Эрмита,

$$z = \frac{p(\beta - \beta_{\Lambda})}{\mu_1 \beta_{\Lambda}}, \quad \mu_1 = \mu \left[1 + 3(\Lambda + 2) \left(\frac{\mu}{p}\right)^4 \right]^{-1/4},$$

$$(p-1)p^3 = (\Lambda + 2)\mu^4, \quad p = \beta_{\Lambda}/\beta_0 \geq 1,$$

ν - корень трансцендентного уравнения

$$H_{\nu}\left(-\frac{p}{\mu_1}\right) = 0, \quad /43/$$

N - множитель нормировки, $\mu = \frac{1}{\beta_0} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{C}}$ - "параметр неадиабатичности". Выражение для энергии при этом будет иметь вид:

$$\Delta E_{j,r}(I\Lambda r) = \hbar\omega \left\{ \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 + 3(\Lambda + 2) \left(\frac{\mu}{p}\right)^4} + \right. \quad /44/$$

$$\left. + (\Lambda + 2) \cdot 2^{-1} \cdot (\mu/p)^2 + 2^{-1} \mu^{-2} (p-1)^2 \right\}.$$

Полную волновую функцию рассматриваемых состояний определяют функции /22/, /36/, /41/ при помощи следующих связей между ними: /7/, /14/, /18/. В тех случаях, когда $\mu < 1/3$, значения ν в уравнении /43/ мало отличаются от целых чисел, т.е. $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда функции Эрмита /42/ переходят в полиномы Эрмита, а выражение /44/ можно приближенно заменить следующим:

$$\Delta E_{j,r}(I\Lambda n) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \quad /45/$$

$$+ \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} (\Lambda + 2) \left\{ 1 + 3\mu^2 \left(n + \frac{1}{2} \right) - \mu^4 (\Lambda + 2) \right\}.$$

Такой вид выражения /45/ означает, что при $\mu < \frac{1}{3}$ можно приближенно выделить возбуждения, соответствующие β - колебаниям.

Подставим в /45/ значение /38/. Тогда получим следующее выражение для энергии ядра:

$$\Delta E_{j\tau}(I\lambda n) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) + (\mathcal{E}_{j\tau}(I) + \hbar\omega_\gamma \lambda) \times \quad /46/$$

$$\times \left\{ 1 + 3\mu^2(n + \frac{1}{2}) - \frac{2B\beta_0^2}{\hbar^2} \mu^4 (\mathcal{E}_{j\tau}(I) + \hbar\omega_\gamma \lambda) \right\},$$

где

$$\mathcal{E}_{j\tau}(I) = \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2} \left(2\epsilon(I) - \frac{1}{2} - \frac{9}{2\sin^2 3\gamma_0} \right) + \frac{1}{2} \hbar\omega_\gamma \quad /47/$$

Энергия /46/ основного состояния ядра характеризуется значением $n = \lambda = 0$, квантовым числом $I = I_0$, которому соответствует наименьшее значение $\epsilon^{j\tau}(I)$ корня уравнения /26/. Обычно наименьшее значение корня уравнения /26/ соответствует $I_0 = j$, если $j \geq 5/2$.

Итак,

$$(\Delta E)_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \hbar\omega + \mathcal{E}_{j\tau}^0(I_0) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \mu^2 - \mu^4 \frac{2B\beta_0^2}{\hbar^2} \mathcal{E}_{j\tau}(I_0) \right\}, \quad /48/$$

где

$$\mathcal{E}_{j\tau}^0(I_0) = \frac{\hbar^2}{4B\beta_0^2} \left(2\epsilon_1(I_0) - \frac{1}{2} - \frac{9}{2\sin^2 3\gamma_0} \right) - \frac{1}{2} \hbar\omega_\gamma \quad /49/$$

Корни уравнения /26/ будем нумеровать индексом ℓ , пробегающим значения 1, 2, 3, ... так, что $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \dots$. Вычитая из /46/ энергию основного состояния ядра, получим энергию возбужденных состояний, соответствующих разным значениям квантовых чисел $I\ell\lambda n$:

$$\Delta E_{j\tau}(I\ell\lambda n) - (\Delta E)_{\text{осн}} = \hbar\omega \cdot n + \hbar\omega_\gamma \cdot \lambda + \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \Delta\epsilon_{j\tau}^{j\tau}(I) +$$

$$+ \frac{3\mu^2}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \Delta\epsilon_{j\tau}^{j\tau}(I) + \hbar\omega_\gamma \lambda \right) + 3\mu^2 \cdot n (\mathcal{E}_{j\tau}(I\ell) + \hbar\omega_\gamma \lambda) - \quad /50/$$

$$- \mu^4 \frac{2B\beta_0^2}{\hbar^2} \left[\frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \Delta\epsilon_{j\tau}^{j\tau}(I) + \hbar\omega_\gamma \lambda \right] [\mathcal{E}_{j\tau}(I\ell) + \mathcal{E}_{j\tau}^0(I_0) + \hbar\omega_\gamma \lambda],$$

где

$$\Delta\epsilon_{j\tau}^{j\tau} = \epsilon_{j\tau}^{j\tau} - \epsilon_{j\tau}^{j\tau}(I_0).$$

/51/

В адиабатическом приближении по β - колебаниям ($\mu = 0$) будем иметь:

$$\Delta E_{j\tau}(I\ell\lambda n) - (\Delta E) = \hbar\omega n + \hbar\omega\gamma\lambda + \frac{\hbar^2}{2B\beta_0^2} \Delta\epsilon_{\ell}^{j\tau}(I). \quad /52/$$

Разделив /52/ на $\langle T \rangle \beta_0$, получим выражение энергии в адиабатическом приближении в безразмерных величинах:

$$E_{j\tau}(I\ell\lambda n) = \zeta \cdot n + \eta \cdot \lambda + 3\xi \Delta\epsilon_{\ell}^{j\tau}(I), \quad /53/$$

где

$$\zeta = \frac{\hbar\omega}{\langle T \rangle \beta_0}, \quad \eta = \frac{\hbar\omega\gamma}{\langle T \rangle \beta_0}, \quad \xi = \frac{\hbar^2}{6B\beta_0^2 \langle T \rangle}. \quad /54/$$

Вращательно-одночастичные возбуждения можно получить, положив $\lambda = n = 0$.

Тогда

$$E_{j\tau}(I\ell 00) = 3\xi \Delta\epsilon_{\ell}^{j\tau}(I). \quad /55/$$

Энергия возбуждения /55/ зависит только от двух параметров: параметра ξ и параметра неаксиальности γ_0 .

Формула /50/ учитывает связь между одночастично-вращательными возбуждениями и β - и γ - колебаниями. Выберем начало отсчета энергии такое, что $\epsilon_{\ell}^{j\tau}(I_0) = 0$, тогда $\Delta\epsilon_{\ell}^{j\tau}(I) = \epsilon_{\ell}^{j\tau}(I)$ и поправка к вращательно-одночастичным уровням в состояниях $n = \lambda = 0$ может быть представлена, как в случае четно-четных ядер /10/, в виде:

$$= a[\epsilon_{\ell}^{j\tau}(I) \cdot \xi]^2 + b[\epsilon_{\ell}^{j\tau}(I) \xi],$$

где a обусловлено связью вращений с β - колебаниями, b обусловлено связью как с β -, так и с γ - колебаниями.

§ 4. Сравнение теории с экспериментом

Для определения последовательности спинов и энергии вращательно-одночастичных возбуждений в адиабатическом приближении по β - колебаниям ($\mu = 0$) на электронно-счетных вычислительных машинах было решено уравнение /26/ для каждого значения полного углового момента I ядра. Решение уравнения /26/ сводится к диагонализации матрицы /27/. Диагонализация матрицы проводилась по методу Якоби, стандартная программа которого была разработана Воеводиным и Ким /11/ в Вычислительном центре МГУ. Порядок диагоналируемых матриц определяется выражением $(j + \frac{1}{2})(I + \frac{1}{2})$. Счет велся для $j = 5/2$, хотя в принципе он может быть проведен для любого $j > 5/2$. Были найдены собственные

значения и собственные векторы матрицы /27/ как функции ξ и γ_0 при следующих значениях этих параметров:

$$\xi = \pm 0,25; \pm 0,50; \pm 0,75; \pm 1,00.$$

$$\gamma_0 = 5^\circ; 10^\circ; 15^\circ; 20^\circ; 22,5^\circ; 25^\circ; 27,5^\circ; 30^\circ.$$

Поскольку оператор Гамильтона в этой модели инвариантен относительно преобразования

$$\begin{cases} \gamma_0 \rightarrow 60^\circ - \gamma_0 \\ \langle T \rangle \beta_0 \rightarrow -\langle T \rangle \beta_0 \end{cases}$$

можно рассматривать γ_0 в интервале от 0 до 30° для ядер с $\xi > 0$ и в том же интервале для ядер с $\xi < 0$, что соответствует интервалу от 30° до 60° для ядер с $\xi > 0$. Положительное ξ в ядрах может быть реализовано в двух случаях: либо внешний нуклон представляет собой дырку, а квадрупольный момент ядра положительный, либо внешний нуклон-квазичастица, квадрупольный момент-отрицательный. Отрицательное ξ возможно, если внешний нуклон - дырка, а квадрупольный момент-отрицательный, или внешний нуклон-квазичастица, квадрупольный момент-положительный. Таким образом, переход через 30° означает, что квазичастица становится дыркой или меняется знак квадрупольного момента.

На рис. 1-4 представлены последовательность спинов и зависимости от параметра γ_0 энергий возбужденных состояний нечетных атомных ядер, имеющих в основном состоянии спин $5/2$, при значениях $\xi = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00$.

При $\gamma_0 = 0$ часть уровней энергии непрерывно переходит в уровни основной вращательно-одночастичной полосы, рассчитанной в аксиальной теории^{/3,4/}. При 60° эти уровни переходят в уровни, рассчитанные в работе^{/12/}. Этим уровням энергии соответствуют на графиках более толстые кривые. Остальные уровни при $\gamma_0 \rightarrow 0^\circ$ или 60° уходят в бесконечность. Они соответствуют аномальным полосам, рассмотренным в работе^{/4/}. Полученные результаты свидетельствуют, что простая модель малой неаксиальности^{/4/} может быть использована вплоть до $\gamma_0 = 10^\circ$. В этом случае можно говорить отдельно об основной вращательной - одночастичной полосе и аномальных полосах. При $\gamma_0 > 10^\circ$ такое разделение становится невозможным. Уровни, которые при $\gamma_0 < 10^\circ$ соответствуют асимптотически аномальным полосам, характеризуемым квантовым числом $|m|$, при больших γ_0 опускаясь из бесконечности, сильно деформируют уровни, соответствующие асимптотически при $\gamma_0 < 10^\circ$ основной вращательно-одночастичной полосе ($|m| = 0$). Волновая функция состояний, асимптотически соответствующих состояниям с $|m| = 0$, при $\gamma_0 > 10^\circ$ будет содержать большие примеси состояний с $|m| \neq 0$, что должно сказаться на вероятности переходов. Можно заметить, что общий характер спектра напоминает спектр

четно-четных ядер. Однако у нечетных ядер основная полоса деформируется значительно сильнее, чем в случае четно-четных ядер, и нет симметрии относительно 30° . Последнее связано с тем обстоятельством, что спектр нечетных ядер чувствителен к знаку квадрупольного момента в отличие от спектра четно-четных ядер, т.е. это связано с указанной выше симметрией гамильтониана относительного преобразования $\gamma_0 \rightarrow 60^\circ - \gamma_0$ $\langle T \rangle \beta_0 \rightarrow -\langle T \rangle \beta_0$.

В таблицах 1,2 указаны теоретические и экспериментальные значения спинов и энергий возбужденных состояний ядер Al^{25} и Mg^{25} соответственно. Хотя в работах ^{/13-14/} даны уровни энергии этих ядер вплоть до 7-8 Мэв, сравнение проведено только для нижайших уровней, ибо высокоэнергетические возбуждения могут быть совершенно иной природы.

После того, как выбран один из четырех рисунков, параметр γ_0 определяется из отношения энергий двух нижайших уровней.

В таблице 3 указаны спины и энергии возбужденных состояний ядра Sb^{119} . Среднее четно-четное ядро Cd^{116} имеет $\gamma_0 = 25,3^\circ$, что близко к выбранному для Sb^{119} значению γ_0 . В таблицах 4, 5, 6 и 7 даны теоретические и экспериментальные значения спинов и энергий ядер Re^{185} , Re^{187} , Yb^{173} и Hf^{175} . Ближайшие четно-четные ядра W^{184} , W^{186} и Os^{188} имеют $\gamma_0 = 14,1^{/21/}$; $13,9^{/22/}$; $13,9^{/21/}$ соответственно, что также близко к выбранным для Re^{185} и Re^{187} значениям. Наконец, в таблице 8 даны теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра U^{233} . Это ядро было рассмотрено в рамках аксиальной теории ^{/4/}, и там было указано, что уровни $1/2^+$ 398 кэв, $3/2^+$ 415 кэв и $5/2^+$ 461 кэв можно отнести к первой аномальной полосе с $|m| = 1$. Из таблицы 8 видно, что указанные уровни относятся к уровням асимптотически основной полосы, которые уже деформированы уровнями асимптотически аномальной полосы. γ_0 ближайшего четно-четного ядра Th^{232} равно $10,3^\circ^{/21/}$, что близко к γ_0 , приписанному U^{233} .

Проведенное сравнение теории с экспериментом показывает, что последовательность спинов и значений энергий ряда ядер с нечетным A может быть удовлетворительно объяснена в рамках неаксиальной теории в предположении, что j - хорошее квантовое число и возможно отделение β - и γ - колебаний от вращений.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. А.С. Давыдову, под руководством которого была выполнена настоящая работа. Авторы также благодарны сотрудникам кафедры математики физического факультета и Вычислительного центра МГУ за содействие и помощь при работе на электронно-счетных вычислительных машинах.

Л и т е р а т у р а

1. S.G. Nilsson. Mat.-fys. Medd. Dan., 29, No. 16 (1955)
/перевод, сб. "Деформация атомных ядер", ИЛ, Москва, 1958/.
2. B. Mottelson and S. Nilsson. Mat.-fys. Skv. Dan., 1, N. 8 (1959).
3. А.С. Давыдов, Р.А. Сардарян. ЖЭТФ, 40, 1429 /1961/.
4. А.С. Давыдов, Р.А. Сардарян. Вестник Моск. университета, серия физ., № 4, 72
/1962/. Nucl. Phys., 37, 106 /1962/.
5. K. Hecht, G.R. Satchler. Nucl. Phys., 32, 286 (1962).
6. L.W. Person, J.O. Rasmussen. Nucl. Phys., 36, 666 (1962).
7. T.D. Newton. Can. J. Phys., 38, No. 5, 700 (1960).
8. A. Bohr. Mat.-fys. Medd. Dan., 26, No. 14 (1952).
9. А.С. Давыдов. Nucl. Phys., 16, 597 /1960/.
10. А.С. Давыдов. Вестник Моск. университета, серия физ., № 1, 58 /1961/.
11. В.В. Воеводин, Г. Ким. Вычислительные методы и программирование. Изд. МГУ,
269-278 /1962/.
12. Ш. Шарипов. Вестник Моск. университета, серия физ., № 1, 46 /1963/.
13. P.H. Endt, Van der Leun C. Nucl. Phys., 34, 68 (1962).
14. R.K. Sheline, R.A. Havlan. Nucl. Phys., 29, 177 (1962).
15. J. Kantele, R.W. Fink. Nucl. Phys., 43, 187 (1963).
16. А.С. Давыдов. Ядерные реакции при малых и средних энергиях. Труды Всесоюз-
ной конференции 1960 года. Изд. АН СССР, Москва, 1962.
17. S.S. Malik, A. Mukerji. Phys. Rev., 111, 1291 (1958).
18. Б.С. Желепов, Л.К. Пекер. Препринт ОИЯИ Р-288, Дубна, 1959.
19. B. Hürmatz, T.H. Haudle, I.W. Mihelich. Phys. Rev., 128, 1186 (1962).
20. I. Marklund, B. Linstrom. Nucl. Phys., 40, 329 (1963).
21. А.С. Давыдов, В.С. Ростовский. ЖЭТФ, 36, 1788 (1959); Nucl. Phys., 12, 59 (1959).
22. А.С. Давыдов. Изв. АН СССР, серия физ., 25, 782 /1961/.
23. А.С. Давыдов, Г.Ф. Филиппов. ЖЭТФ, 35, 440 /1958/; Nucl. Phys., 8, 237 (1959).
24. C.J. Orth, M.E. Bunker, J.W. Starner. Phys. Rev., 132, 355 (1963).
25. R.G. Albrige, J.H. Hollander, C.J. Gallagher, J.H. Hamilton. Nucl. Phys., 27, 529 (1961).
26. G. Schulze, J. Ahlf. Nucl. Phys., 30, 163 (1962).
27. K.M. Bisgard, P. Dahl, P. Hornshøj, A.B. Knusten. Nucl. Phys., 41, 21 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1964 г.

Таблица 1. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Al^{25}

Теория $\xi = 1.00; \gamma_0 = 40^\circ$		Эксперимент $I3$	
Спин	Энергия (МэВ)	Спин	Энергия (МэВ)
5/2+	0	5/2+	0
1/2+	0,455	1/2+	0,455
9/2+	0,800		
3/2+	0,942	3/2+	0,949
7/2+	1,390	(7/2+)	1,61
5/2+	1,78	5/2+	1,81
3/2+	2,46	1/2+	2,50
			2,69
5/2+	2,92	3/2+	2,74

Таблица 2. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра Mg^{25}

Теория $\xi = 1.00 \gamma_0 = 37,5^\circ$		Эксперимент $I4$	
Спин	Энергия (МэВ)	Спин	Энергия (МэВ)
5/2+	0	5/2+	0
1/2+	0,586	1/2+	0,586
9/2+	0,950		
3/2+	1,110	3/2+	0,984
7/2+	1,500	7/2+	1,608
5/2+	1,970	5/2+	1,962
		1/2	2,566
5/2+	2,760	(7/2+)	2,740
3/2+	2,850	(3/2+)	2,805

Таблица 3. Теоретические и экспериментальные спины
 и энергии ядра Sb^{119}

Теория Спин	$\xi = 0,25;$ Энергия (Мэв)	$\gamma_0 = 21,25^\circ$	Эксперимент ¹⁵	
			Спин	Энергия(Мэв)
5/2+	0		5/2+	0
7/2+	0,271		(7/2+)	0,271
9/2+	0,530			
1/2+	0,630		(1/2+)	0,645
3/2+	0,755		(3/2+)	0,702
9/2+	0,825			
5/2+	0,900		(5/2+)	1,054
7/2+	1,230		(7/2+)	1,221
			(9/2+)	1,374
3/2+	1,480			
9/2+	1,540			
5/2+	1,590			
			(1/2,3/2)	1,755
9/2+	1,990			
7/2+	2,000			
1/2+	2,010			
3/2+	2,090			
				2,205
				2,291
5/2+	2,300			2,365
7/2+	2,570			

Таблица 4. Теоретические и экспериментальные спины
 и энергии ядра Re^{185}

Теория	$\xi = 0,25; \gamma_0 = 15,6^\circ$	Эксперимент	$I7, I8$
Спин	Энергия (кэВ)	Спин	Энергия (кэВ)
5/2+	0	5/2+	0
7/2+	122	7/2+	122
9/2+	277	9/2+	280
1/2+	627	1/2+	643
3/2+	720	3/2+	718
9/2+	740		
5/2+	790	5/2+	870
3/2+	810	3/2+	879

Таблица 5. Теоретические и экспериментальные спины
 и энергии ядра Re^{187}

Теория	$\xi = 0,25; \gamma_0 = 17,5^\circ$	Эксперимент	$I9$
Спин	Энергия (кэВ)	Спин	Энергия
5/2+	0	5/2+	0
7/2+	134	7/2+	134,24
9/2+	296	9/2+	300-320
1/2+	522	1/2+	511,6
3/2+	634	3/2+	618,2
		1/2+	625,3
9/2+	655		
5/2+	740		
		3/2+	773
3/2+	840		
7/2+	855		864,5
5/2+	895		880±20

Таблица 6. Теоретические и экспериментальные спины и энергии
ядра ${}^{173}\text{Yb}$.

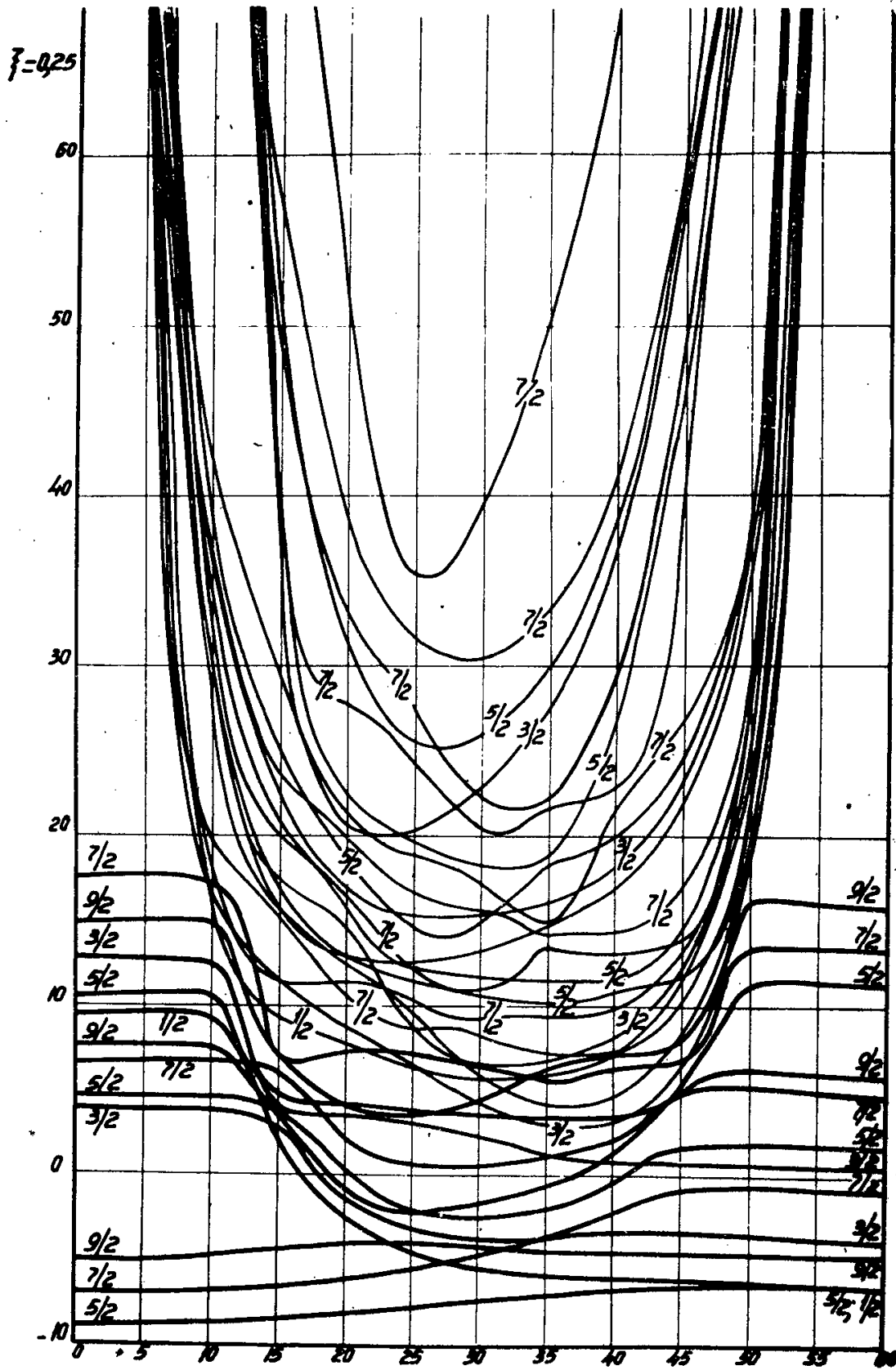
Теория $\xi = 0,25$; $\gamma_0 = 15,6^\circ$		Эксперимент ²⁴	
Спин	Энергия (Мэв)	Спин	Энергия(Мэв)
5/2	0	5/2	0
7/2	0,079	7/2	0,0787
9/2	0,179	9/2	0,1795
1/2	0,415	1/2	0,399
3/2	0,466	3/2	0,465
9/2	0,478		
5/2	0,508		
3/2	0,525		
5/2	0,555		
7/2	0,598		
9/2	0,655		
7/2	0,672	7/2	0,637

Таблица 7. Теоретические и экспериментальные спины и энергии ядра ${}^4_2\text{He}$ 175

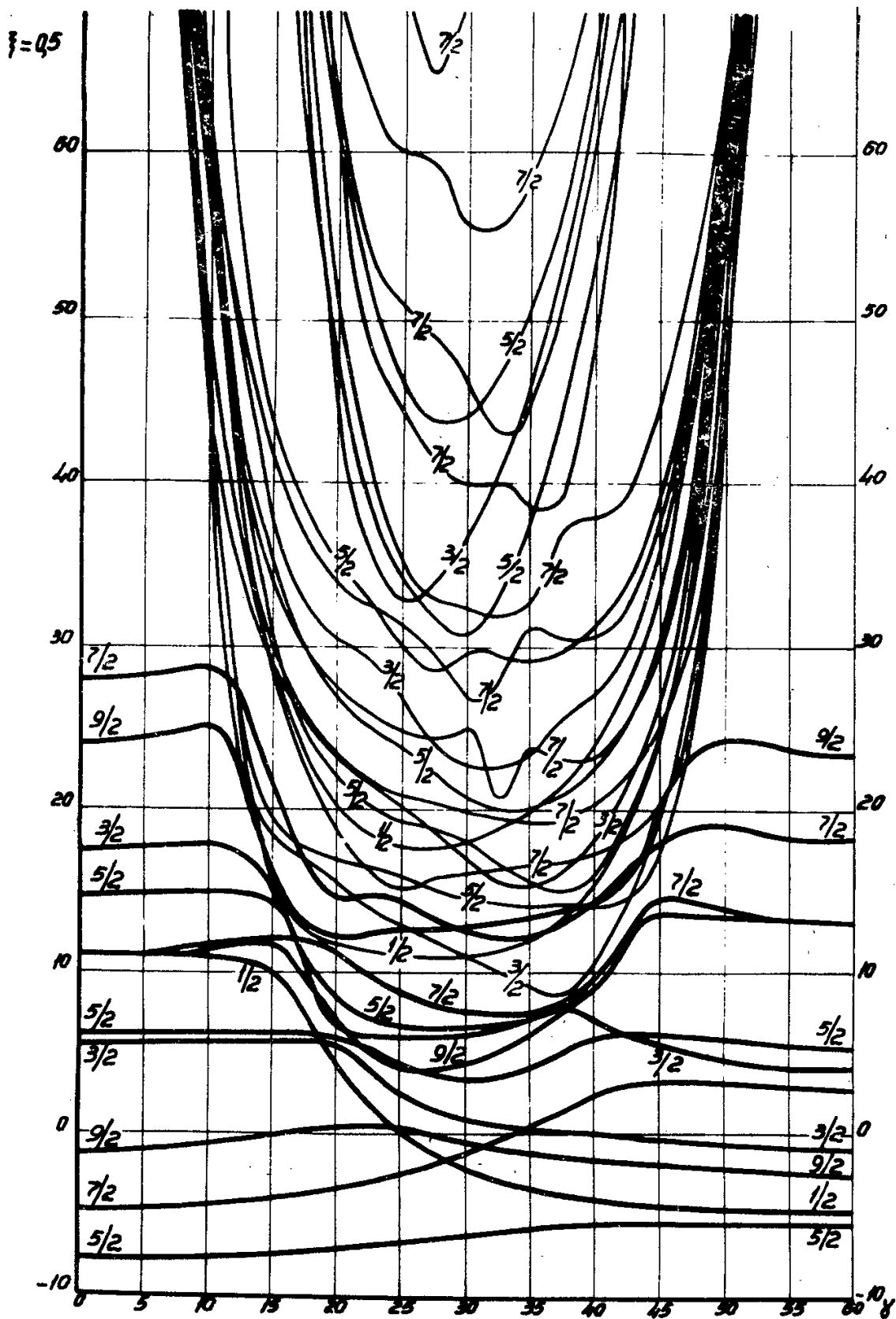
Теория $\xi = 0,25$; $\gamma_0 = 25^\circ$		Эксперимент ²⁰	
Спин	Энергия (кэВ)	Спин	Энергия(кэВ)
5/2-	0	5/2-	0
7/2-	81,5	7/2-	81,5
1/2-	122	1/2-	125,9
9/2-	144	9/2-	185,8
3/2-	167	3/2-	196,4
5/2-	208	5/2-	213,4
9/2-	211		
		11/2-	312,4
7/2-	315	7/2-	348,4
		7/2-	375,4
3/2-	405		
9/2-	415	9/2-	406,1
5/2-	432		
		9/2-	474,8
1/2-	522		
3/2-	531		
		11/2-	622,0

Таблица 8. Теоретические и экспериментальные спины и энергии
 ядра U^{233}

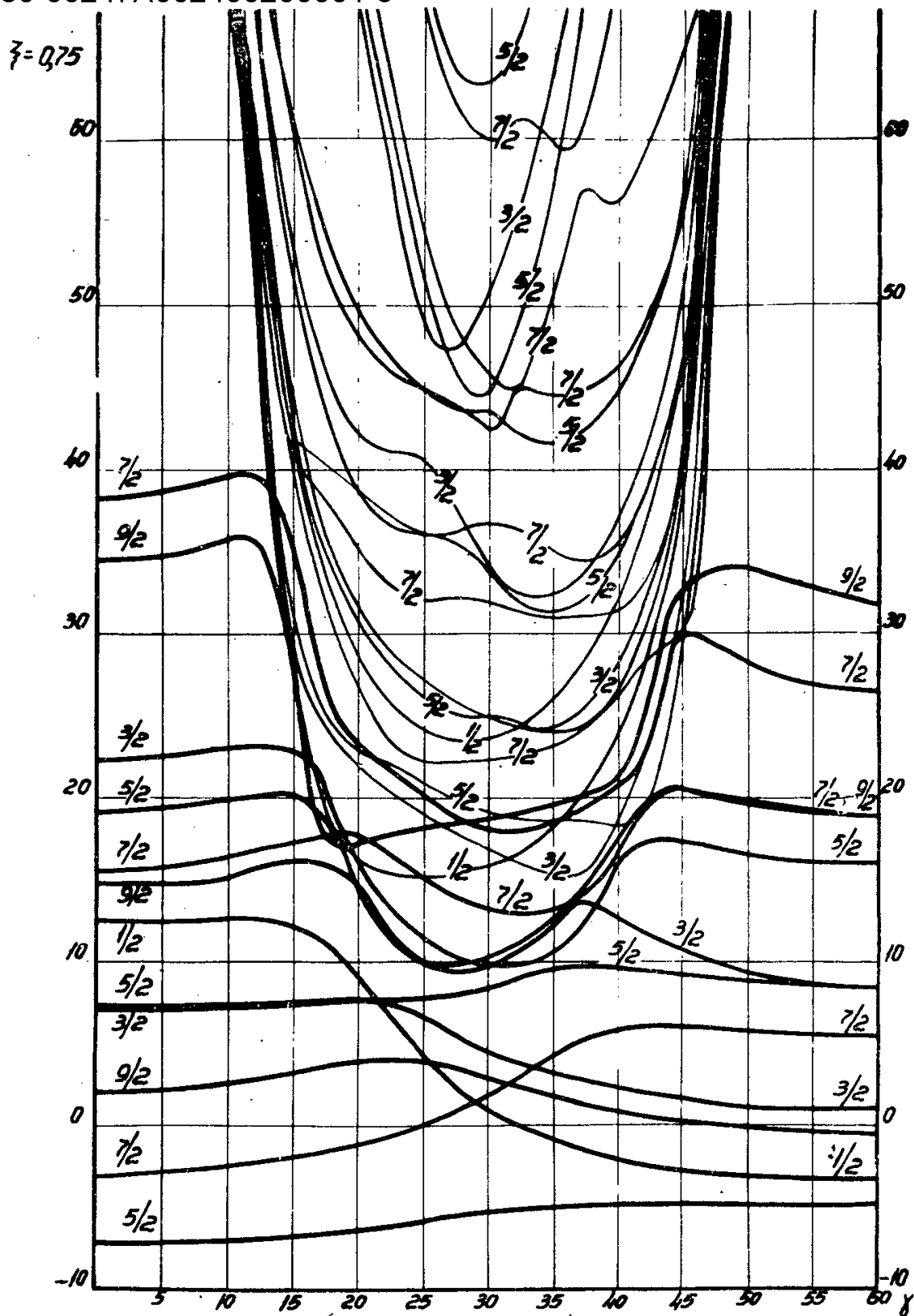
Теория $\xi = 0,25; \gamma_0 = 11,25^\circ$		Эксперимент ^{25,26,27}	
Спин	Энергия (кэВ)	Спин	Энергия (кэВ)
5/2	0	5/2	0
7/2	40,35	7/2	40,35
9/2	95	9/2	92,0
3/2	295	3/2	311,93
5/2	315	5/2	340,52
7/2	365		
9/2	370		
1/2	403	1/2	398,55
		3/2	415,80
5/2	432		
3/2	453		
		5/2	461,16



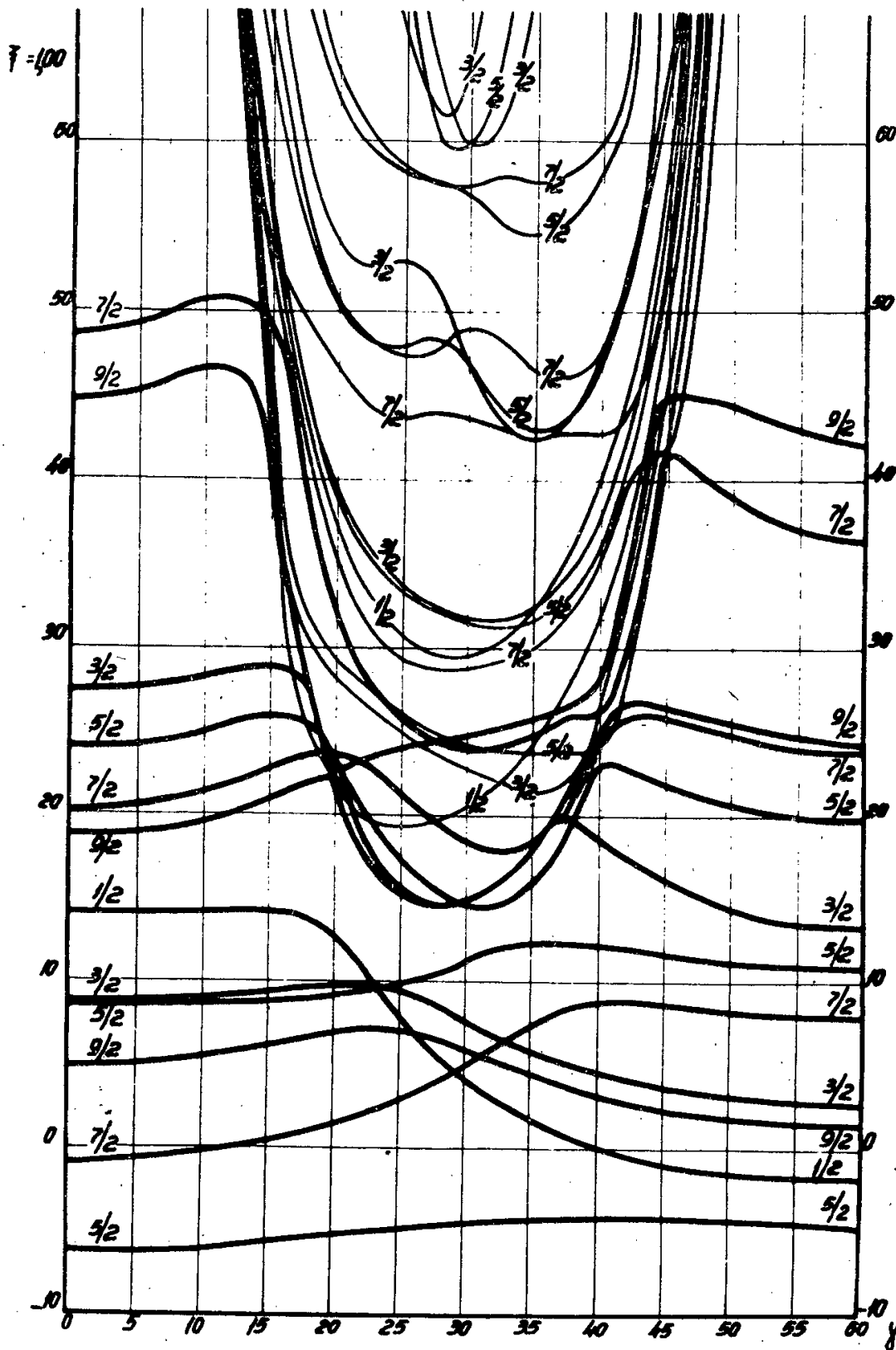
Р и с. 1. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен $5/2$, при значении параметра ξ , равном $0,25$.



Р и с. 2. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен $5/2$, при значении параметра ξ , равном $0,5$.



Р и с. 3. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен $5/2$, при значении параметра ξ , равном $0,75$.



Р и с. 4. Зависимость от параметра γ_0 последовательности спинов и значений энергии вращательно-одночастичных состояний нечетных атомных ядер, спин основного состояния которых равен $5/2$, при значении параметра ξ , равном $1,00$.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3618. ••• Тираж 400. 1,7 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. Март 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е.М. Банг, И.Н. Михайлов

P-1573

РАСЧЕТЫ СВОЙСТВ ЯДЕР
РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИ ПОМОЩИ УЛУЧШЕННОЙ ТЕОРИИ
ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Дубна 1964

Банг Е.М., Михайлов И.Н.

P-1573

РАСЧЕТЫ СВОЙСТВ ЯДЕР РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ПОМОЩИ УЛУЧШЕННОЙ ТЕОРИИ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Развит метод приближенного вычисления матричных элементов по функциям вида $\Psi = \sum \phi_i a_i^+ a_i^- |0\rangle$, предложенный ранее одним из авторов. Метод применен для расчета характеристик ядер редкоземельных элементов. Показано, что изменения, связанные с использованием более точного метода, чем метод u, v -преобразования, оказываются значительно меньше, чем неопределенность в значенных параметров, вызванная ограниченной точностью модели, в которой ядро описывается модельным гамильтонианом теории сверхпроводимости. Аналогичные изменения в параметрах, определяющих волновые функции системы, оказываются значительно больше: так, изменения в расчетных значениях вероятности β - переходов достигают 1,5-2,0. Изменения происходят, как правило, в сторону лучшего согласования с экспериментом, но и здесь расхождение между экспериментом и теорией вызвано в основном неточностью модели.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Bang J., Mikhailov I.N.

P-1573

CALCULATIONS OF PROPERTIES OF RARE- EARTHS BY USING A REFINED THEORY OF PAIRING CORRELATIONS .

An approximate method, suggested earlier by one of the authors is developed for calculation of matrix elements with functions of the type $\Psi = \left[\sum \phi_i a_i^+ a_i^- \right] |0\rangle$. The method is used for evaluation of the characteristics of the rare earth nuclei. It is shown that u, v transformation method with blocking leads to the correct results for the energy spectrum of nuclei. However, the properties of the eigenfunctions describing excited states change essentially, the more exact treatment of the conservation law of the nucleon number being applied. In particular, the pairing correlations turn out not to be so much damped in excited states of nuclei, as it is prescribed by the u, v -transformation method.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

Е.М. Банг, И.Н. Михайлов

P-1573

РАСЧЕТЫ СВОЙСТВ ЯДЕР
РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИ ПОМОЩИ УЛУЧШЕННОЙ ТЕОРИИ
ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Направлено в "Изв. АН СССР"

Дубна 1964

В настоящее время появилось много работ /см. /1-5/ /, в которых подвергается критике решение уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$H = \sum_{\sigma, \rho} E_{\sigma} a_{\sigma}^+ a_{\sigma} - \frac{G_0}{V} \sum_{\sigma, \rho} a_{\sigma}^+ a_{\rho}^+ a_{\rho}^- a_{\sigma}^- \quad /1/$$

методом u, v - преобразования /6/. Так, одним из авторов данной работы было показано ранее /см. /5/ /, что корреляционные эффекты сверхпроводящего типа в возбужденных состояниях системы оказываются значительно больше, чем следует из метода u, v - преобразования. Это вытекает из того, что значение корреляционной константы в двухквaziчастичных состояниях не сильно отличается от значения этой величины в основном состоянии.

Отметим при этом, что спектр энергии двухквaziчастичных состояний хорошо передается методом u, v - преобразования. В этой работе предложена весьма простая схема решения уравнения Шредингера с гамильтонианом /1/, в которой приближенно учтены ошибки, связанные с несохранением числа частиц в состоянии, описываемом бардиновской функцией

$$\Psi = \prod_{\sigma} (u_{\sigma} + v_{\sigma} a_{\sigma}^+ a_{\sigma}^-) |0\rangle. \quad /2/$$

В данной работе схема вычислений, аналогичная описанной выше, разработана с тем, чтобы включить в нее расчет матричных элементов между различными состояниями ядер. Ниже показано также, что уравнения, полученные в работе /5/, содержат все поправки к методу u, v - преобразования порядка $\frac{1}{N}$. Наконец, в работе приведены результаты расчетов, выполненных с помощью разработанного метода, для ядер группы редкоземельных элементов. Схема расчета выбрана вполне аналогично тому, как это было сделано в работе /7/. Константы парного взаимодействия сверхпроводящего типа выбраны при помощи сравнения экспериментальных и теоретических значений парных энергий для большой группы ядер. Получены энергетические спектры ядер и поправки, связанные с парными корреляциями, к величине $\log(ft)$ для ряда процессов β - распада ядер.

Основные результаты, полученные в работе /5/, можно сформулировать следующим образом. Как показано в /1/, собственные функции оператора Гамильтона /1/ для системы N частиц при четном N могут быть представлены в виде:

$$\Psi_0 = (A^+)^{\frac{N}{2}} |0\rangle = N! \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{N+1}} z^{\hat{N}} e^{A^+} |0\rangle, \quad /3/$$

где

$$A^+ = \sum_{\sigma} \phi_{\sigma} a_{\sigma+}^+ a_{\sigma-}^+ \quad /4/$$

оператор рождения Куперовской пары, $|0\rangle$ - состояние вакуума по операторам a_{σ} . Во второй части равенства /3/

$$\hat{N} = \sum_{\sigma} a_{\sigma+}^+ a_{\sigma-}^+ \quad /5/$$

представляет собой оператор числа частиц. Интеграл в формуле /3/ является оператором проектирования функции

$$e^{A^+} |0\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} (A^+)^n |0\rangle \quad /6/$$

на состояния системы N - частиц /контур в комплексной плоскости z обходит точку $z = 0$ /. С другой стороны, функцию /6/ можно переписать в виде:

$$e^{A^+} = \prod_{\sigma} (1 + \phi_{\sigma} a_{\sigma+}^+ a_{\sigma-}^+) |0\rangle, \quad /7/$$

совпадающем с точностью до нормировки с формулой /2/. Таким образом, проекция бардиновской функции /2/ при правильном выборе параметров u_{σ} , v_{σ} / или ϕ_{σ} / является точной волновой функцией системы. Среднее значение произвольного оператора \hat{O} в состоянии /3/ перепишем в виде:

$$O_1 = \frac{\oint \frac{dz}{z} O(z) e^{\Phi(z)}}{\oint \frac{dz}{z} e^{\Phi(z)}}, \quad /8/$$

где

$$\Phi(z) = \ln \langle \Psi, z^{\hat{N}-N} \Psi \rangle = \sum_{\sigma} \ln(1 + z^2 \phi_{\sigma}^2) - N \ln z, \quad /9/$$

а

$$O(z) = \frac{\langle \Psi, \hat{O} z^{\hat{N}} \Psi \rangle}{\langle \Psi, z^{\hat{N}} \Psi \rangle} \quad /10/$$

При весьма общих предположениях о характере оператора \hat{N} и структуре функций Ψ можно доказать, что функция $\Phi(z)$, определенная формулой /9/, является аналитической на действительной оси z и обладает седловой точкой /причем только одной/ в интервале $0 < z < \infty$. Действительно, пусть \hat{N} - некоторый эрмитовский оператор, а $\psi_{n,a}$ - некоторый полный набор функций, таких, что

$$\hat{N} \psi_{n,a} = n \psi_{n,a} \quad /11/$$

Пусть разложение функции Ψ в формуле /9/ по функциям $\psi_{n,a}$ имеет вид:

$$\Psi = \sum_{n,a} c_{n,a} \psi_{n,a} \quad /12/$$

Тогда

$$\Phi(z) = \ln \left\{ \sum_{n,a} |c_{n,a}|^2 z^n \right\} - N \ln z \quad /13/$$

Предположим, что в разложении /10/ имеются по крайней мере два отличных от нуля коэффициента: c_{n_1, a_1} при $n_1 < N$ и c_{n_2, a_2} при $n_2 > N$. Исследуем выражение

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{z} \{ \bar{N}_z - N \}, \quad /14/$$

где

$$\bar{N}_z = \frac{\sum_{n,a} |c_{n,a}|^2 n z^n}{\sum_{n,a} |c_{n,a}|^2 z^n} \quad /15/$$

Легко видеть, что

$$\frac{d\Phi}{dz} \rightarrow \frac{1}{z} (n_{min} - N) \quad \text{при } z \rightarrow 0+ , \quad /16/$$

$$\frac{d\Phi}{dz} \rightarrow \frac{1}{z} (n_{max} - N) \quad \text{при } z \rightarrow \infty ,$$

где n_{min} - минимальное /максимальное/ значение n , которому соответствует $c_{na} \neq 0$. Далее, имеем

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d\Phi}{dz} \right) = \frac{1}{z} (\bar{N}_z - N)^2 \geq 0. \quad /17/$$

Выражение в скобках в формуле /17/ определено по аналогии с /15/ как среднее

$$(\bar{N}_z - N)^2 = \frac{\sum_{n,a} |c_{n,a}|^2 z^n (n - N)^2}{\sum_{n,a} |c_{n,a}|^2 z^n} \quad /18/$$

Теперь видно, что функция $z \frac{d\Phi}{dz}$, отрицательная при малых $|z|$ и положительная при больших z , монотонна, а следовательно, обращается в нуль в некоторой точке z_0 . Это является доказательством утверждения о седловой точке функции $\Phi(z)$. Из формулы /18/ следует, что направление быстрого спада функции Φ перпендикулярно оси z . Еще одно общее утверждение о функции $\Phi(z)$ можно сделать, рассмотрев характер изменения ее вдоль окружности с центром в точке $z=0$. Поскольку все слагаемые, определяющие функцию

$$e^{\Phi(z)} = \frac{1}{z^N} \sum_{n,a} |c_{n,a}|^2 z^n,$$

положительны при положительных значениях z , то

$$\frac{|e^{\Phi(z)}|}{|e^{\Phi(|z|)}|} \leq 1.$$

Таким образом, при всяком выборе окружности в плоскости z можно утверждать, что величина $|e^{\Phi(z)}|$ принимает свое максимальное значение в точке пересечения окружности с положительной полуосью z . Рассмотрим теперь интересующий нас случай, когда \hat{N} - оператор числа частиц, а функции Ψ определяются формулами /4,5/ и описывают протяженный сверхпроводник. Это означает, что при увеличении числа частиц в системе N объем, занимаемый ею, и плотность одночастичных состояний растут пропорционально N , а коэффициенты ϕ_n являются плавными функциями энергии одночастичных состояний. При этом сумма в формуле /7/ может быть заменена интегралом

$$\Phi(z) \rightarrow N \left\{ \frac{1}{\rho} \int d\epsilon \gamma(\epsilon) \ln [1 + |\phi(\epsilon)|^2 z^2] - \ln z \right\}. \quad /19/$$

Здесь ρ - плотность числа частиц в системе, а $\gamma(\epsilon)$ - плотность одночастичных состояний на интервал энергии в системе единичного объема. Формула /19/ свидетельствует, что показатель экспоненты в формуле /8/ пропорционален числу частиц в системе. Отсюда следует /см. /8/ /, что при весьма общих предположениях о свойствах функции $O(z)$ интеграл

$$I = \oint \frac{dz}{z} O(z) e^{\Phi(z)} \quad /20/$$

может быть представлен асимптотическим рядом

$$e^{-\Phi(z_0)} I = \sqrt{\frac{-\pi}{\Phi_2}} \left\{ O_0 + \left[\frac{O_2}{-2\Phi_2} + \frac{3(O_3\Phi_3 - O_0\Phi_1)}{4\Phi_2^2} + \frac{15O_0\Phi_3^2}{-16\Phi_2^3} \right] + \dots \right\}. \quad /21/$$

Здесь z_0 - седловая точка функции $\Phi(z)$,

$$\Phi_n = \left[\frac{d^n \Phi(z)}{dz^n} \right]_{z=z_0}, \quad O_n = \left[\frac{d^n O(z)}{dz^n} \right]_{z=z_0}. \quad /22/$$

Формула /21/ дает асимптотическое разложение интеграла /22/ с точностью до членов порядка $\frac{1}{N^{3/2}}$. При вычислении отношения двух интегралов, фигурирующего в формуле /8/, члены в квадратных скобках, содержащие O_0 , можно не учитывать. Оставшиеся члены оказывается удобным переписать в терминах матричных элементов, определенных формулой /10/, что дает

$$O_1 = O(z_0) - \frac{1}{2\Delta N_{z_0}^2} \left\{ \overline{[\hat{O} \Delta \hat{N}_{z_0}^2]} - O(z_0) \overline{[\Delta \hat{N}_{z_0}^2]} \right\} - \frac{3\Delta \hat{N}_{z_0}^3}{2\Delta N_{z_0}^2} \overline{(\hat{O} \Delta \hat{N})_{z_0}}, \quad /23/$$

где

$$\Delta \hat{N}^n = (\hat{N} - N_0)^n. \quad /24/$$

Определим параметры u_0, v_0 при помощи формул

$$u_s = \frac{1}{(1 + z_0^2 |\phi_s|^2)^{1/2}}, \quad v_s = \frac{\phi_s z_0}{(1 + z_0^2 |\phi_s|^2)^{1/2}} \quad /25/$$

где ϕ_s - параметры точной волновой функции системы, записанной в форме /3/, /4/. Легко убедиться, что матричные элементы $O(z_0)$ в формулах /18/, /21/ представляют собой средние значения соответствующих операторов, вычисленные по нормированной функции /2/, с коэффициентами u_s , v_s , заданными формулами /25/.

Мы видим, что существует бардиновская функция, такая, что среднее значение произвольного оператора, вычисленное в соответствии с формулой /23/ по этой функции, совпадает с точностью до членов $\frac{1}{N}$ со средним значением этого оператора по функции основного состояния системы^{x/}. Этот результат можно использовать для определения самих параметров u , v функций на основании вариационного принципа. Как было показано в работе /5/, минимальное значение среднего от оператора энергии /1/ может быть приближенно записано в виде, аналогичном тому, который следует из теории u , v - преобразования:

$$E = 2 \sum_s E_s v_s^2 - \frac{C^2}{2 G_{\text{эфф}}}, \quad /26/$$

где

$$G_{\text{эфф}} = G \left(1 + \frac{1}{\Delta N^2} \right) = G \left(1 + \frac{1}{4 \sum_s u_s^2 v_s^2} \right), \quad /27/$$

$$C = G_{\text{эфф}} \sum_s u_s v_s, \quad /28/$$

а коэффициенты u_s , v_s определяются формулами

$$\frac{u_s^2}{v_s^2} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{E_s - \lambda}{\sqrt{C^2 + (E_s - \lambda)^2}} \right]. \quad /29/$$

Коэффициенты C , λ , ΔN^2 могут быть найдены из уравнений, заменяющих обычные уравнения теории u , v - преобразования:

$$N = \sum_s \left(1 - \frac{E_s - \lambda}{\sqrt{C^2 + (E_s - \lambda)^2}} \right), \quad /30/$$

^{x/} Мы не будем останавливаться на исследовании свойств операторов \hat{O} , при выполнении которых формула /23/ оказывается асимптотически точной. Эта формула справедлива, во всяком случае, для определения среднего значения оператора \hat{H} , в чем можно убедиться непосредственным рассмотрением.

$$\frac{1}{G_{\text{эфф.}}} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \frac{1}{\sqrt{C^2 + (E_{\sigma} - \lambda)^2}},$$

/30/

$$\frac{\Delta N^2}{C^2} = \sum_{\sigma} \frac{1}{C^2 + (E_{\sigma} - \lambda)^2}$$

Формулы /26/-/30/ легко обобщить с тем, чтобы получить описание как возбужденных состояний четной системы с числом сеньорити, равным 2, так и для описания спектра состояний с сеньорити 1 нечетных систем. Как и в обычной теории u, v -преобразования изменения в формулах /26/-/28/ состоят в замене двух или одного коэффициентов v_i^2 на единицу. При этом из сумм в формулах /30/ выпадает соответствующее число членов.

Приведем результаты расчетов, выполненных с помощью уравнений /26/-/30/, по схеме, принятой в сверхтекучей модели ядра. Были рассчитаны свойства ядер групп редкоземельных элементов в предположении, что гамильтониан, описывающий ядра, разделяется на две части, каждая из которых описывает нейтронную и протонную компоненты ядра в отдельности и выражается формулой /1/. Константы парного взаимодействия в этих формулах были определены при помощи сравнения вычисленных и экспериментальных значений парной энергии

$$P_N = \frac{1}{2} \{ 3\epsilon_{N-1} + \epsilon_{N+1} - 3\epsilon_N - \epsilon_{N-2} \} \quad /31/$$

$\epsilon_N(\epsilon_Z)$ - энергия основного состояния системы из N нейтронов / Z протонов // Результаты расчетов, данные в таблицах 1,2, привели к следующим значениям "затравочных" констант $\frac{G_0}{V}$ в формуле /1/: для протонной системы $\frac{G_0}{V} = 0,020 h \omega_0^0$, для нейтронной системы $\frac{G_0}{V} = 0,020 h \omega_0^0$. При вычислениях была использована та же схема одночастичных уровней, что и в работах Н.И. Пятова и В.Г. Соловьева /9/.

Полученные нами значения констант на 10% меньше тех, которые были получены в работе /9/ по теории без учета поправок на проектирование. Отметим, однако, что значение величины $G_{\text{эфф.}}$ заменяющей в вариационных уравнениях описанного выше метода величину G обычной теории, оказывается даже несколько больше, чем в теории u, v -преобразования /см. /6,7,9/. С этим связано существенное возрастание корреляционной функции C , полученной нами, по сравнению со значением, следующим из формул обычной теории. В таблицах 1,2 приведены также расчетные значения энергии уровня с квазичастицами на $K+1$ и K уровнях одночастичной схемы / K - уровень Ферми / . В скобках приведены расчетные значения, взятые из работы /9/.

Более полные данные об энергетическом спектре ядер представлены в таблицах 3, 4, в которых приведены характеристики ряда двухквазичастичных состояний для ядер ^{172}Yb и ^{182}W . Из приведенных данных видно, что результаты на-

шего метода весьма близки к результатам метода u, v -преобразования и расхождения между ними значительно меньше, чем расхождения свойств состояния нейтронной системы в различных изотопах и протонной системы в различных изотопах. Однако свойства волновых функций Ψ в форме /2/, соответствующих собственным функциям состояний системы, отличаются довольно сильно. Это проявляется уже в возрастании параметра C для основного состояния $/ \leq 20\% /$. Особенно велико различие между результатами нашего метода и метода u, v -преобразования в значениях корреляционной функции C двухквартичного состояния $K, K+1$. Для всех рассчитанных случаев отношение $C_{K, K+1} / C_0 \approx 0,8$, что совершенно непохоже на результаты расчетов, приведенных в работе /6/. Из таблиц 3, 4 видно, что отношения корреляционных констант большого числа низколежащих двухквартичных состояний оказываются весьма близкими между собой. Этот результат имеет место во всех рассчитанных случаях.

Перейдем к описанию расчетов, проведенных для определения влияния проектирования функций на величину вероятности β -переходов в ядрах.

Рассмотрим для определенности β^- -переходы из основного состояния нечетно-нечетного ядра. Обозначим N_n, N_p число нейтронов и протонов соответственно в четно-четном дочернем ядре. Волновую функцию /ненормированную/ материнского ядра запишем в виде:

$$\Psi = \phi \frac{dz}{z^{N_p}} \phi \frac{dz'}{z'^{N_n+2}} b_{\sigma_1}^+ z \prod_{s \neq 1} (u_s^p + v_s^p z^2 b_{s+}^+ b_{s-}^+) \prod_{s \neq 1} (u_s^n + v_s^n z'^2 a_{s+}^+ a_{s-}^+) |0\rangle, \quad /32/$$

где a^+, b^+ - операторы порождения нейтрона и протона соответственно. Пусть, далее, оператор перехода имеет вид:

$$\sum_{s, s'} \Gamma_{s, s'} b_{s\sigma}^+ a_{s'\sigma'} + \text{эрм. сопр.}$$

Волновую функцию конечного состояния запишем в виде:

$$\Psi = \phi \frac{dz}{z^{N_p+1}} \phi \frac{dz'}{z'^{N_n+1}} \prod_{s} (u_s^p + v_s^p z^2 b_{s+}^+ b_{s-}^+) \prod_{s} (u_s^n + v_s^n z'^2 a_{s+}^+ a_{s-}^+) |0\rangle. \quad /33/$$

Матричный элемент β^- -перехода имеет вид:

$$\Gamma_{1\sigma_1, 1\sigma_1} R(n) R(p), \quad /34/$$

где

$$R(n) = \frac{u_i^n \oint \frac{dz'}{z'^{N_n+1}} \prod_{s \neq i} (u_s^n u_s^{n'} + z'^2 v_s^n v_s^{n'})}{[\oint \frac{dz}{z^{N_n+1}} \prod_{s \neq i} ((u_s^n)^2 + z^2 (v_s^n)^2) \oint \frac{dz'}{z'^{N_n+1}} \prod_{s \neq i} ((u_s^{n'})^2 + z'^2 (v_s^{n'})^2)]^{1/2}} \quad /35/$$

$$R(p) = \frac{v_i^p \oint \frac{dz}{z^{N_p-1}} \prod_{s \neq i} (u_s^p u_s^{p'} + z^2 v_s^p v_s^{p'})}{[\oint \frac{dz}{z^{N_p-1}} \prod_{s \neq i} ((u_s^p)^2 + z^2 (v_s^p)^2) \oint \frac{dz'}{z'^{N_p-1}} \prod_{s \neq i} ((u_s^{p'})^2 + z'^2 (v_s^{p'})^2)]^{1/2}} \quad /36/$$

Поправки к величинам $R(n)$, $R(p)$, связанные с использованием более точных волновых функций, появляются как вследствие изменения параметров u_s , v_s в результате решения более точного вариационного уравнения, чем то, которое используется в методе u , v - преобразования, так и вследствие появления интегралов по z в формулах /35/, /36/. Влияние второго из рассмотренных факторов было исследовано в работе /10/. Однако изменение параметров u_s , v_s в значительной мере компенсирует эффект замены интегралов в формулах /36/, /37/ на более простые выражения теории u, v - преобразования. Вследствие этого результатов работы /10/ недостаточно для того, чтобы делать какие-либо выводы о точности расчетов на основании метода u , v - преобразования.

Легко видеть, что матричные элементы перехода, так же как и средние значения операторов, можно вычислять при помощи метода перевала. При этом целесообразно ограничиться, как и раньше, линейным приближением по величинам $\frac{1}{\Delta N^2}$.

Следует иметь в виду, что седловая точка z_0 подынтегральных выражений очень мало отличается от единицы, и это отличие также можно учесть приближенно /сохраняя выражения, линейные по $z_0 - 1$ /.

Результаты вычислений величин $R(n)$, $R(p)$ и значения величины $R = R(n)^2 R(p)^2$, определяющей вероятность перехода, приведены в таблице. Там же приведены результаты расчетов, выполненных с учетом блокировки, но без проектирования функций. Из таблицы видно, что различие между результатами расчетов двумя разными методами в основном не очень велико. Это подтверждает предположение, лежащее в основе расчета о том, что эффект проектирования мал и может быть учтен приближенно /необходимо помнить, что R содержит четвертую степень матричных элементов типа /35/, /36/ /. Отсюда следует, что классификация β - переходов, предложенная В.Г. Соловьевым и С. Галлахером /11/ на основании расчетов с учетом

блокировки, но без точного учета сохранения числа частиц, остается в силе. Однако поскольку схема уровней, используемая в данной работе, несколько отличается от той, которая была принята ранее, детальное сравнение результатов нецелесообразно^{х/}.

В таблице приведены также значения $\log(ft)$ и $\log(ft R\eta)$, где η - статистический множитель, а R рассчитан методом, описанным в работе. Поскольку величина матричных элементов Γ известна неточно, сравнение теории с экспериментом затруднено. Данные в таблице разделены на группы, внутри каждой из которых матричный элемент один и тот же. Сравнение значений $\log(ft R\eta)$ в пределах каждой группы показывает, что хотя использование метода, описанного выше, приводит к некоторому улучшению теории, различия между значениями этой величины остаются большими. Эти различия вызваны факторами, не учтенными при формулировке модели.

Ограниченность точности описанного подхода ясно видна из того, что не во всех рассмотренных случаях при описании спектров ядер сохраняется одна последовательность уровней. Величина множителя R существенно зависит от положения уровней, участвующих в переходе. Поэтому в тех случаях, когда следует предположить разную последовательность уровней для материнского и дочернего ядер, использование факторов R представляется авторам в общем случае неоправданным. Может быть, возражения такого сорта можно снять, если изменение схемы уровней имеет место в нечетной системе, приписав его, например, влиянию вращения ядра. Изменением волновой функции в таком случае в нулевом приближении можно пренебречь, и это дает основание использовать для определения поправок к вероятности β - переходов теорию, развитую в^{/11/}. В этих случаях величина множителей R может значительно отличаться от их средних значений, которые оказываются близкими к $1/4$ для переходов между основными состояниями ядер /это значение следует из простой теории без блокировки и проектирования для переходов на уровни, весьма близкие к уровню Ферми/. Другая характерная черта вычислений - относительно более резкое возрастание факторов R при увеличении энергии возбуждения, чем в теории без проектирования.

В заключение авторы выражают свою искреннюю благодарность сотрудникам группы теории ядра ОИЯИ за интерес к работе. В особенности нам хочется поблагодарить Н.И. Пятова и В.Г. Соловьева. Расчеты, представленные в работе, проведены сотрудниками Вычислительного центра ОИЯИ, которых мы также благодарим. Пребывание в г. Дубне одного из авторов /Е. Банга/ было возможным благодаря

^{х/} По той же причине затруднено сравнение результатов данной работы с результатами работы^{/10/}.

финансовой помощи со стороны Копенгагенского университета и Фонда Раска Эрстеда, а также благодаря гостеприимству со стороны Объединенного института.

Л и т е р а т у р а

1. R.W. Richardson. Phys. Lett., 3, 277 (1963).
2. R.R. Chasman. Phys. Rev., 132, 343 (1963).
3. S.G. Nilsson. The Nuclear Energy Gap and Fluctuation in Particle Number in Pairing Wave Functions. Препринт. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1963.
4. Y. Nogani. Improved Superconductivity Approximation for the Pairing Interaction in Nuclei. Препринт. Nat. Research Council. Div. of Pure Phys. Ottawa, 1963;
5. И.Н. Михайлов. ЖЭТФ, 45, 1102 (1963).
6. В.Г. Соловьев. Влияние парных корреляций сверхпроводящего типа на свойства атомных ядер. Госатомиздат, 1963.
7. В.Г. Соловьев. ЖЭТФ, 43, 246 (1962).
8. Б.А. Фукс, В.И. Левин. Функции комплексного переменного и их применения. Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1951.
9. В.Г. Соловьев, Н.И. Пятов. "Изв. АН СССР" /в печати/.
10. A.F. de Miranda, M.A. Preston. Nucl. Phys., 44, 529 (1963).
11. C.I. Gallagher, V.G. Soloviev. Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 2, N 2 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля 1964 г.

Таблица 1

Z	Изотоп	$P_{\text{теор}}$	$P_{\text{эксп}}$	$E_{\text{теор}}^{K, K+1}$	$E_{\text{эксп}}^{K, K+1}$	$2C_0$	$\frac{C_{K, K+1}}{C_0}$	$G_{\text{эфф}}$	
64	Ga	152							
		154							
		156	1,57		1,46	1,511(4+)	2,27	0,80	0,0243
		158	(1,64)	1,35			(1,94)	(0)	
66	Dy	160	1,55		1,44	1,260(2-)	2,24	0,78	0,0243
		162	(1,55)	1,56	(1,35)		(1,91)	(0)	
68	Er	166	1,49				2,18		0,0244
		168	(1,55)	1,70	(1,30)	1,543(3-)	(1,83)	(0)	
70	Yb	170	1,46		1,50		2,16	0,80	0,0244
		172	(1,48)	1,66	(1,37)	1,664(3+)	(1,79)	(0)	
72	Hf	176	1,46	1,60	1,30		2,28	0,79	0,0244
		178	(1,57)	1,80	(1,19)	1,148(8-)	(1,81)	(0)	
		180				1,142(8-)			
74	W	182	1,45		1,37	1,290(2-)	2,08	0,79	0,0244
		184	(1,45)	1,76	(1,27)	1,150(2-)	(1,75)	(0)	

Характеристики протонной системы. Энергетические величины даны в Мэв. Вычисления по формулам /26-31/ проведены при $C_0 = 0,021 \hbar \omega_0^0$. В скобках приведены соответствующие данные из работы /9/, полученные по обычным формулам метода u, v - преобразования при $G = 0,023 \hbar \omega_0^0$. Экспериментальные значения взяты из работы /9/. ϵ - энергия возбуждения состояния. $C_0 C_{K, K+1}$ - корреляционные функции основного и возбужденного состояний соответственно.

Таблица 2

N	Элемент	$\rho_{теор}$	$\rho_{эксп}$	$\epsilon_{теор}^{k, k+1}$	$\epsilon_{эксп}^{k, k+1}$	$2C_0$	$\frac{C^{k, k+1}}{C_0}$	$G_{эгрф}$
92	Sm ¹⁵⁴	1,89	2,03	1,65		2,40	0,78	0,0225
	Gd ¹⁵⁶	(2,12)	2,18		1,240(-1) 2,042(4-)	(2,32)	(0,43)	
94	Gd ¹⁵⁸	1,82	1,59	1,60		2,34	0,78	0,0227
	Dy ¹⁶⁰	(2,06)	1,96	(1,82)		(2,23)	(0,47)	
96	Gd ¹⁶⁰	1,76	0,81	1,55		2,26	0,79	0,0229
	Dy ¹⁶²	(1,94)	1,82	(1,58)	1,485(5-)	(2,07)	(0)	
98	Dy ¹⁶⁴	1,67	1,79	1,70		2,18	0,82	0,0232
	Er ¹⁶⁶	(1,78)		(1,65)	1,785(6-)	(1,85)	(0)	
100	Er ¹⁶⁸	1,48 (1,54)	1,55	1,31 (1,19)	1,095(3-)	2,16 (1,58)	0,81 (0)	0,0230
102	Er ¹⁷⁰	1,44	1,58	1,34		2,13	0,80	0,0233
	Yb ¹⁷²	(1,28)	1,46	(1,22)	1,174(3+) 1,468(2+)	(1,54)	(0,01)	
104	Yb ¹⁷⁴	1,45 (1,17)	1,25	1,50 (1,19)		2,14 (1,46)	0,81 (0,01)	0,0233
106	Yb ¹⁷⁶	1,47	1,14	1,43		2,16	0,79	0,0230
	Hf ¹⁷⁸ W ¹⁸⁰	(1,26)	1,51	(1,2)	1,480(8-) 1,531(8-)	(1,88)	(0,23)	
108	Hf ¹⁸⁰	1,60	1,32	1,58		2,20	0,78	0,0227
	W ¹⁸²	(1,54)	1,42		1,554(4-) 1,810(5-)	(1,80)	(0,24)	
110	Hf ¹⁸²	1,76	1,02	1,66		2,26	0,78	0,0224
	W ¹⁸⁴ Os ¹⁸⁶	(1,76)	1,45 1,76	(1,6)		(1,95)	(0,50)	

Характеристики нейтронной системы. Вычисления по формулам данной статьи проведены при $G_0 = 0,020 h \omega_0^0$. Данные обычной теории u и v - преобразования / в скобках / получены при $G = 0,022 h \omega_0^0$, когда $N \leq 104$, и при $G = 0,023 h \omega_0^0$, когда $N > 104$.

Таблица 3

Состояние	$\epsilon_{\text{эксп}}$	$\epsilon_{\text{теор}}$	$G_{\text{эфф}}$	c/c_0	
Нейтронная система					
	0+	0	0	0,0232	1
K, K+1	3+	1,174	1,33		0,80
	2+	1,468	(1,22)	0,0261	(0)
K-1, K+1	1-		1,57		0,80
	6-		(1,52)	0,0261	(0)
K-1, K	4-		1,85		0,80
	3-		(1,88)	0,0254	(0,51)
K, K+2	3+	1,702	1,99		0,80
	4+	2,287	(2,02)	0,0254	(0,50)
K-1, K+2	7-		2,14	0,0251	0,80
	0-		(2,18)		(0,58)
Протонная система					
	0+	0	0	0,0245	1
K, K+1	3+	1,664	1,49		0,79
	4+	2,075	(1,37)	0,0277	(0)
K, K+2	5-		1,68		0,79
	4-		(1,59)	0,0273	(0)
K-1, K+1	7-		1,94		0,79
	0-		(1,92)	0,0268	(0,43)
K+1, K+2	8-		2,07		0,81
	1-		(2,10)	0,0262	(0,63)
K-1, K+2	1+		2,09		0,80
	8+		(2,08)	0,0266	(0,53)

Характеристики возбужденных состояний ядер ^{172}Yb и ^{182}W соответственно.
 Построение таблицы и обозначений такие же, как и в таблице 1.

Таблица 4

Состояние	$\epsilon_{\text{экс}}$	$\epsilon_{\text{теор}}$	$G_{\text{эфф}}$	%	
Нейтронная система					
	0+	0	0	0,0227	I
K, K+I	4-	1,554	1,57		0,78
	5-	1,810	(1,44)	0,0250	(0,18)
K, K+2	6-	1,830	1,80	0,0247	0,79
	3-	2,024	(1,69)		(0,38)
K-I, K+I	4+		1,81	0,0245	0,80
	3+		(1,78)		(0,58)
K-I, K	8-		1,85	0,0240	0,81
	I-		(1,84)		(0,71)
K-I, K+2	5+		2,00	0,0242	0,80
	2+		(2,02)		(0,61)
K, K+3	I-		2,12	0,0245	0,80
	8-		(2,03)		(0,45)
K-2, K	2-	2,184	2,63	0,0236	(0,77)
	7-		(2,60)		
Протонная система					
	0+	0	0	0,0244	I
K, K+I	2-	1,290	1,37	0,0278	0,79
	7-		(1,27)		(0)
K-I, K+I	6+	1,757	1,54	0,0274	0,79
	I+		(1,48)		(0,09)
K-I, K	8-		1,84	0,0258	0,79
	I-		(1,86)		(0,56)

Характеристики возбужденных состояний ядер ¹⁷²Yb и ¹⁸²W соответственно.
 Построение таблицы и обозначения такие же, как и в таблице 1.

Таблица 5

Тип перехода	Уровни, участвующие в переходе	Переход	Состояние дочернего ядра	R	R_c	$\log(ft)_{эксн}$	$\log(ft)_{эксн} R_c$
a. u.	$523f_p \rightleftharpoons 523d_n$	$67\text{Ho}^{164} \rightarrow 68\text{Er}^{164}$		0,19	0,21	5,4	4,3
		$67\text{Ho}^{166} \rightarrow 68\text{Er}^{166}$	K, K+1(n)	0,50	0,35	5,2	4,9
1. u.	$523f_p \rightleftharpoons 633d_n$	$67\text{Ho}^{166} \rightarrow 68\text{Er}^{166}$		0,35	0,37	8,1	7,7
		$66\text{Dy}^{166} \rightarrow 67\text{Ho}^{166}$		0,28	0,13	7,1	6,6
		$66\text{Dy}^{165} \rightarrow 67\text{Ho}^{165}$		0,21	0,22	6,2	5,5
1. u.	$411f_p \rightleftharpoons 521d_n$	$69\text{Tm}^{168} \rightarrow 68\text{Er}^{168}$	K, K+1(n)	0,24	0,24	7,7	7,0
		$71\text{Lu}^{172} \rightarrow 70\text{Yb}^{172}$	K, K+1(p)	0,47	0,27	6,1	5,4
		$69\text{Tm}^{172} \rightarrow 70\text{Yb}^{172}$	K, K+1(n)	0,44	0,12	6,8	6,5
1. u.	$514f_p \rightleftharpoons 624d_n$	$74\text{W}^{181} \rightarrow 73\text{Ta}^{181}$		0,14	0,37	6,8	6,0
		$75\text{Re}^{182} \rightarrow 74\text{W}^{182}$	K, K+1(p)	0,35	0,18	6,3	5,8

Влияние парных корреляций на вероятности β - переходов. Обозначения общепринятые /см., например, 16 или 111 . Символ K, K+1 в столбце 4 означает переход в возбужденное состояние. Величина R_c вычислена по формулам работы 16 . η - статистический фактор.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3617 * * * Тираж 400 11 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. март 1964 г.

9



STAT

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

И.В. Пузынин

P - 1549

АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА
В СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКЕ

Дубна 1964

P-1549

Пузынин И.В.

Аналитичность решения краевой задачи дифференциального уравнения второго порядка в сингулярной точке

В работе доказывается аналитичность решений одной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности сингулярной точки. Это свойство необходимо при построении некоторых алгоритмов численного решения краевой задачи, которая встречается в нелинейной полевой теории при изучении взаимодействия элементарных частиц и в теории ядра.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

P-1549

Pusynin I.V.

An Analytic Solution of the Boundary Value Problem for a Second Order Differential Equation at a Singularity.

It is proved that the solutions of a boundary value problem for a nonlinear differential equation of the second order are analytic in the vicinity of a singularity. This property is necessary to construct some algorithms for a numerical solution of the boundary value problem which is encountered in the theory of nucleus and in the nonlinear field theory when the elementary particle interaction is studied.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

И.В. Пузынин

P - 1549

АНАЛИТИЧНОСТЬ РЕШЕНИЯ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА
В СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКЕ

Дубна 1964

В этой заметке приводится доказательство аналитичности решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = y - \frac{y^{q+1}}{x^q} \quad (1)$$

в окрестности сингулярной точки $x=0$, удовлетворяющего условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = a < \infty, \quad y(\infty) = 0. \quad (2)$$

Здесь $q > 0$ - вещественное, a - искомый параметр задачи (1)-(2).

Краевая задача (1)-(2) встречается в нелинейной полевой теории при изучении взаимодействия элементарных частиц и в теории ядра. Доказательство существования положительных решений этой краевой задачи для некоторого интервала значений q дано в работе ^{1/}. Показано, что решение, удовлетворяющее условиям (1)-(2), является решением задачи Коши

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = a, \quad a > 1, \quad (3)$$

т.е. параметр a может быть выбран нужным образом. Нахождение решений задачи (1)-(2) численными методами связано с некоторыми трудностями из-за неясности поведения решений в окрестности особой точки $x=0$. Так, один из возможных алгоритмов численного решения задачи (1)-(2) и нахождения параметра a , приведенный в работе ^{2/}, предполагает представление решения в окрестности точки $x=0$ степенным рядом. Некоторые экспериментальные исследования этого вопроса, данные в работе ^{2/}, не могут служить исчерпывающим доказательством законности такого представления.

Здесь приводится метод последовательных приближений, являющийся видоизменением метода Пикара и позволяющий доказать существование и аналитичность решения задачи Коши вида (3) уравнения (1). На основании результатов работы ^{1/} свойство аналитичности перенесено и на решение краевой задачи (1)-(2). Заметим, что существование решения задачи Коши может быть получено как следствие более общих теорем, приведенных в работе ^{3/}. Следует также отметить, что приведенные здесь методы применимы для доказательства аналитичности решения задачи Коши системы двух уравнений второго порядка в окрестности сингулярной точки $x=0$.

$$y_1'' = \frac{m_1}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{k} \frac{(y_2 - y_1)^{q+1}}{x^q},$$
$$y_2'' = y_2 - \frac{(y_2 - y_1)^{q+1}}{x^q},$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = a_1, \quad y_2'(0) = a_2, \quad x \geq 0.$$

Здесь

$$q > 0, \quad \frac{m_1}{m_2} \geq 1, \quad \frac{k_1}{k_2} \geq 1, \quad \frac{k_1}{m_1} \geq \frac{k_2}{m_2}, \quad 0 \leq a_1 \leq a_2.$$

Представим уравнение (1) в виде нормальной системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 = f_1(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - \frac{y_2^{q+1}}{x^q} = f_2(x, y_1, y_2), \end{aligned} \quad (4)$$

с задачей Коши

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = a, \quad x \geq 0, \quad a \geq 1. \quad (5)$$

Непосредственное применение метода Пикара^{/4/} для доказательства существования решения (4) - (5) в окрестности сингулярной точки $x = 0$ невозможно, поскольку в любом гиперинтервале, содержащем точку $(x = 0, y = 0)$, правые части системы (4) не удовлетворяют условиям классической теоремы. Поэтому построение последовательных приближений будет дано в области "углового" типа.

Рассмотрим область D , определенную неравенствами

$$0 \leq x \leq \delta, \quad x \leq y_1 \leq ax, \quad 1 \leq y_2 \leq a. \quad (6)$$

Здесь δ - достаточно малое положительное число, значение которого будет определено ниже. Покажем теперь, что при некотором доопределении функции f_i , $i = 1, 2$, из (4) будут удовлетворять в D условиям классической теоремы Пикара. Функция $f_1(x, y_1, y_2) = y_2$ непрерывна в D и имеет непрерывные частные производные по переменным y_1 и y_2 .

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 1.$$

Поэтому f_1 ограничена в замкнутой области D и удовлетворяет условиям Липшица относительно переменных y_1 и y_2 .

$$|f_1(x, y_1, y_2)| \leq a, \quad (7)$$

$$|f_1(x, y_1, y_2) - f_1(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| = |y_2 - \bar{y}_2| \leq |y_1 - \bar{y}_1| + |y_2 - \bar{y}_2|.$$

Относительно функции $f_2(x, y_1, y_2)$ заметим, что ее предел по любому направлению, лежащему в D , при $x \rightarrow 0$ и $y_1 \rightarrow 0$ равен нулю. Поэтому, доопределив по непрерывности $f_2(x, y_1, y_2)$ при $x = 0$, положив $f_2(0, 0, y_2) = 0$, получим непрерывность f_2 в замкнутой области D .

Отсюда получаем ограниченность функции f_2 в D .

$$\begin{aligned} |f_2| &= |y_1 - y_1^{q+1}/x^q| \leq |y_1| + |y_1^{q+1}/x^q| \leq \\ &\leq |ax| + |a^{q+1}x| \leq a\delta(1+a^q). \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы показать, что f_2 удовлетворяет в D условию Липшица, отметим следующее. Функция f_2 имеет непрерывные частные производные по y_1 и y_2 в открытой области d :

$$0 < x \leq \delta, \quad x \leq y_1 \leq ax, \quad 1 \leq y_2 \leq a,$$

причем $\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 0$ непрерывна и в D . Функцию $\frac{\partial f_2}{\partial y_1}$ в $x=0$ непрерывным образом доопределить нельзя, так как предел функции по направлению ρ , лежащему в D , зависит от углового коэффициента направления.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} &= 1 - \rho^q(q+1). \\ y_1 &= \rho x. \end{aligned}$$

Однако в силу выбора области "углового" типа при $x=0$ всегда $y_1=0$. Кроме того, $\frac{\partial f_2}{\partial y_1}$ ограничена в открытой области d по абсолютной величине

$$\left| \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right| = \left| 1 - (q+1) \frac{y_1^q}{x^q} \right| < 1 + a^q(q+1) = L_2.$$

Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что во всей области D будет выполнено

$$|f_2(x, y_1, y_2) - f_2(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2)| \leq L_2(|y_1 - \bar{y}_1| + |y_2 - \bar{y}_2|), \quad (9)$$

если при данном x значения $y_1, y_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ принадлежат области D . Следовательно, в области D функции f_1, f_2 непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Липшица относительно y_1 и y_2 . Введем обозначения

$$M = \max \{ a, a\delta(1+a^q) \}, \quad L = L_2. \quad (10)$$

Перейдем теперь к построению последовательных приближений по методу Пикара в области D . Рассмотрим систему интегральных уравнений типа Вольтерра, соответствующую дифференциальной системе (4) с задачей (5).

$$y_1(x) = \int_0^x y_2(t) dt; \quad y_2(x) = a + \int_0^x \left[y_1(t) - \frac{y_1(t)^{q+1}}{t^q} \right] dt. \quad (11)$$

Решение этой системы, которое является решением задачи Коши (5) для системы (4), будем находить методом последовательных приближений по формулам

$$\begin{aligned} y_{1,0} &= 0; \quad y_{1,m+1} = \int_0^x y_{2,m}(t) dt; \\ y_{2,0} &= a; \quad y_{2,m+1} = a + \int_0^x \left[y_{1,m}(t) - \frac{y_{1,m}(t)^{q+1}}{t^q} \right] dt; \end{aligned} \quad (12)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Покажем сначала, что если должным образом выбрать δ , то последовательные приближения любого порядка будут находиться в области D . Действительно, приближения первого порядка

$$y_{1,1} = ax, \quad y_{2,1} = a$$

лежат в области D . Предположим, что этим свойством обладают приближения порядка m и докажем, что $m+1$ -е приближения также остаются в области D . Из предположения

$$1 \leq y_{2,m} \leq a$$

очевидным образом следует

$$x \leq y_{1,m+1} \leq ax.$$

Для $y_{2,m+1}$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} y_{2,m+1} &= a + \int_0^x y_{1,m}(t) dt - \int_0^x \frac{y_{1,m}^{q+1}(t)}{t^q} dt \geq \\ &\geq a - \int_0^x \frac{a^{q+1} t^{q+1}}{t^q} dt = a - a^{q+1} \frac{x^2}{2}; \end{aligned}$$

поскольку $\int_0^x y_{1,m}(t) dt \geq 0$, $y_{1,m} \leq ax$. Из условия

$$y_{2,m+1} \geq a - a^{q+1} \frac{x^2}{2} \geq 1$$

получаем границу δ независимой переменной x :

$$\delta = \sqrt{\frac{2(a-1)}{a^{q+1}}}. \quad (13)$$

С другой стороны,

$$y_{2,m+1} = a + \int_0^x \{1 - [\frac{y_{1,m}(t)}{t}]^q\} y_{1,m}(t) dt \leq a,$$

так как

$$1 - [\frac{y_{1,m}(x)}{x}]^q \leq 0,$$

что следует из

$$y_{1,m} \geq x.$$

Таким образом, показано, что приближения $m+1$ -го порядка принадлежат области D при должном выборе границы δ , который не зависит от m . Тем самым доказано, что приближения любого порядка лежат в области D . Отметим еще непрерывность последовательных приближений, которая также легко доказывается методом индукции. Далее для области D применимы методы классической теоремы Пикара (см. ^{14/}), которые доказывают равномерную сходимость последовательностей приближений в области D к единственному решению интегральной системы (11). Из этой схемы доказательства мы воспроизведем только мажорантный ряд для функционального ряда, частичные суммы которого равны соответствующим последовательным приближениям

$$y_{i,0} + [y_{i,1} - y_{i,0}] + \dots + [y_{i,m} - y_{i,m-1}] + \dots, \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

Для каждого члена этого ряда справедлива оценка

$$|y_{i,m} - y_{i,m-1}| \leq (2L)^{m-1} M \frac{|x|^m}{m!} \leq (2L)^{m-1} M \frac{\delta^m}{m!} \quad (15)$$

Таким образом, ряд (14) мажорируется числовым рядом

$$|y_{i,0}| + \sum_{m=1}^{\infty} (2L)^{m-1} M \frac{\delta^m}{m!}, \quad (16)$$

сходящимся по признаку Даламбера. Эти факты будут использованы в дальнейших рассуждениях. Существование решения задачи Коши (3) для дифференциального уравнения (1) в окрестности сингулярной точки $x=0$ доказано.

Покажем теперь представимость решения задачи Коши (5) системы (4) степенным рядом по целым степеням x в некоторой окрестности сингулярной точки $x=0$. Рассмотрим последовательные приближения, получаемые по рекуррентным формулам (12).

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= ax, & y_{1,2} &= ax, & y_{1,3} &= ax - \frac{a(a^q-1)}{3!} x^3, \\ y_{2,1} &= a, & y_{2,2} &= a - \frac{a(a^q-1)}{2!} x^2, & y_{2,3} &= a - \frac{a(a^{q+3}-1)}{2!} x^2, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} y_{1,4} &= ax - \frac{a(a^q-1)}{3!} x^3, \\ y_{2,4} &= a + \frac{a}{2} x^2 - \frac{a(a^q-1)}{4!} x^4 - \int_0^x t \left[a + \frac{a(a^q-1)}{3!} t^2 \right]^{q+1} dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\int_0^x t \left[a + \frac{a(a^q-1)}{3!} t^2 \right]^{q+1} dt.$$

Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\int_0^x t \left[a + \frac{a(a^q-1)}{3!} t^2 \right]^{q+1} dt = \frac{3!}{2a(a^q-1)(q+2)} \left\{ \left[a + \frac{a(a^q-1)}{3!} x^2 \right]^{q+2} - a^{q+2} \right\}.$$

В свою очередь,

$$\left[a + \frac{a(a^q-1)}{3!} x^2 \right]^{q+2} = a^{q+2} \left[1 + \frac{(a^q-1)}{3!} x^2 \right]^{q+2} \quad (18)$$

Правая часть (18) разлагается в биномиальный ряд по четным степеням x , сходящийся при достаточно малых значениях x . Граница промежутка сходимости определяется неравенством

$$\left| \frac{a^q - 1}{3!} x^2 \right| < 1. \quad (19)$$

Таким образом, четвертое приближение из (17) имеет следующее представление:

$$y_{1,4} = ax - \frac{a(a^q - 1)}{3!} x^3, \quad y_{2,4} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,4,n} x^{2n}, \quad a_{2,4,0} = a, \quad (20)$$

причем $y_{1,4}$ представляется полиномом, содержащим нечетные степени x , а $y_{2,4}$ - рядом, содержащим только четные степени x и сходящимся в промежутке радиуса R_4 , определяемого из (19). Из рекуррентных формул (12) легко видеть, что пятое приближение представимо степенными рядами, сходящимися в том же промежутке, что и ряд для $y_{2,4}$. Действительно, из (12), учитывая (20), получаем

$$y_{1,5} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,4,n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2,4,n}}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,5,n} x^{2n+1}, \quad (21)$$

$$y_{2,5} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,5,n} x^{2n}, \quad a_{1,5,0} = a_{2,5,0} = a, \quad a_{2,5,n} = a_{2,4,n}$$

Поскольку радиус сходимости степенного ряда при почленном интегрировании не нарушается, то $R_5 = R_4$.

Предположим, что приближение порядка m ($m > 5$) представляется степенными рядами, сходящимися в некотором промежутке радиуса R_m .

$$y_{1,m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} x^{2n+1}, \quad y_{2,m} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,m,n} x^{2n}, \quad (22)$$

$$a_{1,m,0} = a_{2,m,0} = a.$$

Из (12) получаем:

$$y_{1,m+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,m,n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2,m,n}}{2n+1} x^{2n+1}; \quad a_{1,m+1,0} = a. \quad (23)$$

Ряд (23) сходится в интервале радиуса R_m по теореме об интегрировании степенных рядов.

Рассмотрим теперь выражение $y_{2,m+1}$.

$$\begin{aligned} y_{2,m+1} &= a + \int_0^x y_{1,m}(t) dt - \int_0^x \frac{y_{1,m}^{q+1}(t)}{t^q} dt = \\ &= a + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} t^{2n+1} dt - \int_0^x \frac{[\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} t^{2n+1}]^{q+1}}{t^q} dt \end{aligned} \quad (24)$$

Первый интеграл в (24) представим степенным рядом по четным степеням x в интервале радиуса R_m . Обозначим второй интеграл в (24) I_{m+1} и преобразуем его следующим образом:

$$I_{m+1} = \int_0^x t \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} t^{2n} \right]^{q+1} dt.$$

Законность этого преобразования (т.е. деления сходящегося ряда на t) очевидна. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} x^{2n}$ сходится в том же интервале, что и ряд, стоящий в подынтегральном выражении. Действительно, он сходится при $x=0$. Предположение о расходимости в точке \bar{x} ($0 < |\bar{x}| < R_m$) приводит к противоречию, так как тогда расходился бы ряд

$$\bar{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} \bar{x}^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m,n} \bar{x}^{2n+1}.$$

Далее,

$$I_{m+1} = \frac{a_{1,m,0}^{q+1}}{2} \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,m,n}}{a_{1,m,0}} t^{2n} \right]^{q+1} dt^2. \quad (25)$$

Очевидно, что проведенные преобразования (вычитание из сходящегося ряда числа и почленное деление на число) не изменили радиуса сходимости степенного ряда, стоящего в (25). Таким образом, ряд

$$f_{m+1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,m,n}}{a_{1,m,0}} x^{2n} \quad (26)$$

сходится в интервале радиуса R_m . Отсюда следует, что подынтегральная функция в (25) представляется в некоторой окрестности точки $x=0$ степенным рядом. Действительно, функция

$$\phi(y) = (1+y)^{q+1} \quad (27)$$

разлагается в биномиальный ряд, сходящийся при $|y| < 1$. С другой стороны, $f_{m+1}(x)$ в интервале радиуса R_m представима сходящимся степенным рядом (26), а так как $f_{m+1}(x)$ - непрерывная функция и $f_{m+1}(0)=0$, то можно выделить интервал радиуса R_{m+1} ($R_{m+1} \leq R_m$), в котором будет выполнено

$$|f_{m+1}(x)| < 1 \quad (28)$$

В интервале радиуса R_{m+1} справедлива теорема о подстановке степенных рядов /5/. По этой теореме, функция

$$\phi[f_{m+1}(x)] = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{1,m,n}}{a_{1,m,0}} x^{2n} \right]^{q+1} \quad (29)$$

разлагается в интервале радиуса R_{m+1} в сходящийся степенной ряд. Отсюда непосредственно следует, что интеграл I_{m+1} разлагается в интервале радиуса R_{m+1}

в сходящийся степенной ряд по четным степеням x . Следовательно, нами доказано, что приближение порядка $m+1$ также представимо степенными рядами вида:

$$y_{1,m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,m+1,n} x^{2n+1}, \quad y_{2,m+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,m+1,n} x^{2n} \quad (30)$$

$$a_{1,m+1,0} = a_{2,m+1,0} = a.$$

Эти ряды сходятся в интервале радиуса R_{m+1} , содержащем сингулярную точку $x=0$. По индукции это утверждение распространяется на все приближения, $m=6,7,\dots$. Радиусы сходимости рядов (30) для двух последовательных значений m связаны неравенством

$$R_{m+1} \leq R_m. \quad (31)$$

Покажем теперь, что, начиная с некоторого m , и для всех последующих в (31) будет выполняться точное равенство, т.е., начиная с некоторого приближения, радиус сходимости рядов будет постоянным, отличным от нуля. Ряд (26) в полуинтервале $[0, R_m)$ представляет функцию

$$f_{m+1}(x) = \frac{1}{a_{1,m+1,0}} \frac{y_{1,m+1}(x)}{x} - 1. \quad (32)$$

Докажем, что при $m \rightarrow \infty$ последовательность (32) равномерно сходится в D . Для этого достаточно показать равномерную сходимость в области D последовательности функций

$$\psi_m(x) = \frac{y_{1,m}(x)}{x}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Функции $\psi_m(x)$ непрерывны в отрезке $[0, \delta]$ и $\psi_m(0) = a$. Рассмотрим функциональный ряд

$$\psi_1 + [\psi_2 - \psi_1] + \dots + [\psi_m - \psi_{m-1}] + \dots \quad (33)$$

Каждый член этого ряда - непрерывная функция по x в $[0, \delta]$. Общий член ряда можно оценить, используя оценку (15).

$$|\psi_m - \psi_{m-1}| = \left| \frac{y_{1,m}(x) - y_{1,m-1}(x)}{x} \right| \leq (2L)^{m-1} M \frac{x^{m-1}}{m!} \leq (2L)^{m-1} M \frac{\delta^{m-1}}{m!}.$$

Таким образом, функциональный ряд (33) мажорируется числовым рядом

$$a + \sum_{m=2}^{\infty} (2L)^{m-1} M \frac{\delta^{m-1}}{m!},$$

который сходится по признаку Даламбера. Этот факт и доказывает равномерную сходимость последовательности (32) в отрезке $[0, \delta]$. Предельная функция $f(x)$ непрерывна в $[0, \delta]$ и $f(0) = 0$. Поэтому можно выделить полуинтервал $[0, r_\epsilon)$, в котором

$$|f(x)| < 1 - \epsilon, \quad (34)$$

где $\epsilon > 0$ достаточно мало. С другой стороны, по определению равномерной сходимости последовательности $f_m(x)$, для любого $\epsilon > 0$ найдется такое m_0 , что для всех $m \geq m_0$

$$|f_m(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon \quad (35)$$

для всех $x \in [0, \delta]$. А так как

$$|f_m(x) - |\bar{f}(x)|| < |f_m(x) - \bar{f}(x)| < \epsilon,$$

то из последнего неравенства и (34) следует

$$|f_m(x)| < \epsilon + |\bar{f}(x)| < 1 \quad (36)$$

для всех $m > m_0$ и x из полуинтервала $[0, r_\epsilon)$.

Выберем теперь радиус сходимости приближений следующим образом. Зададимся числом $\epsilon > 0$. Найдём m_0 , такое, чтобы для всех $m \geq m_0$ было выполнено (35). С другой стороны, выделим полуинтервал $[0, r_\epsilon)$, в котором выполнено (34). Тогда получим, что для всех $m \geq m_0$ и $x \in [0, r_\epsilon)$

$$|f_m(x)| < 1.$$

Последовательное приближение порядка m_0 представляется сходящимися степенными рядами в некоторой окрестности точки $x=0$ $[0, R_{m_0})$. Если теперь взять

$$R = \min \{ R_{m_0}, r_\epsilon \}, \quad (37)$$

то все приближения более высоких порядков представляются степенными рядами в окрестности точки $x=0$ $[0, R)$. Действительно, приближение порядка m_0 представляется степенными рядами в полуинтервале $[0, R)$. Как было показано, интервал, в котором приближение порядка $m_0 + 1$ представимо степенным рядом, определяется неравенством

$$|f_{m_0+1}(x)| < 1.$$

Это неравенство будет выполнено в полуинтервале $[0, R)$, т.е. приближение порядка $m_0 + 1$ также представимо сходящимися рядами в полуинтервале $[0, R)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма. Последовательные приближения, построенные по методу Пикара в области D , можно представить степенными рядами (30) в полуинтервале $[0, R)$, $R > 0$. Ряды (30) сходятся абсолютно и равномерно внутри интервала сходимости при $|x| < R$.

Введем теперь вместо x комплексную переменную z . Степенные ряды (30) с действительными коэффициентами будут также равномерно сходиться в круге $|z| < R$ (см. ^{15/}). Следовательно, последовательности функций $y_{1,m}(z)$ и $y_{2,m}(z)$ есть последовательности голоморфных функций в круге $|z| < R$. Равномерная сходимость

этих последовательностей внутри того же круга устанавливается по признаку Вейерштрасса при помощи мажорантного ряда (15). Поэтому применима теорема Вейерштрасса о последовательности голоморфных функций (см. /6/).

Если задана последовательность функций

$$\{ y_{i,m}(z) \}, \quad i=1,2; \quad m=1,2,\dots$$

голоморфных в области $D = \{ |z| < R \}$, и если эта последовательность сходится равномерно внутри \bar{D} , то функция

$$y_i(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_{i,m}(z), \quad i=1,2$$

также голоморфна в \bar{D} . Этот результат можно сформулировать применительно к действительной оси.

Теорема. Решение задачи Коши (5) системы (4) может быть представлено в окрестности точки $x=0$ сходящимся степенным рядом. Поскольку решение краевой задачи (1)-(2) эквивалентно решению задачи (1)-(3), то доказана аналитичность решения задачи (2) для уравнения (1) в окрестности сингулярной точки $x=0$.

В заключение автор благодарит Е.П. Жидкова за предложенную проблему и руководство работой и В.П. Ширикова за полезные советы.

Л и т е р а т у р а

1. Е.П. Жидков, В.П. Шириков. Об одной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Препринт ОИЯИ Р-1319, Дубна, 1963.
2. В.Б. Гласко, Ф. Лерюст, Я.П. Терлецкий, С.Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. ЖЭТФ, т.35, вып.2(8), 1958.
3. В.А. Чечик. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Труды Московского математического общества, 8, Физматгиз, 1959.
4. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.
5. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Физматгиз, 1959.
6. С. Стойлов. Теория функций комплексного переменного, 1, ИЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 января 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3555. Тираж 300. 0,8 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н.Зрелова. Февраль 1964 г.

STATO



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

Л.Б. Пикельнер, Э.И. Шарапов

P-1547

**МЕТОДЫ КАЛИБРОВКИ
ПРИ ИЗМЕРЕНИИ СЕЧЕНИЯ
РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА НЕЙТРОНОВ**

Дубна 1964

Пикельнер Л.Б., Шарапов Э.И.

P - 1547

Методы калибровки при измерении сечения радиационного захвата нейтронов.

Описаны методы калибровки, применяемые в измерениях радиационного захвата нейтронов с целью получения параметров резонансов. Рассмотрена, в частности, калибровка сцинтилляционного детектора большого объема, работающего в режиме совпадений. Обсуждается вопрос о постоянстве эффективности в различных резонансах.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна . 1964.

Pikelner L.B. , Sharapov E.I..

P - 1547

Calibration Methods in Measuring the Capture Neutron Cross Section.

The calibration methods applied in the measurements of the radiation neutron capture in order to get the resonance parameters are described. The calibration of a large volume scintillation detector in coincidence is considered. The question of the constancy of the effectiveness in different resonances is discussed.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1964.

Л.Б. Пикельнер, Э.И. Шарапов

P-1547

МЕТОДЫ КАЛИБРОВКИ
ПРИ ИЗМЕРЕНИИ СЕЧЕНИЯ
РАДИАЦИОННОГО ЗАХВАТА НЕЙТРОНОВ

Дубна 1964

Изучение радиационного захвата нейтронов в резонансах по методу времени пролета дает полезную информацию о ширинах и спинах уровней ядер с энергией возбуждения вблизи энергии связи нейтрона. Однако оно связано с некоторыми трудностями, основной из которых является необходимость проведения калибровки, обеспечивающей переход от наблюдаемого числа отсчетов детектора к истинному числу актов радиационного захвата, нормированному на один падающий нейтрон.

В методе времени пролета энергия нейтронов связана со временем пролета соотношением $E = \frac{\text{const}}{t^2}$. Пусть $\phi(E) dE$ - поток нейтронов, падающих на образец площадью s . Тогда за время измерения t образец пересечет $st\phi(E)\Delta E$ нейтронов во временном канале шириной Δt . Здесь $\Delta E = \frac{2\Delta t}{t} E$ - энергетическая ширина временного канала. Поэтому в дальнейшем величину $st\phi(E)$ мы будем называть суммарным потоком и обозначать через $\Pi(E)$.

Акты радиационного захвата регистрируются детектором с эффективностью ϵ_γ . Очевидно, что сумма отсчетов детектора по всем каналам, содержащим изолированный резонанс, может быть записана как:

$$\sum_i N = \epsilon_\gamma \Pi(E_0) \Delta E_0 \sum_i (1 - T_i) \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}. \quad /1/$$

Величина $\Delta E_0 \sum_i (1 - T_i)$ есть, как известно, площадь провала на кривой пропускания T . Эта площадь A является функцией параметров резонанса $g\Gamma_n$, Γ и толщины образца n ядер/см²: $A = A(g\Gamma_n, \Gamma, n)$. Таким образом, мы получаем следующее выражение, связывающее экспериментальные величины с параметрами резонанса:

$$\sum N = \Pi(E_0) \epsilon_\gamma \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} A. \quad /2/$$

Более строгий вывод выражения /2/ содержится, например, в работе /1/.

Если в эксперименте в $\sum N$ входят отсчеты, связанные с регистрацией рассеянных нейтронов или с захватом после многократных взаимодействий, то выражение /2/ следует применять с поправками, обсуждавшимися в /2/. Нашей задачей здесь является описание методов определения произведения $\Pi(E_0) \epsilon_\gamma$ для исследуемых резонансов.

Для всех методов общими являются два момента: во-первых, необходимо знать энергетическую зависимость потока нейтронов. Обычно она близка к закону $1/E$, характерному для нейтронов, выходящих из замедлителя. Вид спектра измеряется с помощью тонкого пропорционального борного счетчика. Во-вторых, необходимо знать эффективность детектора для каждого резонанса. Однако будем пока

полагать, что она одинакова для всех резонансов исследуемого элемента. Справедливость этого утверждения будет обсуждена в заключение.

1. Калибровка по известному резонансу

Калибровка легко может быть осуществлена для элемента, имеющего резонанс с известными параметрами $g\Gamma_n$, Γ , для которого выполняется условие $\Gamma_\gamma/\Gamma \sim 1$. Используя значения параметров, с помощью таблиц работы /3/ можно определить величину A . Подставляя это значение A вместе с экспериментальным значением ΣN в уравнение /2/, получим произведение $\Pi(E_0)\epsilon_\gamma$ для калибровочного резонанса. Зная вид спектра нейтронов и полагая эффективность ϵ_γ постоянной, сразу получим величины $\Pi(E)\epsilon_\gamma$ для остальных резонансов.

В этом методе калибровки выполнение условия $\Gamma_\gamma/\Gamma \sim 1$ не является в принципе обязательным. Однако его выполнение повышает точность калибровки, т.к. в противном случае надо использовать отношение Γ_γ/Γ , известное, как правило, с невысокой точностью. Следует отметить также, что резонансы, для которых $\Gamma_\gamma/\Gamma \sim 1$, не являются исключительными в области низких энергий для средних и тяжелых ядер, где основным взаимодействием нейтронов является радиационный захват.

Точность калибровки повышается, если использован образец, тонкий для калибровочного резонанса ($n\sigma_0 < 1$). В этом случае величина A слабо зависит от полной ширины Γ , и точность калибровки определяется точностью принятого значения параметра $g\Gamma_n$, которая бывает обычно не хуже 10%.

Наконец, надежность калибровки будет повышена, если имеется возможность использовать не один, а несколько резонансов данного элемента.

2. Калибровка по сильному резонансу

Наиболее легкой и надежной является калибровка в случае, когда исследуемый элемент имеет в области хорошего разрешения спектрометра резонанс с $n\sigma_0 \gg 1$. При этом образец не должен быть настолько толстым, чтобы заметно проявлялось самопоглощение гамма-квантов.

В этом случае счет детектора в функции от времени пролета нейтронов будет постоянным в нескольких каналах вблизи центра резонанса. Это следует из того, что пропускание образца, усредненное по функции разрешения, будет в этих каналах близко к нулю.

Другими словами, в образце взаимодействуют все нейтроны, и мы можем записать следующее выражение для числа отсчетов детектора в канале вблизи центра резонанса:

$$N = \Pi(E_0) \Delta E_0 \epsilon_\gamma \left(\frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} + a \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \right), \quad /3/$$

значение коэффициента a определяется захватом нейтронов после рассеяния и лежит между нулем и единицей.

Коэффициент a можно рассчитать аналитически, однако такой расчет является приближенным и требует знания параметров резонанса. Для уменьшения неопределенности, связанной с неточным знанием a , желательно использовать резонансы с $\Gamma_n \ll \Gamma_\gamma$. В этом случае калибровка практически не зависит от точности значений параметров калибровочного резонанса.

Метод сильного резонанса, чаще известный как метод "черного образца", позволяет достигнуть точности калибровки лучше 5%.

3. Калибровка по тепловому сечению

В ряде случаев калибровку можно осуществить по тепловому сечению, обычно известному с точностью порядка нескольких процентов. Для этого необходимо, чтобы тепловое сечение радиационного захвата σ_T было не слишком мало и чтобы в образце отсутствовали примеси с большим значением σ_T . Такая калибровка проводилась, например, в работе ^{4/}, выполненной на спектрометре по времени замедления в свинце, и в работе ^{5/}, выполненной на спектрометре с механическим селектором.

Однако на некоторых спектрометрах измерению энергии тепловых нейтронов препятствует явление рецикличности, ограничивающее снизу измеряемый диапазон энергий. Рецикличными являются нейтроны, для которых время пролета данной базы больше интервала времени между циклами /импульсами нейтронов/. Рециклические нейтроны создают добавочный фон и обычно устраняются из пучка с помощью борного фильтра. Но если тепловые нейтроны становятся рециклическими, возможность калибровки по тепловому сечению все же не пропадает.

Рассмотрим измерение, в котором тонкий образец в детекторе и тонкий пропорциональный борный счетчик устанавливаются поочередно в открытом пучке /без борного фильтра/. Нейтроны, в том числе рециклические, регистрируются во временном канале t^* вблизи окончания основного цикла. Число отсчетов над фоном для детектора и борного счетчика можно записать в этом случае как:

$$N_Y(t^*) = \overline{\Pi \Delta E} \epsilon_\gamma n \sigma_T, \quad /4/$$

$$N_B(t^*) = \overline{\Pi \Delta E} \cdot \epsilon_T,$$

где $\overline{\Pi \Delta E} = \sum_i \Pi_i \Delta E_{i/v_i}$, и суммирование по i означает суммирование по циклам, которые дают вклад нейтронов в данный канал t^* .

Выражения /4/ справедливы, если сечение радиационного захвата и эффективность борного счетчика имеют одинаковую зависимость от скорости нейтрона, соответствующую закону $1/v: \sigma_y = \sigma_T \cdot \frac{v_T}{v}$ и $\epsilon = \epsilon_T \cdot \frac{v_T}{v}$. Здесь v_T равна 2200 м/сек, а ϵ_T есть эффективность борного счетчика для нейтронов со скоростью v_T .

Использование выражений /4/ требует измерения фонов. Фон детектора определяется из измерений с эквивалентным рассеивателем вместо образца, а фон борного счетчика из измерений с резонансным и борным фильтром в пучке.

Рассмотрим далее измерение, в котором тот же самый борный счетчик помещается в пучок, свободный от рециклических нейтронов. В этом случае для числа отсчетов борного счетчика в канале t_0 , соответствующем центру резонанса, справедливо выражение

$$N_B(t_0) = \Pi(E_0) \Delta E_0 \epsilon_T \frac{v_T}{v_0} \quad /5/$$

Предполагая по-прежнему, что эффективность детектора не зависит от энергии, из выражений /4/ и /5/ получаем:

$$\Pi(E_0) \epsilon_y = N_B(t_0) \frac{N_y(t^*)}{N_B(t^*)} \cdot \frac{1}{\Delta E_0 n \sigma_T} \cdot \frac{v_0}{v_T} \quad /6/$$

Ввиду того, что калибровочные измерения в этом методе являются относительными, достигаемая здесь точность может составить величину около 5%.

4. Независимое определение потока и эффективности

При отсутствии благоприятных условий, отмеченных в разделах 1 - 3, калибровка может быть осуществлена, если независимо определены поток и эффективность детектора ϵ_y . Такая возможность существует не для любого детектора.

Рассмотрим сцинтилляционный детектор большого объема, описанный в /6/. Детектор состоит из двух баков объемом по 200 л., заполненных жидким сцинтиллятором. Сигналы с каждой половины детектора, возникающие при регистрации гамма-квантов радиационного захвата нейтрона, могут быть поданы либо на схему двойных совпадений, либо на схему суммирования. Выходы этих схем соединяются с многоканальным временным анализатором.

Исследование нейтронных резонансов ведется в режиме совпадений, обеспечивающем низкий собственный фон и малую эффективность к нейтронам /около 0,15%/. Для калибровки может быть использован любой из трех описанных выше методов. Кроме того, для этого детектора возможен и четвертый метод. При этом наряду с рабочими измерениями в режиме совпадений проводятся калибровочные измерения в режиме суммирования. Последний дает большой фон, однако для него

возможно определить эффективность регистрации захвата ϵ . Поскольку в схеме для уменьшения фона используется амплитудное окно, эффективность ϵ можно представить в виде: $\epsilon = \epsilon_0 \beta$, где ϵ_0 соответствует эффективности регистрации захвата в случае, если регистрируются все импульсы, а величина β определяется как доля импульсов, попадающих в амплитудное окно. Для получения β необходимо измерить амплитудный спектр импульсов, соответствующих гамма-квантам радиационного захвата нейтронов в исследуемом резонансе.

В наших работах спектр измерялся с помощью амплитудного анализатора АИ-100, вход которого открывался на время регистрации нейтронов исследуемой энергии. Обычно значение β составляло около 0,8 при величине нижнего порога в 1 Мэв.

Что касается величины ϵ_0 , то мы принимаем значение $\epsilon_0 = (95 \pm 5) \%$ для всех резонансов, дающих типичные каскады гамма-переходов со средней множественностью около трех или более, в которых отсутствуют заметные переходы на основное состояние. Эта оценка для ϵ_0 согласуется с данными работы [7], которые будут обсуждаться в разделе 5.

Эффективность ϵ_γ рабочего режима равна тогда эффективности ϵ , умноженной на отношение числа отсчетов детектора в режимах совпадений и суммирования. Для уменьшения ошибки, связанной с большим фоном в режиме суммирования, отсчеты сравниваются в нескольких каналах вблизи максимума резонанса. При этом в число отсчетов детектора в режиме суммирования вводится поправочный множитель на зарегистрированные рассеянные нейтроны, определяемый выражением $(1 + \frac{\Gamma_n \epsilon_n}{\Gamma_\gamma \epsilon_\gamma})^{-1}$. Входящая сюда эффективность к нейтронам для режима суммирования ϵ_n определяется из дополнительных измерений с графитом.

Известная эффективность и измеренное отдельно /например, с помощью калиброванного борного счетчика/ значение суммарного потока решают задачу калибровки.

Точность калибровки по этому методу определяется в основном точностью значения ϵ_0 и точностью измерения суммарного потока. Вполне достижимой является точность определения $\Pi(E)\epsilon_\gamma$ около 10%.

5. Контроль постоянства эффективности

Выше мы полагали эффективность ϵ_γ одинаковой для всех резонансов исследуемого элемента. Это условие заведомо выполняется для детекторов, эффективность которых пропорциональна энергии гамма-квантов. При регистрации актов радиационного захвата нейтронов эффективность таких детекторов пропорциональна энергии связи нейтрона.

Что касается жидкостных детекторов большого объема, то их эффективность, вообще говоря, может зависеть от множественности гамма-квантов в резонансе, поскольку может существовать некоторая зависимость спектра гамма-лучей от спина и изотопной принадлежности резонанса. Однако эта эффективность не должна заметно изменяться от резонанса к резонансу, если спектр гамма-квантов обусловлен большим числом переходов на промежуточные уровни, что обычно имеет место для средних и тяжелых ядер.

Хорошей проверкой постоянства эффективности является измерение амплитудных спектров в разных резонансах. Однако такие измерения трудно осуществить для каждого резонанса. Дополнительной и очень полезной проверкой является упоминавшееся выше сравнение отсчетов в режимах суммирования и совпадений.

В режиме суммирования эффективность слабо зависит от множественности гамма-квантов, в то же время в режиме совпадений эта зависимость становится существенной. Согласно данным работы ^{17/}, эффективность ϵ_0 , рассчитанная по методу Монте-Карло для бака объемом около 400 л, составляет 88% для случая двух - и 98% для трехквантового распада составного ядра с энергией связи 7,5 Мэв. В этом расчете вся энергия каскада делилась между гамма-квантами поровну. Однако поскольку детали каскада могут меняться, то дополнительно было показано, что эффективность ϵ_0 мало чувствительна к характеру каскада, если в последнем отсутствуют заметные прямые переходы.

В случае же режима совпадений оценки, сделанные нами на основе данных работы ^{17/}, показывают, что эффективности ϵ_γ /для нулевого порога в схеме/ равны 60%, 40% и 20% для четырех-, трех- и двухквантовых распадов составного ядра. Отсюда ясно, что постоянство отношения отсчетов в разных режимах работы детектора будет свидетельствовать о постоянстве эффективности ϵ_γ .

Проведенные измерения с ядрами Rh , Ag , Br , Tb , Pr показали, что постоянство эффективности действительно имеет место для всех указанных ядер. В качестве примера в таблице 1 приведено отношение отсчетов в режимах суммирования и совпадений для различных резонансов брома.

Т а б л и ц а 1

И з о т о п	79	79	81	81	79
E_0 eV	35,9	53,8	101,3	135,9	189,8
$N_{совп.}/N_{сум.}$	0,304	0,310	0,305	0,300	0,290
	$\pm 0,006$	$\pm 0,006$	$\pm 0,005$	$\pm 0,005$	$\pm 0,008$

В этой таблице обращает на себя внимание также и тот факт, что отношение

$N_{\text{совл.}} / N_{\text{сум.}}$ одинаково для обоих изотопов брома. Это можно объяснить тем, что энергии связи нейтрона для Br^{80} и Br^{82} , получающихся при захвате нейтрона, весьма близки.

Обсужденные выше методы калибровки были использованы в экспериментах по изучению сечений радиационного захвата нейтронов, проводимых в Лаборатории нейтронной физики Объединенного института ядерных исследований. Как правило, применялись два из 4-х описанных методов, при этом наблюдалось согласие в результатах, в пределах точности каждого метода. Одновременное использование четырех методов не осуществлялось ввиду отсутствия всех условий, необходимых для такой калибровки.

В заключение пользуемся случаем выразить благодарность Ф.Л. Шапиро за полезные обсуждения и предложение использовать рециклические нейтроны для калибровки.

Л и т е р а т у р а

1. Д. Зелигер, Н. Илиеску, Ким Хи Сан, Д. Лонго, Л.Б. Пикельнер, Э.И. Шаратов. ЖЭТФ, 45, вып. 11, 1294 /1963/.
2. Ван Най-янь, Н. Илиеску, Э.Н. Каржавина, Ким Хи Сан, А.Б. Попов, Л.Б. Пикельнер, Т. Стадников, Э.И. Шаратов, Ю.С. Язвицкий. Нейтронные резонансы празеодима и тербия. Препринт ОИЯИ Р-1548, Дубна, 1964.
3. В.Н. Ефимов, И.И. Шелонцев. Препринт ОИЯИ Р-641, Дубна, 1963.
4. Ю.П. Попов, Ф.Л. Шапиро. Сб. "Нейтронная физика". Госатомиздат, 1961.
5. A.P. Jain, R.E. Chrien, J.A. Moore, H. Palevsky, BNL 6780-R, 1963.
6. Л.Б. Пикельнер, М.И. Пшитула, Ким Хи Сан, Чен Лин-янь, Э.И. Шаратов. ПТЭ, № 2, 48 /1963/.
7. J.H. Gibbons. Neutron Time of Flight Methods, ed. by J. Spaepen. Brussels, 151-165, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 января 1963 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3559. Тираж 320. 0,8 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н.Зрелова Февраль 1964 г.



STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

B.N. Valuyev

E - 1581

ANOMALOUS SINGULARITIES
AND DETERMINATION OF AMPLITUDES
FOR SOME PROCESSES

Дубна 1984

Валуев Б.Н.

E - 1581

Об аномальной особенности и определении амплитуд некоторых процессов.

Показано, что условия аномальной особенности треугольной диаграммы в случае нестабильных частиц имеют простой кинематический смысл. Получено выражение для амплитуды треугольной диаграммы, из которого легко выделить часть, содержащую аномальную особенность. При определенных условиях особенность появляется в физической области изменения переменных. Указывается, что экспериментальное исследование этой особенности в реакциях с образованием резонансов может позволить определить амплитуды таких процессов, как $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\Lambda \rightarrow \pi\Lambda$ и т.п. Кроме того, аномальная особенность может вести к появлению "горбов" в распределениях по эффективной массе, имитирующих слабые резонансы /Например, горб в распределении по эффективной массе пар K_1^0 , K_1^0 около 1 Бэв и так называемый ABC-резонанс, указывающий на возможность существования возбужденного ядра, у которого один из нуклонов замещен изобарой N^* - 1238/.

Работа издается только на английском языке .

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Valuyev B.N.

E - 1581

Anomalous Singularities and Determination of Amplitudes for Some Processes .

The anomalous singularity conditions are shown to have a simple kinematical meaning in the case of unstable particles. If the total width tends to zero and some other conditions hold the anomalous singularity appears in the "physical" region. An experimental investigation of this singularity in reactions with resonance production may help to determine amplitudes of such processes as $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\Lambda \rightarrow \pi\Lambda$ etc. Furthermore, anomalous singularity may manifest itself as "humps" in effective mass distributions thus imitating weak resonances. (For example, the hump in the effective mass distribution of K^0 , K^0 pairs near 1 GeV and the so-called ABC-resonance, which perhaps indicates to the existence of excited nuclei, in which a nucleon is replaced by the isobar N^* 1238).

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

B.N. Valuyev

E - 1581

ANOMALOUS SINGULARITIES
AND DETERMINATION OF AMPLITUDES
FOR SOME PROCESSES

Submitted to JETP.

Дубна 1964

I n t r o d u c t i o n

This paper treats the anomalous^{/1/}, or in Landau's notation^{/2/}, the proper singularity of the triangle diagram in the case when particle masses may not satisfy the stability conditions. The anomalous singularity for the production amplitudes of several particles was recently considered in^{/3,4,5/}, the emphasis was however on the singularity of the inverse square root type. The purpose of this paper is to carry out the investigation in more detail, to clear up the meaning of the anomalous singularity in the case of unstable particles and, what is the principal thing, to point out that the anomalous singularity can be used to determine the amplitudes of such processes as $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi\Lambda \rightarrow \pi\Lambda$ and the like, as well as to interpret the irregularities in the effective mass distributions observed in some reactions.

As it will be seen below it is essential that one of the particles corresponding to the internal lines of the diagram would be unstable. To describe the unstable particle we shall suppose that in the first approximation it suffices to assume the mass m in the corresponding propagator to have the constant negative imaginary addition $-\frac{i\Gamma}{2}$, where Γ is the total width. In general, Γ is a function of q^2 (q is the 4-momentum of the particle) and of particle masses. However, if the amplitude is considered near the proper singularity for which $q^2 = m^2$, then Γ can be regarded to be a constant. This refers to such unstable particles whose width is small if compared with the energy released by decay. In what follows this condition will be supposed to be fulfilled.

Note that at $\Gamma \neq 0$ and for the real values of the external variables the amplitude has no singularities. If the vertices are assumed to be constant and independent of Γ , then when $\Gamma \rightarrow 0$ the amplitude corresponding to the triangle diagram has a singularity of the form $\ln \Gamma$. But actually the decay vertex is proportional to $\sqrt{\Gamma}$. So, one can speak about the singularity in a certain conventional sense, meaning by that the singularity of the amplitude when the vertices are considered to be independent of Γ , while $\Gamma \rightarrow 0$. By such an approach the role of the width does not in fact differ from the role which the addition $i\epsilon$ plays when the rules of going around the singularities are set, i.e., when m^2 is replaced by $m^2 - i\epsilon$. Therefore the amplitude with unstable particles can be regarded as an analytic continuation of the amplitude in the conventional case when the stability conditions are fulfilled.

2. The Meaning of the Anomalous Singularity in Case of Unstable Particles

Consider the diagram drawn in Fig. 1. For the sake of symmetry the external 4-momenta p_i are assumed to be directed inside ($p_1 + p_2 + p_3 = 0$), and the 4-momenta of the virtual particles q_i to be directed clockwise. The vertex parts g_i are considered to be constants, and all the particles are supposed to be scalar and to have non-zero masses. The necessary conditions for the proper singularity are known^[2,6] to be of the following form

$$\sum_{i=1}^3 a_i q_i = 0, \quad q_i^2 = m_i^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

It results from these conditions that

$$1 + 2 y_i y_j y_k - y_i^2 - y_j^2 - y_k^2 = 0, \quad y_i = y_j y_k \pm \sqrt{(y_j^2 - 1)(y_k^2 - 1)} \quad \text{where}$$

$$y_i = y_{jk} = \frac{(q_j q_k)}{m_j m_k} = \frac{m_j^2 + m_k^2 - z_i}{2 m_j m_k}; \quad z_i = p_i^2, \quad p^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 \quad (2)$$

The indices i, j, k stand for the cyclic permutation out of 1, 2, 3. We are interested only in the singularities for the real values of the variables y . Then, as is seen from (2), the singularity under consideration may appear either when all $y_i^2 < 1$, or when all $y_i^2 > 1$. Remind, that the condition $y_i^2 > 1$ implies that the stability conditions are not fulfilled in the i -th vertex: at $y_i > 1$ one of the internal particles is unstable (j -th or k -th), while $y_i < -1$ corresponds to the unstable external line.

For the singularity to appear on the "physical" sheet of the amplitude it is necessary that a_i obtained from Eqs. (1) would be positive^[6] what leads to the inequalities

$$y_i < y_j y_k \quad \text{when } y^2 < 1$$

$$y_i > y_j y_k \quad \text{when } y^2 > 1 \quad (3)$$

It follows from these inequalities that in the first case one should take the minus sign in front of the root in (2), and in the second case - the plus sign. Besides, it is easy to show that if $y^2 < 1$ the anomalous singularity may appear either when all y_i are negative, or when one of y_i is positive, and two others are negative. At $y^2 > 1$ the singularity may appear only when one of the y_i is positive and two others are negative^{x/}.

^{x/} When $y^2 < 1$, the anomalous singularity conditions are formulated with the help of the dual diagram (see^[2]). In the case $y^2 > 1$ one cannot construct the corresponding diagram in the Euclidean space and therefore it is convenient to formulate these conditions in an algebraic form.

Consider the case when $y^2 > 1$. Let for the sake of definiteness $y_2 > 1$, and $y_1, y_3 < -1$. We go over to new variables by putting $q_2 = -q'_2$, $q_1 = q'_1$, $q_3 = q'_3$ (or $q_2 = q'_2$, $q_1 = -q'_1$, $q_3 = -q'_3$). Then all $y'_i = \frac{(q'_i q'_k)}{m_j m_k}$ will be greater than +1, and $\frac{q'^2_2}{m^2_2} = 1$, i.e., relations are obtained which characterize the 4-velocities of free particles. Therefore, the anomalous singularity may appear when the particles in the intermediate state are real. Here there are two possibilities which differ only in signs of q'_i and correspond to the mutually inverse reactions. We consider the case when particles 1 and 2 emerge from vertex 3 and specify the diagram (see Fig. 2) by assuming that from vertex 2 one line comes out which corresponds to the particle with mass m'_1 , and from vertex 1- there emerge two lines with masses m'_2 and m'_3 . If $m'_1 > m_3$, then particle 1' must come out from vertex 2, if $m'_1 < m_3$, then it must go in this vertex. Since the latter possibility corresponds to the reaction in which three particles are transformed into two, we shall put $m'_1 > m_3$, i.e., we shall consider the reaction in which two particles are transformed into three. We will discuss the meaning of conditions (2) which connect the relative velocities of particles and are therefore purely kinematical. We introduce the variables θ_{ik} defined from the formula $\text{ch } \theta_{ik} = y'_{ik}$ and compare relations (2) with the equality describing the law of velocity addition in relativistic kinematics (see, for instance, /7,8/)

$$\text{ch } \theta_{ik} = \text{ch } \theta_{ij} \text{ch } \theta_{jk} - \text{sh } \theta_{ij} \text{sh } \theta_{jk} \cos a_{ik}$$

where a_{ik} is the angle between the particle velocities i and k in a system where the particle j is at rest. Taking into account the choice of signs in front of the root in (2) we get that $\cos a_{23} = \cos a_{12} = 1$, $\cos a_{13} = -1$. Thus, if in the general case a triangle on the sphere with an imaginary radius corresponds to three free particles then the conditions of the anomalous singularity require that this triangle should become a "straight line". At the same time the equality

$\theta_{13} = \theta_{12} + \theta_{23}$ must be fulfilled. The obvious physical meaning of these conditions can be easily understood: in the centre-of-mass system of the reaction particle 3 must fly in a direction opposite to that of particle 1. At the same time it must fly fast enough to "catch up" particle 2. So, the anomalous singularity appears when the momenta of the intermediate particles are such that the triangular diagram describes the three-stage reaction with free particles: at first particles 1 and 2 are produced, then particle 1 decays into particles 3 and 1', particle 3 flies backward with respect to the direction of flight of particle 1 (in the c.m.s. of the reaction), it "catches up" particle 2 and there occurs either a scattering or a reaction. Such multi-stage reactions were treated earlier, but the role of the anomalous singularity was not noticed. For instance, when the possibilities of

measuring the lifetime of a Σ^0 -particle were analysed the author discussed the reaction $K^- + \text{nucleus } (Z) \rightarrow \Sigma^0 + \text{nucleus } (Z-1)$ in which the produced Σ^0 decays into a Λ -particle and a γ -quantum, the latter one gives rise to an electron-positron pair on the nucleus $(Z-1)^{9/}$. This process can be roughly described by the triangle diagram and its probability depends on the Σ^0 -particle velocity and on its lifetime. A possibility of using the three-stage reactions to determine the lifetimes and the scattering cross sections for unstable particles in the nonrelativistic case was investigated by Fox^{10/}.

3. The Expression for the Amplitude

We single out that part of the triangle amplitude (see diagram of Fig. 1) which contains the anomalous singularity. The invariant amplitude V is of the form^{x/} $V = g_1 g_2 g_3 \pi^2 A$, where

$$A = \int \frac{da_1 da_2 da_3 \delta(1 - \sum a_i)}{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 - z_1 a_2 a_3 - z_2 a_1 a_3 - z_3 a_1 a_2} = \int \frac{da_1 da_2 da_3 \delta(1 - \sum a_i)}{D} \quad (4)$$

Here $a_i = m_i^2$, $D = \sum_{i,j} a_i a_j \zeta_{ij}$, $\zeta_{ij} = \zeta_k = m_i m_j y_{ij}$ at $i \neq j$, $\zeta_{ii} = a_i$.

One can obtain a more convenient integral representation for A , if use is made of the fact that $\sum \frac{\partial A}{\partial a_i}$ is expressed in terms of the elementary functions (^{11/} see also ^{12/});

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A}{\partial a_i} = -\frac{1}{4\Phi} \sum_i \frac{P_i}{\sqrt{R_i}} \ln \left(\frac{\zeta_i + \sqrt{R_i}}{\zeta_i - \sqrt{R_i}} \right)$$

$$\Phi = \det |\zeta_{ij}| = a_1 a_2 a_3 (1 + 2 y_1 y_2 y_3 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2) \quad (5)$$

$$P_i = \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = a_j a_k - \zeta_i^2 + \zeta_i (\zeta_j + \zeta_k) - a_j \zeta_j - a_k \zeta_k$$

$$R_i = \zeta_i^2 - a_j a_k = a_j a_k (y_i^2 - 1)$$

Further we shall be in need of the quantity $\lambda = \sum_i P_i = -\frac{1}{4} (\sum_i Z_i^2 - 2 \sum_{i < j} Z_i Z_j)$. There exists a relationship between these quantities

$$P_i^2 + \lambda R_i + Z_i \Phi = 0 \quad (6)$$

^{x/} The normalization is adopted that the matrix $T_{ba} = \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{2 E_i}} V_{ba} \delta^{(4)}(p_b - p_a)$ where $i T = S - I$, S is the scattering matrix, E_i are the energies of the initial and final particles. The constants are the invariant amplitudes at the vertices of the diagram.

The anomalous singularity corresponds to the vanishing of Φ . It can be easily seen that at $y_i^2 > 1$ and when conditions (2), (3) are fulfilled all $P_i < 0$ i.e., $P_i = -\sqrt{-\lambda} \sqrt{R_i}$.

If $\zeta_i > 0$ ($i=1,2,3$) then A has no singularities. We introduce the function $A|_{a \rightarrow a+t} = \int \frac{da_1 da_2 da_3 \delta(1-\sum a)}{D+t}$. When $\zeta_i > 0$ and $t > 0$ it has no singularities either. Since $\frac{\partial A(a+t)}{\partial a} = \frac{dA(a+t)}{dt}$, then $A = \int dt \sum \frac{\partial A(a+t)}{\partial a_i}$.

If all $a_i \rightarrow a_i + t$, then $\zeta_i \rightarrow \zeta_i + t$, $\Phi \rightarrow \Phi + \lambda t$, $R_i \rightarrow R_i - z_i t$, $P_i \rightarrow P_i$. One should also take into account that in order to go around the singularities by an analytic continuation in ζ it is necessary to replace a_i by $a_i - i\epsilon$ ($\epsilon > 0$).

As a result we have

$$A = \frac{1}{4} \int_{-i\epsilon}^{+\infty - i\epsilon} \frac{dt}{\Phi + \lambda t} \sum_i \frac{P_i}{\sqrt{R_i - z_i t}} \ln \left(\frac{\zeta_i + t + \sqrt{R_i - z_i t}}{\zeta_i + t - \sqrt{R_i - z_i t}} \right) \quad (7)$$

The "physical" branches of the multivalued functions which are in the right-hand sides of equalities (5) and (7) are determined by the requirement that at $\zeta_i > 0$ the function A should have no singularities as it is seen from expression (4). The functions A and $\sum_i \frac{\partial A}{\partial a_i}$ have singularities at the same points. Therefore A has only such singularities which correspond to those of the integrand in (7) at $t=0$. In (7) there appear no singularities due to a pinch of the contour of integration. As one can show (see ^{11/})

$$\sum_i \frac{P_i}{\sqrt{R_i}} \ln \left(\frac{\zeta_i + \sqrt{R_i}}{\zeta_i - \sqrt{R_i}} \right) \Big|_{\text{at } \phi=0} = \ln 1$$

Therefore when $\zeta_i > 0$ one should take that branch of the logarithm for which $\ln(1+i\epsilon) = 0$. In the analytic continuation in ζ_i from $\zeta_i > m_j m_k$ up to $\zeta_i < -m_j m_k$ the argument of the logarithm in (7) gets an addition $2\pi i$ at $0 < t < \frac{R_i}{z_i}$. Therefore the "normal" imaginary part of A at $y_i < -1$, $y_j, y_k > 0$ is equal to

$$\text{Im } A|_{y_i < -1} = \frac{1}{4} \int_0^{R_i/z_i} \frac{dt}{\Phi + \lambda t} \frac{2\pi P_i}{\sqrt{R_i - z_i t}}$$

Let now y_1 and $y_3 < -1$, while $y_2 > 1$. Then

$$A = \frac{\pi i P_1}{2} \int_0^{R_1/z_1} \frac{dt}{(\Phi + \lambda t) \sqrt{R_1 - z_1 t}} + \frac{\pi i P_3}{2} \int_0^{R_3/z_3} \frac{dt}{(\Phi + \lambda t) \sqrt{R_3 - z_3 t}} + A_0$$

$$A_0 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\Phi + \lambda t} \sum_i \frac{P_i}{\sqrt{R_i - z_i t}} \ln \left(\frac{\zeta_i + t + \sqrt{R_i - z_i t}}{\zeta_i + t - \sqrt{R_i - z_i t}} \right) \quad (8)$$

The sign (0) denotes that one should take the branch for which $\ln(1+i\epsilon) = 0$.
 The term A_0 is real has no singularities at $\Phi = 0$ if conditions (3) are fulfilled.
 We assume that particle 1 is unstable and take into account the width Γ_1 only
 in the terms with a singularity by substituting

$$a_1 - i\gamma_1 \text{ for } a_1 (\gamma_1 = m_1 \Gamma_1, \quad \Phi \rightarrow \Phi - i\gamma_1 P_1)$$

Then

$$A = -\frac{\pi i}{\sqrt{-\lambda}} (\ln M + i\phi) + A_0, \quad M = \sqrt{\frac{(\Phi^2 + \gamma_1^2 P_1^2) Z_1 Z_2}{(-P_1 + \sqrt{-\lambda} \sqrt{R_1})^2 (-P_3 + \sqrt{-\lambda} \sqrt{R_3})^2}} \quad (9)$$

$$\phi = \arg(-\Phi + i\gamma_1 P_1), \quad \pi < \phi < 0 \quad \text{since } P_1 < 0$$

in the region we are interested in. One can see that the singularity at $\Phi = 0, \Gamma \rightarrow 0$
 is a logarithmic one and is the sharper, the less Γ_1 . However the amplitude

V itself is proportional to $\sqrt{\Gamma_1}$. For the reaction involving three particles
 in the final state (Fig. 2) it is convenient to fix the energy of the incident par-
 ticle (i.e., y_3) and to consider the distribution in $y_2(Z_1)$. The quantity
 y_2 for the given diagram is fixed in a two-body decay of particle 1. In this
 case the anomalous singularity must be observed when

$y_1 = y_1^+ = y_2 y_3 + \sqrt{(y_2^2 - 1)(y_3^2 - 1)}$. Using this formula, it is easy to find the
 position of the singularities for the concrete reactions (examples see below).

If $y_1^+ = -1$ (the anomalous singularity coincides with the threshold one) then
 the singularity remains logarithmic. When $y_2 \neq 1$ the coincidence is possible
 only with one of the threshold singularities. If $y_2 = 1$, then at $y_1 = -1, y_3 = -1$
 the singularity has a form $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}, \lambda \rightarrow 0$. This interesting case was treated in pa-
 pers [3,4,5]. In order to find the inverse square root-type singularity it is neces-
 sary to investigate the reactions involving four particles in the final state since
 the requirements $y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = -1$ should be simultaneously sa-
 tisfied. This is difficult to be done for the reactions involving three particles in
 the final state as long as y_2 is usually different from +1. The exception is
 a ϕ^- -meson ($y_2 = +1, 03$).

4. A Determination of Amplitudes from the Anomalous Singularity

In the general case the amplitudes g_i depend on q_i . However, if
 they have no singularities near the values of q_i satisfying conditions (1) at

$a_i > 0$ then they may be considered to be constants and the contribution of the singularity will be given by formula (9) as before. Since the virtual particles near the singularity become real, then g_i which enter into the expression for the singular part of the amplitude, correspond to the physical values of the variables. So, one should substitute instead of g_i the corresponding scattering amplitude. The singling out of the anomalous singularity of such a contribution corresponds actually to the realization of such a process, as, for example, free pion scattering on a free pion. Note that if g_i are considered to be functions of the form $g_i(z_i)$ nothing is changed in the previous arguments. Then formula (9) is valid not only near the singularity, and for the amplitude one can use formulae from the effective range theory.

In order to determine g_1 from experiment one should have some information about g_2 and g_3 . Consider the simplest case when g_i can be assumed to be constants, and the reaction is described only by the diagrams of Figs. 2 and 3. This assumption may be not too far from being a true one since there are such cases when the reaction is well described by the diagram of Fig. 3 (see ^{13,14/}). If the resonance mass is put to be $m_1 = \frac{i\Gamma_1}{2}$ then this diagram gives Breit-Wigner's formula which was compared with the effective mass distributions for particles 1' and 3. The diagram of Fig. 2 plays then the role of a correction which takes into account the interaction of particles 2 and 3 which may be very essential near the production threshold of particles 1 and 2. We assume that vertex 1 corresponds to elastic scattering. Then, taking into account the diagrams of Figs. 2 and 3 the differential cross section for the production of particles 1', 2, and 3 may be represented as

$$d\sigma = |m|^2 \delta \left(\sum_i s_i - s_0 - \sum b_i \right) \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{s_0} \quad (10)$$

where $s_1 = (k_2 + k_3)^2$, $s_2 = (k_1 + k_3)^2$, $s_3 = (k_1 + k_2)^2$, k_i are the 4-momenta of particles in the final state, $b_i = k_i^2$ are the squares of masses of these particles, and s_0 is the square of the total energy in the c.m.s.

$$\mathbb{M} = g_2 g_3 \left[-\frac{1}{s_2 - a + iy_1} + \frac{g_1}{16\pi^2} \left(A_0 - \frac{\pi i \ln M}{\sqrt{-\lambda}} + \frac{\pi \phi}{\sqrt{-\lambda}} \right) \right] \quad (11)$$

The quantities M, ϕ, λ, A_0 at the given total energy depend only on the variable s_1 . The variables s_i change inside the region (in the Dalitz plot) bounded by the curve

$$s_1 s_2 s_3 - \sum_i s_i (b_i s_0 + b_i b_i) + 2 s_0 (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3) + 2 b_1 b_2 b_3 = 0 \quad (12)$$

$$s_1 + s_2 + s_3 = s_0 + \sum b_i$$

In this case it is convenient to consider the Dalitz plot in terms of the variables s_1, s_2 (Fig. 4). The anomalous singularity appears on the line $s_1 = s_{10}$ which goes through the left intersection point of the straight line $s_2 = a_1$ with the boundary (12). To show this, it is convenient to write down the equation for the boundary in terms of the variables

$$\eta_1 = \frac{b_2 + b_3 - s_1}{2\sqrt{b_2 b_3}}, \quad \eta_2 = \frac{s_2 + b_3 - b_1}{2\sqrt{s_2 b_3}}, \quad \eta_3 = \frac{s_2 + b_2 - s_0}{2\sqrt{s_2 b_2}}$$

Then Eq. (12) assumes the form $1 + 2\eta_1\eta_2\eta_3 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 = 0$ i.e., it coincides with (2) when $b_2 = a_2, b_3 = a_3, b_1 = z_2, s_2 = a_1, s_0 = z_3$.

A general expression for $|\mathcal{M}|^2$ can be obtained from (11).

We obtain a formula convenient for the analysis if the amplitude g_1 is not large and real. Then, neglecting the terms with g_1^2 we have

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{|\xi_2 \xi_3|^2}{(s_2 - a_1)^2 + \gamma_1^2} \left[1 - \frac{i\gamma_1 \xi_1 \ln M}{8\pi\sqrt{-\lambda}} + \frac{\xi_1 (a_1 - s_2)(A_0 + \frac{\phi\pi}{\sqrt{-\lambda}})}{8\pi^2} \right] \quad (13)$$

If we select only the events which fall into the region symmetrical with respect to the straight line $s_2 = a_1$ (in Fig. 4 it is shaded) then the last term in (13) will not contribute to the distribution of the number of events as a function of s_1 while the second term will contain only one unknown g_1 . Thus, if the reaction can be described by the diagrams of Figs. 2 and 3 then the amplitude g_1 is not difficult to determine. In this case the sign of the amplitude is also determined. So, when $g_1 > 0$ (attractive forces) the contribution of the second term in (13) is positive ($\ln M < 0$ near the singularity if the width Γ_1 is not very large).

The Dalitz plot in Fig. 4 is given for the reaction $K^+ p \rightarrow \Lambda \pi^+ \pi^-$ at the total energy of 1570 MeV. ($p_{k lab} = 520$ MeV/c). It is assumed that this reaction proceeds via the Y_1^* - 1385 MeV resonance production. (For the sake of simplicity the plot in Fig. 4 shows only the contribution of the resonance having a charge of one sign). The diagram of Fig. 2 corresponding to $\pi\pi$ -scattering has in this case a singularity at $s_1 = 4.14 m_\pi^2$.

If the scattering length is equal to $1/m_\pi$ then

$$\left(- \frac{\xi_1 \gamma_1 \ln M}{8\pi\sqrt{-\lambda}} \right)_{max} = 1/2 \quad \text{when} \quad \Gamma_1 = 35 \text{ MeV}$$

i.e., the contribution of the triangle diagram is essential

($s_1 = 8\pi(\pi_2 + m_3)c$, c is the scattering length). The dependence of the terms $-\frac{\ln M}{\sqrt{-\lambda}}$ and ϕ on s_1 is drawn in Fig. 4.

The examples of the processes from which one can extract the information about $\pi\Lambda$ scattering are shown in Fig. 5.

5. "False" Resonances

As is seen from Fig. 4, the anomalous singularity may lead to the appearance of the "hump" in the effective mass distribution of two particles. The location and the existence of this hump depends on the total energy (or y_3). Since for the majority of the resonances $y_2 \leq 2$, then in virtue of inequalities (3) the singularity appears, as a rule, near $y_1 = -1$, i.e., when the effective mass is $\approx (m_2 + m_3)$. If the information about the reaction is insufficient such singularities may be interpreted as weak resonances. We give the examples of reactions in which the role of the anomalous singularity is essential.

1. In the reaction $\pi^- p \rightarrow K \bar{K} N$ at $p_{\pi lab} = 1.95$ GeV/c there was found a relatively great number of events of $K_1^0 K_1^0$ pairs with the effective mass of about 1 GeV^{15/}. Since in the $K \bar{K}$ -pair production at this energy the $Y - 1520$ MeV resonance plays a considerable role then the diagram of Fig. 6a must be essential which has a singularity at the effective $K \bar{K}$ mass equal to 1 GeV (for $p_{\pi lab} = 1.95$ GeV/c). The maximum value of the quantity $-\frac{2\gamma_1 m_k c}{\sqrt{-\lambda}} \frac{\ln M}{\sqrt{-\lambda}}$ at $\Gamma_1 = 16$ MeV is $\frac{c m_k}{4}$ in this case, i.e., when the scattering length is $= \frac{1}{m_\pi}$ the contribution of the triangle diagram can be compared with the contribution of the pole diagram of Fig. 3 (m_k is the mass of the K meson). At a greater energy the contribution of the diagram with the emission of one or several pions (Fig. 6b) may turn out to be essential. The diagram with the production of ϕ -meson (Fig. 6 b) is interesting because the inverse square root singularity of the form $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ is essential for it. The contribution of this diagram is the maximum one, when K, \bar{K} and N in their own center-of-mass system possess a small kinetic energy, i.e., the effective mass of K -mesons is close to that of ϕ -meson. But in contrast to a ϕ -meson in this case the $K_1^0 K_1^0$ decay mode is possible due to $\bar{K}N$ scattering. So, the increase in the number of K_1^0 meson pairs with the effective mass of 1 BeV can be partially described by the diagrams we have considered.

2. In the reaction $p + d \rightarrow He^3 + 2\pi$ there was observed a hump in the momentum distribution of He^3 which corresponds to the effective mass of pions $\approx 300-310$ MeV^{16/}. We assume that in this reaction the creation of nuclei of the NNN^* type is essential (N is the nucleon, N^* is the 1238 MeV

isobar). These nuclei decay into $He^3(H^3)+\pi$ (Fig. 7a). So, the anomaly (the so-called ABC-resonance) may be due to the triangle diagram singularity which takes into account $\pi\pi$ -scattering (Fig. 7b). When the mass of NNN^* nucleus is $m_{He^3} + 300$ MeV and the initial kinetic proton energy is 743 MeV the singularity manifests itself at $s_1 = 4.8 m_\pi^2$, i.e., at $m_{\pi\pi} \approx 310$ MeV. When the proton energy decreases the singularity corresponds to the complex values of s_1 what corresponds to the "washing out" of the hump. This is in agreement with the data of paper^{/16/}. The same interpretation of the ABC-anomaly was recently suggested by V.V. Anisovitch. As for the reactions with nuclei which involve resonances and are of interest by themselves, they were treated by Grishin V.G. and Podgoretsky M.I.^{/17/}.

Fig. 7 shows the results of the calculations by formula (13) without taking into account the term A_0 which does not contain a singularity. The width Γ_1 was put to be 100 MeV, and the $\pi\pi$ -scattering length to be $\frac{1}{m_\pi}$. The same figure shows the contribution of the terms having a singularity and squared in g_1 . The terms with A_0 plus possible constants which are not taken into account by the diagrams 7 a,b give a contribution to the distribution in s_1 . The behaviour of the latter one is similar to that of the phase space curve.

The examples given above show how important is to take into account the triangle diagrams in the reactions involving resonances. It is of interest to consider such reactions in which two resonances can be produced. In this case the square diagram describing the scattering of the decay products has a singularity of the form $\frac{1}{\sqrt{s-s_0}}$.

The author is deeply indebted to M.A. Markov, V.I. Ogievetsky, I.V. Polubarinov and to M.I. Podgoretsky for discussions and useful remarks, as well as to S.A. Bunyatov, S.S. Gerstein and L.I. Lapidus for discussion of the questions concerned with the ABC-resonance.

References

1. R. Karplus, C. Sommerfield, E. Wichmann. Phys. Rev., 111, 1187 (1958); 114, 376 (1959).
2. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 37, 62 (1959).
3. P.V. Landshoff, S.B. Treiman. Phys.Rev., 127, 649 (1962).
4. R. Aaron. Phys. Rev. Lett., 10, 32 (1963).
5. F.R. Halpern, H.L. Watson. Phys.Rev., 131, 2674 (1963).
6. I.C. Polkinghorne, G.R. Sreaton. Nuovo Cim., XY, 289, 925 (1960).
7. А. Зоммерфельд. Электродинамика, ИЛ., 1958.

8. Я.А. Смородинский. Атомная энергия, 14 , 110 (1963).
9. Б.Н. Валуев. Определение времени жизни Σ^0 - частицы. Доклад на Всесоюзной межвузовской конференции по теории элементарных частиц. Ужгород, 1961.
10. R. Fox. Phys. Rev., 125, 311 (1962).
11. G. Kallen, A.S. Wightman, Kgl. Danske Videnskab. Selsk. Mat. Fys. Medd., 1 , 6 (1958).
12. S. Klarsfeld. Phys. Lett., 5 , 204 (1963).
13. I.B. Shafer, I.I. Murray, D.O. Huwe. Phys.Rev. Lett., 10 , 179 (1963).
14. P. Schlein, W.E. Slater, L.T. Smith, D.H. Stork, H.K. Ticho. Phys.Rev.Lett., 10 , 368 (1963).
15. G. Alexander et al. Phys. Rev. Lett., 9, 460 (1962).
16. A. Abashian, N.E. Booth, K.M. Crowe. Phys.Rev. Lett., 5 , 258 (1960); 7 , 35 (1961).
17. В.Г. Гришин, М.И. Подгорецкий. Препринт ОИЯИ Р-1508 Дубна, 1964.

Received by Publishing Department
on February, 12, 1964.

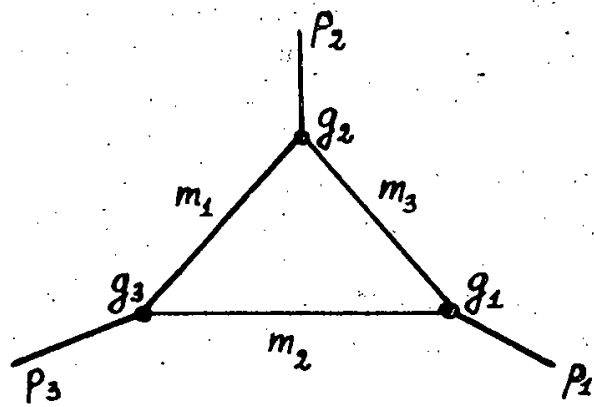


Fig. 1.

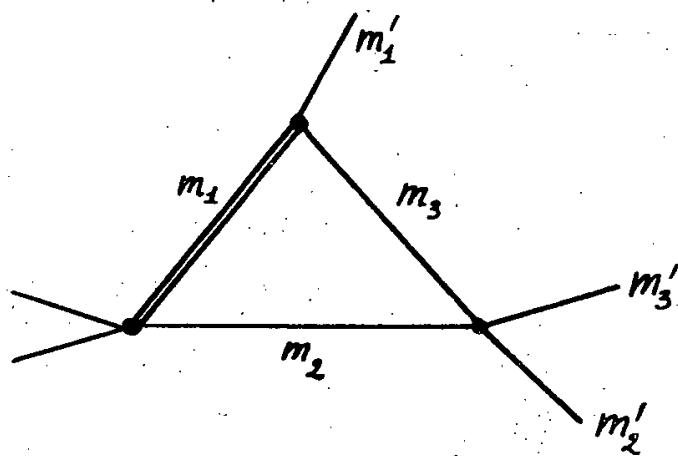


Fig. 2.

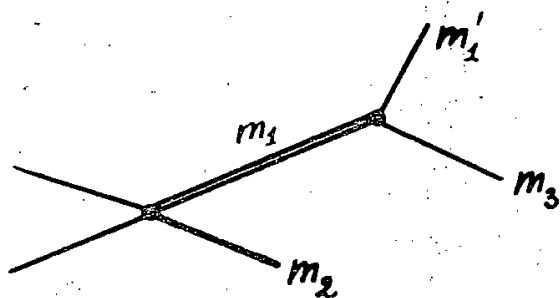


Fig. 3.

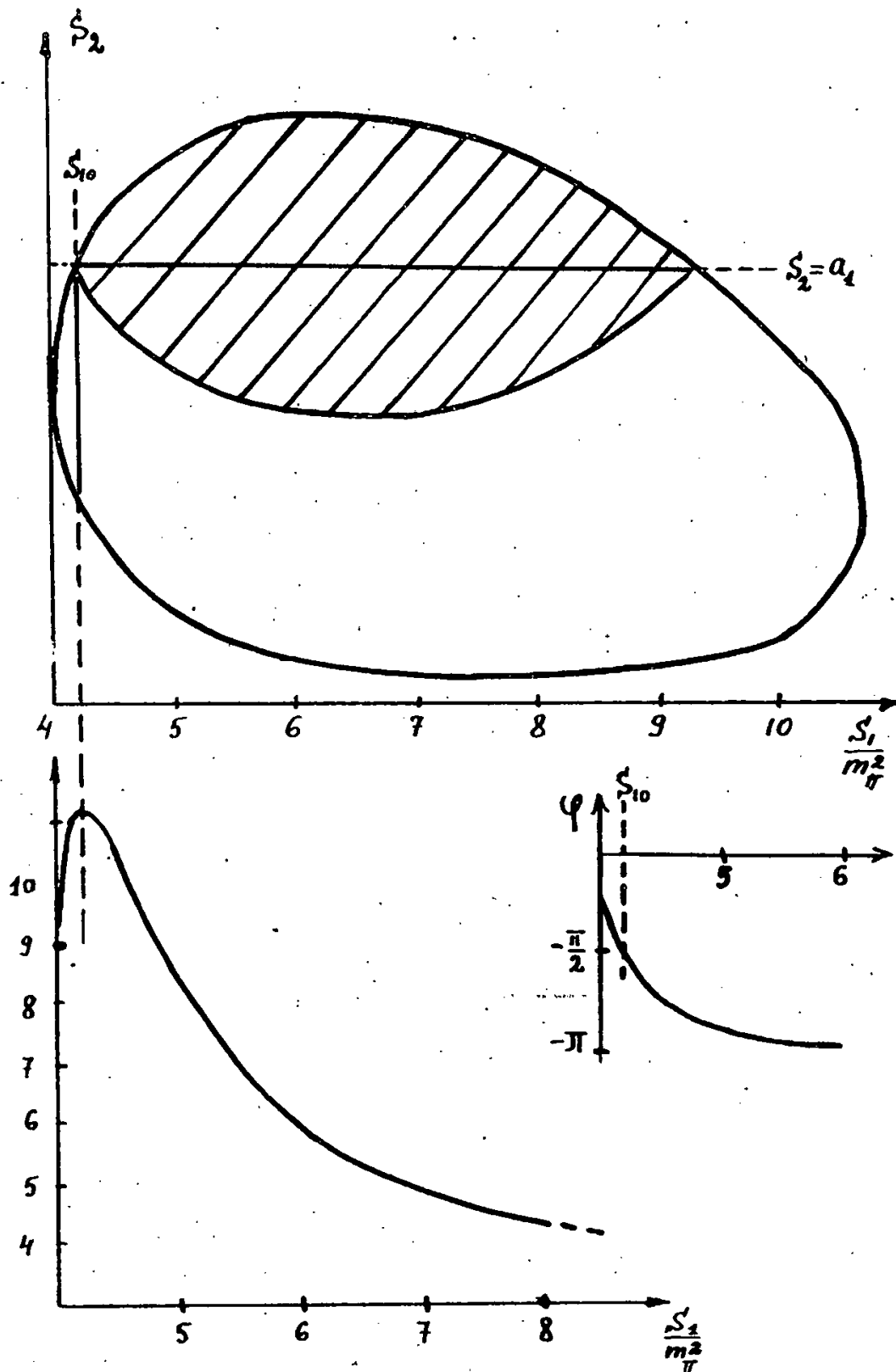


Fig. 4 Dalitz plot and the location of the singularity for the reaction
 $K^- p \rightarrow \Lambda \pi^+ \pi^-$ at $p_k \text{ lab.} = 520 \text{ MeV}/c$ (see the text).

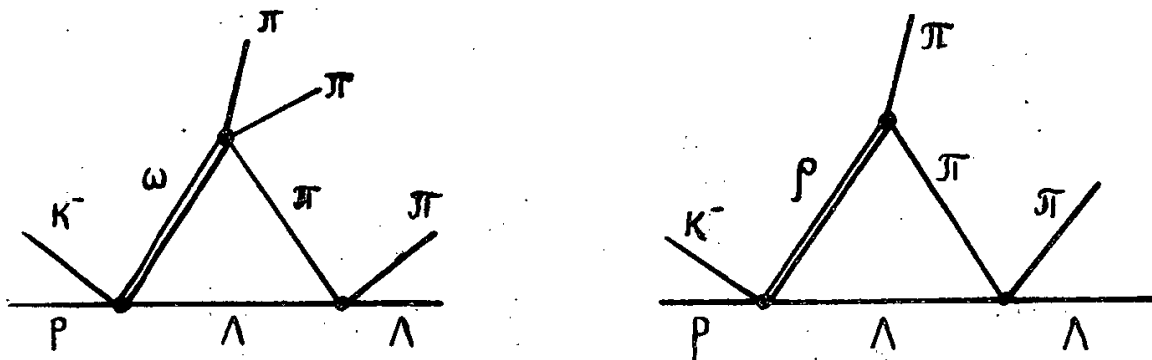


Fig. 5.

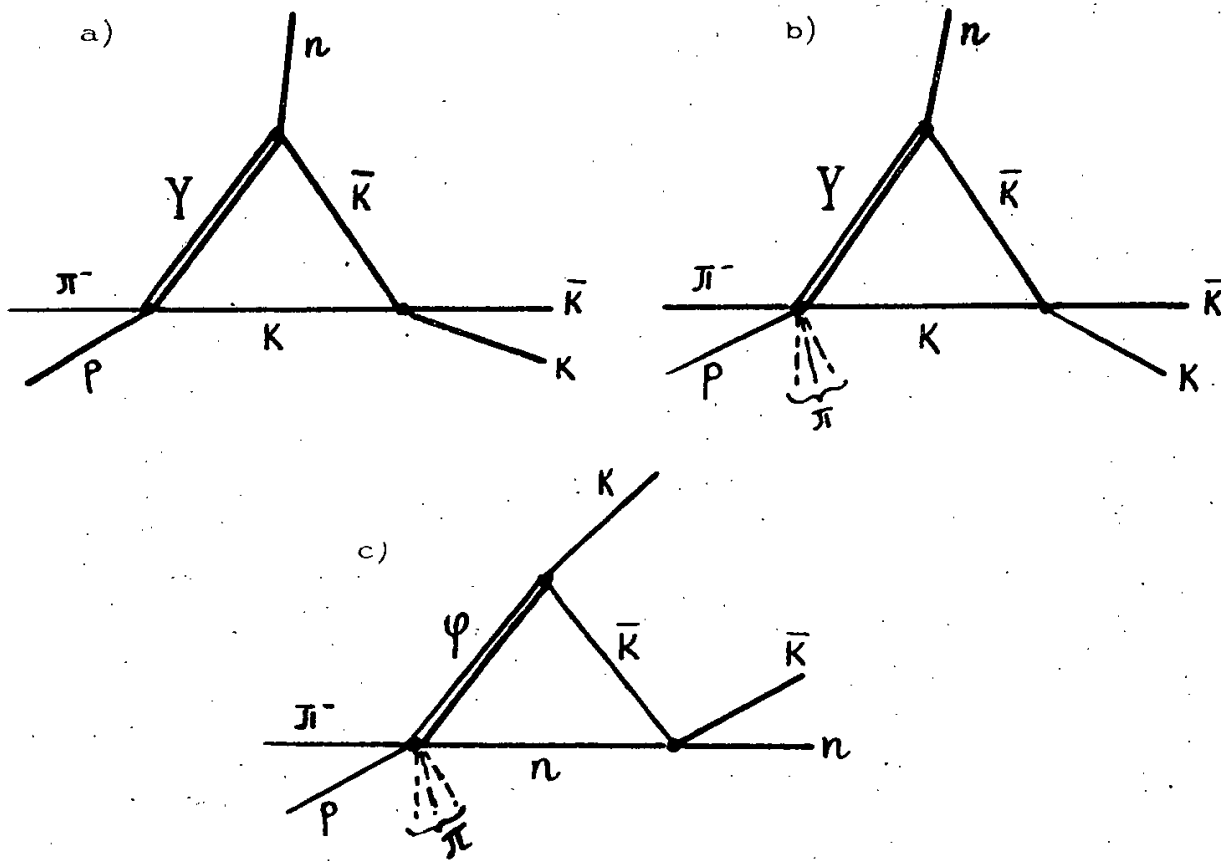


Fig. 6.

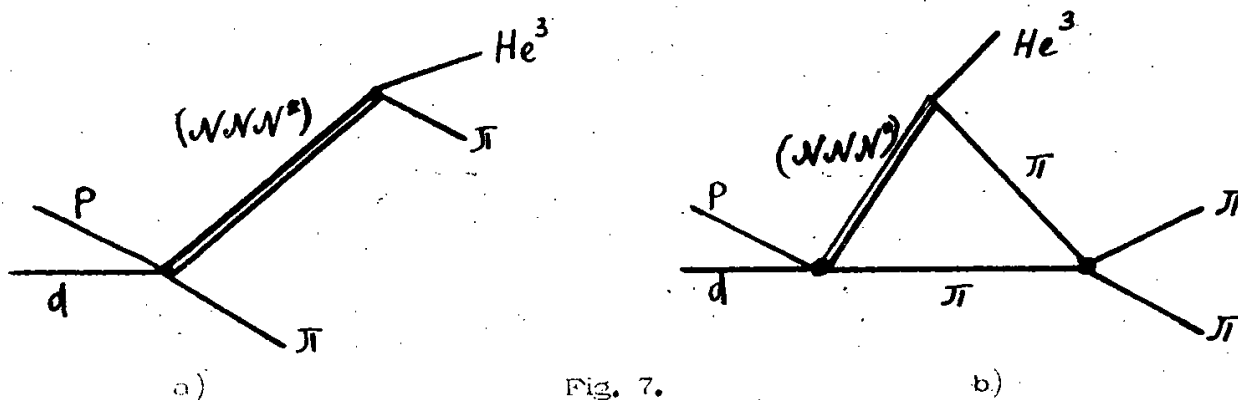


Fig. 7.

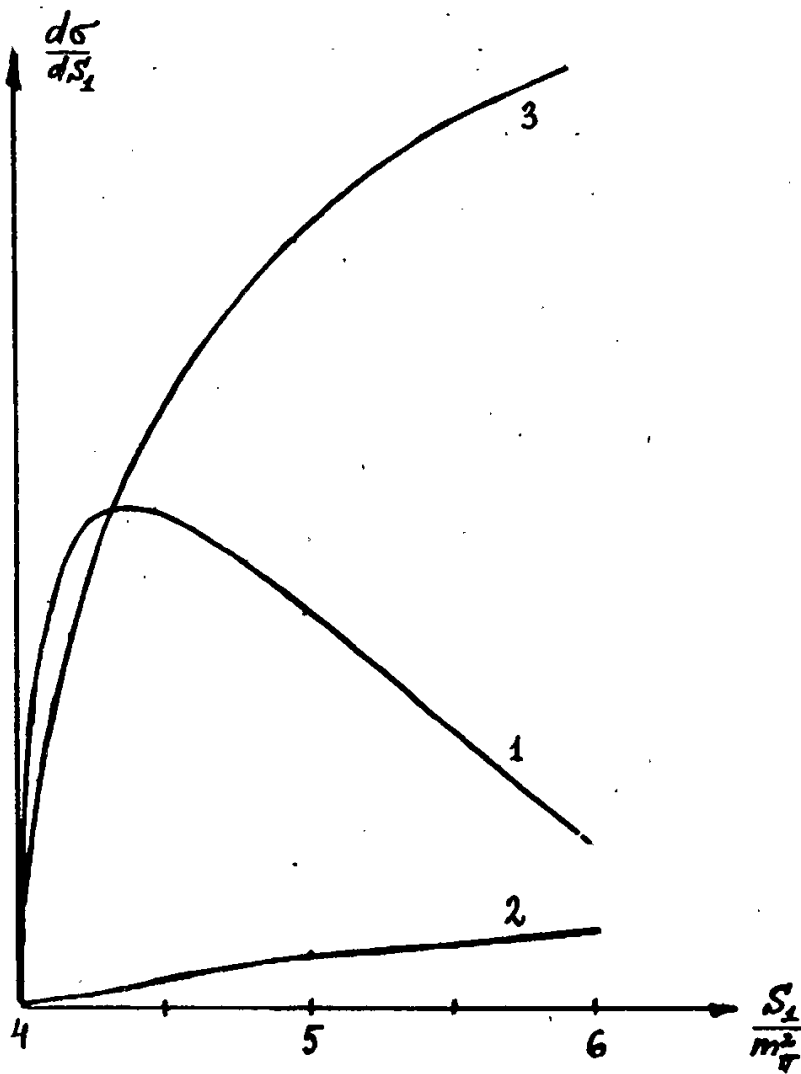


Fig. 7c. The dependence $\frac{d\sigma}{ds_1}$ for the reaction $p + d \rightarrow He^3 + 2n$ according to (13) at $A_0 = 0$ (curve 1). Curve 2 is the contribution of the singular terms quadratic in g_1 . Curve 3 indicates the dependence $\frac{d\sigma}{ds_1}$ at $|m|^2 = \text{const.}$

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3821. Тираж 440. 1,1 уч.-изд. л.
Перевод Л.А.Смирновой. Март 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

LABORATORY OF THEORETICAL PHYSICS

A.A. Logunov, Nguyen Van Hieu and Hsien Ting-chang

E - 1550

HIGHER SYMMETRIES OF STRONG INTERACTIONS
AND ASYMPTOTIC RELATIONS
BETWEEN MESON-BARYON SCATTERING CROSS SECTIONS

Дубна 1964

E-1550

Логунов А.А., Нгуен Ван Хьеу, Сян Дин-чан

Высшие симметрии сильных взаимодействий и асимптотические соотношения между сечениями мезон-барионного рассеяния

Рассмотрены некоторые возможности экспериментальной проверки моделей взаимодействий с высшими симметриями октетной модели, модели Сакаты и модели G_2 ; получены асимптотические соотношения между сечениями мезон-барионного рассеяния в этих моделях.

Работа издается только на английском языке.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

E-1550

Logunov A.A., Nguyen Van Hieu, Hsien Ting-chang.

Higher Symmetries of Strong Interactions and Asymptotic Relations between Meson-Baryon Scattering Cross Sections.

Some possibilities of experimental tests of strong interaction models with higher symmetries are considered: the octet model, the Sakata model and the G_2 model; and some asymptotic relations between meson-baryon scattering cross sections are obtained in these models.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

A.A. Logunov, Nguyen Van Hieu and Hsien Ting-chang

E - 1550

HIGHER SYMMETRIES OF STRONG INTERACTIONS
AND ASYMPTOTIC RELATIONS
BETWEEN MESON-BARYON SCATTERING CROSS SECTIONS

Submitted to Physics Letters

Дубна 1964

1. Introduction

After the works on the classification schemes of elementary particles by Gell-Mann and Nishijima, where the isospin invariance and hypercharge conservation hold, there were some attempts in building up the schemes of strong interaction with higher symmetries: the "global symmetry" of Gell-Mann^{1/} and Schwinger^{2/}, the doublet symmetry of Pais^{3/}, the cosmic symmetry of Sakurai^{4/}, the universal vector theory of strong interactions of Sakurai^{5/} and Kobzarev and Okun^{6/}, the unitary symmetry (the $SU(3)$ group) in the triplet model of Sakata^{7-9/} and in the octet model of Gell-Mann^{10/} and Ne'eman^{11/}, the symmetry group G_2 in seven-dimensional charge space of Behrends and Sirlin^{12/}, the theory with degeneration in states whose hypercharge equals zero of Baldin and Komar^{13/} and other symmetries. The possible experimental tests of the unitary symmetry and the symmetry group G_2 have already been discussed in a series of papers. In particular, some relations between cross sections of the meson-baryon and the baryon-baryon scattering processes in these two models have been obtained in^{12,14-18/}

In the symmetry schemes of strong interactions under discussion all the mesons and their antiparticles belong to the same multiplet. If the total cross sections of meson-baryon and antimeson-baryon interactions tend to constant limits at $s \rightarrow \infty$, then according to the Pomeranchuk theorem these limits equal each other. This circumstance reduces the number of independent scattering amplitudes in the models with higher symmetries^{20,21/}.

As it was shown in^{22,23/} the differential cross sections of crossing processes equals each other asymptotically at high energies and fixed momentum transfer, and there are some asymptotic relations between the amplitudes of these crossing reactions. Since in the models with higher symmetries mesons and antimesons belong to the same multiplet and as there are crossing processes among the meson-baryon scattering processes, then the asymptotic relations between amplitudes of crossing processes and also the symmetry properties of strong interaction lead to subsidiary asymptotic equalities between cross sections of processes under considerations. For instance, it was shown in^{23/} that from the asymptotic relations between scattering amplitudes of π^+ and π^- mesons on proton and from isospin invariance follows the asymptotic equality

between the total interaction cross sections of charged and neutral π -mesons with proton.

In the present paper we shall deduce some asymptotic relations between cross sections of meson-baryon scattering processes in the triplet and octet models of unitary symmetry and in the model with symmetry group G_2 with the help of the methods given in^{1/23/}. Comparison of the relations obtained in this paper with experimental data might throw light on the symmetry properties at high energies^{1/}.

2. Kinematical Considerations

We consider the following meson-baryon scattering processes:

$$\begin{array}{ll}
 \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p & (1a), \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p & (1b), \\
 \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n & (2a), \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n & (2b), \\
 K^+ + p \rightarrow K^+ + p & (3a), \quad \bar{K}^- + p \rightarrow \bar{K}^- + p & (3b), \\
 K^0 + p \rightarrow K^0 + p & (4a), \quad \bar{K}^0 + p \rightarrow \bar{K}^0 + p & (4b), \\
 K^0 + p \rightarrow K^+ + n & (5a), \quad \bar{K}^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n & (5b), \\
 \pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+ & (6a), \quad \bar{K}^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+ & (6b), \\
 \pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^- & (7a), \quad \bar{K}^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^- & (7b), \\
 \pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0 & (8a), \quad \bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^0 & (8b), \\
 \pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda & (9a), \quad \bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda & (9b), \\
 \pi^0 + p \rightarrow K^+ + \Sigma^0 & (10a), \quad \bar{K}^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0 & (10b), \\
 \pi^0 + p \rightarrow K^+ + \Lambda & (11a), \quad \bar{K}^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda & (11b), \\
 \pi^0 + p \rightarrow K^0 + \Sigma^+ & (12a), \quad \bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^+ & (12b), \\
 \bar{K}^0 + p \rightarrow K^+ + \Sigma^0 & (13a), \quad \bar{K}^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0 & (13b), \\
 & & K^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^- & (14).
 \end{array}$$

Under crossing transformation processes (ja) go over to processes (jb), while process (14) goes over to itself.

Note that besides processes (1a,b) - (14), there exist processes obtained from them by the substitutions

$$n \leftrightarrow p, \quad \pi^+ \leftrightarrow \pi^-, \quad K^+ \leftrightarrow K^-, \quad \Sigma^+ \leftrightarrow \Sigma^-, \quad \Xi^0 \leftrightarrow \Xi^-,$$

1/ Note that the higher symmetries break down at low energies.

whose amplitudes coincide with those corresponding to processes (1a,b)-(14) up to a sign. The relations obtained in the following for processes (1a,b)-(14) hold also for the corresponding processes obtained from them by the above substitution. The exceptional cases are processes involving neutral K^- mesons in the initial states, for instance, processes (4a) and (4b). Instead of these two processes we shall consider the corresponding mirror processes:

$$K^+ + n \rightarrow K^+ + n \quad (4a'), \quad \text{and} \quad K^- + n \rightarrow K^- + n \quad (4b'),$$

whose amplitudes are equal to amplitudes of (4a) and (4b) respectively, and the physical processes

$$K_2^0 + p \rightarrow K_2^0 + p \quad (4c)$$

and

$$K_2^0 + p \rightarrow K_1^0 + p \quad (4d).$$

We shall denote the amplitudes of process (4a)-(4b) by $T_{4a} - T_{4d}$ respectively. Neglecting the weak interactions, we have

$$T_{4c} = \frac{T_{4a} + T_{4b}}{2}, \quad T_{4d} = \frac{T_{4a} - T_{4b}}{2i}. \quad (15)$$

Instead of processes (5a), (8b), (9b), (12b) and (13b), the corresponding physical processes

$$K_2^0 + p \rightarrow K^+ + n \quad (5c),$$

$$K_2^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^0 \quad (8c),$$

$$K_2^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda \quad (9c),$$

$$K_2^0 + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^+ \quad (12c),$$

$$K_2^0 + p \rightarrow K^+ + \Sigma^0 \quad (13c)$$

are the observable ones in experiment, the cross sections of which equal to those of the corresponding processes with neutral K^0 or \bar{K}^0 mesons in the initial state, multiplied by $\frac{1}{2}$.

In all the models under consideration, all the mesons (π , K and \bar{K}) belong to the same multiplet. In the octet model all baryons also belong to the same unitary multiplet. Therefore, the relative parities (πN), ($K\Lambda$), ($K\Sigma$) and ($K\Xi$) are the same in this model, and the matrix elements of the processes in question have the form:

$$T_{j a, b} = \bar{u}(p_2) [A_{j a, b}(s, t) + i \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} B_{j a, b}(s, t)] u(p_1) \quad (16)$$

where q_1 and p_1 (q_2 and p_2) are the four-momenta of the meson and

the baryon in the initial (final) states,

$$s = -(p_1 + q_1)^2, \quad t = -(q_1 - q_2)^2.$$

In the triplet model of Sakata the nucleons and Λ -hyperon belong to the same multiplet. Therefore, in this model the matrix elements of process (j, b) , $j = 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11$, have also the form (16). In case of the triplet model we shall consider only these processes. Analogously, in the model with symmetry group G_2 , the matrix element of all processes except (9a,b) and (11 a,b) have also the form (16). As for the last two processes with Λ -hyperon (which is not included in the multiplet of other baryons) in the final state, the matrix elements have also the form (16) if the relative parities (πN) and $(K\Lambda)$ are the same. In case of different relative parities, we have:

$$T_{j, a, b} = \bar{u}(p_2) [A_{j, a, b}(s, t) + i \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} B_{j, a, b}(s, t)] \gamma_5 u(p_1). \quad (17)$$

In the following we shall consider the case of equal relative parities in detail. In the other case all calculations can be made analogously and give the same results.

The differential cross section has the form

$$\frac{d\sigma_{j, a, b}(s, t)}{dt} = \frac{1}{64 \pi s k_1} F_{j, a, b}(s, t) \quad (18)$$

where k_1 is the modulus of the three-momenta of the initial particles in the CMS, while

$$F_{j, a, b}(s, t) = [(M_1 + M_2)^2 - t] |A_{j, a, b}|^2 + \frac{1}{4} \{ (s - u)^2 - (\pi_1^2 - m_2^2)^2 - [t - 2(m_1^2 + m_2^2)] [t - (M_1 - M_2)^2] \} |B_{j, a, b}|^2 + \\ + [(M_1 + M_2)(u - s) + (M_1 - M_2)(m_2^2 - m_1^2)] \text{Re } A_{j, a, b} B_{j, a, b}^* \quad (19)$$

$$m_1^2 = -q_1^2, \quad M_1^2 = -p_1^2, \quad s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2.$$

If the initial baryon is unpolarized, then the polarization vector of the final baryon is equal to

$$\xi_\mu^{j, a, b} = P_{j, a, b} n_\mu \quad (20)$$

where n_μ is the unit space-like four-vector, proportional to the vector $i\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} q_{1\alpha} p_{1\beta} p_{2\gamma}$ and the polarization $P_{j, a, b}$ equals

$$P_{j, a, b} = \frac{2s \text{Im } A_{j, a, b}(s, t) B_{j, a, b}^*(s, t)}{F_{j, a, b}(s, t)} c(s, t) \quad (21)$$

where function $c(s, t) \sim \sqrt{-tas}$ as $s \rightarrow \infty$. In case of equal masses $m_1 = m_2 = m$, $M_1 = M_2 = M$, function $c(s, t)$ has a simple form ^{/24/}

$$c(s, t) = \left[t \frac{su - (M^2 - m^2)^2}{s^2} \right]^{1/2}.$$

According to the optical theorem, the total cross section of two particle interaction is proportional to the imaginary part of the elastic scattering amplitude of these particles averaged over spin. We shall denote the total interaction cross section corresponding to the elastic processes (j, a, b) $j = 1, 3, 4$, by $\sigma_{j, a, b}^{tot}(s)$. The total cross section can be expressed in terms of the imaginary parts of the invariant amplitudes $A_{j, a, b}(s, t)$ and $B_{j, a, b}(s, t)$ in the following way:

$$\sigma_{j, a, b}^{tot}(s) = \frac{1}{2k \sqrt{s}} \text{Im} [2M A_{j, a, b}(s, 0) + (M^2 + m^2 - s) B_{j, a, b}(s, 0)] \quad (22).$$

$$m_1 = m_2 = m, \quad M_1 = M_2 = M$$

From (18), (19) and (22) it is not difficult to see that the total cross section and the differential cross section of forward elastic scattering are expressed by the same function:

$$H_{j, a, b}(s) = 2M A_{j, a, b}(s, 0) + (M^2 + m^2 - s) B_{j, a, b}(s, 0) \quad (23)$$

in the following way =

$$\frac{d\sigma_{j, a, b}(s, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{64 \pi s k_1^2} |H_{j, a, b}(s)|^2 \quad (24)$$

$$\sigma_{j, a, b}^{tot}(s) = \frac{1}{2k_1 \sqrt{s}} \text{Im} H_{j, a, b}(s) \quad (25)$$

3. Relations between Amplitudes

If isospin invariance and other higher symmetries are satisfied, then the amplitudes of the processes under consideration are connected by several equalities. For example, the following well known equalities can be deduced from isospin invariance:

$$T_{1a} - T_{1b} = -\sqrt{2} T_{2a} = \sqrt{2} T_{2b} \quad (26)$$

$$T_{4a, b} + T_{5a, b} = T_{3a, b} \quad (27)$$

$$T_{6a, b} - T_{7a, b} = \sqrt{2} T_{8a, b} = -\sqrt{2} T_{12a, b} \quad (28),$$

$$T_{6a, b} + T_{7a, b} = 2T_{10a, b} \quad (29)$$

$$T_{2a,b} = \sqrt{2} T_{11a,b} \quad (30)$$

$$T_{13a} + T_{13b} = - T_{14} \quad (31)$$

Now let us consider the unitary symmetry. The group of this symmetry is the unitary, unimodular group of rank 2 in three dimensional complex space ($SU(3)$ group)^{8-11,25-28/}. Every irreducible representation $D(\lambda_1, \lambda_2)$ of this group is characterized by two integral numbers λ_1 and λ_2 and the dimension n of which is equal to

$$n(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(2 + \lambda_1 + \lambda_2) .$$

For instance, $n(0,0) = 1$, $n(1,0) = 3$, $n(0,1) = 3^*$, $n(1,1) = 8$, $n(3,0) = 10$,

$n(0,3) = 10^*$ etc. The star here is used to denote the inequivalent conjugate representations. There are altogether eight generators of the group, two of which may have diagonal representation simultaneously. One of these operators is connected with hypercharge, and the other is the operator of the third component of isospin. It is convenient to choose the eigenvectors of operators Y , I_x and I^2 as the basic vectors of each irreducible representation. The direct product of two irreducible representations can be decomposed into direct sums of irreducible representations with the help of the Clebsch-Gordan coefficient of the $SU(3)$ group:

$$D(\mu_1, \mu_2) \otimes D(\nu_1, \nu_2) = \sum_{\lambda, \lambda_2} \oplus D(\lambda_1, \lambda_2)$$

The octet model of Gell-Mann^{10/} and Ne'eman^{11/} and the triplet model of Sakata^{7/} are based on the $SU(3)$ group^{2/}. The difference between these two models is that in the first one the eight baryons as well as the eight mesons (including the π^0 -meson) belong to the same multiplets (differing in the baryon number, parity, spin etc. respectively) corresponding to the $D(1,1)$ representation, while in the second one the nucleons and the Λ - hyperons form a triplet corresponding to the $D(1,0)$ representation. In case of the triplet model we shall consider only process in which the nucleons and the Λ -hyperon participate.

The relations between amplitudes in these models can be obtained by using the standard method. Let us consider, for instance, the octet model. In this model the wave functions of the initial and the final states in the processes (1a,b)-
 (14)

^{2/} In some papers the triplet model of Sakata is considered as based on the unitary group $U(3)$, but not on the group $SU(3)$. The difference between these groups does not change the results obtained in this paper.

belong to a reducible representation resulted from the direct product of two irreducible representations $D(1,1)$. This reducible representation can be decomposed into direct sum of irreducible representations in the following way:

$$D(1,1) \otimes D(1,1) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(1,1)_A \oplus D(3,0) \oplus D(0,3) \oplus D(2,2) \quad (22)$$

In this decomposition the representation $D(1,1)$ appears twice. It is convenient in the following to choose these two representations in such a way that the wave functions of one of which would be symmetric with respect to the Gell-Mann R -reflection^{10/}, while those of the other - antisymmetric. From the invariance with respect to the unitary transformations it follows, that the matrix elements between two states belonging to two inequivalent representations vanish. Since the R -reflection is not included in the $SU(3)$ group, then the matrix elements between two states, one from which belongs to $D(1,1)_S$ and the other belongs to $D(1,1)_A$, are not equal to zero. Thus, the matrix elements of the processes under consideration can be expressed by seven independent amplitudes^{3/}:

$$T^{(0,0)}, T^{(1,1)_{SS}}, T^{(1,1)_{AA}}, T^{(1,1)_{AS}}, T^{(3,0)}, T^{(0,3)}, T^{(2,2)}$$

The coefficients before these independent amplitudes can be calculated with the help of the Clebsch-Gordan coefficients of the $SU(3)$ group^{14-17,28,29/}. In this way, one can obtain the following relations between the amplitudes of process $(1a,b)-(14)$ ^{15-18/}

$$T_{1a,b} + T_{6a,b} = T_{3a,b} \quad (32)$$

$$\sqrt{6} T_{9a,b} - \sqrt{2} T_{8a,b} = 2(T_{7b,a} - T_{5b,a}) \quad (33)$$

$$\sqrt{3} T_{11a,b} + \sqrt{2} T_{2a,b} = T_{10a,b} - T_{5a,b} \quad (34)$$

$$T_{13ab} = T_{7a,b} \quad (35)$$

If the subsidiary invariance with respect to the R -reflection^{4/} is assumed, then $T^{(1,1)_{AS}} = 0$, $T^{(3,0)} = T^{(0,3)}$, and we obtain the following relations^{14-17/}

3/ The equality $T^{(1,1)_{SA}} = T^{(1,1)_{AS}}$ follows from time reflection invariance.

4/ The R -reflection is defined as:

$$\begin{aligned} p &\leftrightarrow -\bar{E}^-, & n &\leftrightarrow \bar{E}^0, & \Sigma^+ &\leftrightarrow \Sigma^-, \\ K^+ &\leftrightarrow -K^-, & K^0 &\leftrightarrow \bar{K}^0, & \pi^+ &\leftrightarrow \pi^-. \end{aligned}$$

$$T_{1a,b} = T_{4a,b} \quad (36)$$

$$T_{5a,b} = T_{6a,b} \quad (37)$$

more.

From the relations (32)-(37) and the isospin relations (26)-(31) follow equalities:

$$T_{8a} - T_{8b} = T_{2b} \quad (38)$$

$$T_{9a} - T_{9b} = \sqrt{3} T_{2b} \quad (39)$$

$$T_{9a} - T_{9b} = \sqrt{3} (T_{8a} - T_{8b}), \quad (T_{9a} + T_{9b}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} (T_{8a} + T_{8b}) \quad (40).$$

Analogously, in case of the triplet model of Sakata the matrix elements of the processes (ja, b) , $j = 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11$, in question are expressed by three independent amplitudes $T^{(2,1)}$, $T^{(0,2)}$ and $T^{(1,0)}$, and for which the following equalities can be obtained^{14,17,18/}:

$$T_{1a,b} = T_{3a,b} \quad (41)$$

$$T_{4a} = T_{4b} \quad (42)$$

$$T_{5a,b} = T_{9a,b} \quad (43)$$

At last let us consider the model of Behrends and Sirlin in the seven-dimensional charge space^{12/}. The symmetry group of this model is the G_2 group of rank 2 with 14 parameters^{26/}. The basic irreducible representation of this group is $D^1(0,0)$, $D^7(1,0)$, $D^{14}(0,1)$, $D^{27}(2,0)$ and $D^{64}(1,1)$. In this model the Λ -hyperon is assigned to a singlet of the one dimensional representation $D^1(0,0)$, while the rest seven baryons are assigned to a multiplet corresponding to the irreducible representation $D^7(1,0)$ this is also the case for the seven well established pseudoscalar mesons. Therefore, the matrix elements of all processes under consideration with participation of the Λ -hyperon are expressed by the same independent amplitude and hence are proportional to one another, namely^{5/}

$$T_{9a} = \sqrt{2} T_{11a} = -T_{9b} = -\sqrt{2} T_{11b} \quad (44)$$

while the matrix elements of the rest processes are expressed by four independent amplitudes $T^{(0,0)}$, $T^{(1,0)}$, $T^{(0,1)}$, $T^{(2,0)}$ and satisfy the following relations^{12,16/}.

^{5/} We remind the readers that the first and the last equalities in (44) follow from the isospin invariance.

$$T_{1a,b} = T_{4a,b} \quad (45)$$

$$T_{5a,b} = T_{6a,b} \quad (46)$$

$$T_{7a,b} = T_{13a,b} \quad (47)$$

$$T_{8a,b} = T_{2a,b} \quad (48)$$

$$T_{1a,b} + T_{7a,b} = T_{3b,a} \quad (49)$$

We would like to point out that the first three relations here coincide with those in eq. (36), (37) and (35) respectively, and the consequences of the octet model differ very little from those of the G_2 model.

4. Relations between Cross Sections

From the relations (26)-(49) between matrix elements one can obtain a series of relations between cross sections^{14-16,18/}. We should like to make a remark with respect to these relations. As is well known, all the higher symmetries considered above are destroyed at low energies, and they can hold only at large values of s and t , or at least, when one of them is large. The relations written down above can be understood as those between invariant (scalar) amplitudes $A_{ja,b}(s,t)$ and $B_{ja,b}(s,t)$. In the following (when the elastic scattering at zero angle are to be considered) we shall sometimes assume that these relations are correct at $t=0$ and large s . We note that even in this case, due to the presence of a kinematic factor, the relations of those processes where the baryons in the initial state and in the final state have different mass, for instance (7a,b) and (13a,b), are not satisfied. Nevertheless the relations between cross sections of elastic scattering type processes, and in particular, relations between total cross sections are satisfied.

Now let us deduce some relations between cross sections of the processes under consideration. We shall consider first the consequences of isospin invariance. The relation (26) can be rewritten in the following form:

$$\begin{aligned} A_{1a}(s,t) - A_{1b}(s,t) &= \sqrt{2} A_{2b}(s,t) \\ B_{1a}(s,t) - B_{1b}(s,t) &= \sqrt{2} B_{2b}(s,t). \end{aligned} \quad (50)$$

As it was shown in^{23/}, in the general case, when both invariant amplitudes $A_{ja,b}(s,t)$ and $B_{ja,b}(s,t)$ contribute to the asymptote of cross sections^{6/}, if these amplitudes do not oscillate, but have a definite growth as^{6/} Other special cases can be considered in a similar manner. All conclusions made in the general case are also correct in these special cases.

$s \rightarrow \infty$ then from the crossing symmetry properties and by virtue of the Phragmen-Lindelöf theorem, the following relations between amplitudes of crossing processes (ja) and (jb) can be proved:

$$\begin{aligned} A_{jb}(s, t) &= e^{-\pi a(t)} A_{ja}^*(s, t) \\ B_{jb}(s, t) &= e^{-\pi a(t)} B_{ja}^*(s, t) \end{aligned} \quad s \rightarrow \infty, \quad (51)$$

where $a(t)$ is a real function of t .

By use of (51) relations (50) can be rewritten in the form:

$$\begin{aligned} A_{1a}(s, t) - e^{-\pi a(t)} A_{1a}^*(s, t) &= \sqrt{2} A_{2b}(s, t) \\ B_{1a}(s, t) - e^{-\pi a(t)} B_{1a}^*(s, t) &= \sqrt{2} B_{2b}(s, t) \end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [e^{i\pi a(t)/2} A_{2b}(s, t)] &= \operatorname{Re} [e^{i\pi a(t)/2} B_{2b}(s, t)] = 0 \\ \operatorname{Im} [e^{i\pi a(t)/2} A_{1a}(s, t)] &= \sqrt{1/2} \operatorname{Im} [e^{i\pi a(t)/2} A_{2b}(s, t)] \\ \operatorname{Im} [e^{i\pi a(t)/2} B_{1a}(s, t)] &= \sqrt{1/2} \operatorname{Im} [e^{i\pi a(t)/2} B_{2b}(s, t)]. \end{aligned} \quad (52)$$

From these relations and the expressions for the cross section (18) and (19) it is easy to deduce the following inequalities:

$$\frac{d\sigma_{1a,b}(s, t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{2a}(s, t)}{dt} > 0. \quad (53)$$

If $a(0) = 1$ then from relations (52) and the expressions for cross sections (23)-(25) follow the equality:

$$\left. \frac{d\sigma_{1a,b}(s, t)}{dt} \right|_{t=0} - \frac{1}{2} \left. \frac{d\sigma_{2a}(s, t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{16\pi} [\sigma_{1a,b}^{\text{tot}}(s)]^2. \quad (54)$$

Analogously, the equality

$$\frac{d\sigma_{13a,b}(s, t)}{dt} - \frac{1}{4} \frac{d\sigma_{14}(s, t)}{dt} > 0 \quad (55)$$

can be deduced from relation (31).

Now, let us consider the consequence of relation (24) under the assumption that $a(0) = 1$. From this relation and eq. (15), (23) and (51) it follows

$$\text{Im} H_{3a,b}(s) - \text{Im} H_{4c}(s) = \text{Im} H_{5a,b}(s)$$

and hence according to (24) and (25)

$$|\sigma_{3a,b}^{\text{tot}}(s) - \sigma_{4c}^{\text{tot}}(s)| \leq \sqrt{16\pi} \frac{d\sigma_{5a,b}(s,t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (56)$$

We have shown several asymptotic relations between cross sections in case of isospin invariance. It is worth while to point out that besides these relations there are some other well known equalities and inequalities between cross sections, which can be obtained from eq. (26)-(31) and are correct at all energies.

Let us go over to study the consequences of the unitary symmetry of the octet model. We shall assume R -reflection invariance. In this case relations (32)-(40) hold between amplitudes of the processes under consideration. Relations (35)-(37) give us three well known equalities between differential cross sections and an equality between total cross sections of π^{\pm} -proton and K^{\pm} -neutron interactions^[14,15,17]. By the procedure explained above and using relations (38) and (39) we can deduce the following inequalities:

$$\frac{d\sigma_{8a,b}(s,t)}{dt} - \frac{1}{4} \frac{d\sigma_{2b}(s,t)}{dt} \geq 0, \quad (57)$$

$$\frac{d\sigma_{9a,b}(s,t)}{dt} - \frac{3}{4} \frac{d\sigma_{2b}(s,t)}{dt} > 0. \quad (58)$$

Now let us consider the consequence of equality (36). According to (15) and (26), we have

$$T_{4c} = \frac{1}{2}(T_{1a} + T_{1b}), \quad (59)$$

$$T_{4d} = \frac{1}{2i}(T_{1a} - T_{1b}) = \frac{1}{\sqrt{2}i} T_{2b}, \quad (60)$$

then from eq. (60) the equalities

$$\frac{d\sigma_{4d}(s,t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_{2b}(s,t)}{dt} \quad (61)$$

follows immediately.

By use of eq. (51), (59) and (60) can be rewritten in the following form:

$$A_{4c}(s, t) = \frac{1}{2} [A_{1a}(s, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} A_{1a}^*(s, t)] \quad (62)$$

$$B_{4c}(s, t) = \frac{1}{2} [B_{1a}(s, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} B_{1a}^*(s, t)]$$

$$A_{4d}(s, t) = \frac{1}{2} [A_{1a}(s, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} A_{1a}^*(s, t)] \quad (63)$$

$$B_{4d}(s, t) = \frac{1}{2} [B_{1a}(s, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} B_{1a}^*(s, t)].$$

These relations show that

$$|A_{1a}(s, t)|^2 = |A_{4c}(s, t)|^2 + |A_{4d}(s, t)|^2,$$

$$|B_{1a}(s, t)|^2 = |B_{4c}(s, t)|^2 + |B_{4d}(s, t)|^2,$$

$$\operatorname{Re} A_{1a}(s, t) B_{1a}^*(s, t) = \operatorname{Re} A_{4c}(s, t) B_{4c}^*(s, t) + \operatorname{Re} A_{4d}(s, t) B_{4d}^*(s, t),$$

and hence

$$\frac{d\sigma_{1a,b}(s, t)}{dt} = \frac{d\sigma_{4c}(s, t)}{dt} + \frac{d\sigma_{4d}(s, t)}{dt} \quad (64)$$

Now consider relations (40). Using eq. (51), we can rewrite these relations in the following form:

$$A_{9a}(s, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} B_{9a}^*(s, t) = \sqrt{3} [A_{8a}(s, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} A_{8a}^*(s, t)], \quad (65)$$

$$B_{9a}(s, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} B_{9a}^*(s, t) = \sqrt{3} [B_{8a}(s, t) - e^{-i\pi\alpha(t)} B_{8a}^*(s, t)].$$

$$A_{9a}(s, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} A_{9a}^*(s, t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} [A_{8a}(s, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} A_{8a}^*(s, t)],$$

$$B_{9a}(s, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} B_{9a}^*(s, t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} [B_{8a}(s, t) + e^{-i\pi\alpha(t)} B_{8a}^*(s, t)]. \quad (66)$$

From these relations and the expressions for differential cross section (18) and (19) follows:

$$\frac{d\sigma_{g_{a,b}}(s,t)/dt}{d\sigma_{g_{a,b}}(s,t)/dt} = \frac{\beta + \frac{1}{\beta} \frac{G}{E}}{1 + \frac{G}{E}} \quad (67)$$

where G is obtained from $F_{g_{a,b}}(s,t)$ by the substitutions

$$\begin{aligned} |A_{g_{a,b}}(s,t)|^2 &\rightarrow [Im A_{g_{a,b}}(s,t) e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}}]^2, \\ |B_{g_{a,b}}(s,t)|^2 &\rightarrow [Im B_{g_{a,b}}(s,t) e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}}]^2, \\ Re A_{g_{a,b}}(s,t) B_{g_{a,b}}^*(s,t) &\rightarrow Im [A_{g_{a,b}}(s,t) e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}}] Im [B_{g_{a,b}}(s,t) e^{\frac{i\pi\alpha(t)}{2}}], \end{aligned}$$

while E is obtained from G by the substitution $Im \rightarrow Re$. The ratio G/E can vary from 0 to ∞ . Therefore from (68) follows:

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{d\sigma_{g_{a,b}}(s,t)/dt}{d\sigma_{g_{a,b}}(s,t)/dt} \leq \beta \quad (68)$$

In the case of the unitary symmetry of the triplet model the amplitudes of processes under consideration are related by eq. (41)-(43). Several identities between cross sections deduced from these relations were given in ^{13,17/}. We shall deduce some other relations between cross sections and polarizations. It is not difficult to see from eq. (15) and (42) that

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{4a}(s,t)}{dt} &= \frac{d\sigma_{4a'}(s,t)}{dt} = \frac{d\sigma_{4b'}(s,t)}{dt} \\ \sigma_{4a}^{tot}(s) &= \sigma_{4a'}^{tot}(s) = \sigma_{4b'}^{tot}(s) \\ \frac{d\sigma_{4d}(s,t)}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Furthermore, relations (42) and (51) show that the amplitudes of processes (4a') and (4b') have the following property:

$$\begin{aligned} A_{4a',b'}(s,t) &= e^{-i\pi\alpha(t)} A_{4a',b'}^*(s,t) \\ B_{4a',b'}(s,t) &= e^{-i\pi\alpha(t)} B_{4a',b'}^*(s,t) \end{aligned} \quad (70)$$

From eq. (70) and (21) it follows that the polarization of the recoil neutrons in processes (4a') and (4b') should tend to zero at $s \rightarrow \infty$ and fixed t , not depending on the relative behaviour of the invariant amplitudes. Moreover, relation (43) gives an equality between cross sections of processes (5c) and (9c):

$$\frac{d\sigma_{5c}(s,t)}{dt} = \frac{d\sigma_{9c}(s,t)}{dt} \quad (73)$$

Now let us consider the model with symmetry group G_2 . Relation (44) together with eq. (51) show that the polarization of the Λ -hyperon in processes (9a,c) and (11a,b) should tend to zero at $s \rightarrow \infty$ and fixed t , not depending on the relative behaviour of the invariant amplitudes. Such conclusion is also correct for processes (8a,c) because relation (45)-(47) coincide with (36),(37) and (35). Therefore, several relations in case of the octet model, for instance, (64) and (65) hold also in case of the model with the symmetry group G_2 .

At last let us deduce some common asymptotic properties of the meson-baryon scattering amplitudes for all the models under consideration. The asymptotic relations (51) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} A_{ja}(s,t) &= [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} A_{jb}(s,t)]^* \\ e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} B_{ja}(s,t) &= [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} B_{jb}(s,t)]^* \end{aligned} \quad (73)$$

$s \rightarrow \infty$

from which follows:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} A_{ja}(s,t)] &= \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} A_{jb}(s,t)]^* \\ \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} B_{ja}(s,t)] &= \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} B_{jb}(s,t)]^* \end{aligned} \quad (74)$$

In all the models with higher symmetries under consideration amplitudes $A_{ja,b}(s,t)$ and $B_{ja,b}(s,t)$ are expressed in terms of those between states corresponding to irreducible representations $A^{(\lambda_1, \lambda_2)}(s,t)$ and $B^{(\lambda_1, \lambda_2)}(s,t)$ where λ_1 and λ_2 characterize the representations. As an example, in the triplet model of Sakata from the expressions of $A_{ja,b}(s,t)$ and $B_{ja,b}(s,t)$ in terms of $A^{(\lambda_1, \lambda_2)}(s,t)$ and $B^{(\lambda_1, \lambda_2)}(s,t)$ and (74), it follows that

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} A^{(2,1)}(s,t)] &= \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} A^{(0,2)}(s,t)] = \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} A^{(1,0)}(s,t)] \\ \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} B^{(2,1)}(s,t)] &= \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} B^{(0,2)}(s,t)] = \operatorname{Re} [e^{i\frac{\pi\alpha(t)}{2}} B^{(1,0)}(s,t)] \end{aligned} \quad (75)$$

and therefore for all charge exchange processes, we have

$$\operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} A_{j a, b}(s, t) \right] = \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} B_{j a, b}(s, t) \right] = 0, \quad (76)$$

while for the elastic processes, we have

$$\operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} A_{1 a, b}(s, t) \right] = \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} A_{3 a, b}(s, t) \right] = \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} A_{4 a, b}(s, t) \right] \quad (77)$$

$$\operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} B_{1 a, b}(s, t) \right] = \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} B_{3 a, b}(s, t) \right] = \operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(t)}{2}} B_{4 a, b}(s, t) \right].$$

Properties (76) and (77) hold not only in the Sakata model, but also in other models under consideration. From (76) we may deduce that at $s \rightarrow \infty$ and fixed t , the polarization of the final baryon equals zero in the charge exchange processes, when the baryon in the initial state is unpolarized, if the strong interactions satisfy one of the above discussed symmetries.

Consider now the elastic forward scattering processes. Suppose $a(0) = 1$ ^{23/} then

$$\operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(0)}{2}} A_{j a, b}(s, 0) \right] = -\operatorname{Im} A_{j a, b}(s, 0)$$

$$\operatorname{Re} \left[e^{i \frac{\pi a(0)}{2}} B_{j a, b}(s, 0) \right] = -\operatorname{Im} B_{j a, b}(s, 0). \quad (78)$$

Eqs. (77) together with (78) show that the imaginary part of all the elastic forward scattering amplitudes equal one another^{7/}. From which follows the asymptotic equality of all the total meson-baryon interaction cross sections in the models under consideration:

$$\sigma^{\text{tot}}(\pi^{\pm} p) = \sigma^{\text{tot}}(K^{\pm} p) = \dots = \sigma^{\text{tot}}(\pi B). \quad (79)$$

Nevertheless, without subsidiary assumptions concerning the real part of amplitudes, no conclusion with respect to the differential cross sections can be made.

We would like to point out that we have written down only the independent relations between cross sections, from which some other dependent relations could be obtained. Moreover, we have not written down those obvious triangular inequalities, which could be obtained from relations of type (32), (38), (39) etc. between matrix elements.

^{7/} This result has been also obtained in a recent preprint of Ryder and Smith^{30/}.

5. Resume of Results

In conclusion we shall tabulate all relations obtained in /13-15,17/ and in the present paper. The well known isotopic relations, triangular inequalities and asymptotic identities between cross sections of crossing processes will not be included in this table. We shall denote, for example, the differential cross section of process $K^- \rightarrow p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$ at given t by $\sigma(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+)$, the polarization of the Σ^+ -hyperon in this process while the proton is unpolarized by $P(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+)$ and the total cross section of π^+ -meson-proton interaction by $\sigma^{tot}(\pi^+ p)$.

The models in which the given relations hold and whether the Phragmen-Lindelöf theorem (or the Pomeranchuk theorem) is used in the deduction of these relations are listed also in the table. We shall use the following notations in the table:

- I - isotopic invariance;
- O - the octet model with R - reflection invariance;
- T - the triplet model;
- G_2 - the model with symmetry group
- PH - L- the Phragmen-Lindelöf theorem.

The authors are indebted to N.N. Bogoliubov, M.A. Markov, V.I. Ogievetsky, Ya.A. Smorodinsky, I.T. Todorov and O.A. Khrustalev for interest in this work and valuable discussions.

References

1. Gell-Mann. Phys.Rev. 106, 1296 (1957).
2. I. Schwinger. Ann.Phys. 2, 407 (1957).
3. A. Pais. Phys.Rev. 110, 574, 1480 (1958).
4. J.J. Sakurai. Phys.Rev. 113, 1679 (1959).
5. J.J. Sakurai. Ann.Phys. 11, 1 (1960).
6. I.Yu. Kobsarev, L.B. Okun. Nucl.Phys. 35, 311 (1962).
7. S. Sakata. Progr. Theor.Phys. 16, 686 (1956).
8. M. Ikeda, S. Ogawa, Y. Ohnuki. Sppl.Progr.Theor.Phys. 19, 44 (1961).
9. A. Salam, J.C. Ward. Nuovo Cim. 20, 419 (1961).
10. M. Gell-Mann, Eightfold Way, Caltech.Reports CTSL-20 (1961); Phys.Rev. 125, 1067 (1962).
11. Y. Ne'eman. Nucl.Phys. 26, 222 (1961).
12. R.E. Behrends, A. Sirlin. Phys.Rev. 121, 324 (1961).
13. A.M. Baldin, A.A. Komar. Phys.Lett. 2, 47 (1962).
14. C.A. Levinson, H.J. Lipkin, S. Meshkov. Nuovo Cim. 23, 236 (1962).
15. C.A. Levinson, H.J. Lipkin, S. Meshkov. Phys.Lett. 1, 44 (1962).
16. P.G.O. Freund, H. Ruegg, D. Speiser, A. Morales. Nuovo Cim. 25, 307 (1962).
17. P. Tarjanne, NOTDITA publications No. 83 (1962).
18. V.M. Schechter. JETP 43, 205 (1962).
19. I.Yu. Pomeranchuk. JETP 34, 725 (1958).
20. D. Amati, J. Prentki and A. Stanghellini. Nuovo Cim. 26, 1003 (1962).
21. C.N. Yang. Journ.Math.Phys. 4, 52 (1963).
22. L. Van Hove. Phys.Lett. 5, 252 (1963).
23. A.A. Logunov, Nguyen Van Hieu, I.T. Todorov and O.A. Khrustalev. Asymptotic relations between cross sections in the local field theory. Preprint JINR P-1353 (1963). Phys.Lett. 7, 69 (1963).
24. S.M. Bilenki, Nguyen Van Hieu and R.M. Ryndin. On the asymptotic relations between polarizations in crossing reactions. Preprint JINR P-1404 (1963), JETF (to be publish).
25. Ya.A. Smorodinski. On the algebra of the unitary group of Gell-Mann, preprint JINR D-738 (1961).
26. R.E. Behrends, J. Dreitlein, C. Frondal and W. Lee. Rev.Mod.Phys. 34, 1 (1962).
27. S. Okubo. Theor.Phys. 27, 949 (1962).
28. J.J. de Swart. The octet model and its Clebsch-Gordan coefficients. Preprint CERN 6488/TH 345 (1963).
29. A.R. Edmonds. Proc.Roy.Soc. 268, 567 (1962).
30. L.H. Ryder and J. Smith. A generalization of the Pomeranchuk theorem by the Phragmen-Lindelof theorem and higher symmetries. Preprint (1963).

TABLE OF RELATIONS

Relations	Models	Reference
$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - \frac{1}{2}\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) \geq 0$	I, PH-L	
$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - \frac{1}{2}\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = \frac{1}{16\pi} [\sigma^{\text{tot}}(\pi^+ p)]^2$ $t=0$	I, PH-L	
$\sigma(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0) - \frac{1}{4}\sigma(K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-) \geq 0$	I, PH-L	
$\sigma^{\text{tot}}(K^+ p) \rightarrow \sigma^{\text{tot}}(K^0 p) \leq \sqrt{16\pi\sigma(Kp \rightarrow K^0 n)} _{t=0}$	I, PH-L	
$\sigma(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0) = \sigma(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-)$	0, G ₂	[15, 16, 18]
$\sigma(K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n) = \sigma(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+)$	0, G ₂	[15, 16, 18]
$\sigma(\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0) - \frac{1}{4}\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) \geq 0$	0, PH-L	
$\sigma(\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda) - \frac{1}{4}\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) \geq 0$	0, PH-L	
$\sigma(K_2^0 p \rightarrow K_1^0 p) = \frac{1}{2}\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)$	0, G ₂ , PH-L	
$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = \sigma(K_2^0 p \rightarrow K_2^0 p) + \sigma(K_2^0 p \rightarrow K_1^0 p)$	0, G ₂ , PH-L	
$\frac{1}{3} \leq \frac{\sigma(\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0)}{\sigma(\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda)} \leq 3$	P 0, PH-L	
$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \rightarrow \sigma(K^+ p \rightarrow K^+ p)$	T	[14, 18]
$\sigma(K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n) = \sigma(\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda)$	T	[14, 18]
$\sigma(K_2^0 p \rightarrow K_2^0 p) = \sigma(K^+ n \rightarrow K^+ n)$	T	
$\sigma(K_2^0 p \rightarrow K_1^0 p) = 0$	T	
$\sigma(K_2^0 p \rightarrow K^+ n) = \sigma(K_2^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda)$	T	
$\sigma^{\text{tot}}(K_2^0 p) = \sigma^{\text{tot}}(K^+ n)$	T	
$P(K^+ n \rightarrow K^+ n) = 0$	T, PH-L	
$P(m_1 B_2 \rightarrow m_2 B_2) = 0, \quad \begin{matrix} m_1 \neq m_2 \\ B_1 \neq B_2 \end{matrix}$	0, G ₂ , T, PH-L	
$\sigma^{\text{tot}}(\pi^\pm p) = \sigma^{\text{tot}}(K^\pm p) = \dots = \sigma^{\text{tot}}(mB)$	0, G, T, PH-L	

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3580. Тираж 400. Техн. редактор В. Р. Саранцева
1,2 уч.-изд. л. Февраль 1964 г.

13



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.К. Волков, Г.В. Ефимов

P-1638

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД
ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Дубна 1964

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release

2014/04/25 : CIA-RDP80-00247A002400260001-5

Аналитические свойства амплитуд во втором порядке
нелинейной теории поля.

Во втором порядке нелинейной квантовой теории скалярного поля доказана унитарность. Получена асимптотика мнимой части амплитуд при больших энергиях.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Volkov M.K., Efimov G.V.

P - 1638

Analytic Properties of the Amplitudes in the Second
Order of Non-Linear Field Theory.

The unitarity is proved in the second order of the non-linear quantum scalar field theory. The asymptotic behaviour of the imaginary part of the amplitudes at high energies is obtained.

М.К. Волков, Г.В. Ефимов

P-1638

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АМПЛИТУД
ВО ВТОРОМ ПОРЯДКЕ
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

1. Недавно^{/1,2,3/} была сделана попытка построить конечную локальную теорию скалярного поля путем введения существенно нелинейного лагранжиана взаимодействия, удовлетворяющего определенным требованиям. Исследуется класс лагранжианов взаимодействия $\mathcal{L}_I(\phi(x)) = -g U(\phi(x))$, где $U(a)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного a , обладает следующими свойствами:

1) $U(a)$ является аналитической функцией в комплексной плоскости a с конечным числом разрезов, причем особенности таковы, что интеграл от $|U(a)|^2$ существует по любой ограниченной области.

2) $U(a)$ действительна, не имеет особенностей на действительной оси и разлагается в ряд Тейлора в точке $a=0$

$$U(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} a^n.$$

3) $U(a)$ на бесконечности удовлетворяет условию

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{U(a)}{a^2} = 0.$$

В работе^{/1/} были получены амплитуды процессов во втором порядке теории возмущений по степеням лагранжиана взаимодействия в евклидовой области импульсных переменных, т.е. в той области, где они вещественны. В настоящей статье будут исследованы амплитуды в этом порядке теории возмущений в физической области импульсов. Нас будет интересовать выполнение унитарности и асимптотическое поведение мнимых частей амплитуд при больших значениях импульсов.

2. Покажем, что процедура аналитического продолжения в область физических значений импульса, указанная в^{/1/}, согласуется с условием унитарности. Амплитуды физических процессов во втором порядке определяются суммой интегралов вида^{/1/}

$$K_{m_1 m_2}(p^2) = 4\pi^2 \int_0^{\infty} d\beta \beta^2 \frac{J_1(\beta\sqrt{-p^2})}{\sqrt{-p^2}} F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)), \quad (1)$$

$$\Delta_2(\beta) = \frac{\mu K_1(\mu\beta)}{4\pi^2 \beta}.$$

Представление (1) справедливо в пространственно-подобной области значений импульсов ($p^2 < 0$). Напомним, что функции $F_{m_1 m_2}(\Lambda)$ имеют существенно особую

точку при $\Delta = 0$ и при вещественном положительном Δ разлагаются в асимптотический ряд

$$F_{m_1 m_2}(\Delta) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Delta^n, \quad (2)$$

где u_n — коэффициенты разложения $U(a)$ в ряд Тейлора.

Интеграл (1) является вещественным. Он без труда продолжается в область $0 < p^2 < (n_0 \mu)^2$

$$K_{m_1 m_2}(p^2) = 4\pi^2 \int_0^{\infty} d\beta \beta^2 \frac{I_1(\beta p)}{p} F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)) \quad (p = \sqrt{p^2}) \quad (3)$$

и остается вещественным в этой области.

В физической области (при $p^2 > (n_0 \mu)^2$) интеграл (3) начинает расходиться при больших значениях β , т.е. $K_{m_1 m_2}(p^2)$ как функция комплексного переменного p^2 имеет разрез с началом в точке $p^2 = (n_0 \mu)^2$. Продолжение в область

$$(n_0 \mu)^2 < p^2 < (N+1)^2 \mu^2 \quad (4)$$

осуществим следующим образом. Произведем в (3) тождественное преобразование:

$$K_{m_1 m_2}(p^2) = A_{m_1 m_2}(p^2) + B_{m_1 m_2}(p^2), \quad (5)$$

где

$$A_{m_1 m_2}(p^2) = \frac{4\pi^2}{p} \left\{ \int_0^a d\beta \beta^2 I_1(p\beta) F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)) + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \int_a^{\infty} d\beta \beta^2 I_1(p\beta) \left[F_{m_1 m_2}(\Delta_2(\beta)) - \sum_{n=n_0}^N \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Delta_2^n(\beta) \right] \right\}$$

$$B_{m_1 m_2}(p^2) = \frac{4\pi^2}{p} \int_a^{\infty} d\beta \beta^2 I_1(p\beta) \sum_{n=n_0}^N \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Delta_2^n(\beta). \quad (7)$$

Интеграл $A_{m_1 m_2}(p^2)$ легко продолжается в область (4) и остается вещественным в этой области.

Для продолжения интеграла $B_{m_1 m_2}(p^2)$ в область (4) повернем контур интегрирования вверх на угол $\frac{\pi}{2}$, так как необходимо помнить, что масса μ , входящая

в $\Delta(\mu\beta)$, имеет малую мнимую отрицательную добавку ($\mu = \mu - i\epsilon$). Имеем

$$B_{m_1 m_2}(p) = \frac{4\pi^2}{p} \int_a^{a+\infty} d\beta \beta^2 I_1(p\beta) \sum_{n=n_0}^N \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Delta_2^n(\beta). \quad (8)$$

В этом выражении уже можно считать p произвольной положительной величиной.

Мнимая часть $B_{m_1 m_2}(p^2)$, как показано в приложении, равна

$$\Im B_{m_1 m_2}(p^2) = 8\pi^4 \sum_{n=n_0}^N \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \cdot \frac{\Omega_n(p^2)}{(16\pi^3)^n}, \quad (9)$$

где

$$\Omega_n(p^2) = \int \frac{d\vec{k}_1}{\omega_1} \dots \int \frac{d\vec{k}_n}{\omega_n} \delta^{(4)}(p - k_1 - \dots - k_n), \quad (10)$$

$\Omega_n(p^2)$ - фазовый объем n частиц при энергии p . Окончательно мнимая часть $K_{m_1 m_2}(p^2)$ при произвольных $p^2 > 0$ дается выражением

$$\Im K_{m_1 m_2}(p^2) = 8\pi^4 \sum_{n=n_0}^{[p]} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \cdot \frac{\Omega_n(p^2)}{(16\pi^3)^n}, \quad (11)$$

где $[p]$ означает ближайшее целое число, меньшее p .

Доказательство унитарности проведем на примере амплитуды упругого рассеяния скалярных частиц.

Амплитуда упругого рассеяния скалярных частиц с точностью до второго порядка теории возмущений дается выражением

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{p_3}^+ a_{p_4}^+ S a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ | 0 \rangle &= [\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_4) + \\ &+ \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_4) \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_3)] + i \frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} T(s, t, u), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} T(s, t, u) &= -g u_4 + g^2 K_{40}(0) + 4g^2 K_{31}(\mu^2) + \\ &+ g^2 [K_{22}(s) + K_{22}(t) + K_{22}(u)] \end{aligned} \quad (13)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2, \quad \omega_1 = \sqrt{p_1^2 - \mu^2}.$$

Рассмотрим канал $s > 4\mu^2$, $t < 0$, $u < 0$. Мнимая часть амплитуды $T(s, t, u)$ равна согласно (11)

$$\Im T(s, t, u) = g^2 \Im K_{22}(s) = g^2 8\pi^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+2}}{n!} \cdot \frac{\Omega_n(s)}{(16\pi^3)^n}. \quad (14)$$

Из условия унитарности $SS^\dagger = 1$ легко получить, считая $S = 1 + iT$,

$$\frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(2\pi)^2 \sqrt{2\omega_1 2\omega_2 2\omega_3 2\omega_4}} 2\Im T(s, t, u) = \sum_n \langle 0 | a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger T | n \rangle \langle n | T^\dagger a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger | 0 \rangle. \quad (15)$$

Так как мы проверяем унитарность во втором порядке теории возмущений, то в правой части (15) необходимо оставить только матричные элементы первого порядка, т.е.

$$\langle 0 | a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger T | n \rangle = - \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{n!}} g \frac{u_{n+2}}{(2\pi)^{\frac{3(n+2)}{2}}} \cdot \frac{\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - k_1 - \dots - k_n)}{\sqrt{2\omega_3 2\omega_4 2\omega_{k_1} \dots 2\omega_{k_n}}}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), легко получить равенство (14). Таким образом унитарность доказана во втором порядке теории возмущений.

Аналогично можно проверить унитарность и для амплитуд других физических процессов.

3. Обратимся теперь к асимптотике мнимой части функции $K_{m_1 m_2}(p^2)$ при $p^2 \rightarrow +\infty$.
 Заменяем в (11) сумму интегралом:

$$\Im K_{m_1 m_2}(p^2) = 8\pi^4 \int_{n_0}^p dn \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{\Gamma(n+1)} \frac{\Omega_n(p^2)}{(16\pi^3)^n}. \quad (17)$$

При этом основной характер асимптотики не нарушится.

При $p^2 \rightarrow \infty$ в интеграле (17) основную роль будут играть коэффициенты u_{n+m} при больших значениях $(n+m)$. Найдем явное выражение для них. Если предположим, что функция взаимодействия $U(a)$, входящая в рассматриваемый класс лагранжианов, имеет в комплексной плоскости a ν разрезов с началами в точках a_1, \dots, a_ν , то можно показать, что

$$u_n \approx \text{Const} \frac{\Gamma(n)}{|a_0|^n} (1 + O(|\frac{a_j}{a_0}|^n)) \quad (n \gg 1), \quad (18)$$

где

$$|a_0| = \min \{ |a_j| \}; \quad 1 \leq j \leq \nu.$$

Итак,

$$\Im K_{m_1 m_2}(p^2) \approx \text{Const} \int_0^p \Gamma(n) \frac{\Omega_n(p^2)}{a^n} dn, \quad (19)$$

где

$$a = 16\pi^2 |\alpha_0|^2.$$

Фазовый объем $\Omega_n(p^2)$ как функция n при фиксированном p^2 имеет примерно в середине интервала максимум и спадает к концам интервала интегрирования. Так как $\Gamma(n)$ очень быстро растет к концу интервала, а $\Omega_n(p^2)$ плавно изменяется, то вся подинтегральная функция имеет резкий максимум вблизи конца интервала. Вычислим интеграл (19) по методу перевала, воспользовавшись асимптотическим представлением фазового объема при $n \lesssim p$ (см., например, ^{/4/})

$$\Omega_n(p^2) = \frac{(2\pi)^2 \frac{1}{2}(n-1)}{\Gamma(\frac{3}{2}(n-1)) n^{3/2}} (p-n)^{\frac{3n-1}{2}} \quad (p-n \ll n). \quad (20)$$

Точка перевала может быть найдена обычным способом

$$\bar{n} = \frac{p}{\mu} \left[1 - \frac{3}{2 \ln \frac{p}{\mu}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln \frac{p}{\mu}}\right) \right) \right] \quad (\ln \frac{p}{\mu} \gg 1), \quad (21)$$

и окончательно

$$\Im K_{m_1 m_2}(p^2) \approx \exp\left\{ \frac{p}{\mu} \ln \frac{p}{\mu} \right\} f(p), \quad (22)$$

где $f(p)$ — некоторая функция более слабого роста, чем $\exp\left\{ \frac{p}{\mu} \ln \frac{p}{\mu} \right\}$.

Обратим внимание на следующее:

- а) Главный асимптотический член в (22) одинаков для любых лагранжианов в рассматриваемом классе функций взаимодействия $U(a)$.
- б) Главный асимптотический член в (22) не зависит от рассматриваемого физического процесса.
- в) Асимптотику мнимой части определяет масса частицы, а не новые параметры размерности длины, входящие в лагранжиан взаимодействия.

4. Асимптотику функции $K_{m_1 m_2}(p^2)$ при больших пространственно-подобных значениях импульса $p^2 \rightarrow -\infty$ легко можно получить из (1):

$$|K_{m_1 m_2}(p^2)| \leq \frac{\text{Const}}{|p^2|} \quad (-p^2 \gg \mu^2, \text{Const} > 0). \quad (23)$$

Таким образом, $K_{m_1 m_2}(p^2)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного p^2 , имеет существенно особую точку при $p^2 = \infty$.

5. В заключение обсудим поведение амплитуд при больших значениях импульса в физической области. Полученный рост (22) противоестественен. По всей видимости, он будет компенсироваться при учете высших приближений теории возмущений, если унитарность выполняется в каждом ее порядке. Так что только изучение высших приближений теории возмущений даст ответ на этот вопрос.

С другой стороны, в последнее время делаются попытки найти ограничения на рост амплитуд физических процессов, следующие из требования причинности. Так было получено /5/, что рост амплитуды упругого рассеяния мезона на нуклоне должен быть меньше экспоненциального по энергии в Брейтовской системе координат (напомним, что в этой системе $E \sim s$). Если этот вывод верен, то поведение амплитуд в рассматриваемой нелинейной теории согласуется с требованием причинности по крайней мере во втором порядке теории возмущений, так как из (22) следует

$$\text{Im } T(s, t, u) < e^{-s}.$$

В заключение авторы выражают благодарность Л.Г. Заставенко за обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Будем искать мнимую часть интеграла

$$B_n(p^2) = \frac{4\pi^2}{p} \int_a^{a+\infty} d\beta \beta^2 I_1(\beta p) \left(\frac{\mu K_1(\mu\beta)}{4\pi^2 \beta} \right)^n, \quad (\text{A.1})$$

где $p > p\mu$.

Произведем замену $\beta = e^{\frac{i\pi}{2}x}$ и воспользуемся

$$K_1(e^{\frac{i\pi}{2}\mu x}) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)}(\mu x); \quad I_1(e^{\frac{i\pi}{2}px}) = i J_1(px),$$

тогда

$$B_n(p^2) = \frac{4\pi^2}{p - i0} \int dx x^2 J_1(xp) \left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi^2 x} \right)^n. \quad (\text{A.2})$$

Воспользовавшись равенством $J_1(x) = \frac{1}{2} [H_1^{(2)}(x) + H_1^{(1)}(x)]$, представим $B_n(p^2)$ в виде

$$B_n(p^2) = C_n(p^2) + D_n(p^2), \quad (\text{A.3})$$

где

$$C_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p^{-ia}} \int_{-ia}^{ia+\infty} dx x^2 H_1^{(2)}(xp) \left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x} \right)^n. \quad (A.4)$$

$$D_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p^{-ia}} \int_{-ia}^{ia+\infty} dx x^2 H_1^{(1)}(xp) \left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x} \right)^n. \quad (A.5)$$

В (A.4) подынтегральная функция аналитична и экспоненциально убывает в нижней полуплоскости, поэтому контур интегрирования может быть повернут от луча $(-ia, -ia + \infty)$ к $(-ia, -i\infty)$. Получим (делая подстановку $x = e^{-\frac{\pi}{2}t} y$)

$$C_n(p^2) = -\frac{4\pi}{p} i \int_a^\infty dy y^2 K_1(y\rho) \left(\frac{\mu K_1(\mu y)}{4\pi^2 y} \right)^n, \quad (A.6)$$

Рассмотрим $D_n(p^2)$. Представим его в виде суммы

$$D_n(p^2) = E_n(p^2) + F_n(p^2), \quad (A.7)$$

где

$$E_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p^{-ia-\infty}} \int_{-ia-\infty}^{ia+\infty} dx x^2 H_1^{(1)}(xp) \left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x} \right)^n, \quad (A.8)$$

$$F_n(p^2) = \frac{2\pi^2}{p^{-ia}} \int_{-ia}^{-ia-\infty} dx x^2 H_1^{(1)}(xp) \left(-\frac{\mu H_1^{(2)}(\mu x)}{8\pi i x} \right)^n. \quad (A.9)$$

Как показано в ^{4/}, функция $E_n(p^2)$ при $p^2 > (n\mu)^2$ равна

$$E_n(p^2) = \frac{\pi i}{(16\pi^2)^{n-1}} \Omega_n(p^2), \quad (A.10)$$

где $\Omega(p)$ - фазовый объем n частиц при энергии p .

В интеграле (A.9) для $F(p^2)$ сделаем замену $x = e^{-\frac{\pi}{2}t} y$ и подстановку

$$H_1^{(1)}\left(e^{-\frac{\pi}{2}t} y\rho\right) = -2i I_1(y\rho) + \frac{2}{\pi} K_1(y\rho); \quad H_1^{(2)}\left(e^{-\frac{\pi}{2}t} \mu y\right) = -\frac{2}{\pi} K_1(\mu y),$$

получим

$$F_n(p^2) = \frac{4\pi^2}{p} \int_a^{\infty} dy y^2 I_1(y) \left(\frac{\mu K_1(\mu y)}{8\pi^2 y} \right)^n + i \frac{4\pi}{p} \int_a^{\infty} dy y^2 K_1(py) \left(\frac{\mu K_1(\mu y)}{4\pi^2 y} \right)^n \quad (\text{A.11})$$

Легко заметить, что первый интеграл в правой части (A.11) равен $B_n^*(p^2)$, а второй равен $-C_n(p^2)$.

Итак, мы получим

$$B_n(p^2) = \frac{\pi i}{(16\pi^2)^{n-1}} \Omega_n(p^2) + B_n^*(p^2) \quad (\text{A.12})$$

и

$$\Im B_n(p^2) = \frac{\pi}{2(16\pi^2)^{n-1}} \Omega_n(p^2), \quad (\text{A.13})$$

откуда немедленно следует (9).

Л и т е р а т у р а

1. Г. В. Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963).
2. G.V. Efimov. Nuovo Cim. (in print).
3. E.S. Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
4. В. А. Колкунов. ЖЭТФ, 43, 1448 (1962).
5. Н. Н. Мейман. Сборник "Вопросы физики элементарных частиц", Изд. АН Арм. ССР, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3711. Тираж 400. Апрель 0,6 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. 1964 г.

14



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

G.N.Flerov, V.A.Karnaukhov, G.M.Ter-Akopyan,
L.A.Petrov, V.G.Subbotin

D-1570

ON THE PROTON DECAY OF RADIOACTIVE NUCLEI

Дубна 1964

Д-1570

Флеров Г.Н., Карнаухов В.А., Тер-Акопьян Г.М.,
Петров Л.А., Субботин В.Г.

О ПРОТОННОМ РАСПАДЕ РАДИОАКТИВНЫХ
ЯДЕР

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Д-1570

Flerov G.N., Karnaukhov V.A., Ter-Akopian G.M.,
Petrov L.A., Subbotin V.G.

ON THE PROTON DECAY OF RADIOACTIVE NUCLEI.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

G.N.Flerov, V.A.Karnaukhov, G.M.Ter-Akopyan,
L.A.Petrov, V.G.Subbotin

D-1570

ON THE PROTON DECAY OF RADIOACTIVE NUCLEI

Submitted to Nuclear Physics

Дубна 1964

Abstract

Experiments on radioactive nuclei proton decay are described. The data on two proton emitters detected at the exposure of Ni to Ne²⁰ and O¹⁶ beams are listed. The first emitter (one of Ne or Mg light isotopes) has its lifetime of $(85 \pm 15) 10^{-3}$ sec. and emits protons with an energy of (5 ± 0.2) MeV, while the second one having a (23 ± 4) - sec. lifetime emits protons of an energy of (2.5 ± 0.2) MeV. A series of experiments carried out permits us to conclude that the second emitter is one of Br or Kr light isotopes, i.e., in this case subbarrier proton emission takes place (the Coulomb barrier height is about 8.5 MeV).

It is most probable that protons are emitted from a daughter nucleus after positron transition which the half life under measurements is associated with. The process of proton emission with $E_p = 5$ MeV is similar to that for delayed neutron emission. The mechanism of subbarrier proton emission with $E_p = 2.5$ MeV is analogous to that for long-range alpha emission by heavy nuclei. The possibility of configuration isomer proton decay is also considered, which is not excluded in the case of a 2.5 - MeV proton emitter.

Introduction

It is not for the first time that the literature considers the probability for the new type radioactive transformation of nuclei-proton decay. More than ten years ago the first attempts were undertaken by Alvarez, Birge et al, to detect proton emitters^{/1-4/}. At the same time A.B.Migdal and B.T.Geilikman and B.S.Dzhelepov^{/5/}, presented a theoretical consideration of probable proton decay mechanisms and certain ways of proton-active nuclei synthesis. It turned out to be clear that radioactive nuclei with a rather large proton excess would undergo the proton decay of either type. Further papers^{/6-10/} made the proposed p -decay characteristics more precise and considered the region of this phenomenon extension and the ways to obtain necessary isotopes, in more detail.

An energetic potentiality of proton decay appears as a result of a proton binding energy reducing with the decrease of the number of neutrons in the nucleus. This change in the proton binding energy is stimulated by the dependence of a nuclear force magnitude on an isotopic number, and by the increase of the Coulomb repulsion. Some mechanisms for proton decay have been considered. First, the synthesis is possible of nuclei with a negative proton binding energy. These nuclei are unstable against proton emission from the ground state. In this case the p -decay picture will be analogous to that for α -decay from the nuclear ground state. Second, a two-stage mechanism is possible for proton decay: the first stage being a high-energy positron decay, and the second the emission of a proton from the excited (but in some cases from the ground) state of a daughter nucleus.

If a proton energy is lower than a coulomb barrier height, the proton will go abroad the nucleus penetrating through the barrier according to quantum mechanical laws. In this case the decay picture is similar to the long-range alpha emission. If a nucleus emits a proton of an energy exceeding the barrier, one can speak of the analogy with "delayed" neutrons.

We believe that the third mechanism can be possible for proton decay, namely, an isomeric one (see the discussion).

The z -even proton-excess isotopes are most probable to undergo the decay of another type, i.e., a two-proton one. The existence of this kind of decay can be supposed to be a result of the pair nucleon effect in the nucleus. In paper^{/11/} Ya.Zel'dovich pointed out, for the first time, to the probability for O^{12} , Ne^{16} and Mg^{19} unstability against the emission of two protons at once. V.I.Goldansky^{/8,12/} analyzed the probability for two-proton decay and considered the main features of this phenomenon and the ways to detect it.

To synthesize the proton-excess isotopes, great advantages of nuclear heavy-ion induced reactions can be employed. Some years ago we started the experiments studying the radioactive products of the reactions induced by Ne^{20} accelerated ions ($E = 130 \text{ MeV}$) in Ni. According to the calculations, there is a hope that the isotopes close to the boundary of nuclei instability would be detected among these products. A special instrumentation was employed for this purpose, which included a telescope consisting of two proportional counters (for the energy and specific ionization measurements). When detecting the radioactive decay, this apparatus could establish uniquely a radiation type.

In summer 1962 some results were obtained which permitted us to conclude that the reaction $\text{Ni} + \text{Ne}$ gives rise to radioactive isotopes undergoing proton decay. The lifetime of these proton emitters turned out to be between 0.1 sec. and 5 min.^{/13/}. In further experiments the half-lives were determined as 0.5 - 1 sec. and longer^{/14/}.

These results were confirmed and made more precise in our next work^{/15/}. The "long-lived" proton activity appeared to have a half-life about 25 sec. and a proton energy between 2.5 and 3 MeV. The data on the range and formation cross-section measurements for this emitter have indicated that the latter results from the compound nucleus decay in the reaction $\text{Ni} + \text{Ni}^{20}$, i.e., in this case we deal with an emitter of deeply sub-barrier protons. In addition, the proton activity with an energy about 5 MeV and a half-life of 0.1 sec. has been detected. This emitter is determined to be close to Ne^{20} by mass. In both cases proton emission seems to follow β^+ -decay.

In 1963 a group of Canadian physicists reported the detection of a "delayed" proton radioactivity^{/16/}. The experiments were carried out with a 97-MeV proton beam. A simple detecting apparatus was employed, the only component being a surface-barrier detector to measure the particle energy. In order to determine a type of particles, their slowing in Al was studied. A high background level did not permit the Canadian physicists to work in the region of energies lower than 2.5 MeV, and in the region of 3.5 MeV the background was almost equal to the effect. Nevertheless, they were lucky enough to detect some emitters.

Most thorough investigations have been carried out for Si^{25} ($T_{1/2} = 0.3^{+0.2}_{-0.1}$ sec.) though less detailed data are available on other proton emitters (Mg^{21} , Ne^{17} and O^{13}). However, we think that the authors overestimate the accuracy of the proton energy determination, the decay schemes they give can be rather considered as tentative ones.

Yale University physicists perform the experiments on the search for a proton emitter in heavy-ion-induced reactions. A. Preis^{/17/} reports the observation of

4.0-5.5 MeV "delayed" protons generated from the decay of Ne^{17} , a half-life being about 0.7 sec. R. Fink et al (Argonne National Laboratory) investigated this nucleus, too, in experiments with Li beams^{18/}.

The present paper is devoted to a more detailed account of the results listed in paper^{16/}. Besides, it includes some new information on the proton emitter observed.

Experimental Methods

The experiments were carried out with an internal beam from the JINR heavy-ion cyclotron. When developing the methods, we understood the need in such an apparatus which could permit us to detect protons with an energy of the order of 1 MeV against a more intensive (about 10^6 times) background of β , γ -radiation. The particle detector should satisfy the requirements as follows: it should possess the spectrometric properties permitting us to determine a particle type, operate in the conditions of a strong magnetic field and at high levels of electromagnetic disturbances. Below the description of these methods is given.

1. The Probe

Figure 1 gives the scheme of the device placed between the cyclotron dees. The accelerated ion beam (1) struck the target (2) and the reaction products were emitted from the target and stopped in the aluminium catcher foil which had been manufactured in the form of a rotating disk 8 cm in diameter. This kind of a catcher enabled us to transfer radioactive nuclei to the charged particle spectrometer.

The spectrometer consisted of a proportional counter 8 mm thick (6) and two high resistance silicon surface-barrier detectors (7) placed behind it. The use of such a "telescope" made it possible to measure simultaneously the particle specific ionization and energy. The comparison of these values permits one to determine a particle type and to separate reliably protons from electrons and alphas. (When preparing the experiments, we were afraid of a background appearing due to the generation of unknown α -active nuclei with a mean atomic weight).

The telescope input window was either an Al 8μ thick foil, or a 5μ organic film covered with evaporated copper ($200\mu \text{ g/cm}^2$). The volume of the proportional counter was shielded from surface barrier detectors by an organic film 3μ thick covered with (evaporated) copper, too. The counter was filled with a mixture of Ar (95%) and CH_4 (5%) at a 200 mm Hg pressure.

In the conditions of good geometry, outside the magnetic field, the proportional

counter had a resolution about 3% for 5.5-MeV alphas, while the resolution for the detector was 1-1.5%. However, to enhance the efficiency, the telescope input window was made larger (2 x 5 cm). At the same time two silicon detectors with sensitive surfaces were employed, 1.5-2 cm² in size each. It leads to a large angular spread of detected particles and to a lower resolution. In the case of the gaseous counter, an additional amplitude spread appeared owing to the effect of the cyclotron magnetic field.

Figure 2 presents the spectra for calibrating alphas obtained under operating conditions.

The disk rotation was performed by means of an motor using the cyclotron magnetic field. In a number of experiments a motor with a coil "polarized" in the cyclotron magnetic field was used. Continuous rotation of the catcher was changed for a fast turn by 180° when a corresponding pulse of current was sent. Under the mentioned operating conditions the reaction products were collected in some part of the catcher for a certain period of time, then rapidly transferred to the spectrometer, the detection efficiency being some times higher than that for continuous rotation.

In order to measure the particle ranges, Al absorbers, fastened on a movable remote-controlled frame (8), were installed in front of the telescope input window. An α -source was mounted on the same frame. The beam collector (4) connected to a current measuring device permitted us to follow the beam intensity during the bombardment. An ion energy was measured with the help of a silicon detector (5), in which a part of the beam, after scattering in a gold foil, passed through a special collimator.

The device presented in Figure 1 was placed into a copper water-cooled jacket, the input window of which was an Al 8 μ -thick foil. To cool the target, the disk and the motor, the jacket was filled with helium at the pressure of 40 mm Hg.

II. Electronics

Electronics were used to permit us determining a decay type, to make a pulse amplitude analysis and to measure the half life for a given energy group.

Figure 3 shows an apparatus block-diagram. The pulses from the gaseous counter and the silicon detectors were amplified by means of some cascode pre-amplifiers, which had a bulb placed into the magnetic field in the nearest neighbourhood of the counter, each. The rest of the circuit was situated outside the magnetic field. The first bulb was the right construction triode with electrode geometry providing a normal bulb operation in a strong magnetic field.

After passing through the pre-amplifier the pulse from the gaseous counter was amplified additionally, then time-standardized ($1.6 \cdot 10^{-6}$ sec.) and received by the discriminator input. Then the pulse, as an allowing one, was transferred from the integral discriminator output, via the lock-out circuit, to the linear gate. The gate input received the amplified and time-standardized ($4 \cdot 10^{-6}$ sec.) pulse from the silicon detectors. From the gate output the signal was sent to two amplitude analyzers, one of which was controlled by the pulse from the differential output of the proportional counter discriminator. At the same time two pulse spectra, were recorded from semiconducting counters. The first spectrum presented all the particles which left > 13 kev in the gaseous counter. The second spectrum included only the particles for which the gaseous counter pulse corresponded to an energy loss from 13 to 45 kev. This range refers to the protons of a 1-5-MeV energy. The calibrating 5.5-MeV alphas left about 200 kev in the gaseous counter. It was established that only 1.5% of the total alpha intensity was detected in the "proton" range of specific ionizations^{x)}. Thus, the first spectrum gave the whole picture of all heavy particle energies resulting from the radioactive decay, while the second spectrum was attributed mostly to protons. The comparison of the both spectra enabled us to select protons and to determine an alpha-emission intensity. The measurements were performed in the intervals between h.f. voltage modulation pulses on the dees (the lock-out circuit).

Figure 3 shows the part of the circuit meant for a time analysis. The time analyzer consisted of the generator of linearly growing voltage, a gate, and the amplitude analyzer AI-100. A linearly growing voltage was admitted to the closed gate which was then open about 4μ sec. by the analyzed signal having passed through the differential discriminator. Thus, the pulse magnitude at the gate output was proportional to the time which had passed from the starting up of the "saw" up to the moment the pulse arrived from the detector. The starting moment coincided with a cyclotron switch off; when a h.f. voltage was applied, the circuit was blocked. The voltage modulation frequency on the dees was chosen to be such that the cyclotron "Silence" time was some times the half life under measurement.

Experimental Results

In investigating radioactive reaction products, the emission of heavy singly

x) The entrance of alphas into the proton specific ionization range is associated with the gaseous counter pulse spectrum having a "tail" in the region of small amplitudes due to the effect of the magnetic field on electron collection.

charged particles was uniquely ascertained. Simultaneous measurements of the energy of these particles, their specific ionization and slowing in a substance have lead to the conclusion about them to be protons. Two groups of 5-MeV and 2.5-MeV protons were observed most distinct.

1. Proton Group at 5.0 MeV.

a) A nickel target 10 μ thick was bombarded with 140-MeV Ne^{20} ions. As a catcher, an aluminium 50 μ foil was used. Such a thickness is sufficient to absorb most of the long-range products of reactions. The disk had some apertures through which a certain part of the beam reached the current collector. The depletion layer of the silicon detectors was about 200 μ thick. In front of the telescope input window an Al 15 μ absorber was installed. In order to determine the background of the β and γ radiation, the experiments were carried out with an Al 200 μ thick absorber placed in front of the telescope. (In the experiments with the disk stopped, the background was also determined which would occur due to the presence of a residual ion beam in the cyclotron chamber in the intervals between voltage pulses on the cyclotron dees. This background was practically absent).

b) Fig.4 shows one of the spectra obtained. Though the spectrum was attributed to the pulses of the particles with > 13 kev ionization in the gaseous counter, the background of the β and γ radiation turned out to be rather large up to the 30th channel. This is due to the fact that the electrons move by spiral trajectories in the magnetic field and can lose a considerable amount of energy in the gaseous counter.

In the region of the 64th channel, the spectrum has its maximum distinctly seen, which belongs to the protons of an energy 5.0 ± 0.2 MeV ^{x)}.

The conclusion that these particles are protons is drawn from the following.

The table I indicates that 92% of the particles of the mentioned group lose from 13 to 45 kev in the gaseous counter. An average energy loss for the protons with $E = 5$ MeV by estimation (taking into account the geometry factor) should be about 25 kev.

The most graphic results were obtained from the experiments in which the slowing of particles in a substance was determined. One of the spectra in Fig. 5 referred to the experiment with the gaseous counter alone between the semiconducting detectors and the disk (this being equivalent to Al 20 μ thick): Another spectrum was obtained for the case when a 30 μ absorber was placed in front

x) In determining the proton energy the "driving in" of the emitter into the catcher and the proton energy loss before getting into the silicon detector were taken into account.

of the telescope input window. The peak replacement corresponds to the calculated slowing of 5-MeV protons. Note that Al 50μ thick absorbs completely alphas with an energy of ≤ 8.4 MeV.

Fig. 6 presents one of the curves for the decay of the 5-MeV proton emitter. The half-life was found to be equal to (0.085 ± 0.015) sec. Apparently, in the spectrum there is a less intensive group of protons having an energy about 5.6 MeV. Then, attention was centered upon the group with an energy about 5 MeV.

A number of experiments was performed in order to identify this proton emitter. The natural way chosen was to try to determine the type of the isotope generation reaction. The reactions between complex nuclei are divided into two classes. In surface collisions of nuclei, the process of nucleon transfer takes place, and some products are generated close to the projectile by mass. Their ranges are equal to tens of microns in Al, and the yield depends relatively weakly upon the kind of a target. The other class includes the reactions accompanied by the formation of a compound nucleus. The range of such reaction products is a few microns.

Therefore, the range of the 5-MeV proton emitter was estimated and found considerably exceeding 9μ Al: the replacement of the 50μ catcher by the 9.3μ aluminium disk lead to an effect 5 - 10 times less.

In the case of tantalum, copper and aluminium targets bombarded, the proton activity of an energy about 5 MeV was detected. Its yield was 2,3 and 5 times less, respectively, as compared to that for nickel. The cross-section for the investigated isotope production in the reaction $Ni + Ne^{20}$ is some tenths of a microbarn for a neon energy about 120 MeV. One can be certain to state that this isotope is generated from Ne^{20} due to a nucleon transfer reaction. Its generation due to the bombardment of targets in a wide interval of atomic numbers and a long range of this nucleus speak well for this conclusion. These two facts are typical characteristics of transfer reaction products⁽¹⁹⁾. The analysis of the properties of this reaction products leads to the most probable conclusion that protons with an energy about 5 MeV are emitted in the decay of one of neon or magnesium light isotopes (Ne^{17} , Mg^{20-21}).

2. Proton Energy Group at 2.5 MeV

a) A series of experiments was carried out to investigate the decay of short-range reaction products. In these experiments a Ni 2μ target and an Al 9.3μ thick disk were employed. The first experiments indicated that the radiation spectrum had no protons of an energy exceeding 3.5 MeV, therefore, the thickness of the depletion depth of detectors was decreased up to 80μ . This decreased essentially the β and γ background.

Fig. 7. gives an pulse spectrum corresponding to the particles leaving 13-45 kev in the gaseous counter. This spectrum was obtained by summarizing the results of six independent measurements being accompanied by the background measurement, each. In Fig. 7 one can see a distinct group with its peak in the 32 nd channel.

The results of the experiments on the specific ionization and slowing of these particles in Al indicate them to be protons. Really, it was determined that the energy loss of these particles in the gaseous counter is 25-60 kev., what coincides with the calculated value for 2.5-3- MeV protons. The data in Table 1 agree with this, and it follows that 70% of this group particles leave 13-45 kev in the gaseous counter.

Fig. 8 illustrates the experiments on the determination of the slowing of the particles under investigation. Here you can see the energy spectra of these particles having passed through a material equivalent to Al 13 μ and 28 μ thick. In progressing from one absorber to another the peak is replaced according to that expected for protons.

The spectrum maximum (Fig. 7) refers to (2.5 ± 0.2) MeV. (the error is mainly due to an inaccuracy in taking into account the proton slowing before entering the telescope). The spectrum presents also some more energetic protons (up to 3.3 MeV). To the left of the maximum there is another proton group, but this part of the spectrum has not been investigated yet owing to a high background.

With the help of a time-amplitude converter, a half-life for the proton group with its maximum at 2.5 MeV has been measured. One of the decay curves is shown in Fig. 9, the emitter half-life being equal to (23 ± 4) sec.

b) A number of experiments was performed, in order to identify the obtained isotope.

To estimate the range of the nuclei, a Ni 2 μ thick target has been bombarded with 105 - MeV Ne²⁰ ions: an Al 9.3 μ absorber was placed between the target and the rotating disk. Mounting such an absorber has practically taken off the effect: the intensity of the group in question has become no less than 20 times lower. This means that the range of 2.5 MeV proton emitters is shorter than 9 μ Al.

Further, Ni and Fe⁵⁴ (a separated isotope target, 1.6 mg/cm² on an Al 6 μ backing) were bombarded with different ions. In the case of Ni bombarded with 70-100-MeV O¹⁶ ions, a proton group was also observed with its maximum at 2.5 MeV. The decay curve of this activity is given in Fig. 10. Within the errors the half life coincides with a value (23 ± 4) sec, obtained from the analysis of the

curve in Fig.9. This gives the basis for thinking that the same proton emitter is generated following the reactions $Ni + Ne^{20}$ and $Ni + O^{16}$.

The proton activity of 2.5 MeV has not been detected in the bombardment of Ni 2 μ thick with 65- MeV B^{11} ions and of Fe^{54} with O^{16} ions. Table II demonstrated the relative yield of the proton group under investigation in different reactions. The absolute cross section for the proton emitter generation from the reaction $Ni + Ne^{20}$ is of the order of a microbarn, which does not depend very much on the energy in the region of 100-140 MeV^{15/}.

Table II

Reaction	$Ni + Ne^{20}$	$Ni + O^{16}$	$Ni + B^{11}$	$Fe^{54} + O^{16}$
Relative yield of the emitter with $E = 2.5$ MeV and $T_{1/2} = 23$ sec.	100	30	< 3	< 1

A short range of the proton emitter indicates that its mass number is equal to some tens. This conclusion is independent of the assumptions concerning the reaction mechanism^{20/}. The production of this proton-rich isotope may result from the decay of an excited compound nucleus generated from the fusion of a target nucleus and a projectile. While bombarding Ni with Ne^{20} and O^{16} ions, we observed the effect which could not be displayed in the reaction $Fe^{54} + O^{16}$. This result can be explained under the assumption that the atomic number of the 23-sec. proton emitter is 35-36 (Br, Kr) and its mass 70-72. The excitation function for the nucleus formation in the reaction $Ni + Ne^{20}$ is consistent with this assumption. The question can arise whether this proton emitter is not produced from Ni owing to transfer reactions. This kind of supposition is possible, though it seems less probable. Indeed, in this case one should expect the effect detection in the bombardment of Ni with boron and of Fe^{54} with oxygen.

Discussion of Results

1. Table III shows the main characteristics of the proton emitters observed^{x)}. The Coulomb barriers (V_p) for protons are listed here as well.

^{x)} The table is not including the proton emitter with $T_{1/2} = 0.5-1$ sec. observed in our work^{14/}. It is produced from Ne^{20} due to transfer reactions. The present paper does not study this emitter, which makes, apparently, a contribution to the region $E_p \leq 4.5$ MeV.

Table III

Isotope	(Br, Kr) ⁷⁰⁻⁷²	Ne ¹⁷ , Mg ²⁰⁻²¹
E_p MeV	$2,5 \pm 0,2$	$5,0 \pm 0,2$
$T_{1/2}$ sec.	$2 \cdot 3 \pm 4$	$0,085 \pm 0,015$
V_p MeV	8,5	4
τ_p / τ_0	$> 10^4$	≈ 1

The last line of the table includes the τ_p -calculated lifetime of the nucleus emitting a proton with a certain energy (with relation to the "nuclear time"). In the calculations the Coulomb barrier alone was taken into account, therefore, the values listed in the table should be considered as lower ones. If the angular momentum removed by the proton l is not a zero, τ_p will be more. This value will grow tens of times for $l = 2$ already.

It is clear that a proton emission delay cannot be due to the Coulomb barrier. It is most probable to be associated with positron decay. The nuclear reaction results in the formation of an isotope undergoing positron decay at a high energy. The daughter nucleus being not very stable against proton emission, some excitation is sufficient after β^+ -transition for the nucleus to emit a proton. In the case of the first (Br, Kr) isotope decay the proton goes abroad the nucleus through the tunnel mechanism at a 0,3 level from the Coulomb barrier, the decay picture being analogous to the process of the long-range alpha emission by heavy nuclei. The protons with an energy about 5 MeV pass above the barrier; this being completely analogous to "delayed" neutrons.

The described type of proton decay should be very wide-spread phenomenon near the nuclei proton instability boundary ($B_p = 0$) and in the first place for even elements. It is natural that for this kind of decay to exist, a positron transition energy should exceed a proton binding one.

Furthermore, E^* , the excitation energy of the nucleus after β^+ -decay should be such at which the competition on behalf of the radiation transition is not overwhelming. As a matter of fact this condition is for the emitted proton energy $E_p = E^* - B_p$. According to our estimates the competition on behalf of the γ -radiation will be not essential at $E_p > E_{p_0}$, E_{p_0} varying in the range of 0,7 to 2 MeV with Z varying from 20 to 50. Thus $E_{\beta^+} - (E_{p_0} + B_p) > 0$ is necessary for proton emission to appear after β^+ -decay. The probability for the process seems to increase with the growth of this difference. Some evaluations of this probability for a statistical model are listed in reference [10]. The condition put in Goldansky's

work^{/9/} is quite unnecessary. In his paper it is considered necessary to have the superallowed (without any change in the isotopic spin) β^+ -transition to the proton-unstable level i.e., the following relation should be satisfied:

$$[({}_Z D_N^A - {}_{Z-2} D_{N+1}^{A-1}) - (1.2 \frac{Z}{A^{2/3}} + 6.8)] \text{ MeV} > 0$$

where D is a mass defect. It is worth stressing that proton emission can be observed also in the case when the indicated difference is less than a zero. It is important to have an energetic potentiality for this process and inconsiderable competition on behalf of the γ transition ($E_{\beta^+} - (E_{p_0} + B_p) > 0$). Proton decay can occur after the usual β^+ -transition, and even if this transition is competed with a superallowed one which is not followed by proton emission. In the last case the success in delayed proton detection will be conditioned by the isotops production cross section and the apparatus sensitivity. It should be mentioned that in no one of the cases observed with "delayed" proton emission a superallowed β^+ -transition to a proton-unstable level was displayed.

2. Another mechanism is possible for p -decay with a large lifetime, i.e., an isomeric one. The heavy-ion-induced reactions are known to result, with high probability, in configuration isomers. These nuclei are in high-spin state due to the excitation of some nucleons. For a proton-rich nucleus, such a state can appear to be proton-unstable provided $E^* > B_p$.

A high spin will lead to the suppression of the radiation transition, the nucleus will decay emitting the proton of an energy $E_p = E^* - B_p$. On the other hand, the joint effect of the Coulomb and the centrifugal barrier will stipulate a long lifetime for the proton decay. In the region of the heavy nuclei alpha-active configuration isomers with a hindrance factor up to 10^{14} were detected^{/21-23/}. In^{/24-25/} the appearance of high-spin isomeric states is explained by the effect of the residual $n-p$ interaction. Report^{/25/} indicates that the formation of configuration isomers is possible in the region of nuclei of a mean atomic weight.

The probability for isomer proton decay can be approximately put down as follows $W_p = \delta P_\ell$; P_ℓ is a barrier quantum mechanical penetration for a proton with the momentum ℓ ; δ is a reduced probability for the process, which depends on the state structure. Fig. 11 presents the results of the p -decay forbidding parameter owing to the angular momentum (the formula from paper^{/26/} is used) for nuclei with $Z=30$ and 50. The forbiddenness due to the structure factor δ requires some detailed calculations, For α -active isomers, this forbidding component reaches the value 10^6 .

It is not excluded that the detected proton emitter having a half life about 23 sec. is the proton-active isomer with a (8-10) \hbar spin.

The investigations of radioactive nuclei p -decay are currently in progress at our laboratory. The goals of these studies are to determine experimentally the mechanism of the proton decay detected and to identify the obtained isotopes with higher precision.

The authors are very thankful to E.Z.Ryndina and the staff for manufacturing silicon detectors which were of great importance for the work carried out. The authors would also like to express their gratitude to V.Titov and V.Chugreyev, for design works, and to E.A.Minin, N.Danilov and B.Bibichev, for their assistance in preparing the experiments, and to the cyclotron group guided by Dr. A.N.Filipson, for providing the bombardments.

Table I

Particles	N_1	N_2	N_2/N_1
	$\Delta E > 13 \text{ kev}$	$13 \text{ kev} < \Delta E < 45 \text{ kev}$	
Protons			
$E_p = 2.5 \text{ MeV}$	302	279	0.92
Protons			
$E_p = 5.0 \text{ MeV}$	1343	914	0.69
α -particles			
$E_\alpha = 5.5 \text{ MeV}$	2648	40	0.015

The table gives the intensities of two proton groups under different conditions for the value of a pulse from the gaseous counter ΔE . The results are obtained from the bombardment of Ni with Ne ions. The lowest line corresponds to the calibrating α -particles.

R e f e r e n c e s

1. Alvarez L., Phys. Rev., 75, 1815 (1949).
2. L.Alvarez. Phys. Rev., 80, 518 (1950).
3. S.Breckon, A.Henrikson. Can. J. Phys., 32, 223 (1954).
4. A.Birge. Phys. Rev., 85, 753 (1952).
5. B.S.Dzhelepov. Izv. AN SSSR, Seria Phys., 15, 498 (1956).
6. V.A.Karnaukhov. "Proceedings of the Conference on Reactions Induced by Multiply Charged Ions", 1958, Dubna, p.71, (1959).
7. V.A.Karnaukhov, N.I.Tarantin. JETP, 39, 1106 (1960).
8. V.I.Goldansky. JETP, 39, 497(1960).
9. V.I.Goldansky. DAN, 146, No, 6, 1309 (1962).

10. N.A.Vlasov. Atomnaya Energia, 14, 45 (1963).
11. Ya.B.Zel'dovich. JETP, 38, 1123 (1960).
- 12 V.I.Goldansky. Nucl. Phys., 27, 648 (1961).
13. V.A.Karnaukhov, G.M.Ter-Akopyan, V.G.Subbotin. JINR Preprint, P-1072.
Dubna, 1962.
- 14.V.A.Karnaukhov, G.M.Ter-Akopyan, V.G.Subbotin, "Search for proton emitters
among the products of heavy-ion-induced reactions", Proceedings of the 3rd
Conference on Reactions Between Complex Nuclei, April 1963, Pacific Grove,
USA, p.434.
15. V.A.Karnaukhov, G.M.Ter-Akopyan, L.A.Petrov, V.G.Subbotin. JETP, 45, 1280
(1963).
16. R.Barton, R.McPherson, R.Bell, W.Frisken, W.Link, R.Moore. Can.J. Phys.,
41, 2007 (1963).
- 16a. R.Barton, R.McPherson, R.Bell. Can. Nucl. Technology, v.2, No.4, p.40,
Fall 1963.
17. J.Preiss. Private Communication, August 1963.
- 18.Fink, Friedmann, Braid. Private communication, 1963.
19. R.Kaufmann, R.Wolfgang. Phys. Rev., 121, 192 (1961).
- 20.Y.V.Rid, I.M.Landenbauer-Bellis, R.Wolfgang. Phys. Rev. 127, 1722 (1962).
21. Jentschke, Juveland Kinsey: Phys. Rev., 96, 231 (1964).
- 22.V.A.Karnaukhov. JETP, 42, 973 (1962).
- 23.I.Perlman, F.Asaro, A.Chiorso, A.Larsh, R.Latimer. Phys. Rev., 127, 917 (1962).
- 24.L.A.Sliv. Ju.I.Kharitonov. JETP, 44, 247 (1963).
- 25.L.A.Sliv, Ju.I.Kharitonov. "High nuclear isomeric states", report at the XIVth
Meeting on nuclear spectroscopy, Tbilisi, 1963.
26. H.A.Bethe. Physics of Nucleus, v.II, GITTL, Moscow, 1948.

Received by Publishing Department
on March 23, 1964.

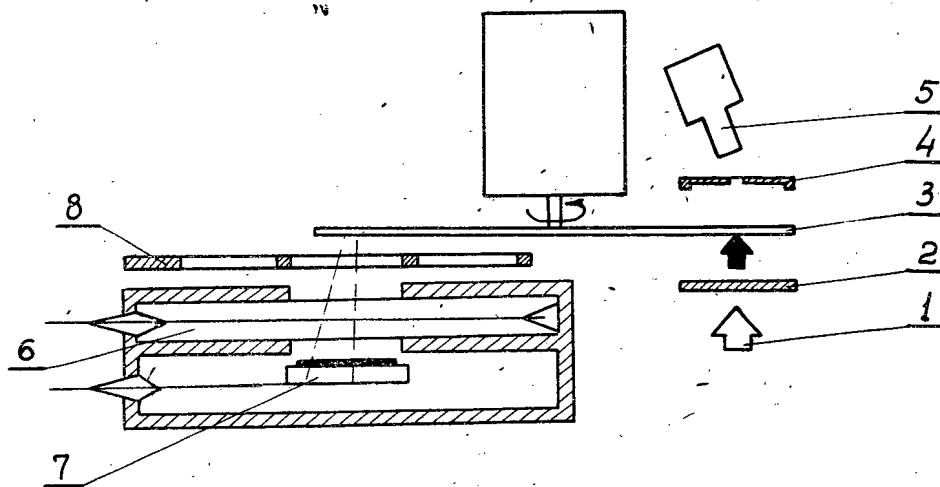


Fig.1. The diagram of the experimental apparatus.

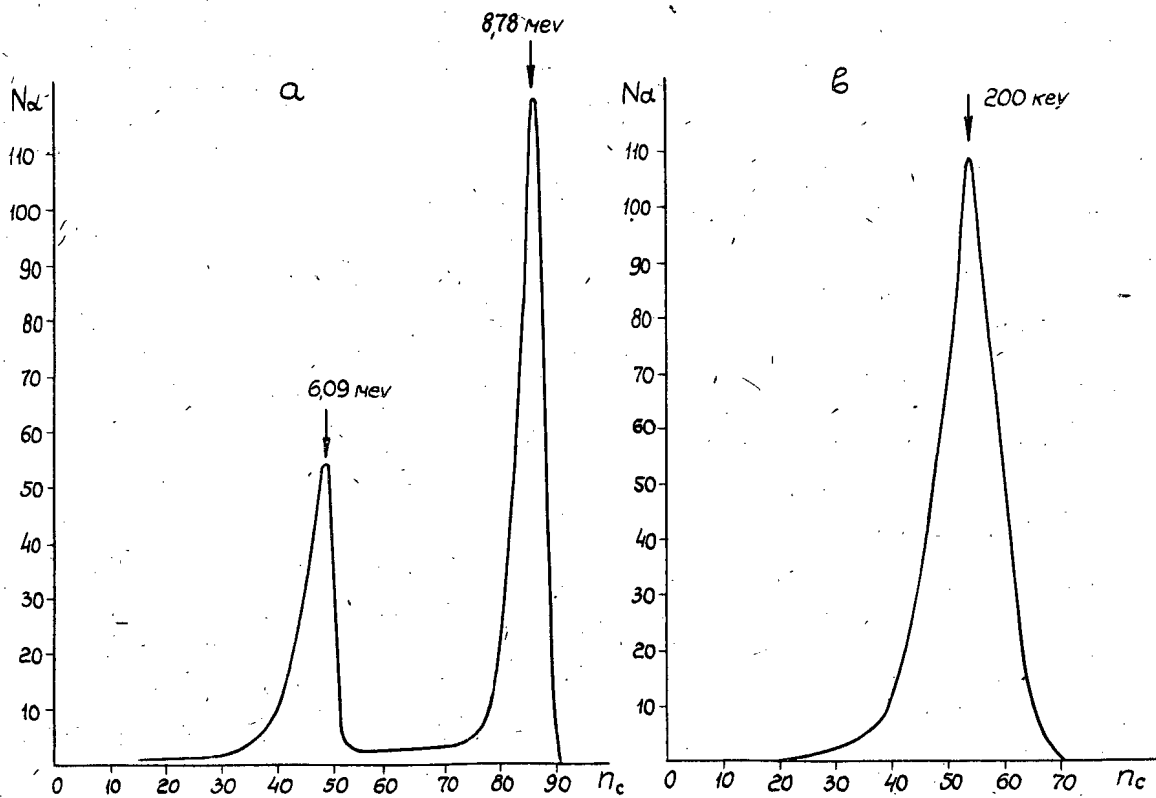


Fig.2. Calibrating curves obtained under operating conditions:
a) the spectrum of alphas of ThC²³², a source is placed on the disk. The amount of the substance between the source and the silicon detectors is equivalent to Al 13 μ thick.
b) the gaseous counter pulse spectrum for 5.5 - MeV alpha-source placed at a distance of 3 cm from the input window.

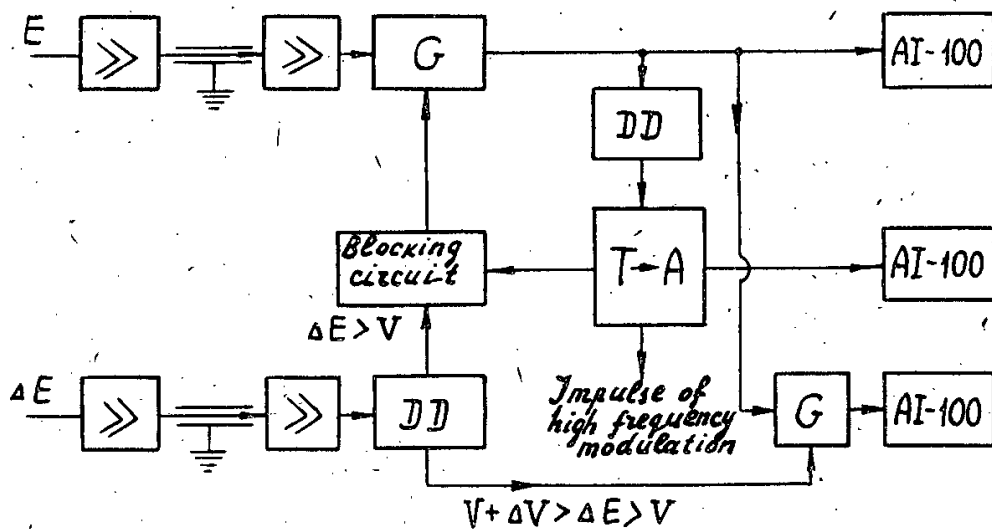


Fig.3. The electronics block-diagram.

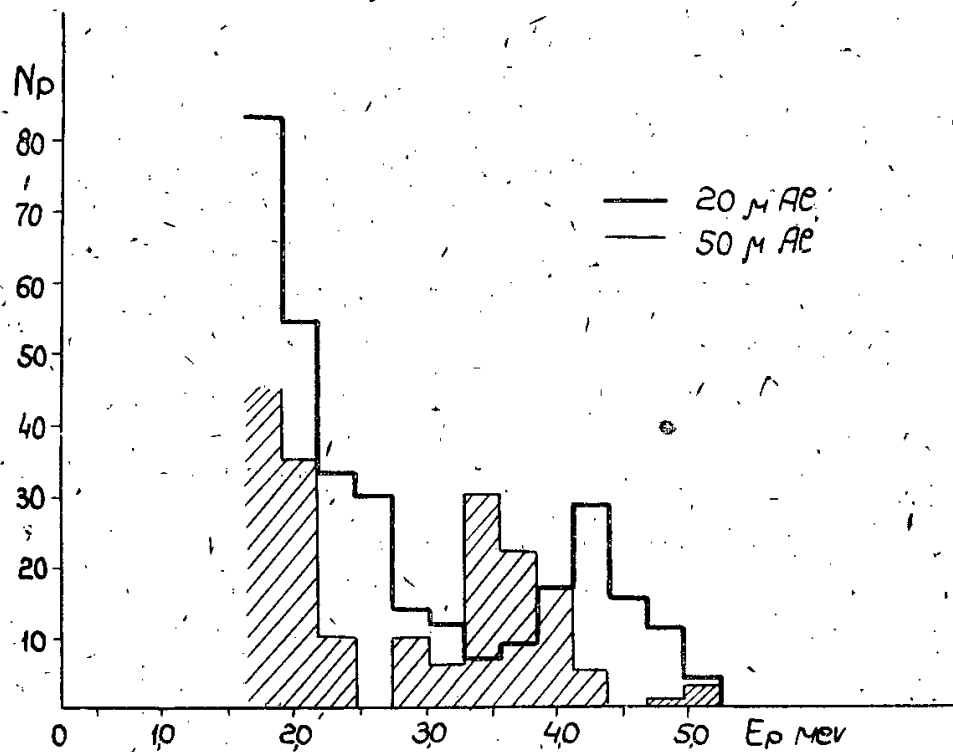


Fig.5. The spectrum of the 5.0 - MeV proton group obtained in experiments with different absorbers between the disk and the detectors (20μ and 50μ thick Al). The thickness of the absorbers is equal to 23μ and 58μ Al, with an average angle of proton entrance into the telescope (30°) taken into account.

20

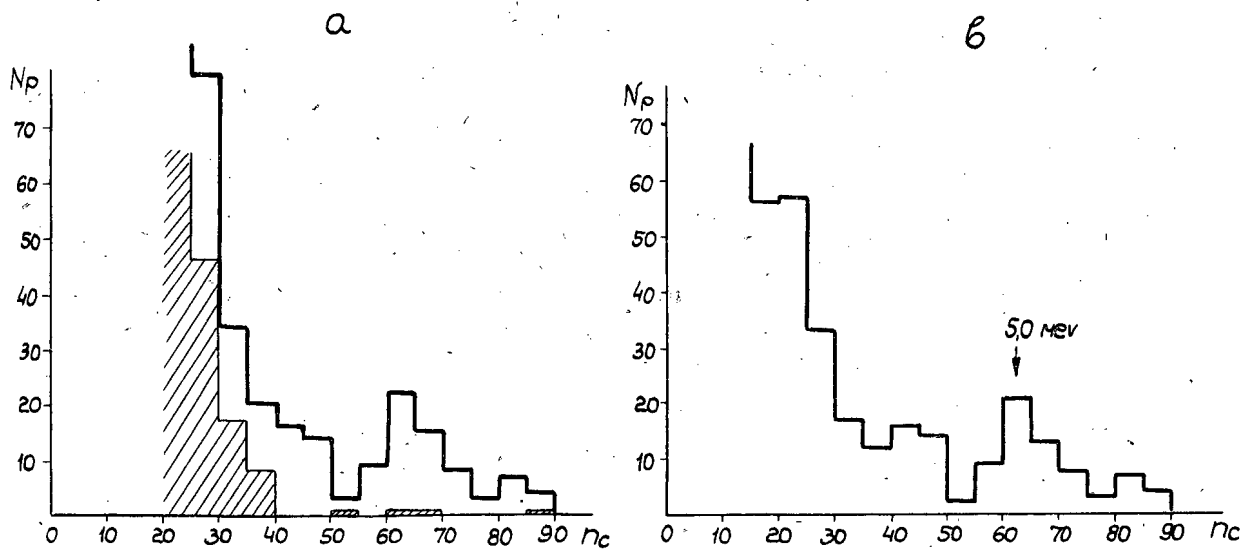


Fig.4.a) The proton energy spectrum obtained from the bombardment of Ni with Ne^{20} ions. The β and γ -background spectrum is shaded. (The disk is Al 50μ thick, the depletion depth of the silicon detectors is about 200μ).

b) The same spectrum with the β and γ -background subtracted. In the determination of the 5 - MeV proton group energy the absorption in the substance between the disk and the silicon detectors as well as the absorption in the very disk (due to the "driving in" of nuclei) are taken into account.

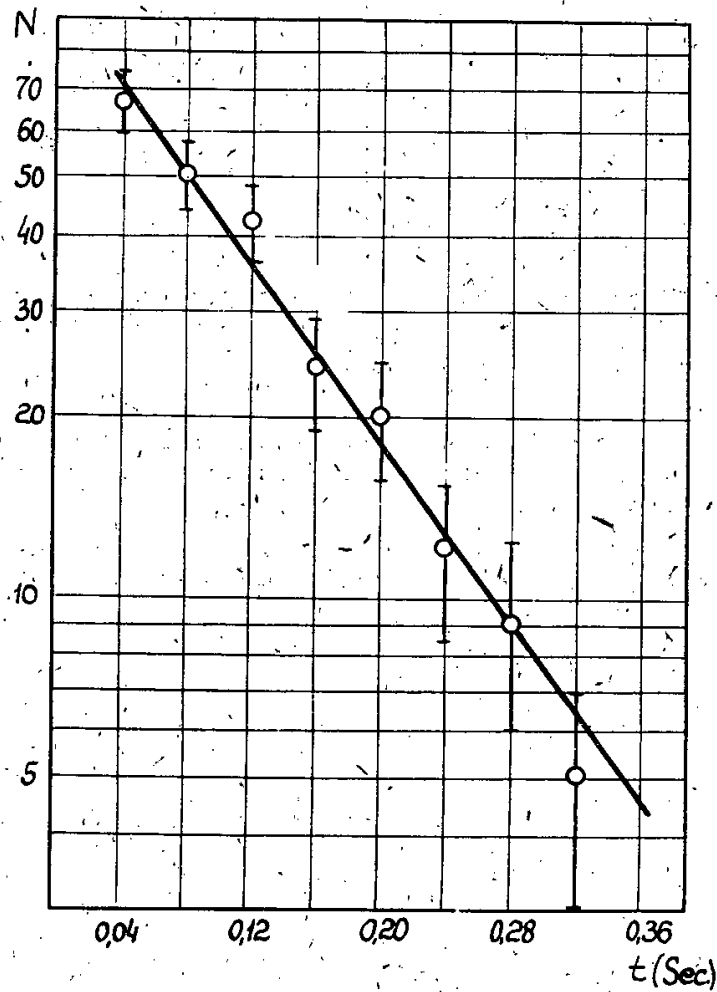


Fig. 6. The decay curve of the 5.0-MeV proton emitter.

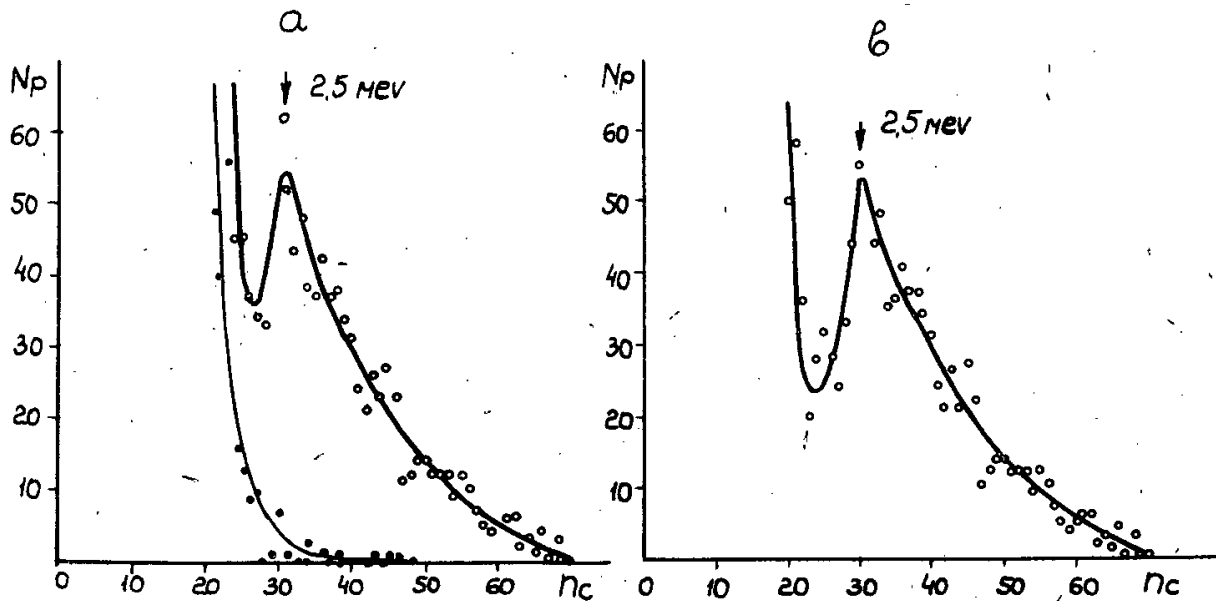


Fig. 7. a) The proton energy spectrum in the bombardment of Ni with Ne^{20} ions. The β and γ -background spectrum is indicated by block dots (The disk is 9.3μ thick Al, the depletion depth of the silicon detectors is about 80μ).
 b) The same spectrum with the β and γ -background subtracted. The energy of the 2.5 MeV proton group is determined with the absorption taken into account.

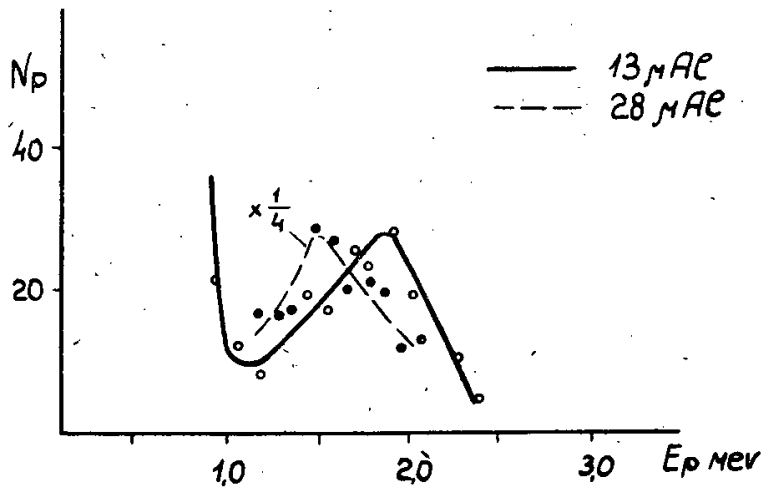


Fig. 8. The spectra of the 2.5 MeV proton group. The thickness of the absorber between the disk and the silicon detector is equivalent to 13μ and 28μ thick Al. With an average angle of proton entrance into the telescope (30°), the thickness of the absorbers is 15μ and 32.5μ Al.

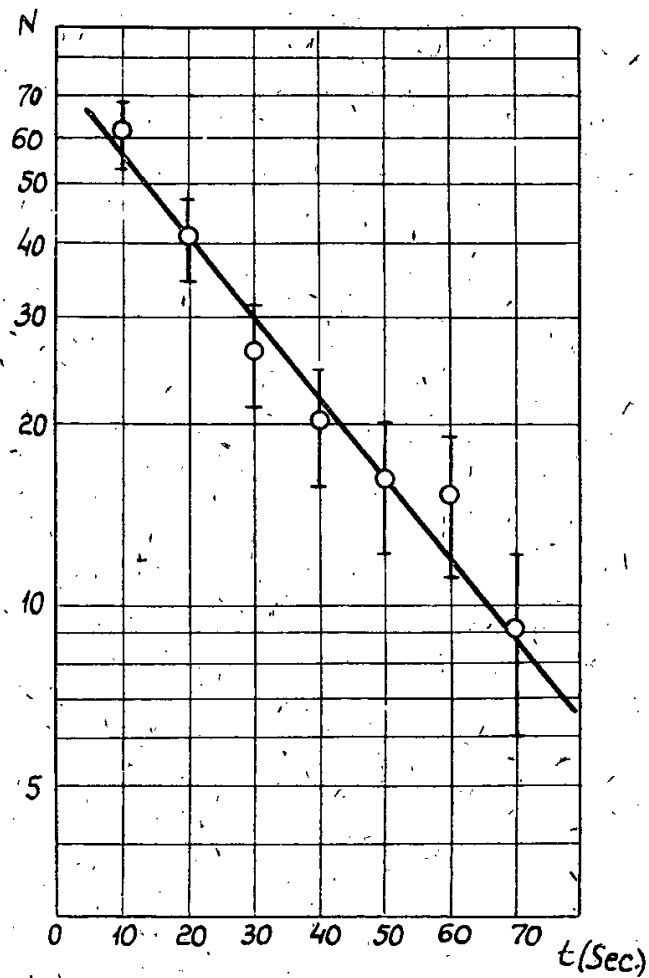


Fig. 9. The decay curve of the 2.5 MeV proton emitter, the reaction is $\text{Ni} + \text{Ne}^{20}$.

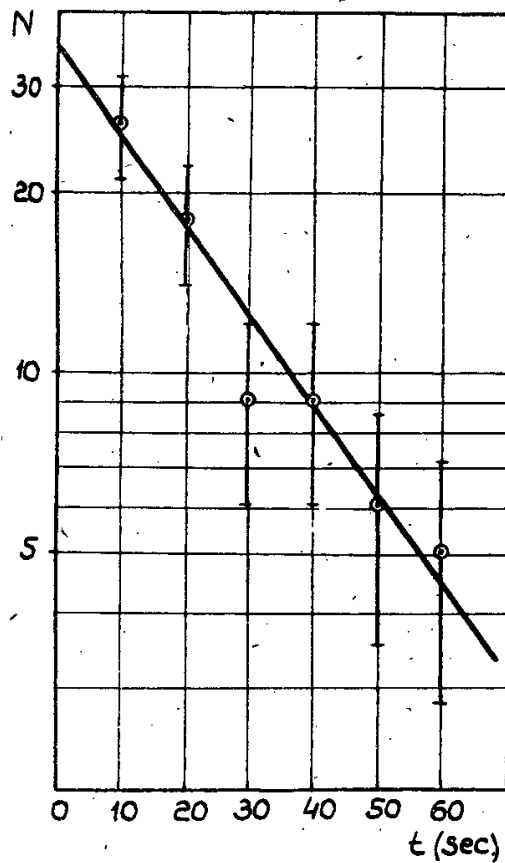


Fig. 10. The decay curve of the 2.5 - MeV proton emitter, the reaction is $\text{Ni} + \text{O}^{16}$.

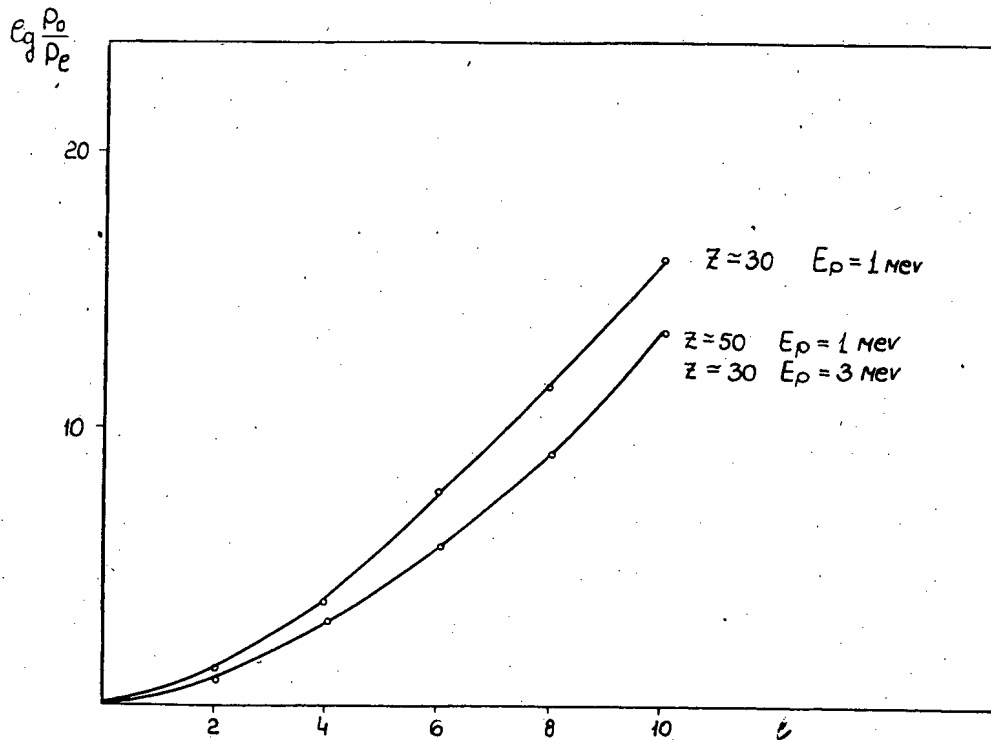


Fig. 11. The figure illustrating the centrifugal barrier effect upon the proton emission probability. P_0/P_e is a ratio of the barrier penetrations for protons with the momenta equal to 0 and l .

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3717. Тираж 250. 1,5 уч.-изд.л.
Тех. ред. В.Р.Саранцева Апрель 1964 г.

Перевод Л.В.Куликовой.

15



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

N.I. Pyatov, V.G. Soloviev

E - 1621

ENERGIES OF THE EXCITED STATES
OF SOME EVEN STRONGLY DEFORMED NUCLEI
IN THE RANGE $164 \leq A < 190$

Дубна 1984

E-1621

Энергии возбужденных состояний некоторых чётных сильно деформированных ядер в области $164 \leq A < 190$.

На основе сверхтекучей модели ядра рассчитаны двухквazi-частичные возбужденные состояния для деформированных ядер Dy^{164} , Er^{164} , Yb^{168} , Yb^{174} , Yb^{176} , Hf^{176} , W^{184} , Os^{186} . Приведены энергии квадрупольных и октупольных коллективных состояний. Даны анализ ряда схем бета-распада и оценка энергий расщепления ряда двухквaziчастичных состояний.

Работа издается только на английском языке.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Ryatov N.I., Soloviev V.G.

E-1621

Energies of the Excited States of Some Even Strongly Deformed Nuclei in the Range $164 \leq A < 190$.

The two-quasi-particle excitations for the deformed nuclei Dy^{164} , Er^{164} , Yb^{168} , Yb^{174} , Yb^{176} , Hf^{176} , W^{184} , Os^{186} have been calculated using the nuclear superfluid model. The energies of the quadrupole and octupole collective states are given. Several beta decay schemes are analysed. The splitting energies of some two-quasi-particle states are estimated.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

N.I. Pyatov, V.G. Soloviev

E - 1621

ENERGIES OF THE EXCITED STATES
OF SOME EVEN STRONGLY DEFORMED NUCLEI
IN THE RANGE $164 \leq A < 190$

Submitted to "Izv. Akad. Nauk SSSR "

Дубна 1984

The nuclear superfluid model has been considerable success in recent years in accounting for the energies of the non-rotational excited states of even nuclei and various regularities in nuclear properties.

The basic assumptions of the superfluid nuclear model and the methods for calculation of the characteristics of strongly deformed nuclei are presented in ref.^{/1/}. The energies of the two-quasi-particle excited states of strongly deformed even nuclei were first calculated in ref.^{/2/}. A detailed investigation of the excited states of even nuclei in the range $150 < A < 188$ is given in ref.^{/3/}. In that paper the experimental data are analysed, the energies of the two-quasi-particle states of most nuclei in the range $160 \leq A \leq 182$ and the relative probabilities of the corresponding beta transitions are calculated. The experimental data on the excited states of odd- A nuclei appeared after publication of paper^{/3/} allowed one to find the position of the average field levels for nuclei with $A < 160$. Then it became possible to calculate the energies of the two-quasi-particle excited states and the relative probabilities of beta transitions for some isotopes of Sm, Gd, Dy^{/4/}. The energies of the beta and gamma vibrational and the octupole states of strongly deformed even nuclei have recently been calculated and a microscopic structure of these states has been cleared up^{/5/}. Using the later results and the calculations of two-quasi-particle states we can analyse all non-rotational levels of even deformed nuclei. After publication of paper^{/3/} there have appeared new experimental data on the levels of even nuclei for which there are no theoretical calculations in^{/3,4/}. Thus, now it is necessary to calculate the energies of the excited states for some nuclei in the range $164 \leq A < 190$, investigate the structure of these states and compare the results of calculations with the corresponding experimental data. This is just the subject of the present paper.

1. Single-Particle Levels of the Average Field and Pairing Energies

In calculations we use the wave functions and the single-particle levels of the Nilsson scheme^{/8/}. Some modifications have been made in the position of

the average field levels according to the experimental data on the single-particle levels of odd- A nuclei. Therefore our scheme of the average field single-particle levels is somewhat different from that given in ref.^{8/}, but it is rather close to the scheme with parameters given in ref.^{9/}. The energies of the average field single-particle levels $E(s)$, the correlation functions C and the chemical potentials λ for the ground states of systems with even and odd number of nucleons are written in Tables 1 and 2. The quantum numbers describing the single particle levels are denoted by Nn, Λ^\uparrow , provided $K = \Lambda + \frac{1}{2}$, and Nn, Λ^\downarrow , provided $K = \Lambda - \frac{1}{2}$, where N represents the total number of oscillator quanta, n is the number of oscillator quanta along the symmetry axis, Λ is the component of the orbital angular momentum along this axis, $\pm \frac{1}{2}$ is the projection of the nucleon spin. All quantities in Table 1 and 2 are given in units $\hbar\omega_0 = 41 A^{-1/3}$ MeV. It is taken into account in ref.^{4/} that there are some intersections of single-particle levels in neutron system at $N < 96$. The energies of these levels given in Table 1 differ therefore from those in ref.^{4/}. In the proton single-particle levels scheme the state 404^\downarrow is the ground state for the isotopes of Lu and Ta , the levels 404^\downarrow and 514^\uparrow intersect. The sequence of the levels 404^\downarrow and 514^\uparrow changes therefore, the values of $E(s)$ being unaffected.

The pairing energies are given as

$$P_N = (1/4) \{ 3\mathcal{E}(Z, N-1) + \mathcal{E}(Z, N+1) - 3\mathcal{E}(Z, N) - \mathcal{E}(Z, N-2) \} \quad (1)$$

where $\mathcal{E}(Z, N)$ is the energy of the ground state of a nucleus consisting of Z protons and N neutrons. The results of calculations are given in Figs. 1 and 2. The open circles denote the pairing energies determined through mass differences given in^{10/}. The pairing energies denoted by the dark circles or the straight lines are calculated for the following values of the pairing interaction constants

$$G_N = \frac{26}{A} \text{ MeV} \quad (2)$$

$$G_Z = \frac{28}{A} \text{ MeV}$$

which, as is seen from^{1/}, are the same as those used earlier in both regions of strongly deformed nuclei. From Figs. 1 and 2 it is seen that the calculated pairing energies with constants (2) are in good agreement with the corresponding experimental data. Notice that the pairing energies of all nuclei are calculated for the same deformation with the single-particle level schemes presented in Tables 1 and 2.

2. Excited States of Even-Even Nuclei

The energies of two-quasi-particle excited states are calculated on the basis of the nuclear superfluid model, taking into account the blocking effect. The energies of collective quadrupole and octupole states as well as the structure of these states are taken from ^{5-7/}. The energies of the non-rotational excited states for all nuclei are calculated for the same system of the average field levels, i.e. for the same deformation.

The results of calculations of the energies of two-quasi-particle and collective states are tabulated (Table 3-10). The tables differ from one another in the form because some of them contain an analysis of beta transitions to the levels of the considered nucleus. At the top of these tables are given the energies of neutron and proton two-quasi-particle states and below are presented the energies of a number of collective states. The first column of Tables 3-10 contains the configurations of two-quasi-particle states, K denotes the last filled orbital of the average field in the independent-particle model, $K+1$ is the first unfilled level and so on. The quantum characteristics of the states K , $K+1$, $K+2$ and other are written at the foot of the corresponding part of the table. In the second column one gives the total angular momentum projection on the nuclear symmetry axis K and the parity π , first, for the states with $\Sigma = 0$ which, according to the Gallagher's rule, have lower energy, and below for the states with $\Sigma = 1$. We note that whenever for one of the states of the doublet $K\pi = 0 -$ as is shown in ^{11/}, the Gallagher's rule may be violated and the state with $K \neq 0$ has always lower energy. Further we present the energies of all two-quasi-particle states as high as 2 - 2.5 MeV.

According to the superfluid nuclear model the collective non-rotational states are superpositions of two-quasi-particle states of various kind. A state is considered as two-quasi-particle one if admixtures of other states do not exceed 5%. States which are not displayed as two-quasi-particle ones but take part in the formation of the corresponding collective states are marked in the tables by "coll".

In the lower parts of Tables 3-10 are presented the calculated and experimental energies of collective states and for gamma vibrational and octupole states are given three two-quasi-particle states which yield the largest contribution to the given collective state. This contribution is determined from the normalization condition of the wave function of each collective state. We denote by nn the neutron and pp the proton two-quasi-particle states.

The particularities of some nuclei will be discussed further and may be considered as additions to ^{3/}.

$$A = 164.$$

The energies of the non-rotational excited states of Dy^{164} and Er^{164} are given in Tables 3 and 4. The energies of gamma vibrational states are found in ^{12/} a number of levels is observed in the reactions (d, p) and (p, p') ^{13/}. The levels of Er^{164} from beta decay have been investigated in ^{14/}. The state with $K\pi = 6-$ in Dy^{164} , by analogy with Er^{166} may have the configuration $nn\ 523\downarrow + 633\uparrow$ but its interpretation as $pp\ 413\downarrow + 523\uparrow$ cannot be excluded now. Note that in Dy^{164} and Er^{164} the state with $K\pi = 2^+$ and the configuration $pp\ 404\downarrow - 411\uparrow$ is two-quasi-particle one, it does not take part in the formation of a collective state. The value of $\log ft$ for the decay of Tm^{164} to the beta vibrational state of Er^{164} must be somewhat larger than that of $\log ft$ corresponding to the decay to the ground state.

$$A = 168.$$

As to Er^{168} , we note the following. In ^{3/} it is assumed that in Er^{168} there are two levels with $K\pi = 3-$: a neutron level $nn\ 633\uparrow - 521\downarrow$ at 1,095 MeV and a proton level $pp\ 523\uparrow - 411\downarrow$ at 1,543 MeV. This interpretation contains the following disagreement with experiment: the calculated value $\log ft = 6,2$ in the decay of Tm^{168} to the 1,095 MeV level strongly differs from the measured one $\log ft = 7.7$. Further, two levels with $K\pi = 4-$ of the two doublets may lie lower in energy than the $3-$ states; the beta decay of Tm^{168} to these levels being Λ -forbidden. Yet there is no rigorous experimental evidence for existence of such states. At last, if both states with $K\pi = 3-$ contain no admixtures to two-quasi-particle states, then the gamma transition between them is theoretically forbidden, while the intensive 448 KeV(M1)-transition is observed experimentally. These disagreements are eliminated if basing on ref. ^{15/}, where the 1,095 MeV level is believed to have spin 2,3 or 4 and on Pokrovsky's data we assume that this level has $K\pi = 4-$. Then one can consider the 1,095 MeV and 1,543 MeV states as the proton doublet $pp\ 523\uparrow \pm 411\downarrow$ with $K\pi$ equal to $4-$ and $3-$ respectively. Hence the beta decay from Tm^{168} to the $4-$ state is Λ -forbidden, the value of $\log ft$ increases by 1.5 what is quite reasonable. The neutron $3-$ state $nn\ 521\downarrow - 633\uparrow$ may lie higher in energy than 1,543 MeV. It is known that the half-life of the 1,543 MeV level $T_{1/2} \leq 8 \cdot 10^{-10}$ sec., we obtain therefore the hindrance factor $F_N \leq 10^4$ in the Nilsson model for the value $g_R = Z/A$. This is a rather large hindrance for single-particle MI transition. However, by small decrease of the value of the gyromagnetic ratio g_R this disagreement may be eli-

minated. Note that according to ^{/7/} admixtures to the 3- state of the configuration $pp\ 523\uparrow - 411\downarrow$ do not exceed 0,5% because of the octupole-octupole interactions.

The energies of the levels of Yb^{168} are listed in Table 5, the classification of beta transitions from Lu^{168} with $K\pi = 1+$ is presented there. The energy of gamma vibrational state is found in ^{/13/}. Note that the calculations made in ^{/5/} give some higher energy for beta and gamma vibrational states than that observed, however, they describe rather well the position of these levels.

$$A = 174$$

The energies of the levels of Yb^{174} are given in Table 6. In contrast to ^{/3/} the state with $K\pi = 2-$ is considered as collective, although the contribution of the nearest two-quasi-particle state $nn\ 624\uparrow - 512\uparrow$ is 91%. The energy of the 2- state decreases by 0.3 MeV due to the octupole-octupole interaction and the calculated value 1,4 MeV well agrees with the observed energy of 1,321 MeV. Notice that the states with $K\pi = 2+$ and configurations $nn\ 512\uparrow - 521\downarrow$, $pp\ 402\uparrow - 411\downarrow$ and $pp\ 404\downarrow - 411\uparrow$ can be observed experimentally as two-quasi-particle, they do not take part in the formation of a collective state.

$$A = 176 .$$

A gamma vibrational $2+$ level ^{/12/} and an isomeric state ^{/16/} of Yb^{176} have recently been established. The isomeric state may be assigned as the 8-neutron configuration $nn\ 514\downarrow + 624\uparrow$, just as in Hf^{176} and W^{180} . From Table 7 it is seen that the available experimental data on Yb^{176} agree with the presented calculations.

The energies of the excited non-rotational states of Hf^{176} and a classification of beta transitions from $1-404\downarrow - 512\uparrow\ Ta^{176}$ to the two-quasi-particle levels of Hf^{176} are given in Table 8. The assignment for Ta^{176} is supported by the results obtained in ^{/17/}. Note that the change of the calculated neutron two-quasi-particle energies (in comparing with ^{/3/}) is connected with the change of the position of some single-particle levels.

$$A = 184 .$$

The energies of the two-quasi-particle states of W^{184} and the analysis of beta transitions to these states from Ta^{184} and Re^{184} are given in Table 9 which is constructed in the same form as in ^{/3/}. The decay scheme of Ta^{184} with $K\pi = 3-$ and a possible configuration $404\downarrow - 510\uparrow$ has recently been studied ^{/18/}. A number of papers ^{/19-21/} is devoted to the establishment of the decay scheme of Re^{184} with $K\pi = 3-$ and a possible configuration $402\uparrow + 510\uparrow$.

Nevertheless the level scheme of W^{184} remains very ambiguous.

$$A = 186 .$$

As is known, in the region of osmium isotopes a successive transition takes place from strongly deformed nuclei to spherical. The nuclei W^{186} , Os^{186} , Os^{188} and others have an essentially smaller equilibrium deformation than nuclei with $A < 180$. The calculations of the energies of two-quasi-particle states are performed for the same system of the average field levels, i.e. for the same equilibrium deformation for all nuclei. Therefore, the accuracy of these calculations for nuclei with $A \geq 186$ is considerable worse than for other nuclei. The energies of the two-quasi-particle states in Os^{186} are listed in Table 10. These calculations should be considered as tentative.

Some interesting experimental data are available concerning the levels of Os^{186} , Os^{188} and Os^{190} . So, there are two levels with $K\pi = 2+$ and two levels with $K\pi = 0+$ in Os^{188} , an isomeric state with $K\pi = 10-$ in Os^{190} and others^{/22,23/}. However, the calculation of the energies of the non-rotational excited states of these nuclei and the probabilities of the corresponding beta transitions should be tested separately taking into account the specific features of these nuclei.

3. R e m a r k s

As is known, the energies of the two-quasi-particle states calculated on the basis of the superfluid nuclear model are identical for all nuclei with definite N or definite Z . Data presented in Tables 3-10 and in papers^{/3,4/} allow one to find the energies of the two-quasi-particle states for all even-even nuclei in the region $90 \leq N \leq 110$ and $62 \leq Z \leq 76$. So, the energies of the two-quasi-particle levels of Er^{166} are given in Table III^{8b/3/} and the recalculated energies are given: neutron in Table 5 and proton in Table 4 of the present paper.

In^{/4/} a more accurate method, as compared with^{/1/}, is suggested to calculate the energies and properties of the two-quasi-particle states. In^{/5/} using this method one has calculated the energies of the two-quasi-particle states for some nuclei in the region $150 < A < 190$. In these calculations use has been made of the average field level schemes given in Tables 1 and 2 and pairing energies close to the values shown in Figs. 1 and 2. From a comparison of the two-quasi-particle state energies calculated in^{/5/} with data presented in Tables 3-10 it follows that the accuracy of our calculations is good

enough. Note that the correlation functions of some two-quasi-particle states found in^{/5/} strongly differ from those obtained in^{/3/}. Yet in the method^{/24/} the correlation functions of the excited states have a somewhat different sense as compared to the method presented in^{/1/}.

As is known, the two-quasi-particle states are twice generated with $K = K_1 + K_2$ and $K = |K_1 - K_2|$. The interaction between quasi-particles eliminates this degeneration and the spacing of the two-quasi-particle states is therefore observed experimentally. In^{/11/} the spin splitting energies have been calculated in the first order of perturbation theory. The calculated energies are given in Table 11. Necessary parameters are found from the spin splitting of state $pp\ 413\downarrow + 411\uparrow$ in Gd^{156} . In Table II are given the configurations of two-quasi-particle states, the values of $K\pi$, the energies of these states measured experimentally and their difference as well as a theoretical estimate of the spin splitting energy. Changes in the energies due to quadrupole-quadrupole and octupole-octupole interactions are not taken into account since for states given in Table II these changes are small enough. It should be noted that the theoretical estimates of the spin splitting energies are rough and may serve only as tentative ones.

References

1. В.Г. Соловьев. Влияние парных корреляций сверхпроводящего типа на свойства атомных ядер. Атомиздат, 1963.
2. В.Г. Соловьев. ДАН СССР, 133, 325 (1960). Лю Юань, Н.И. Пятов, В.Г. Соловьев, И.Н. Силин, В.И. Фурман. ЖЭТФ 40, 1503 (1961).
3. C.J. Gallagher, V.G. Soloviev, Mat. Fys. Skr.Dan.Vid.Selsk., 2, No. 2 (1962).
4. Н.И. Пятов, В.Г. Соловьев. Изв. АН СССР, сер.физ., 28, 11 (1964).
5. Лю Юань, В.Г. Соловьев, А.А. Корнейчук. ЖЭТФ (in print.) Преприят ОИЯИ Е-1534, Дубна, 1964.
6. В.Г. Соловьев, П. Фогель. Phys.Let., 6, 126 (1963);
В.Г. Соловьев, П. Фогель, А.А. Корнейчук. ДАН СССР, 154, 72 (1964).
7. В.Г. Соловьев, П. Фогель, А.А. Корнейчук. Изв. АН СССР, сер.физ. (in print);
Preprint ОИЯИ Е-1561, Дубна, 1964.
8. S. Nilsson, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 29, No. 16 (1955);
B. Mottelson, S. Nilsson. Mat.Fys.Skr.Dan.Vid.Selsk. 1, No. 8 (1959).
9. S. Nilsson, O. Prior. Mat. Fys. Medd.Dan.Vid.Selsk. 32, No. 16 (1960).
10. L.A. Konig, J. Mattauch, A.R. Wapstra. Nucl.Phys., 3, 1 (1962);
Р.А. Демарханов, В.В. Дорохов, М.И. Дзюя. Изв. АН СССР, сер.физ., 27, 1338 (1963).

11. Н.И. Пятов. Изв. АН СССР, сер. физ., 27, 1436 (1963);
Н.И. Пятов, А.С. Чернышев. Изв. АН СССР, сер. физ. (in print);
Preprint ОИЯИ Р-1338, Дубна, 1963.
12. Y. Yoshizawa, B. Herskind, M.C. Olesen, B. Elbek (in print);
R. Graetzer, K.A. Hagemann, B. Elbek (in print).
13. W.H. Shelton, and R.K. Sheline. Phys.Rev.Lett. Abs., 11, A15 (1963).
14. А.С. Басина, Р.Я. Громов, Б.С. Джелепов, Ку За Хек, В.А. Морозов. Preprint
ОИЯИ Р-1479, Дубна, 1963.
15. J.H. Reidy, E.G. Funk and J.W. Mihelich. Phys. Rev. 133, B 556 (1963).
16. J. Kantele. Phys.Lett., 2, 293 (1962).
17. J. Valentin, A. Santoni. Nucl.Phys., 47, 303 (1963).
18. H. Verheul, J. Block, H.G. Boddendijk and G.H. Dulfer. Report on Conference
on the Role of Atomic Electrons in Nucleare Transformations,
Warsaw, 1963.
19. Б.С. Джелепов и др. Изв. АН СССР, сер. физ., XXVII, 1394 (1963).
20. N.R. Johnson. Phys.Rev., 129, 1737 (1963).
21. R.M. Bisgard et al. Nucl.Phys., 41, 32 (1963).
22. G.T. Emery W.R. Kane, M. McKeown, M.L. Perlman and G. Scharff-Goldha-
ber. Phys.Rev., 129, 2597 (1963).
23. T. Yamazaki. Nucl. Phys., 44, 353 (1963).
24. И.Н. Михайлов. ЖЭТФ, 45, 1102 (1963).
25. Е. Банг, И.Н. Михайлов. Изв. АН СССР, сер. физ. (in print);
Preprint ОИЯИ Р-1573, Дубна, 1964.

Received by Publishing Department
on March 30, 1964.

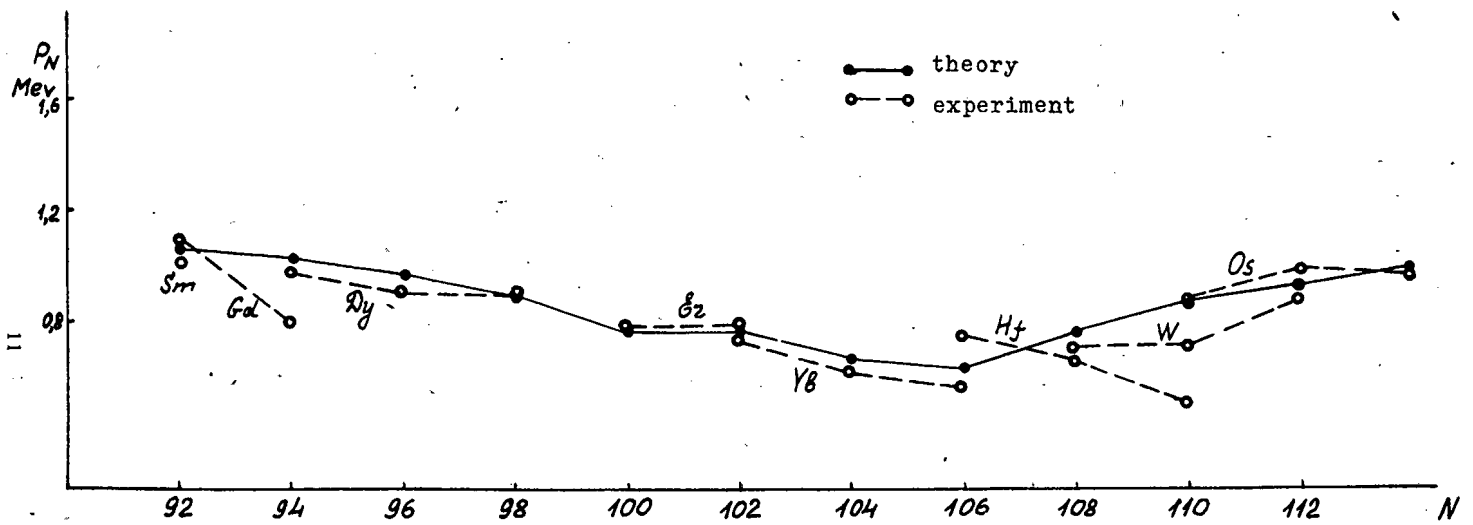


Fig. I.

$$P_N = \frac{1}{4} [3\mathcal{E}(z, N-1) + \mathcal{E}(z, N+1) - 3\mathcal{E}(z, N) - \mathcal{E}(z, N-2)]$$

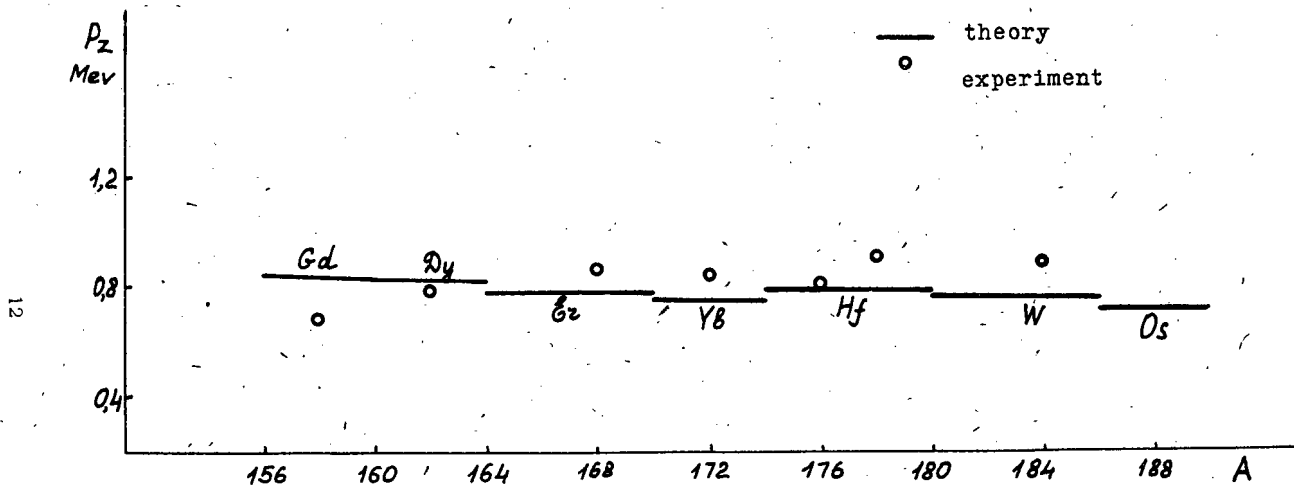


Fig. 2.

$$P_z = \frac{1}{4} [3\mathcal{E}(z-1, N) + \mathcal{E}(z+1, N) - 3\mathcal{E}(z, N) - \mathcal{E}(z-2, N)]$$

Table 1
 Single-particle energy levels and the ground state
 parameters for neutron system

N	$E(s)/\hbar\omega_0$	$Nn_z \Lambda \Sigma$	$C/\hbar\omega_0$	$\lambda/\hbar\omega_0$
85 86	0,85	505 ↑	—	—
87 88	0,91	402 ↓	0,116 0,148	0,891 0,917
89 90	0,95	660 ↑	0,123 0,152	0,943 0,968
91 92	1,00	651 ↑	0,125 0,152	0,991 1,018
93 94	1,04	521 ↑	0,122 0,147	1,044 1,070
95 96	1,08	642 ↑	0,111 0,137	1,098 1,127
97 98	1,11	523 ↓	0,085 0,124	1,173 1,197
99 100	1,26	633 ↑	0,073 0,123	1,220 1,272
101 102	1,30	521 ↓	0,082 0,122	1,310 1,342
103 104	1,36	512 ↑	0,050 0,110	1,389 1,418
105 106	1,48	514 ↓	0,037 0,111	1,452 1,497
107 108	1,55	624 ↑	0,078 0,124	1,530 1,559
109 110	1,62	510 ↑	0,099 0,135	1,585 1,613
111 112	1,66	512 ↓	0,113 0,142	1,637 1,660
113 114	1,71	503 ↑	0,122 0,146	1,679 1,703
115 116	1,74	505 ↓	0,125 0,145	1,720 1,743
117 118 119	1,75 1,78	501 ↑ 651 ↓	— — —	— — —

Table 2

Single-particle energy levels and the ground state
 parameters for proton system

Z	$E(s)/\hbar\omega_0$	$Nn_z\Lambda\Sigma$	$C/\hbar\omega_0$	$\lambda/\hbar\omega_0$
59	1,20	422↓	0,075	1,218
60			0,124	1,252
61	1,31	532↑	0,079	1,280
62			0,127	1,325
63	1,36	513↓	0,090	1,359
64			0,129	1,391
65	1,42	411↑	0,089	1,424
66			0,127	1,458
67	1,48	523↑	0,081	1,495
68			0,123	1,528
69	1,56	411↓	0,071	1,566
70			0,121	1,601
71	1,66	404↓	0,081	1,627
72			0,123	1,671
73	1,69	514↑	0,085	1,709
74			0,121	1,737
75	1,76	402↑	0,073	1,776
76			0,118	1,808
77	1,86	402↓	0,075	1,834
78			0,118	1,877
79	1,90	400↑	—	—
80			—	—
81	1,97	505↑	—	—
82			—	—

Table 3

98
 66 Dy 164

Neutron two-quasi particle states			Proton two-quasi-particle states				
Configu- ration	K π	Energy (MeV)		Configu- ration	K π	Energy (MeV)	
		Calc.	Experiment.			Calc.	Experiment.
K,K+1	6-	1,7	(1,680)	K,K+1	2- coll	1,4	
K,K+2	1-			K-1,K+1	5-	1,4	
	2+ coll.	1,9	(1,987)		6-	1,8	(1,680)
K-1,K+1	3+			K,K+2	1-	1,9	(1,987)
	1+	1,9			2+ coll.	1,9	(1,987)
K-1,K+2	6+			K-1,K	1+	2,1	
	3-	2,2			4+	2,1	
	2-			K-2,K+1	1+	2,1	
K-2,K+1	2- coll.	2,2			6+	2,1	
	5-			K+1,K+2	4-	2,1	
K,K+3	5+	2,4			3-		
	0+ coll.	-		K-1,K+2	2+ coll.	2,2	
K+1,K+2	4-	2,4			3+		
	3-			K-2,K	1-	2,4	
K-1,K	5-	2,6			4-		
	0-			K,K+3	5+	2,6	
K+1,K+3	1-	2,8			2+		
	6-			K-2,K-1	5-	2,8	
K-2,K	4+	2,9			0-		
	1+						

K-2=521 \uparrow ;K-1=642 \uparrow ; K=523 \downarrow ;
 K+1=633 \uparrow ;K+2=521 \downarrow ;K+3=512 \uparrow .

K-2=532 \uparrow ;K-1=413 \downarrow ;K=411 \uparrow ;
 K+1=523 \uparrow ;K+2=411 \downarrow ; K+3 =404 \downarrow ;

Collective states

K π	Energy (MeV)		Structure of states
	Calc.	Experim.	
2+	0,8	0,770	pp411 \uparrow +411 \downarrow 36%; pp413 \downarrow -411 \downarrow 19%; nn523 \downarrow - -521 \downarrow 16%
0+	1,5	-	
0-	1,6	-	nn642 \uparrow -523 \downarrow 29%; nn642 \uparrow -512 \uparrow 15%, nn660 \uparrow - -770 \uparrow 14%
2-	1,2	-	pp411 \uparrow -523 \uparrow 75%; nn633 \uparrow -521 \uparrow 20%; nn642 \uparrow - -521 \downarrow 0,6%.

Table 4

⁹⁸₆₈Er ¹⁶⁴

Configuration	K π	Energy (MeV)	β -decay of Tm^{164}		Energy (MeV)	K π	Configuration
			$1+ 523\uparrow - 523\downarrow$				
Neutron two-quasi-particle states				Proton two-quasi-particle states			
K,K+1	5- 0-coll	1,6 -	- 2h	$\bar{1}^*h$	1,3	4- 3-	K,K+1
K-1,K+1	1- 4-	1,9 -	1F -	aF aF	1,7 -	2+coll 1+	K-1,K+1
K-2,K+1	1+ 4+	2,1 -	1F -	- 1h	2,0 -	7- 0-coll	K,K+2
K-1,K	4+ 1+	2,1 -	- a(2)	1h -	2,2 -	2- 5-	K-1,K
K,K+2	6- 1-	2,3 -	- 1u	aF -	2,2 -	2+coll 3+	K-2,K+1
K+1,K+2	1+ 6+	2,3 -	aF -	a(2) -	2,2 -	1+ 8+	K,K+3
K-2,K	4- 1-	2,3 -	- 1* \bar{h}	- -	2,3 -	3+ 4+	K+1,K+2
K-1,K+2	2- 5-	2,4 -	1F -	- aF	2,3 -	5+ 2+	K-1,K+2
K,K+3	2+coll 3+	2,6 -	a(3) -	- -	2,5 -	5- 4-	K+1,K+3
K-2=651 \uparrow ; K-1 =521 \uparrow ; K=523 \downarrow K+1= 642 \uparrow ; K+2 =633 \uparrow ; K+3 =521 \downarrow .				K-2=413 \downarrow ; K-1 =411 \uparrow ; K=523 \uparrow ; K+1=411 \downarrow ; K+2 =404 \downarrow ; K+3 = 514 \uparrow .			

Collective states

K π	Energy (MeV)		Structure of states
	Calc.	Experim.	
2+	0,9	0,811	pp411 \uparrow +411 \downarrow 48%; pp413 \downarrow -411 \downarrow 16%, nn521 \uparrow +521 \downarrow 12%
0+	1,5	-	
0-	1,3	-	nn642 \uparrow -523 \downarrow 49%; nn651 \uparrow -521 \uparrow 14% nn660 \uparrow -770 \uparrow 9%

Table 5

⁹⁸₇₀Yb ¹⁶⁸

Configu- ration	$K\pi$	Energy (MeV)	β -decay of Lu^{168} 1+ 404↓ - 642↑	Energy (MeV)	$K\pi$	Configu- ration	
Neutron two-quasi-particle states				Proton two-quasi-particle states			
K,K+1	6-	1,7	-	a(2)	1,4	3+	K,K+1
	1-	-	1F	-	-	4+	
K,K+2	2+coll.	1,9	aF	-	1,6	5-	K,K+2
	3+	-	-	-	-	4-	
K-1,K+1	1+	1,9	ah	-	1,9	7-	K-1,K+1
	6+	-	-	1h	-	0-coll.	
K-1,K+2	3-	2,2	-	-	2,1	8-	K+1,K+2
	2-	-	1(3)	1*h	-	1-	
K-2,K+1	2-	2,2	1F	-	2,1	3+	K,K+3
	5-	-	-	aF	-	2+	
K,K+3	5+	2,4	-	aF	2,1	1+	K-1,K+2
	0+coll.	-	aF	-	-	8+	
K+1,K+2	4-	2,4	-	-	2,2	4-	K-1,K
	3-	-	1*F	1*F	-	3-	
K-1,K	5-	2,6	-	-	2,3	5+	K-2,K+1
	0-coll.	-	1h	ah	-	2+	
K+1,K+3	1-	2,8	1F	-	2,6	6+	K+1,K+3
	6-	-	-	ah	-	1+	
K-2=521↑;K-1=642↑;K=523↑; K+1 =633↑;K+2 =521↓; K+3 =512↑ .				K-2= 411↑; K-1 =523↑; K=411↓ K+1 =404↓; K+2 =514↑; K+3=402↑			

Collective states

$K\pi$	Energy (MeV)		Structure of states
	Calc.	Experim.	
2+	1,3	0,944	nn523↓-521↓39%;nn521↑+521↑23%;pp411↑+411↓12%
0+	1,5	1,191	

Table 6

¹⁰⁴ ¹⁷⁴
₇₀ Yb

Configu- ration	$K\pi$	Energy (MeV)	Configu- ration	$K\pi$	Energy (MeV)
Neutron two-quasi-particle states			Proton two-quasi-particle states		
K,K+1	6+ 1+	1,2 —	K,K+1	3+ 4+	1,4 —
K-1,K+1	3+ 4+	1,6 —	K,K+2	5- 4-	1,6 —
K,K+2	2-coll. 7-	1,7 —	K-1,K+1	7- 0-coll.	1,9 —
K-2,K+1	7- 0-coll.	1,9 —	K+1,K+2	8- 1-	2,1 —
K-1,K+2	5- 4-	2,1 —	K,K+3	3+ 2+	2,1 —
K,K+3	2+coll. 3+	2,2 —	K-1,K+2	1+ 8+	2,1 —
K-1,K	3+ 2+	2,3 —	K-1,K	4- 3-	2,2 —
K+1,K+2	8- 1-	2,3 —	K-2,K+1	5+ 2+	2,3 —
K-2,K	1- 6-	2,5 —	K+1,K+3	6+ 1+	2,6 —
K+1,K+3	4+ 3+	2,8 —	K-2,K	2+coll. 1+	2,6 —
K-2=633↑; K-1=521↓; K=512↑; K+1 =514↓; K+2 =624↑; K+3 =510↑.			K-2 =411↑; K-1 =523↑; K=411↑; K+1 =404↓; K+2 =514↑; K+3 =402↑ .		

Collective states

$K\pi$	Energy (MeV)		Structure of states
	Calc.	Experim.	
2+	1,7	—	nn512↑-510↑50%, pp411↑+411↓18%, pp413↓-411↑9%
0+	1,5	—	
2-	1,4	1,321	nn624↑-512↑91%, pp402↑-514↑5%, pp411↑-523↑ 2%

106 176
 70 YB

Table 7

Neutron two-quasi particle states			Proton two-quasi-particle states		
Configuration	$K\pi$	Energy (MeV)	Configuration	$K\pi$	Energy (MeV)
K,K+1	8- 1-	1,1 —	K,K+1	3+ 4+	1,4 —
K,K+2	4+ 3+	1,6 —	K,K+2	5- 4-	1,6 —
K-1,K+1	2- coll. 7-	2,0 —	K-1,K+1	7- 0- coll.	1,9 —
K,K+3	2+ coll. 5+	2,0 —	K+1,K+2	8- 1-	2,1 —
K+1,K+2	4- 5-	2,1 —	K,K+3	3+ 2+	2,1 —
K-1,K	6+ 1+	2,2 —	K-1,K+2	1+ 8+	2,1 —
K-1,K+2	2+ coll. 3+	2,3 —	K-1,K	4- 3-	2,2 —
K-2,K+1	5- 4-	2,4 —	K-2,K+1	5+ 2+	2,3 —
K+1,K+3	6- 3-	2,4 —	K+1,K+3	6+ 1+	2,6 —
K-2,K	3+ 4+	2,6 —	K-2,K	2+ coll. 1+	2,6 —
K-2= 521↓; K-1 =512↑; K= 514↑; K+1 = 624↑; K+2 = 510↑; K+3 =512↓.			K-2= 411↑; K-1 =523↑; K= 411↓; K+1 = 404↓; K+2 = 514↑; K+3 = 402↑.		
Collective states					
$K\pi$	Energy (MeV)		Structure of states		
	Calc.	Experiment.			
2+	1,4	1,270	nn514↓- 512↓50%; nn512↑-510↑16%; pp411↑+411↓10% .		
0+	1,5	—			

Table 8

104 176
 72 Hf

Configura- tion	$K\pi$	Energy (MeV)	β -decay of ^{176}Ta 1- 404 \uparrow - 512 \uparrow	Energy (MeV)	$K\pi$	Configu- ration
Neutron two-quasi particle states			Proton two-quasi-particle states			
K, K+1	6+ 1+	1,2 —	— 1u	— a(2)	1,2 —	8- 1- K, K+1
K-1, K+1	3+ 4+	1,6 —	1*F —	— 1u	1,7 —	6+ 1+ K, K+2
K, K+2	2- 7-	1,7 —	ah —	— —	1,8 —	5- 4- K-1, K+1
K-2, K+1	7- 0- coll.	1,9 —	— aF	aF —	1,8 —	2- 7- K+1, K+2
K-1, K+2	5- 4-	2,1 —	— —	1*u —	1,9 —	3+ 4+ K-1, K
K, K+3	2+ coll. 3+	2,2 —	1(3) 1* Λ (3)	— —	— —	3+ 4+ K-1, K+2
K-1, K	3+ 2+	2,3 —	1* Λ (3) 1(3)	— 1F	2,1 —	3+ 2+ K-1, K+2
K+1, K+2	8- 1-	2,3 —	— aF	1u —	2,4 —	2+ coll. 5+ K, K+3
K-2, K	1- 6-	2,5 —	ah —	— 1F	2,4 —	1+ 8+ K-2, K+1
K+1, K+3	4+ 3+	2,8 —	— 1*F	— —	2,5 —	6- 3- K+1, K+3
				— ah	2,5 —	7- 0-coll. K-2, K
K-2=633 \uparrow ; K-1 =521 \downarrow ; K= 512 \uparrow K+1 =514 \downarrow ; K+2 =624 \uparrow ; K+3 =510 \uparrow .			K-2 =523 \uparrow ; K-1, =411 \downarrow ; K=404 \downarrow ; K+1 =514 \uparrow ; K+2 =402 \uparrow ; K+3=402 \downarrow .			

Collective states

$K\pi$	Energy (MeV)		Structure of states
	Calc.	Experiment	
2+	1,7	—	nn512 \uparrow -510 \uparrow 37%; pp404 \downarrow -402 \downarrow 33%; pp402 \uparrow -400 \uparrow 8%
0+	1,5	—	
0-	1,9	—	nn633 \uparrow -514 \downarrow 48%; nn660 \uparrow -770 \uparrow 14%, nn651 \downarrow -521 \downarrow 9%

110 184
 74 W

Table 9

Configu- ration	$K\pi$	Energy (MeV)		β -decay of Ta ¹⁸⁴		β -decay of Re ¹⁸⁴	
		Calc.	Exper.	3-	404↓- 510↑	3-	402↑+ 510↑

Neutron two-quasi-particle states

K, K+1	2+ coll.	1,6		1 Λ (1* h)	1u
	1+	-		1* h	-
K-1, K	4-	1,8		a h	a(2)
	5-	-		-	-
K-1, K+1	6-	1,8		-	-
	3-	-		aF	aF
K, K+2	3+	1,9		1u	1 Λ (1u)
	4+	-		1 Λ (1u)	1u
K, K+3	5+	2,0		1 Λ (1u)	1* h
	4+	-		1u	1 Λ (1* h)
K+1, K+2	5+	2,0		-	-
	2+	-		1F	1F
K-1, K+2	1-	2,0		-	-
	8-	-		-	-
K-2, K	4+	2,2		1 Λ (1u)	1 h
	3+	-		1u	1 Λ (1 h)
K+1, K+3	3+	2,2		1F	1F
	6+	-		-	-

K-2=514↓; K-1 = 624↑; K= 510↑; K+1 =512↓; K+2 =503↑; K+3=505↓

Proton two-quasi-particle states

K, K+1	2-	1,3	(1,15)	aF	a(4)
	7-	-	-	-	-
K-1, K+1	6+	1,5		-	-
	1+	-		1* u	-
K-1, K	8-	1,9		-	-
	1+	-		-	-
K, K+2	6-	1,9		-	-
	3-	-		aF	aF
K-1, K+2	2+	2,0		1 h	1F
	5+	-		1 Λ (1 h)	1*F
K+1, K+2	4+	2,1		1F	1 h
	1+	-		-	1 Λ (1 h)
K-2, K+1	3+	2,2		1F	1u
	2+ coll.	-		1F	1 Λ (1u)
K, K+3	4-	2,2		aF	aF
	5-	-		-	-

K-2=411↓; K-1 = 404↓; K= 514↑; K+1 = 402↑; K+2 = 402↓; K+3 = 400↑.

¹¹⁰ 186
 76 Os

Table 10

Neutron two-quasi-particle states			Proton two-quasi-particle states		
Configu- ration	$K\pi$	Energy (MeV)	Configu- ration	$K\pi$	Energy (MeV)
K,K+1	2+ coll. 1+	1,6 —	K,K+1	4+ 1+	1,3 —
K-1,K	4- 5-	1,8 —	K,K+2	2+ coll. 3+	1,6 —
K-1,K+1	6- 3-	1,8 —	K-1,K+1	6- 3-	1,8 —
K,K+2	3+ 4+	1,9 —	K-2,K+1	2+ coll. 5+	2,0 —
K,K+3	5+ 4+	2,0 —	K-1,K+2	4- 5-	2,0 —
K+1,K+2	5+ 2+	2,0 —	K+1,K+2	2+ coll. 1+	2,0 —
K-1,K+2	1- 8-	2,0 —	K,K+3	3- 8-	2,1 —
K-2,K	4+ 3+	2,2 —	K-1,K	2- 7-	2,1 —
K-2,K+1	2+ coll. 5+	2,2 —	K-2,K	6+ 1+	2,3 —
K+1,K+3	3+ 6+	2,2 —	K+1,K+3	7- 4-	2,5 —
K+1,K+4	3+ 0+ coll.	2,3 —	K-2,K-1	8- 1-	2,7 —

K-2 =514 \downarrow ; K-1 =624 \uparrow ; K=510 \uparrow ; K+1=512 \downarrow K+2=503 \uparrow ; K+3 =505 \downarrow ;K+4=501 \uparrow .	K-2=404 \downarrow ; K-1=514 \uparrow ;K=402 \uparrow ; K+1=402 \downarrow ; K+2=400 \uparrow ;K+3=505 \uparrow .
---	--

Table 11

Splitting energy of two-quasi-particle states

Nucleus	Configuration	$K\pi$	Energy (MeV)	$\Delta E_{exp.}$ (MeV)	$\Delta E_{theor.}$ (MeV)
Gd ¹⁵⁶	pp413 \downarrow_{\pm} 411 \uparrow	4+ 1+	1,511 2,026	0,515	0,51
	nn521 \uparrow_{\pm} 523 \downarrow	4+ 1+	— 1,966	—	0,4
Dy ¹⁵⁸	nn521 \uparrow_{\pm} 523 \downarrow	4+ 1+	1,672	—	0,4
Dy ¹⁶⁰	nn521 \uparrow_{\pm} 523 \downarrow	4+ 1+	1,694	—	0,4
Er ¹⁶⁶	nn633 \uparrow_{\pm} 523 \downarrow	6- 1-	1,785 1,826	0,041	0,6
Er ¹⁶⁸	pp523 \uparrow_{\pm} 411 \downarrow	4- 3-	(1,095) 1,543	(0,448)	0,4
Yb ¹⁷²	nn512 \uparrow_{\pm} 521 \downarrow	3+ 2+	1,174 1,468	0,294	0,4
Yb ¹⁷²	nn 514 \uparrow_{\mp} 521 \downarrow	3+ 4+	1,702 2,075	0,373	0,2
Hf ¹⁷⁸	pp514 \uparrow_{\pm} 404 \downarrow	8- 1-	1,148 —	—	1,1
	nn624 \uparrow_{\pm} 514 \downarrow	8- 1-	1,480 —	—	0,8
Hf ¹⁸⁰	pp514 \uparrow_{\pm} 404 \downarrow	8- 1-	1,142 —	—	1,1
W ¹⁸²	pp 514 \uparrow_{\mp} 402 \uparrow	2- 7-	1,290 1,961	0,671	0,7
	nn 624 \uparrow_{\mp} 510 \uparrow	4- 5-	1,554 —	—	0,1

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3703. Тираж 400. Апрель 1984 г. 1,5 уч.-изд. л.
Перевод И.С.Зарубиной.

16



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С.Н. Соколов

Р - 1639

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ
И ВОЗМОЖНОЕ НАРУШЕНИЕ
БОЗЕ И ФЕРМИ СТАТИСТИК

Дубна 1964

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release ¹⁰⁰⁹
2014/04/25 : CIA-RDP80-00247A002400260001-5 ние Бозе и
Ферми статистик.

Нелокальность потенциала в уравнении Шредингера может приводить к качественному изменению решений. В частности, различные частицы могут вести себя в области низких энергий как тождественные - Бозе или Ферми - в зависимости от конкретного выбора нелокального потенциала взаимодействия. Если наблюдаемая тождественность элементарных частиц не является абсолютной, а обеспечивается некоторыми нелокальными потенциалами, то эксперименты при достаточно больших энергиях могут обнаружить нарушение Бозе-Ферми симметрий волновых функций.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

P-1639

Sokolov S.N.

Non-Local Potentials and Possible Violation of Bose and Fermi Statistics.

Non-locality of the potential in the Schroedinger equation may cause a qualitative change of solutions. In particular, distinguishable particles may behave in the region of low energies as identical: Bose or Fermi ones depending on the specific choice of the non-local interaction potential. If the observed identity of elementary particles is not absolute but connected with some non-local potentials, then high energy experiments may detect the break down of Bose and Fermi symmetries of wave-functions.

Препринт Joint Institute for Nuclear Research.
Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release
2014/04/25 : CIA-RDP80-00247A002400260001-5

С.Н. Соколов

Р - 1639

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ
И ВОЗМОЖНОЕ НАРУШЕНИЕ
БОЗЕ И ФЕРМИ СТАТИСТИК

Дубна 1964

Как известно из ядерной физики^{/1/} и из квазипотенциального подхода в квантовой теории поля^{/2/}, учёт внутренней структуры частицы приводит к уравнению Шредингера с нелокальным потенциалом

$$-\nabla^2 \psi(r) + \int V(r, r') \psi(r') dr' = E \psi(r). \quad (1)$$

Обычно обращается мало внимания на новые физические эффекты, связанные с нелокальностью $V(r, r')$. Однако решения уравнения (1) могут качественно отличаться от решений обычного уравнения Шредингера с любым локальным потенциалом $V(r)$.

Возьмем для простоты одномерный случай. Рассмотрим сначала некоторую локальную потенциальную яму, в которой имеется несколько связанных состояний:

$$-\psi_n''(x) + \tilde{V}(x) \tilde{\psi}_n(x) = \tilde{E}_n \tilde{\psi}_n(x). \quad (2)$$

Как легко доказать, при любом конечном $\tilde{V}(x)$ функция основного состояния $\tilde{\psi}_0(x)$ отлична от нуля всюду, функция $\tilde{\psi}_1(x)$ имеет один нуль и так далее: чем больше нулей имеет волновая функция $\tilde{\psi}_n(x)$, тем выше энергия \tilde{E}_n . В нелокальном случае это правило нарушается. Чтобы это увидеть, возьмем потенциал

$$V(x, x') = \tilde{V}(x) \delta(x - x') + \sum_n c_n \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_n(x'), \quad (3)$$

где $\tilde{\psi}_n(x)$ удовлетворяют уравнению (2), а c_n - произвольные (вещественные) константы. Тогда собственные функции $\psi_n(x)$, удовлетворяющие нелокальному уравнению

$$-\psi_n''(x) + \int V(x, x') \psi_n(x') dx' = E_n \psi_n(x), \quad (4)$$

совпадают с $\tilde{\psi}_n(x)$, причём уровни энергии E_n , очевидно, равны

$$E_n = \tilde{E}_n + c_n. \quad (5)$$

Выбирая подходящим образом константы c_n , мы можем расположить состояния $\psi_n(x)$ в любой энергетической последовательности, например, превратить в основное состояние волновую функцию с n нулями или поднять некоторое связанное состояние выше уровня непрерывного спектра.

В рамках уравнения (1) нет глубокой разницы между различными и тождественными частицами. Последние являются не более чем предельным случаем почти неразличимых частиц. Чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть биллокальный потенциал

$$V(r, r') = b(|r|) [\delta(r - r') + \delta(r + r')] + f(|r|) [\delta(r - r') - \delta(r + r')], \quad (6)$$

где $r = r_1 - r_2$ - вектор относительного положения частиц 1,2, а функция $\delta(r)$, как обычно, равна $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Уравнение (4) с потенциалом (6) эквивалентно системе двух уравнений (2): одно уравнение только для четных состояний и с потенциалом $V(r) = 2b(|r|)$, другое - только для нечетных состояний и с потенциалом $V(r) = 2f(|r|)$. Если $f(|r|)$ положителен и очень велик, то частицы 1,2 ведут себя, за исключением очень высоких энергий, как тождественные Бозе-частицы с симметричными волновыми функциями и взаимодействующие при помощи локального потенциала $2b(|r|)$. Если же большим и положительным является потенциал $b(|r|)$, то частицы 1,2 ведут себя подобно фермионам. Для полной аналогии в потенциал нетрудно ввести спиновую переменную $s = s_1 - s_2$:

$$V(r, s, r', s') = b(|r|, |s|)[\delta(r-r')\delta_{s,s'} + \delta(r+r')\delta_{s,-s'}] + \\ + f(|r|, |s|)[\delta(r-r')\delta_{s,s'} - \delta(r+r')\delta_{s,-s'}]. \quad (7)$$

С экспериментальной точки зрения вопрос о том, являются ли известные элементарные частицы тождественными принципиально или при достаточно высоких энергиях симметрии волновых функций, связанные с Бозе и Ферми статистиками, нарушаются, является открытым. Если нелокальность - эффект внутренней структуры частиц или не открытых еще свойств пространства-времени, то нарушения свойств тождественности едва ли можно ожидать при энергиях ниже собственной массы взаимодействующих частиц. Что касается более высоких энергий, то экспериментальная информация относительно свойств тождественности бедна и никогда серьезно не анализировалась.

Автор благодарен М.И. Подгорецкому за обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. H.Feshbach. Ann. of Phys., 5, 357 (1958).
2. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3710. Тираж 400. 0,1 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. Апрель 1964 г.

17



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.В. Афанасьева, О.В. Ложкин, В.М. Мальцев, Ю.П. Яковлев

P-1642

ОБРАЗОВАНИЕ Li^8 В РАСЩЕПЛЕНИЯХ ЯДЕР C^{12}
ПРОТОНАМИ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Дубна 1964

Афанасьева Р.В., Ложкин О.В., Мальцев В.М.,
Яковлев Ю.П.

Образование Li^8 в расщеплениях ядер C^{12} протонами
высокой энергии

Рассмотрена модель фрагментации на основе гипотезы неупругих реакций между первичными протоном и кластером в ядре (на примере образования Li^8 протонами высокой энергии в расщеплениях C^{12}). Показано, что эта модель хорошо описывает известные экспериментальные данные без специального подбора параметров.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Afanasiyeva R.V., Lozhkin O.V., Maltsev V.M., Jakovlev Yu.P.

P-1642

Li^8 Production in Disintegrations of C^{12} Nuclei by High-Energy
Protons

A fragmentation model is treated under the hypothesis of inelastic reactions between the primary proton and cluster in the nucleus (the example of Li^8 production by high-energy protons in C^{12} disintegrations). This model is shown to describe the well-known experimental data without a special choice of the parameters.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1964

Р.В. Афанасьева, О.В. Ложкин, В.М. Мальцев, Ю.П. Яковлев

P-1642

ОБРАЗОВАНИЕ Li^8 В РАСЩЕПЛЕНИЯХ ЯДЕР C^{12}
ПРОТОНАМИ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

Дубна 1964

Изучение образования сложных частиц при взаимодействии нуклонов высокой энергии с ядрами представляет большой интерес как с точки зрения получения информации о механизме соответствующих реакций, так и для анализа строения ядра-мишени.

До последнего времени образованию фрагментов в реакциях с легкими ядрами особая роль отводилась механизму квазиупругого выбивания из ядра быстрым первичным или каскадным нуклоном целой ассоциации (кластера).

После обнаружения в эксперименте^{1,2/} больших передач импульса ядрам-остаткам при отщеплении от легкого ядра одного нуклона стало очевидно, что в ряде случаев неупругий процесс, протекающий на нуклонной ассоциации, может играть существенную роль^{3,4/}.

В том случае, когда изучается образование фрагментов, приведенные ширины которых для данного ядра-мишени значительно меньше, чем приведенные ширины соседних, более тяжелых кластеров, учет таких неупругих процессов становится совершенно необходимым. Такая ситуация, например, имеет место для пары кластеров Li^8 и Be^9 в ядре O^{16} , для которых эффективные числа $N_{эфф}$ равны 0,005 и 0,13 соответственно.

В легких ядрах малы (порядка 10^{-30} см^2) сечения передачи быстрым нуклоном кластеру типа Li или Be энергии, достаточной для того, чтобы кластер покинул ядро, а разветвленность каскада незначительна. Поэтому неупругие процессы в этом случае могут давать основной вклад.

В этой работе изучен один из возможных "неупругих" каналов образования Li^8 на ядре C^{12} . Выбранный канал описывается диаграммой рис. 1. Расчет проводился в импульсном приближении. Влиянием спин-орбитальных и тензорных сил в распадных вершинах пренебрегалось^{5, 6, 7/}.

В этом случае сечение процесса в лабораторной системе запишется следующим образом

$$\frac{d^2 \sigma}{d q d \cos \theta} = \frac{A}{p} q^2 \int N(k) f(\Delta^2) \omega (\omega^2 - 4m^2)^{1/2} \sigma_{pp}^{tot}(\omega) d^3 k$$

Здесь A некоторая константа, p - импульс первичного протона, $N(k)$ - импульсное распределение кластеров Be^9 в ядре C^{12} , $f(\Delta^2)$ - функция, характеризующая импульсное распределение протонов в кластере Be^9 , ω - квадрат полной энергии всех частиц,

образующихся в вершине 3 (рис. 1), m - масса протона, $\sigma^{tot}(\omega)$ - полное сечение p - p взаимодействия, \bar{k} - импульс кластера Be^9 в ядре C^{12} , \bar{q} - импульс фрагмента Li^8 , $\cos \theta$ - косинус направления его вылета по отношению к направлению падения первичного протона, Δ^2 - квадрат 4 - импульса, переданного в вершине 2.

Вычисления проводились при двух зависимостях $N(k)$:

$$N(k) = \delta(k) \quad \text{и} \quad N(k) = k^2 \exp(-k^2/k_0^2).$$

Параметр k_0 был взят близким к оболочечному осцилляторному параметру $k_0 = 275$ Мэв/с. Зависимость f от Δ^2 была определена ^{/2/} для свободных ядер Be^9 в области передаточной энергии T Li^8 более 2,5 Мэв. Функция $f(\Delta^2)$ была сшита при энергии $T = 4$ Мэв с осцилляторной волновой функцией $1p$ оболочки Be^9 , которая хорошо описывает распределение по импульсам в $1p$ оболочке этого ядра при малых T . Учет влияния нуклонов $1s$ оболочки не существен, поскольку удаление нуклона из этой оболочки приводит к столь высокому дырочному возбуждению ядра Li^8 , что оно претерпевает нуклонный распад.

Выбор в осцилляторной модели функции относительного движения Be^9 и He^3 в виде $k^2 \exp(-k^2/k_0^2)$ соответствует ограничению только $1p$ состояниям, что, очевидно, приведет к завышению вклада низкоимпульсной компоненты в $N(k)$ (кроме состояния относительного движения с $l = 1$ возможны и более высокие гармоники).

Вычисления проводились для энергий падающих протонов 650 Мэв и 2200 Мэв. Результаты вычислений приведены на рис. 2-5 совместно с экспериментальными данными, взятыми из работ ^{/3/, /8/}.

Из сопоставления приведенных экспериментальных и теоретических зависимостей следует, что 1) выбор импульсного распределения в виде $N(k) = \delta(k)$ не позволяет описать правильно совокупность экспериментальных данных; 2) спектры под данным углом хорошо описываются зависимостью $N(k) = k^2 e^{-k^2/k_0^2}$, а расхождение в низкоэнергичной части можно отнести за счет выбора слишком "мягкой" функции $N(k)$; 3) угловые распределения как в эксперименте, так и в расчете имеют максимум при 0° . Однако анизотропия, полученная в эксперименте, несколько выше расчетной. Отношение сечений при $T_p = 2200$ Мэв и $T_p = 650$ Мэв, согласно расчету, равно 1,5, что не противоречит росту сечения фрагментации на легких ядрах с возрастанием энергии бомбардирующих протонов.

В силу ограничений, наложенных при выполнении этого расчета, полученные результаты, разумеется, могут претендовать лишь на воспроизведение основных зависимостей процесса фрагментации. Более детальный расчет должен не только быть свободным от всех сделанных выше допущений, но и учитывать более сложные диаграммы, и в первую очередь, учесть взаимодействие в начальном состоянии.

Авторы выражают признательность доктору физико-математических наук В.Г.Соловьеву и доктору физико-математических наук В.С.Барашенкову за содействие в выполнении этой работы.

Л и т е р а т у р а

1. В.И.Богатин, О.В.Ложкин, Ю.П.Яковлев. ЖЭТФ, 45, № 6 (12) 2072 (1963).
2. О.В.Ложкин, Ю.П.Яковлев. Программа и тезисы докладов XIУ ежегодного совещания по ядерной спектроскопии в Тбилиси. Изд. Наука, 1964.
3. О.В.Ложкин, Н.А.Перфилов, Ю.П.Яковлев. ДАН 151, № 4, 826, 1963.
4. В.И.Богатин, О.В.Ложкин, Н.А.Перфилов, Ю.П.Яковлев. ЖЭТФ, 46, № 2, 431, 1964.
5. A.J.Mais, P.Hillman and H. Tugen. Nucl. Phys., 7, 10 (1958).
6. K.Riley. Nucl. Phys., 13, 407 (1959).
7. A.Johnsson, Y.Sakamoto. Nucl. Phys., 42, 625 (1963).
8. S.Katcoff. Phys. Rev., 114, 105 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 апреля 1964 г.

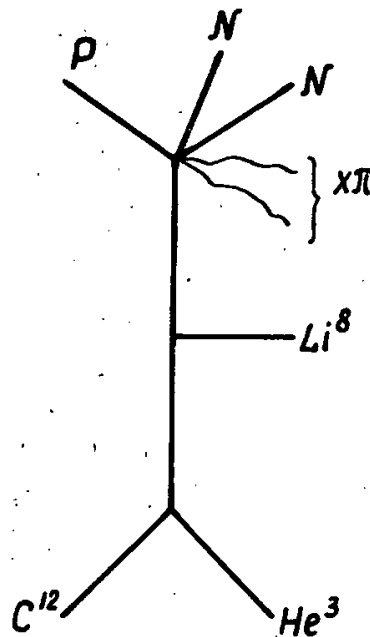


Рис. 1.

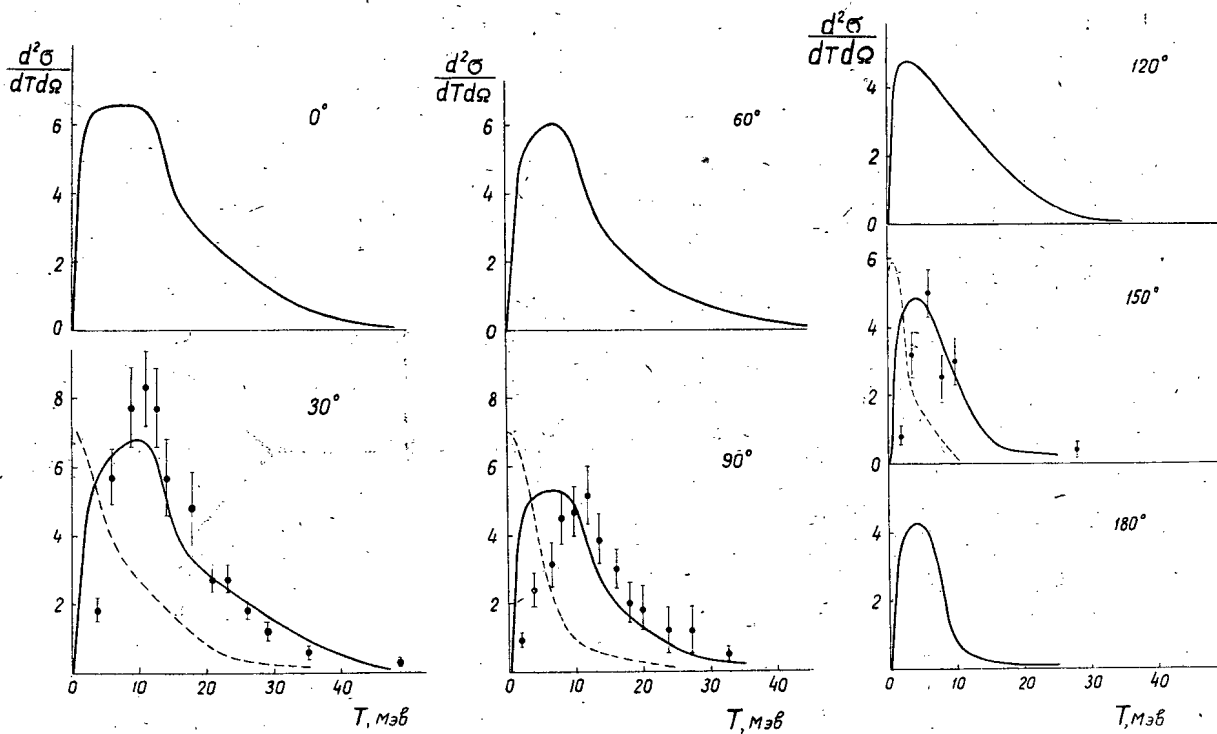


Рис. 2. Спектры ядер Li^8 при $T_p = 650$ Мэв. Сплошная линия - расчет при $N(k) = k^2 \exp(-k^2/k_0^2)$. Пунктир - расчет при $N(k) = \delta(k)$. Экспериментальные точки взяты из работы [1].

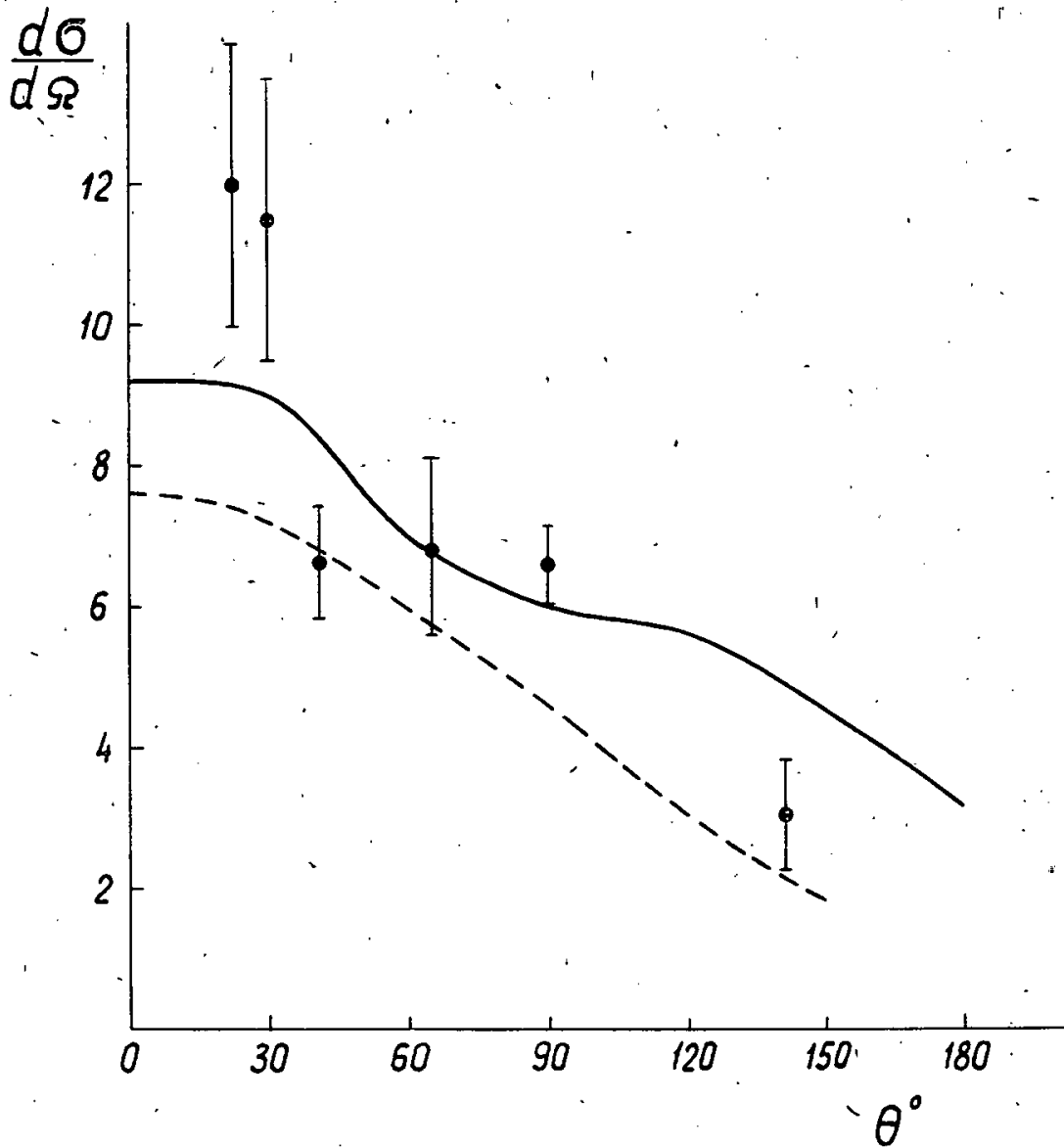


Рис. 3. Угловое распределение Li^8 при $T_p = 650$ Мэв. Сплошная линия - расчет при $N(k) = k^2 \exp(-k^2/k_0^2)$. Пунктир - расчет при $N(k) = \delta(k)$. Экспериментальные точки взяты из работы [98].

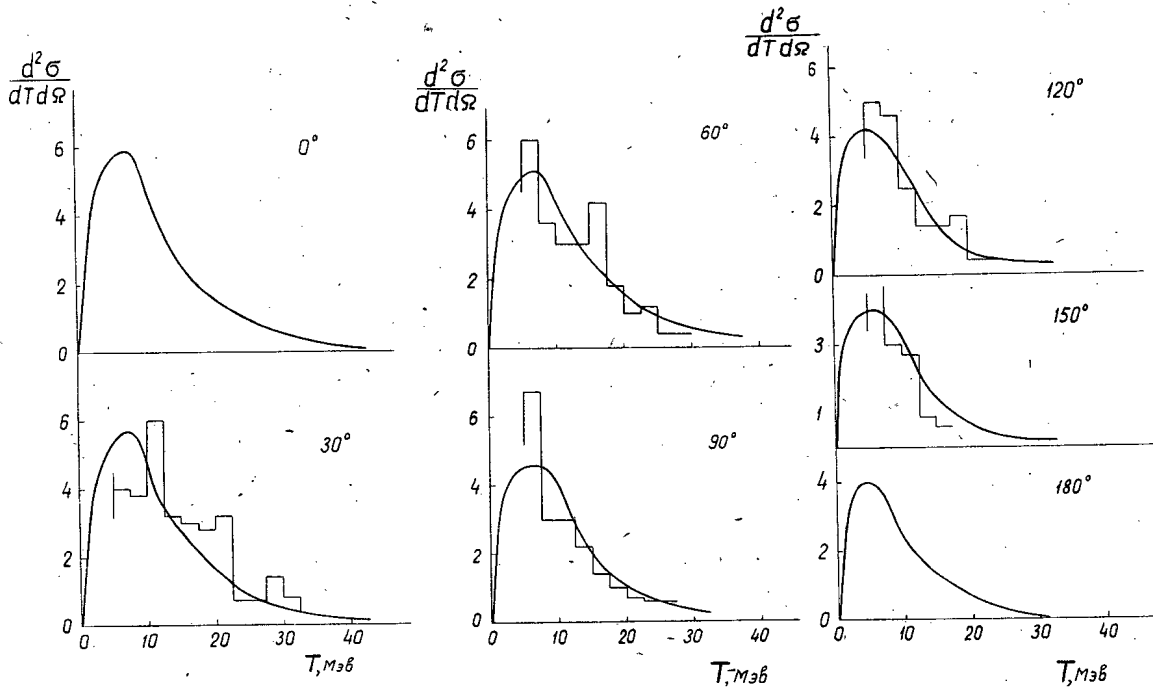


Рис. 4. Спектры ядер Li при $T_p = 2200$ Мэв. Сплошная линия - расчет при $N(k) = k^2 \exp(-k^2/k_0^2)$.
 Гистограмма - экспериментальные данные, взяты из работы [8].

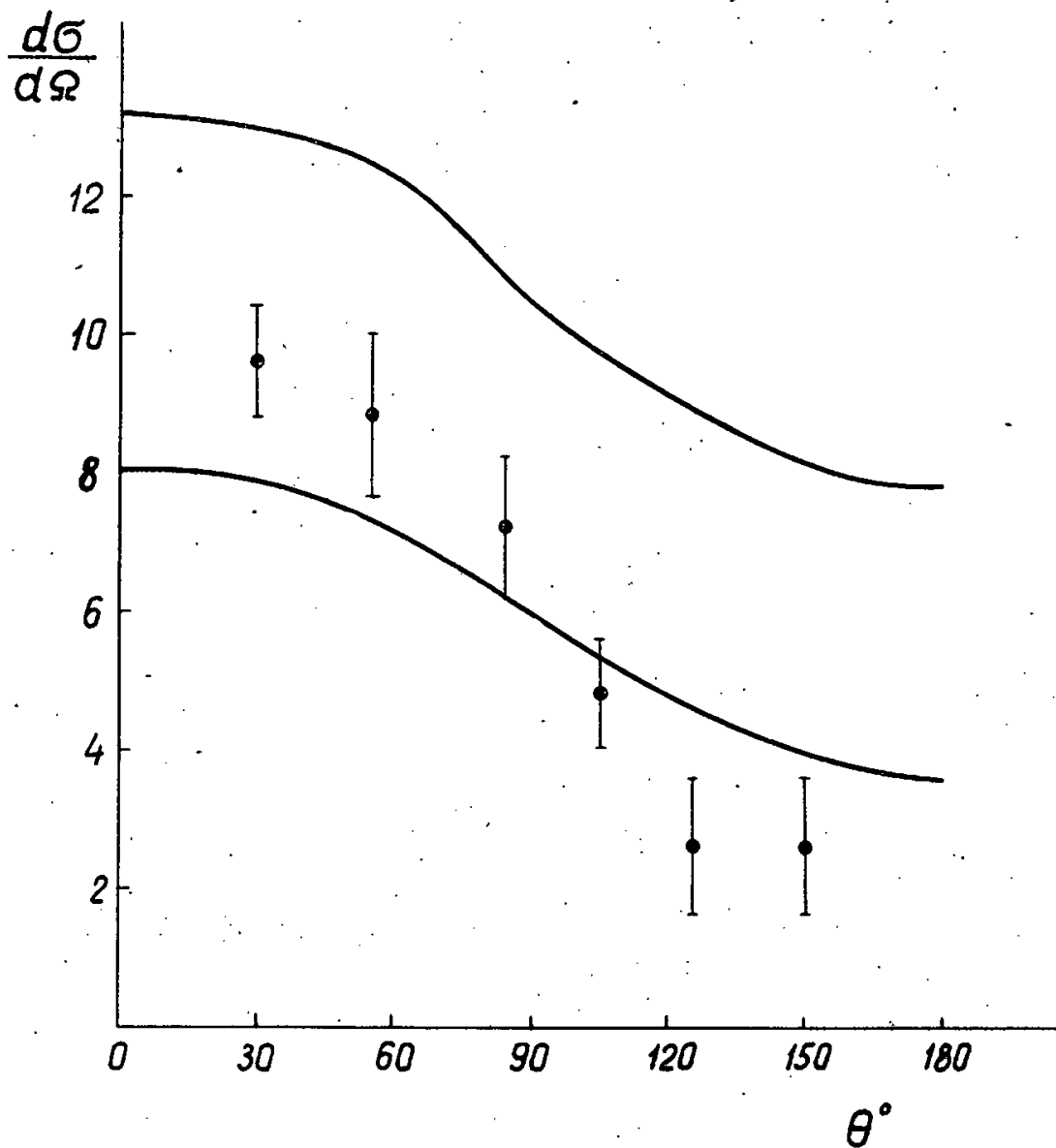


Рис. 5. Угловое распределение Li^8 при $T_p = 2200$ Мэв. Пунктир - расчет при $N(k) = k^2 \exp(-k^2/k_0^2)$
Сплошная линия - расчет при $N(k) = k^2 \exp(-k^2/k_0^2)$ и энергии Li^8 $T > 2,5$ Мэв
Экспериментальные точки взяты из работы /8/.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3715. Тираж 400. 0,6 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р.Сарацева Апрель 1964 г.

18



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.Г. Гришин

P-1622

**РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.
БОЗОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ**

Дубна · 1984

Гришин В.Г.

Резонансные взаимодействия элементарных частиц.
Бозонные резонансы.

В работе дан систематический обзор теоретических и экспериментальных данных по бозонным резонансам.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Grishin V.G.

P-1622

Resonance Interactions of Elementary Particles. Boson Resonances

A systematic review of theoretical and experimental data on boson resonances is given.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

В.Г. Гришин

P-1622

РЕЗОНАНСНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.
БОЗОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

Направлено в УФН

Дубна 1964

О г л а в л е н и е

Стр.

В в е д е н и е	5
I . ρ - мезон	6
§ 1. Масса и ширина	6
§ 2. Распадные свойства	10
§ 3. Квантовые числа	11
§ 4. Сечение $\pi\pi$ -взаимодействия и ρ -мезон	13
II f -мезон	17
III Исследование $\pi\pi$ -взаимодействия при малых энергиях (А.В.С.-ано- малия)	19
IV Поиски новых резонансных $\pi\pi$ -систем	20
V ω - мезон	21
§ 1. Масса и ширина	21
§ 2. Диаграммы Далитца	24
§ 3. Квантовые числа ω -мезона	26
§ 4. Электромагнитные распады ω -частиц	29
§ 5. ρ - ω -переходы	32
VI η -мезон	33
§ 1. Квантовые числа	33
§ 2. Распадные свойства η -мезона	37
§ 3. Время жизни η -мезона. Поиски новых резонансных (3π)-систем	41
VII Многопионные резонансные системы. B -мезон ($\pi\omega$ -резонанс)	42
VIII Резонансные системы K -мезонов	43
§ 1. Схемы распада $K^0\bar{K}^0$ -пар-детектор четности системы	44
§ 2. ϕ -мезон	45
§ 3. KK -взаимодействие при малых энергиях. ($KK\pi$)-резонанс	47
IX K^* -мезон	48
X κ - мезон ($K^*(725)$)	51
З а к л ю ч е н и е	53
Л и т е р а т у р а	54

В в е д е н и е

Интенсивное накопление экспериментальных данных о взаимодействиях элементарных частиц, обусловленное созданием гигантских ускорителей и больших пузырьковых камер, привело к открытию новой группы частиц - резонансов.

Характерной особенностью резонансов является их малое время жизни ($\tau \sim 10^{-22} - 10^{-23}$ сек). С точки зрения экспериментальных возможностей современных методов исследования, генерация и распад новых частиц происходят практически в одной точке. В связи с этим существование было обнаружено только с помощью косвенных методов при изучении резонансных свойств продуктов их распада. Отсюда и происходит название этих частиц - резонансы.

В настоящее время число открытых резонансов уже значительно превышает число элементарных частиц. В связи с этим возникает целый ряд принципиальных вопросов о природе всех частиц. Например, становится почти очевидным, что считать все частицы элементарными не более разумно, чем считать элементарными атомные ядра.

В последние годы изучение резонансов стало одной из основных задач физики высоких энергий. Этому вопросу посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ. Сейчас заканчивается период накопления основных данных о новых частицах и начинается период построения систематик и новых физических теорий, связанных с резонансами и элементарными частицами.

В настоящем обзоре будут подробно обсуждены квантовые числа и свойства бозонных резонансов на основании имеющихся данных на февраль 1964 года^{x)}.

Вопрос о сильных и резонансных взаимодействиях бозонов начал интенсивно обсуждаться после открытия максимума в кривой πp -сечения при кинетической энергии π -мезонов $T \approx 900$ Мэв^{/14-16/}. В 1955 году было высказано предположение о том, что этот максимум обусловлен резонансом в $\pi\pi$ -системе, а не в πN -системе, так как в последнем случае спин резонанса был бы очень большим ($J \geq \frac{11}{2}$), что маловероятно^{/15/,/16/}. В предложенной модели $\pi\pi$ -резонанс имел массу $M \approx 430$ Мэв и ширину $\Gamma \approx 100$ Мэв. Как показали дальнейшие исследования πN -взаимодействия, эта модель в действительности не имеет места. Однако эти предположения стимулировали развитие экспериментов по изучению $\pi\pi$ -взаимодействия, которые привели к открытию целого ряда резонансных систем π -мезонов.

x) По этому вопросу см. также работы обзорного характера^{/1-13/}.

В 1960 году были сообщены первые экспериментальные результаты по исследованию $K\pi$ -взаимодействия, в которых было обнаружено существование K^* -мезона. В 1962-63 годах началось изучение свойств KK -пар и многопионных систем. Наиболее достоверные резонансы и их основные свойства приведены в таблице 1. Несомненно, что в настоящее время ее нельзя считать полностью законченной.

I. ρ -мезон

§ 1. Масса и ширина

Экспериментальные данные о существовании и свойствах ρ -мезона получены, главным образом, при изучении одиночного рождения π -мезонов в реакциях:



и при исследовании процессов аннигиляции антипротонов. Существование ρ -мезона было также обнаружено в процессах фоторождения пионов и в протон-протонных столкновениях /17/.

Особенно много работ посвящено изучению реакций (1)-(4) при $E_\pi \sim 1$ Бэв. Уже в первых работах /18-20/, выполненных с помощью водородных пузырьковых камер, отмечалось, что имеется указание на существование резонансного $\pi\pi$ -взаимодействия с $M \sim 600$ Мэв. Однако статистика в этих работах была невелика (около 100 событий типа (4)), поэтому нельзя было сделать определенных заключений о резонансе в $\pi\pi$ -системе. Дальнейшее увеличение статистики до нескольких тысяч событий типа (1-4) позволило определить массу и ширину ρ -мезона.

Например, в работе /21/ исследовалось рождение мезонов в $\pi^+ p$ -соударениях, при $T = 910, 1090$ и 1260 Мэв. На рис. 1 приведены полученные распределения по эффективным массам систем $(\pi^+ \pi^0)$ и $(\pi^+ \pi^+)$ -мезонов. Здесь же приведены и ожидаемые распределения, вычисленные из статистических соображений. В этом месте мы сделаем небольшое отступление, чтобы пояснить, что представляют собой эти распределения по эффективным массам той или иной группы частиц, а также в каких предположениях получены теоретические кривые, так как аналогичные графики широко используются при изучении резонансов.

Таблица I
 Бозонные резонансы^{х)}

Обоз- наче- ние	Стран- ность	$I(J^{P G}, \text{xx})$	$C P^{\text{xxx}}$	Масса (Мэв)	Ширина (Мэв) или τ (сек)	Основные схемы распада	Относительная вероятность распада в (%)
π	0	$1(0^{--})$	(-)	π^0 -135	π^0 $-1 \cdot 10^{-16}$ сек	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	100
				π^\pm -140	π^\pm $-2,5 \cdot 10^{-8}$ сек	$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$	100
K	+1	$\frac{1}{2}(0^-)$	(-)	K^0 -498	K_1^0 -10^{-10} сек	$K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$	66
				K^+ -494	K_2^0 $-8 \cdot 10^{-8}$ сек	$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$	64
					K_2^+ $-1,22 \cdot 10^{-8}$ сек		
η	0	$0(0^{-+})$	(-)	548 ± 1	≤ 7	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	30 \pm 8
						$\pi^0 \pi^0 \pi^0$	22 \pm 9
						$\pi^+ \pi^- \gamma$	8 \pm 2
						$\gamma \gamma$	40 \pm 17
ρ	0	$1(1^{-+})$	(+)	750 ± 5	100 ± 10	$\pi^+ \pi^-$	100
ω	0	$0(1^{--})$	(+))	784 ± 1	$9,5 \pm 2,1$	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	85
						$\pi^0 \gamma$	10 \pm 3
						$\pi^+ \pi^-$	4,5 \pm 1,6
ϕ	0	$0(1^{--})$	(+))	$1018,6 \pm 0,5$	$3,1 \pm 1,0$	$K_1^+ K_2^-$	90
						$\rho \pi$	≤ 10
K^*	+1	$\frac{1}{2}(1^-)$		890 ± 1	51 ± 2	$K \pi$	100
f	0	$0(\geq 2^{++})$	(+)	1250 ± 25	150 ± 50	$\pi \pi$	100

х) В этой таблице для сравнения приведены свойства π и K-мезонов.

xx) $I(J^{P G})$ - изотопический спин, спин, четность и G-четность резонанса.

xxx) CP - комбинированная четность.

Эффективная масса ν -частиц определяется выражением

$$M_\nu = \left[\left(\sum_{i=1}^{\nu} E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} \vec{p}_i \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (5)$$

где E_i и \vec{p}_i - полная энергия и импульс соответствующей частицы, $c = 1$ ^{x)}. Если эти частицы являются продуктами распада другой нестабильной частицы-резонанса, то из общих положений квантовой механики можно показать, что распределение по эффективным массам ν -частиц будет иметь вид^{/22,23/}:

$$W(M_\nu) \sim \frac{1}{(M_\nu - M_0)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (6)$$

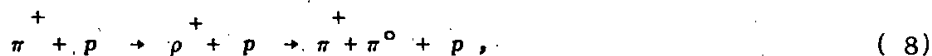
где M_0 - масса нестабильной частицы и Γ - связано с ее временем жизни τ соотношением неопределенности энергия-время

$$\Gamma \cdot \tau \approx 1. \quad (7)$$

Отметим также, что формулы (6) и (7) получены в нерелятивистской квантовой механике для квазистационарных состояний и применение их к распадам нестабильных частиц является не совсем законной операцией. Однако ввиду отсутствия теории элементарных частиц использование наиболее общих выводов квантовой механики для интерпретации наблюдаемых резонансов кажется целесообразным.

Итак, изучая распределения $W(M_\nu)$, можно найти максимум типа (6), ширина и положение которого характеризуют массу и время жизни искомого резонанса.

Вернемся к рассматриваемым процессам (1) и (3). В этом случае, если, например, процесс (3) идет только по схеме



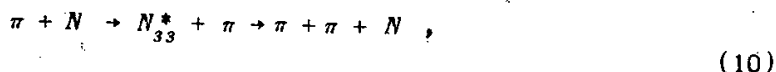
т.е. через образование ρ -мезона, то распределение $W(M(\pi^+ \pi^0))$ будет иметь вид (6). Однако обычно наряду с реакцией (8) идет и реакция (3) без образования резонанса. Тогда резонансные пики будут наблюдаться на некотором фоне от процесса (3). Очень часто делается предположение, что распределение $W(M(\pi\pi))$ для реакции типа (1) и (3) определяется только объемом фазового пространства состояний, допустимых при данном значении эффективной массы $M_0(\pi\pi N)$ системы^{xx)}. Тогда

$$\frac{dW(M_0, M(\pi\pi))}{dM(\pi\pi)} = \int \frac{d^3 \vec{p}_{\pi_1}}{2E_{\pi_1}} \frac{d^3 \vec{p}_{\pi_2}}{2E_{\pi_2}} \frac{d^3 \vec{p}_N}{2E_N} \times \delta \left(\sum_{i=1}^3 \vec{p}_i - \vec{P} \right) \delta \left(\left[\left(\sum_{i=1}^2 E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^2 \vec{p}_i \right)^2 \right]^{1/2} - M(\pi\pi) \right). \quad (9)$$

x) Выражение (5) является релятивистским скаляром и поэтому можно M_ν вычислить по имеющимся значениям E_i и P_i в любой системе координат. В дальнейшем во всех формулах полагается $\hbar = c = 1$.

xx) В некоторых случаях вопросы интерференции фона и резонансного канала реакции могут быть существенны (см., например, I § 3).

Здесь предполагается, что матричный элемент πN -взаимодействия не зависит от энергий и импульсов образующихся частиц и является константой. В дальнейшем распределение (9) будем называть статистическим фоном резонансных состояний^{/24/}. На рис. 1 приведены кривые, характеризующие статистический фон от реакций (1) и (3), и кривые, имеющие форму трапеций, - от реакций



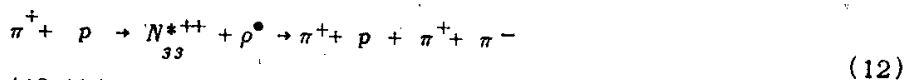
где N_{33}^* - изобара с $M = 1230$ Мэв и изотопическим спином $I = 3/2$.

Как видно из рисунка, имеется четкий пик над статистическим фоном, особенно при $T = 1260$ Мэв, с $M = 750$ Мэв и $\Gamma = 100$ Мэв в распределении по эффективным массам ($\pi^+ \pi^0$)-систем (ρ^+ -мезон). Отсутствие соответствующего пика в ($\pi^+ \pi^+$)-системах, имеющих $I = 2$, позволяет сделать вывод о том, что $I(\rho) = 1$, так как $I(\pi^+ \pi^0)$ может принимать только два значения - 1 и 2.

Аналогичные выводы о ρ -мезоне были получены и в других работах при изучении πN -взаимодействия в интервале энергий π -мезонов от 1 до 17 Гэв^{/25-43/}. Сечение рождения ρ -мезонов составило величину - 3,5 мб в реакциях (3) и

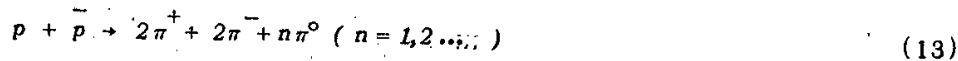


при $E_{\pi^+} = 2$ Гэв и упало до нескольких десятых миллибарна при $E_{\pi^+} \sim 10$ Гэв^{/39,40,41/}. Интересно отметить, что в интервале энергий $E_{\pi^+} = (2-4)$ Гэв реакция (11), в основном, идет по схеме



с сечениями около 1 мб^{/40,41/}.

Свойства и характеристики ρ -мезона также изучались и в аннигиляционных процессах^{/44-48/}. При исследовании реакций



с помощью 72-дюймовой водородной пузырьковой камеры было отмечено, что имеется указание о двойной структуре пика ρ^0 -мезона ($\pi^+ \pi^-$ -система)^{/44/}. А именно, этот пик можно разделить на два - с $M_1 = 720$ Мэв, $\Gamma_1 = 20$ Мэв и $M_2 = 780$ Мэв, $\Gamma_2 = 60$ Мэв. Однако это разделение статистически не обеспечено и авторы считают, что объяснение экспериментальных данных с помощью одного резонансного пика также возможно. Следует отметить, что в других работах, где наблюдался ρ^0 -мезон, не было замечено подобной структуры резонансного пика.

В заключение остановимся на работе^{/38/}, результаты которой несколько отличаются от выводов большинства других экспериментов, посвященных изучению ρ -мезона.

В этой работе с помощью искровых камер исследовались πN -взаимодействия при импульсах падающих π^- -мезонов 12 и 17 Гэв/с. Отбирались такие случаи рождения $(\pi^+\pi^-)$ -пар, когда их угол вылета был мал, т.е. столкновения периферического типа. Было получено, что $\Gamma(\rho^0) \approx 40$ Мэв. Энергия ρ^0 -мезонов составляла $\sim (10-15)$ Гэв, и они пролетали до распада расстояние $\sim 10^{-11}$ см (см. (8)), т.е. распадались вне области πN -взаимодействия (10^{-13} см). Таким образом, малую ширину резонанса в этом эксперименте можно было бы объяснить отсутствием взаимодействия частиц в конечном состоянии, в то время как в других работах, выполненных при более низких энергиях, такого утверждения делать нельзя (распадное расстояние $\sim 10^{-13}$ см).

Однако ввиду малой статистики (219 случаев), эти результаты^{/38/} следует рассматривать только как указание на возможность "уширения" резонанса за счет эффектов, связанных с взаимодействием частиц в конечном состоянии.

§ 2. Распадные свойства

В настоящее время, кроме распадов $\rho \rightarrow 2\pi$, не наблюдалось никаких других возможных распадов ρ -мезона. Имеются лишь грубые оценки вероятностей этих распадов.

Так, например, для процесса

$$\rho \rightarrow 4\pi \quad (14)$$

было получено^{/45,46,49/}:

$$R_1 = \frac{W(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-)}{W(\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)} \leq 2\% \quad (14')$$

$$R_2 = \frac{W(\rho^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \pi^+\pi^-)}{W(\rho^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0)} \leq 5\% \quad (14'')$$

$$R_3 = \frac{W(\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0\pi^0)}{W(\rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0)} \leq 4\% \quad (14''')$$

т.е. доля распада (14), возможно, составляет несколько процентов от основного распада ρ -мезона.

Было также установлено, что распад

$$\rho \rightarrow \eta + \pi, \quad (15)$$

если и происходит, то с вероятностью, меньшей, чем $8 \cdot 10^{-3}$ от вероятности основного распада ^{/45,50/}. Реакция (15) очень интересна с точки зрения исследования свойств η -мезона (см. η -мезон).

Имеются экспериментальные данные и о распадах

$$\rho \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma \quad (16)$$

и $\rho^0 \rightarrow$ нейтральные частицы, (17)

В последнем случае ^{/51,52/}

$$R_4 = \frac{W(\rho \rightarrow \text{нейтр. частицы})}{W(\rho \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \leq (6 \pm 40)\% \quad (17')$$

Таким образом, можно констатировать, что экспериментальное исследование новых схем распада ρ -мезона только начинается.

Между тем имеется ряд теоретических моделей, которые позволяют оценить вероятности некоторых схем распадов ρ -мезонов ^{/53-58/}. Например, было получено ^{/54-57/}:

$$R_5 = \frac{W(\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma)}{W(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx 1\% \quad (18)$$

$$R_6 = \frac{W(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)}{W(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \approx 1\% \quad (19)$$

$$R_7 = \frac{W(\rho \rightarrow \pi e^+ e^-)}{W(\rho \rightarrow \pi \gamma)} \approx 0,8\% \quad (20)$$

и т.д. Изучение процессов (14), (16), (17), (18) и др. может существенно помочь при определении квантовых чисел и свойств ρ -мезона.

§ 3. Квантовые числа

В первом параграфе этого раздела было показано, что $I(\rho) = 1$. Отсюда, если наблюдавшийся распад $\rho \rightarrow 2\pi$ обусловлен сильным взаимодействием (о чем свидетельствует большая ширина резонанса), то в силу изотопической инвариантности спин ρ -мезона должен быть равен целому нечетному числу, т.е. его четность отрицательна^{x)}.

х) Полная волновая функция системы двух мезонов должна быть симметричной относительно одновременной перестановки изотопических и пространственных переменных в силу тождественности частиц (бозоны). Изотопическая часть волновой функции двух π -мезонов с $I = 1$ антисимметрична относительно перестановки изотопических переменных. Поэтому и пространственная часть должна быть также антисимметрична относительно перестановок пространственных переменных, т.е. четность системы отрицательна: $P = (-1)^J = -1$.

G - четность ρ -мезона положительна, так как он распадается по сильному взаимодействию на два π -мезона (см. таблицу 1) ^{x)}. Однако необходимо помнить, что заключение об изотопическом спине ρ -мезона, на основании которого и были определены почти все его квантовые числа, носит качественный характер (см. § 1). Поэтому особенно важны и другие имеющиеся данные о квантовых числах ρ -мезона. В этом параграфе будет рассмотрен анализ угловых распределений продуктов распада ρ -мезона, в следующем - данные о сечении $\pi\pi$ -взаимодействия, которые, в основном, подтверждают сделанные выше выводы.

На рис. 2 приведено угловое распределение π^- -мезонов, образованных при распадах ρ^- -мезонов. Распределение дано в системе покоя ρ -мезонов относительно направления падающего пучка. Эти данные были получены при исследовании реакции (4) с помощью 50 см водородной пузырьковой камеры, облученной в пучке π^- -мезонов с импульсом 1,6 Гэв/с ^{/49/}. Были отобраны только те случаи рождения ρ -мезонов, в которых они вылетают в направлении, близком к направлению падающего пучка π^- -мезонов. Как видно из рис. 2, в распределении распадных ρ -мезонов доминирующим является член $-\cos^2\phi$. Этот факт свидетельствует о том, что $J(\rho) \geq 1$. Более подробный анализ показывает, что в этом распределении имеется также и S -волна (изотропная часть распределения), которая свидетельствует о наличии $\pi\pi$ -взаимодействия с $I=2$ и $J=0,2$. Это обстоятельство сильно усложняет изучение резонансного $\pi\pi$ -взаимодействия, так как возникают вопросы, связанные с интерференцией взаимодействий π -мезонов в состояниях с $I=1$ и $I=2$, выделением взаимодействия с $I=1$ в чистом виде и т.п.

Подробное рассмотрение этого вопроса в работе ^{/61/} показало, что имеющиеся экспериментальные данные по процессам (1-4) допускают в некоторых предположениях большой вклад ($\pi\pi$)-взаимодействия с $I=2$ в области ρ -мезонов. Еще более сложная ситуация имеет место в случае ρ^0 -мезонов.

При исследовании периферических взаимодействий π^- -мезонов с импульсом 3 Гэв/с с протонами в реакциях (2) было обнаружено, что в распределении, типа показанного на рис. 2, имеется значительная асимметрия "вперед-назад" ^{/32,62/хх}. Интерпретация этого распределения в терминах $\pi\pi$ -рассеяния показала, что имеется сильное или даже резонансное взаимодействие π -мезонов с $I=0$ и $J=0$. Таким образом, в области ρ^0 -мезона можно ожидать еще наличия другого резонанса с $I=0$. В связи с этим представляется интересным изучение процессов, в которых π -мезоны рождаются в синглетном изотопическом состоянии. В качестве примера можно привести реакцию

^{x)} G - четность π -мезона отрицательна, G -четность системы π -мезонов равна произведению G -четностей всех π -мезонов, входящих в эту систему ^{/59,60/}.

$$d + d \rightarrow He_2^4 + \pi^+ + \pi^- \quad (21)$$

Таким образом, исходя из этих данных заключение о $J(\rho) = 1$ нельзя считать окончательным, хотя оно и является наиболее вероятным.

§ 4. Сечение $\pi\pi$ -взаимодействия и ρ -мезон

Существование резонанса, распадающегося на два π -мезона (ρ -мезон), должно привести к появлению максимума в энергетическом ходе сечения $\pi\pi$ -взаимодействия. Исследование этого максимума позволило бы сделать более определенные заключения о квантовых числах ρ -мезона. В настоящее время нет встречных пучков π -мезонов, поэтому возможны лишь косвенные заключения о $\pi\pi$ -взаимодействии.

Большая часть известных данных о $\pi\pi$ -взаимодействии была получена из опытов по одиночному рождению пионов в πN -соударениях с помощью метода, предложенного Чу и Лоу^{/63/}. Они обратили внимание на то, что одномезонные диаграммы (рис. 3 и 4) при квадрате импульса, переданного нуклону $\Delta^2 = -m_\pi^2$, имеют полюс. В этом случае сечение $\pi\pi$ -рассеяния определяется выражением

$$\sigma_{\pi\pi}(\omega) = -4\pi f^{-2} F(\omega^2, -m_\pi^2) p^2 [\omega^2(\omega^2 - 4m_\pi^2)]^{1/2} \quad (22)$$

где f - константа πN -взаимодействия ($f^2 \approx 0,08$), p - импульс падающего π -мезона в л.с. координат, ω - полная энергия вторичных мезонов в их с.ц. инерции и значение величины

$$F(\omega^2, \Delta^2) = \frac{d^2 \sigma(\pi N \rightarrow \pi\pi N)}{d\Delta^2 d\omega^2} (\Delta^2 + m_\pi^2)^2 \quad (23)$$

взято при $\Delta^2 = -m_\pi^2$. Вклад от процессов, описываемых другими диаграммами, в этом случае можно не рассматривать, так как эти диаграммы не имеют полюсов. Однако все эти утверждения справедливы для нефизической области переданных импульсов, поэтому сечение $\sigma(\omega)$ можно получить только с помощью экстраполяции экспериментальных значений $\frac{d^2 \sigma(\pi N \rightarrow \pi\pi N)}{d\Delta^2 d\omega^2}$ в области $\Delta^2 \geq 0$ к точке $\Delta^2 = -m_\pi^2$. Эта экстраполяция окажется наиболее надежной, если будут использованы данные в области $\Delta^2 \leq m_\pi^2$, т.е. наиболее близкие к полюсу. Однако отбор πN -взаимодействий в области $\Delta^2 \leq m_\pi^2$ соответствует измерению процессов с сечением порядка нескольких десятков микробарн на фоне существенно более вероятных процессов, что в настоящее время является сложной экспериментальной задачей. Поэтому в тех случаях, когда статистическая точность анализируемого материала оказывается недостаточной для разбиения его по двум параметрам ω^2 и Δ^2 , применяется несколько иной метод обработки экспериментальных данных. В этом методе предполагается, что все случаи реакций (1-4) при $\Delta^2 < (n m_\pi^2)$, где $n = 1, 2, 3 \dots$, описываются одномезонными диаграммами

ми (рис. 3 и 4) и сечение взаимодействия виртуального π -мезона с первичным пионом зависит только от ω (в общем случае $\sigma = f(\omega^2, \Delta^2)^x$). Тогда мы имеем:

$$\frac{d^2 \sigma(\pi N \rightarrow \pi \pi N)}{d\Delta^2 d\omega^2} = \frac{f^2 \Delta^2}{4\pi p^2 m_\pi^2} \sqrt{\omega^2 (\omega^2 - 4m_\pi^2)} \sigma_{\pi\pi}(\omega). \quad (24)$$

После интегрирования выражения (24) по Δ^2 можно сравнивать с опытом теоретически рассчитанное сечение $\frac{d\sigma}{d\omega^2}$. Это обстоятельство позволяет использовать менее точные данные о процессах (1-4), чем в случае экстраполяционной процедуры. Этот метод получил название "Метод сравнения в физической области" (*Physical-region-plot-method*).

Рассмотренные выше два метода дают по существу один и тот же результат, если в физической области переданных импульсов реакции (1-4) описываются, в основном, одномезонными диаграммами. В противном случае трудно сказать, какой метод дает результат, более близкий к действительности. Для этого заключения необходимы дополнительные исследования.

Перейдем к анализу имеющихся экспериментальных данных^{xx)}. В наиболее изученной области энергий первичных π -мезонов ($E \sim 1$ Гэв) имеются данные, которые показывают, что вклад процессов (1-4), описываемых диаграммами 3 и 4, не является доминирующим.

Так, например, сравнение экспериментальных и теоретических распределений вторичных π -мезонов по углу между ними в πN -системе при $E \approx 1$ Гэв показало, что вклад в сечение реакции (2) от процесса, описываемого диаграммой 4, не превышает 30%. Теоретические расчеты были проведены по формуле (24), а также по статистической теории с учетом рождения N^* -изобары^{/65/}.

В 1962 году Трэйман и Янг предложили общие критерии, которым должны удовлетворять процессы, описываемые диаграммами рис. 3 и 4^{/66/}. Суть их предложения заключается в следующем: структура одномезонных диаграмм 3 и 4 приводит к отсутствию корреляций (кроме кинематических) между частицами в нуклонных и пионных узлах. Это связано с тем обстоятельством, что виртуальная частица (π -мезон) имеет

x) В работе^{/64/} предложен способ вычисления сечения процессов, описываемых одномезонными диаграммами (рис. 3 и 4) в физической области переданных импульсов без предположения о том, что сечение взаимодействия виртуального π -мезона с падающим пионом зависит только от ω . В этом способе используются данные о пионных формфакторах нуклона, полученные из анализа одиночного рождения мезонов в нуклон-нуклонных столкновениях.

xx) Подробная сводка данных о сечении упругого $\pi\pi$ -взаимодействия имеется в работе^{/137/}.

спин, равный нулю. В этом случае, например, дифференциальные сечения реакций (1-4) не должны зависеть от взаимной ориентации векторов $[\vec{K}_1 \times \vec{K}_2]$ и $[\vec{p}_1 \times \vec{p}_2]$. Здесь \vec{K}_1 и \vec{K}_2 - импульсы вторичных мезонов, \vec{p}_1 и \vec{p}_2 - импульсы нуклонов в πN -системе^{х)}.

Кроме того, в силу изотопической инвариантности все характеристики реакций (3) и (4), описываемых одномезонными диаграммами, должны быть одинаковы^{/67/}.

Подробная проверка применимости одномезонного приближения при $T = 1,25$ Гэв была проведена в работе^{/68/}. Найденные события типа (2) с $\Delta^2 < 16 m_\pi^2$ были разбиты на две группы по углу α (α - угол между направлениями $[\vec{K}_1 \times \vec{K}_2]$ и $[\vec{p}_1 \times \vec{p}_2]$). Коэффициенты асимметрии "вперед-назад" в распределении π^- -мезонов в системе покоя вторичных мезонов оказались равны $0,40 \pm 0,09$ для случаев с $\alpha \leq 90^\circ$ и $0,08 \pm 0,09$ для $-\alpha > 90^\circ$ ^{оxx)}. Таким образом, имеется сильная зависимость коэффициента асимметрии от угла α , т.е. отобранный экспериментальный материал не удовлетворяет критерию Треймана-Янга.

К аналогичному выводу приводят и результаты исследования реакций (3) и (4) при импульсе падающих π^- -мезонов 1,25 Гэв/с^{/69/}. Оказалось, что отношение сечений этих процессов для $\Delta^2 < 9 m_\pi^2$ равно

$$\frac{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p \pi^0)}{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p \pi^0)} = 4,6 \pm 0,3 \quad (25)$$

Как отмечалось выше, в случае доминирующего вклада процессов, описываемых одномезонными диаграммами, отношение (25) должно быть близко к единице.

Итак, анализ экспериментальных данных показывает, что при энергии падающих мезонов около 1 Гэв реакции (1-4) нельзя описать только одномезонными диаграммами и необходимо учитывать вклад других возможных диаграмм. В качестве иллюстрации приведем данные о сечении реакций

$$\pi^+ + \pi^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^0, \quad (26)$$

$$\pi^- + \pi^0 \rightarrow \pi^- + \pi^0, \quad (27)$$

полученные в работе^{/69/} "методом сравнения в физической области" (рис. 5). Как видно из рисунка, имеется широкий максимум в кривой сечения реакции (26) с $M_{рез.} = 725 \pm 25$ Мэв, который можно отождествить с ρ^+ -мезоном. С другой стороны, в кривой $\pi^+ \pi^0$ -сечения нет никаких указаний на существования ρ^0 -мезона. Экстраполяция-

х) Следует подчеркнуть, что выполнение критерия Треймана-Янга является необходимым условием для возможности описания процессов одномезонными диаграммами, но не является достаточным.

xx) Коэффициенты асимметрии равны отношению разницы в числе π^- -мезонов, летящих в переднюю и заднюю полусферы, к полному числу π^- -мезонов.

ная процедура, примененная к этим же экспериментальным данным, дает одинаковые результаты для сечений реакций (26) и (27) в области энергий, соответствующих ρ -мезону, и разные - вне этой области.

Авторы считают, что имеется доминирующий вклад от процесса, описываемого одномезонной диаграммой, только в реакции (3). В случае же реакции (4) существенную роль играют процессы, описываемые другими диаграммами; например, диаграммой, в которой учитывается взаимодействие в конечном состоянии (рис. 6). Поэтому результаты, полученные в этой работе из анализа событий типа (3) могут рассматриваться как подтверждение существования ρ^+ -мезона. С увеличением энергии первичных π -мезонов ситуация несколько проясняется. Например, с помощью методики сцинтилляционных счетчиков изучались реакции (1) и (2) с $\Delta^2 \leq 5 m_\pi^2$ при $p_s = 1,75$ Гэв^{170/}. В этом случае применение "метода сравнения в физической области" позволило обнаружить ρ^0 -мезон с $M \approx 750$ Мэв и $\Gamma \approx 190$ Мэв.

С другой стороны, в работах^{149, 71/}, в которых изучались реакции (2) и (4) при $p_s = 1,59$ Гэв, были получены результаты, свидетельствующие о доминирующем вкладе процессов, описываемых диаграммами 3 и 4, для $\Delta^2 \leq 8 m_\pi^2$. В этих работах имеется четкое указание на существование ρ^0 - и ρ^+ -мезонов, полученное с помощью "метода сравнения в физической области" с учетом нуклонного формфактора^{164/} (см. рис. 7).

Максимальная величина сечения $\pi^+ \pi^-$ -рассеяния в этом случае равна

$$\sigma_{\max} (\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-) = (108 \pm 16) \text{ мб.} \quad (29)$$

Как известно, максимальное сечение резонансного рассеяния π -мезонов определяется выражением

$$\sigma_{\max} \leq 4 \pi (2J + 1) \lambda^2 \quad (30)$$

и для случая $J(\rho) = 1$

$$\sigma_{\max} \leq 12 \pi \lambda^2 = 120 \text{ мб} \quad (31)$$

(здесь λ - дебройлевская длина волны π -мезона). Таким образом, хорошее согласие между значениями сечения (29) и (31) свидетельствует в пользу $J(\rho) = 1$ ^{x)}. Если не учитывать формфактор нуклона, то получим

$$\sigma_{\max} (\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-) = (56 \pm 8) \text{ мб} \quad (32)$$

(см. рис. 7), что не согласуется с ожидаемой величиной (31).

^{x)} Здесь следует отметить, что $\sigma_{\max} \approx 120$ мб для $\pi^+ \pi^-$ -рассеяния в области энергий, соответствующих ρ -мезону. Это связано с тем обстоятельством, что неупругие каналы распада ρ -мезона ($\rho \rightarrow 4\pi$, $\rho \rightarrow \eta\pi$ и т.д.) составляют малую долю от распада $\rho \rightarrow 2\pi$ (см. § 2 этого раздела), а поэтому фаза $\pi\pi$ -рассеяния, в основном, действительна и неравенство (31) можно приближенно считать равенством.

Исследование одиночного рождения π -мезонов в π^+p -соударениях при $\sqrt{s} \approx 3$ Гэв показало, что события с $\Delta^2 \lesssim 10 m_\pi^2$ удовлетворяют критерию Трэймана-Янга^{/62,72/}. Результаты анализа этих событий приведены в § 3 этого раздела. Они, в основном, подтверждают существование ρ -мезона.

Итак, данные о сечении $\pi\pi$ -рассеяния, полученные с помощью метода Чу и Лоу, являются некоторым дополнительным аргументом в пользу существования ρ -мезона с $I=J=1$.

Подводя итоги обсуждению вопроса о квантовых числах ρ -мезона, следует подчеркнуть, что для окончательного его решения необходимы новые эксперименты по изучению рождения и распадов ρ -мезонов (см. IV). В частности, обнаружение распада типа

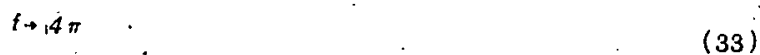


свидетельствовало бы о $J(\rho) \neq 0$.

II. f -мезон

Резонанс в $\pi\pi$ -взаимодействии с $M = 1250$ Мэв и $I=0$ был обнаружен почти одновременно двумя различными группами при исследовании взаимодействия $\pi^+\pi^-$ -мезонов с протонами (f -мезон)^{/73,74/}. Большой интерес к этому резонансу и его усиленные поиски вызваны тем обстоятельством, что развитое в последнее время новое направление в теории описания процессов взаимодействия частиц при высоких энергиях (т.н. реджистика) предсказывает существование частицы с $J=2$, $I=0$ и массой в интервале 1,0-1,4 Гэв^{/75/}. Как будет видно из дальнейшего, f -мезон по своим характеристикам близок к этой гипотетической частице. Подробнее этот вопрос обсуждается в работе^{/76/}.

Исследование процессов (2) и (4) при $\sqrt{s} = 3$ Гэв, проведенное с помощью 20-дюймовой водородной пузырьковой камеры, показало наличие двух пиков в распределении по эффективным массам $\pi^+\pi^-$ -систем; соответствующих ρ^0 и f -мезонам (рис. 8)^{/73/}. Отсутствие пика в $M(\pi^+\pi^0)$ -распределении при $M = 1250$ Мэв дает основание полагать, что $I(f)=0$ (см. также работу^{/77/}). Анализ распределения по $M(\pi^+\pi^-)$ показывает, что $M(f) = (1250 \pm 25)$ Мэв и $\Gamma(f) = 100 \pm 50$ Мэв; сечение рождения f -мезона в реакции (2) составляет величину около 1 мб при $\sqrt{s} = 3$ Гэв. Поиски возможных распадов



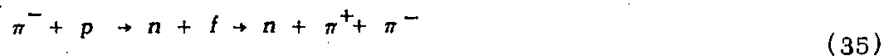
дали отрицательные результаты для вероятностей, сравнимых с вероятностью основного распада



Дальнейшее изучение реакций (2) и (4) на этой же экспериментальной установке позволило показать, что $J(f) \neq 0$, так как угловое распределение π^- -мезонов в процессе (34) имеет ярко выраженный анизотропный характер (см. 1 § 3)^{/62/}. Отсюда можно сделать вывод о том, что $J(f) \geq 2$. Действительно, так как изоспин f -мезона равен нулю, то в силу изотопической инвариантности $J(f)$ может быть равен только четному числу (см. 1, § 3).

Результаты работы по изучению f -мезона, выполненной с помощью 300-литровой пузырьковой камеры, наполненной смесью фреона (CF_3Br) и пропана (C_3H_8), совпадают с приведенными выше^{/74/}. Камера была помещена в магнитном поле 17,1 кгс и облучалась π^- -мезонами с импульсом 6,1 Гэв/с. Отбирались события типа (2). Разработанная методика измерения и обсчета случаев позволяла это сделать с хорошей точностью. В отобранном экспериментальном материале примесь других событий не превышает 15% и не существенна при изучении свойств f -мезона. Было получено, что $M(f) = 1260 \pm 35$ Мэв и $\Gamma(f) \leq 200$ Мэв. Анализ угловых распределений π^- -мезонов показал, что с вероятностью 500 против 1, спин f -мезона не равен нулю.

Изучение периферических взаимодействий π^- -мезонов с протонами ($\Delta^2 \leq 15 \text{ м}^2$) при $p_s = 4$ Гэв также подтвердило существование f -мезона (см. также работы^{/72,32,78/}). Сечение реакции



оказалось равным $0,42 \pm 0,06$ мб, а отношение вероятностей распадов

$$\frac{W(f \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-)}{W(f \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \leq 0,08 \pm 0,06 \quad (36)$$

Угловое распределение π^- -мезонов, образованных в реакции (35), в системе покоя f -мезона приведено на рис. 9. Здесь же нанесены теоретические кривые для случая $J = 2$ и 4. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что значение $J = 2$ является более предпочтительным, чем $J = 4$.

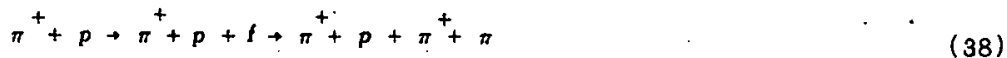
Анализ полученных данных с помощью метода Чу-Лоу с учетом нуклонного форм-фактора (см. 1 § 4) позволил определить сечение $\pi^+ \pi^-$ -рассеяния в области f и ρ^- -мезонов (см. рис. 10). На этом же рисунке нанесены теоретические кривые для $J = 0, 2$ и 4 с учетом другого возможного канала распада



Как видно из рис. 10, с экспериментом лучше согласуется значение $J(f) = 2$. Итак, совокупность имеющихся опытных данных показывает, что $J(f) \geq 2$ и наиболее предпочтительным является значение $J(f) = 2$. Однако необходимо дальнейшее увеличение статистики случаев с рождением f -мезона, чтобы сделать более определенные заключения о его спине.

G -четность f -мезона положительна, так как он распадается на два мезона по сильному взаимодействию. Пространственная четность также положительна и определяется тем фактом, что $I(f) = 0$ (см. 1 и 3).

В заключение отметим, что поиски f -мезона в реакции



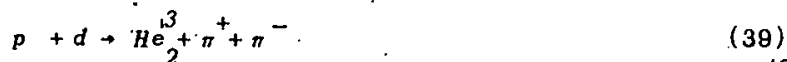
при $p_s = 3,5$ Гэв дали отрицательный результат^{/41/}. Сечение рождения f -мезона оказалось меньше 0,1 мб, в то время как сечение рождения ρ^0 -мезона в аналогичном процессе (11) при той же энергии падающих π -мезонов равно 1,5 мб. Такая разница в сечениях рождения f и ρ -мезонов может быть объяснена, например, в том случае, если процессы (11) и (38) могут быть описаны соответствующими одно-мезонными диаграммами и $\Gamma(\rho^0) = 2,5\Gamma(f)$ ^{/79/}.

Некоторые интересные вопросы, связанные с совместным рождением f -мезонов и нуклонных изобар, обсуждаются в работе^{/80/}.

III. Исследование $\pi\pi$ -взаимодействия при малых энергиях

(А.В.С. - аномалия)

Изучение образования π -мезонов в протон-дейтронных столкновениях:



показало, что имеется узкий пик в импульсном спектре ядер отдачи (см. рис. 11)^{/81/}. Сначала эта аномалия интерпретировалась как доказательство существования нового резонанса с $M = 310$ Мэв и $\Gamma = (10 \pm 6)$ Мэв. По имени авторов работы^{/81/} он получил название А.В.С. - резонанса. Позднее сообщалось о том, что он наблюдался в процессах аннигиляции, в πN -столкновениях и в реакциях фоторождения мезонов^{/44,82,83/}.

Вопрос о существовании и свойствах А.В.С. - мезона обсуждался также и в теоретических работах, особенно в связи с полюсами Редже^{/84-89/}. Было отмечено, что экспериментальные данные по распадам K -мезонов противоречат предположению о существовании А.В.С. - резонанса^{/86,88/}.

Анализ наблюдавшейся аномалии в pd -соударениях, проведенный в работах^{/90,91/}, показал, что она не имеет резонансного характера и может быть объяснена взаимодействием π -мезонов в конечном состоянии с $I(\pi\pi) = 0$. Более детальное экспериментальное исследование этой проблемы подтверждает этот вывод. Так, в работах^{/92-99/}, где исследовалось $\pi\pi$ -взаимодействие при малых энергиях, А.В.С. - мезон не был обнаружен. Для иллюстрации приведем результаты исследования реак-

ции (2), выполненного с помощью 72-дюймовой водородной пузырьковой камеры, при кинетических энергиях падающих π^- -мезонов 360, 430, 460, 480, 550, 605, 673 и 780 Мэв^{/99/}. Полученные распределения для $M(\pi^+\pi^-)$ приведены на рис. 12. Из этого рисунка видно, что хотя и имеется некоторое превышение над фазовой кривой для высоких значений эффективной массы ($\pi^+\pi^-$)-системы при $T = (360-605)$ Мэв, но оснований для заключения о существовании резонансов с массами в интервале от 280 до 680 Мэв нет.

Более детальное исследование взаимодействия протонов с дейтронами, выполненное группой, открывшей обсуждаемую аномалию, показало, что нерезонансное взаимодействие π^- -мезонов в конечном состоянии с $I=0$ и длиной рассеяния $(2 \pm 1) \frac{1}{m_\pi}$ удовлетворительно объясняет экспериментальные данные^{/100-103/}.

Аналогичное объяснение А.В.С. - аномалии было предложено в работе^{/104/}. В этом случае было замечено, что если реакция (39) протекает по схеме:



которая описывается треугольной диаграммой (см. рис. 13), то в распределении по $M(\pi_1 \pi_2)$ будет появляться пик с $M \approx 310$ Мэв при кинетической энергии протонов 740 Мэв (здесь He_2^{3*} - ядро гелия, в котором один из нуклонов заменен изобарой). Появление пика в распределении по $M(\pi_1 \pi_2)$ связано с наличием логарифмической особенности в диаграмме 13. Вычисления показывают, что при длине $\pi\pi$ -рассеяния $\sim \frac{1}{m_\pi}$ А.В.С. - аномалия хорошо описывается треугольной диаграммой (см. также гл. VIII, § 3.).

Таким образом, сейчас нет убедительных доказательств в пользу существования А.В.С. - резонанса.

IV. Поиски новых резонансных $\pi\pi$ -систем

В настоящее время имеется еще около двадцати наблюдавшихся пиков в распределениях по эффективным массам двух π -мезонов (см. таблицу II). Однако эти пики имеются, как правило, только в одной или двух работах и статистически плохо обеспечены. Поэтому даже сам факт существования аномалии не является достоверным (не говоря уже о ее резонансном характере). Более того, в аналогичных рабо-

тах других групп, выполненных с хорошей точностью, эти пики отсутствуют (см. для примера ^{/99/}). В связи с этим, отметим только некоторые интересные вопросы, связанные с возможным существованием новых резонансов в $\pi\pi$ -системах.

1. ξ - мезон

Первое сообщение о наблюдении ξ -мезона с $M = (575 \pm 20)$ Мэв и $I=1$ или 2 появилось в работе ^{/105/}. Исследовались процессы рождения π -мезонов π^+ -мезонами с помощью 35 см водородной пузырьковой камеры при $T_{\pi} = 820, 900$ и 1050 Мэв. Наблюдался пик в распределении по $M(\pi^+ \pi^0)$. Однако отклонение от фазовой кривой не выходит за две статистические ошибки. Аналогичная ситуация имеет место и в работах ^{/17, 27, 82, 106, 107/}. Теоретические вопросы, связанные с возможными свойствами ξ -мезона, обсуждаются в статьях ^{/108-111/}.

2. Особый интерес вызывают поиски резонансов с $I=0$ и 2 в области ρ^0 -мезона (см. таблицу II). Результаты изучения углового распределения π -мезонов, образованных при распаде ρ^0 -мезона, также указывают на существование резонанса с $M \approx M(\rho)$ и $I=0$ (см. I § 3). Поэтому представляется очень интересным исследование $\pi\pi$ -взаимодействия в области ρ -пика в состояниях с определенными значениями изотопического спина; например, в реакциях (1), (21) и



Совместное изучение подобных процессов позволит ответить на вопросы о свойствах ρ -мезона и о других резонансах в этой области значений эффективных масс двух π -мезонов.

В целом, о таблице II можно заметить, что спектр масс приведенных здесь резонансов почти непрерывен. Несомненно, что большая часть из них ничего общего с резонансами не имеют, а обусловлены или статистическими флуктуациями или нерезонансным взаимодействием π -мезонов в конечном состоянии (см., например, III, А.В.С. - аномалия).

V. ω - мезон

§ 1. Масса и ширина

В 1957 году в связи с анализом экспериментальных данных по рассеянию электро-

Т а б л и ц а II

№	M (Мэв) ^{х)}	Γ (Мэв)	I	Литература
1	310-320	10	0	81, 83, 44
2	330		0	82
3	330		1	82
4	330		2	82
5	400	50		36, 112
6	520	70	0 или 1	36
7	570		1	105
8	580		0	82
9	580		2	82, 106
10	600		1	112, 113
11	600	75	2	114, 112
12	650		1 или 2	109
13	760		0	82, 106
14	760		2	82, 106
15	880		-	38
16	920	150	-	115
17	990		0	82
18	990		1	82
19	990		2	82, 106
20	1200		1	106
21	1200		2	106
22	1400			27

^{х)} В таблице приведены приближенные значения масс резонансов.

нов на протонах было высказано предположение о существовании тяжелого нейтрального мезона с $I=0$ и $J^P=I^-$ (ω -мезон) ^{/116/}.

Экспериментально ω -мезон впервые был обнаружен в 1961 году при исследовании процессов аннигиляции

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- + \pi^- + \pi^0 \quad (44)$$

с помощью 72-дюймовой водородной пузырьковой камеры при $pc = 1,61$ Гэв ^{/117,118/}.

Был найден узкий пик в распределении по эффективным массам $(\pi^+ \pi^- \pi^0)$ -системы

с $M(\omega) \approx 787$ Мэв и $\Gamma < \Gamma_{res} \approx 24$ Мэв (Γ_{res} - экспериментальное разрешение прибора). Отсутствие соответствующего пика в распределениях по $M(\pi^{\pm} \pi^{\pm} \pi^0)$ и $M(\pi^{\pm} \pi^{\pm} \pi^{\mp})$ дает основания считать, что $I(\omega) = 0$.

К настоящему моменту ω -мезон наблюдался во многих реакциях, например, /119-133, 40, 41, 71/

$$p + \bar{p} \rightarrow 3\pi^{+} + 3\pi^{-} + \pi^0, \quad (45)$$

$$\pi^{+} + d \rightarrow p + p + \omega, \quad (46)$$

$$\pi^{\pm} + p \rightarrow p + \pi^{\pm} + \omega, \quad (47)$$

$$K^{-} + p \rightarrow \Lambda + \omega, \quad (48)$$

$$p + p \rightarrow p + p + \omega, \quad (49)$$

$$p + \bar{p} \rightarrow k + \bar{k} + \omega \quad (50)$$

и т.д.

На рис. 14 показан характерный пик, соответствующий ω -мезону, полученный в реакции (46), здесь же виден небольшой пик с $M \sim 550$ Мэв (η -мезон).

Ширина ω -мезона была определена с помощью 30-дюймовой водородной пузырьковой камеры при исследовании аннигиляции остановившихся антипротонов в реакции /134/

$$p + \bar{p} \rightarrow K^{+} K^{-} \pi^{+} \pi^{-} \pi^0. \quad (51)$$

В этом опыте удалось получить $\Gamma_{res} \approx 2$ Мэв что на порядок лучше, чем в других экспериментах. Такое значительное улучшение разрешающей способности установки было достигнуто специальным отбором событий типа (51). Изучались только те события, в которых оба K -мезона останавливались в камере. Это обстоятельство позволило измерить энергии и импульсы K -мезонов по пробегу в водороде значительно точнее, чем по кривизне их следа в магнитном поле, как это делалось в других экспериментах.

Реакция (51) оказалась очень удобной с этой точки зрения, так как она с большой вероятностью идет по каналу (50), а в этом случае полная кинетическая энергия образованных частиц составляет всего лишь около 100 Мэв и K -мезоны, в основном, останавливаются в камере. Соотношение пробег-энергия было проверено в этом же опыте для протонов и пионов известных энергий.

Измеряя угол между K -мезонами, можно определить $M(\pi^{+} \pi^{-} \pi^0)$ по формуле:

$$M(\pi^+\pi^-\pi^0) = [(M^0 - E_- - E_+)^2 - (\vec{p}_+ + \vec{p}_-)^2]^{1/2}, \quad (52)$$

где $M = M(p) + M(\bar{p})$ и индексы при E и p обозначают знаки зарядов K^- -мезонов (см. формулу (5))^х.

Всего было найдено 119 событий (51), когда оба K^- -мезона останавливались в камере. Величина ошибки в определении $M(\pi^+\pi^-\pi^0)$ по формуле (52) для этих событий лежит в интервале от 0,6 до 1,2 Мэв.

На рис. 5 приведено распределение найденных случаев по $M(\pi^+\pi^-\pi^0)$. Сплошная кривая, дающая наилучшее согласие с экспериментом, вычислялась по формуле типа (6) с учетом эффективности регистрации K^- -мезонов в камере; пунктирная кривая дает соответствующий статистический фон в реакции (51),

На рис. 16 дана идеограмма этого распределения. Из анализа этих данных было получено: $M(\omega) = 784,0 \pm 0,9$ Мэв и $\Gamma = 9,5 \pm 2,1$ Мэв, что соответствует $\tau(\omega) = (0,69 \pm 0,15) \cdot 10^{-22}$ сек. Интересные предложения об измерении $\Gamma(\omega)$ другими способами рассмотрены в работах /135-140/.

Сечение рождения ω -мезона в πN^- - и $K N^-$ -взаимодействиях составляет величину $(1 \div 2)$ мб при $E = (2-4)$ Гэв и не превышает нескольких десятых миллибарна в процессах аннигиляции при $E(\bar{p}) = (1-3)$ Гэв.

§ 2. Диаграммы Далитца

Прежде чем перейти к обсуждению квантовых чисел ω -мезона, мы остановимся на одном общем способе анализа трехчастичных состояний. Это способ был предложен Далитцем в 1953 году применительно к распаду



и широко употребляется в настоящее время /141-144/.

Суть его заключается в следующем. Общее выражение для вероятности распада какой-либо частицы с массой M_0 на три другие частицы имеет вид /145/:

$$W(M_0 \rightarrow m_1 + m_2 + m_3) = \frac{1}{(2\pi)^5} \int \frac{|M|^2}{2M_0} \delta(\sum p_i) \times \quad (54)$$

$$\times \delta(M - \sum E_i) \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3}{2E_1 2E_2 2E_3}$$

х) Эффективная масса группы частиц, вычисленная по характеристикам других частиц, участвующих в реакции (в нашем случае p^+ , \bar{p}^- , K^+ и K^- -частицы), обычно называется "недостающей массой".

Здесь $|M|^2$ - квадрат модуля матричного элемента. Если распадающаяся частица не имеет спина или неполяризована, то матричный элемент зависит только от двух переменных. Действительно, из девяти возможных переменных: $p_{1i}, p_{2i}, p_{3i} (i=1,2,3)$, закон сохранения энергии - импульса делает независимыми только пять. Далее, если частица M_0 неполяризована, т.е. в ее системе покоя нет выделенных направлений в пространстве, то вероятность распада не зависит от ориентации плоскости распада^{х)}. Таким образом, из пяти переменных остаются только две, от которых зависит матричный элемент.

Если за эти переменные выбрать полные энергии двух частиц E_1 и E_2 в системе центра инерции трех частиц, то соответствующие преобразования приводят формулу (54) к виду

$$W(M_0 \rightarrow m_1 + m_2 + m_3) = \frac{\pi^2}{2M_0 (2\pi)^5} \iint dE_1 dE_2 |M(E_1, E_2)|^2. \quad (55)$$

Из этого выражения видно, что если имеющийся экспериментальный материал по распаду $M_0 \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$ нанести на диаграмму, в которой за переменные выбраны E_1 и E_2 , то плотность точек на этой диаграмме будет пропорциональна квадрату модуля матричного элемента. Таким образом, с помощью такой диаграммы мы сразу имеем наглядное представление о поведении матричного элемента, что значительно упрощает определение квантовых чисел распадающейся частицы.

Очевидно, что это свойство диаграммы Далитца остается неизменным, если вместо переменных E_1 и E_2 взять переменные T_1 и T_2 или $T_1, T_2 - T_3^{xx}$. Иногда диаграммы Далитца строят также в переменных $M_{1,2}^2$ и $M_{2,3}^2$ (квадраты эффективных масс двух частиц). Покажем, что и в этом случае плотность точек будет пропорциональна квадрату матричного элемента. По определению имеем

$$M_{1,2}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2.$$

Законы сохранения дают следующие равенства в системе покоя частицы M_0 :

$$E_1 + E_2 = M_0 - E_3 \quad (56)$$

$$|\vec{p}_1 + \vec{p}_2| = p_3. \quad (57)$$

Отсюда

$$M_{1,2}^2 = (M_0 - E_3)^2 - p_3^2 \quad (58)$$

х) В том случае, когда имеется начальная поляризация частиц, в выражении (55) необходимо заменить $|M(E_1, E_2)|^2$ на $\overline{|M(E_1, E_2)|^2}$, где горизонтальная черта означает усреднение по начальной поляризации.

xx) Действительно, $E = T + m$ $dE_1 dE_2 = dT_1 dT_2$.

$$dM_{1,2}^2 = -2(M_0 - E_3) dE_3 - 2E_3 dE_3 = -2M_0 dE_3, \quad (59)$$

т.е. $dM_{1,2}^2$ линейно зависит от dE_3 .

Поэтому

$$dM_{1,2}^2 \sim dM_{2,3}^2 \sim dE_3 \cdot dE_1. \quad (60)$$

Употребление переменных M_{ik}^2 имеет некоторые преимущества, так как они релятивистски инвариантны и поэтому диаграмма Далитца не зависит от системы координат, в которой взяты экспериментальные данные. Практическое применение этих диаграмм будет показано ниже при обсуждении квантовых чисел ω и η -мезонов.

§ 3. Квантовые числа ω -мезона

Квантовые числа ω -мезона были определены при изучении распадов

$$\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0. \quad (61)$$

Предположим, что это процесс вызван сильным взаимодействием, тогда $G(\omega) = -1$ / 59,60/

Если ограничиться значением спина $J \leq 1$, то имеются четыре возможных комбинаций для спина и пространственной четности ω -мезона: 0^+ , 0^- , 1^+ и 1^- . Квантовые числа 0^+ запрещены законом сохранения четности.

Этот запрет легко увидеть, если рассматривать продукты распада $\omega \rightarrow 3\pi$ в терминах одиночного π -мезона и дипиона (например, π^0 -мезона и $(\pi^+ \pi^-)$ -дипиона). Обозначим через \vec{L} орбитальный момент π -мезона дипиона в их с.ц.инерции, а через \vec{l} момент третьего π -мезона относительно дипиона в с.ц.инерции ω -мезона. Если спин ω -мезона равен нулю (речь идет о возможной комбинации 0^+), необходимо, чтобы $l = L$, т.е. пространственная четность (3π) -системы

$$P = (-1)^{l+L+3} = (-1)^{2L+3} \quad \text{хх} \quad (64)$$

будет отрицательна ($P = -1$).

Таким образом, комбинация 0^+ для ω -мезона невозможна.

х) В случае бозонных систем со странностью, равной нулю, очень удобно пользоваться квантовым числом G , так как G -четность системы равна произведению G -четностей частиц ее составляющих. Операция G определяется как произведение двух известных операций: зарядового сопряжения и поворота в изотопическом пространстве вокруг оси I_2 на 180° , т.е.

$$\hat{G} = \hat{C} e^{i\pi \hat{I}_2}. \quad (62)$$

Отсюда ясно, что G -четность системы остается неизменной в случае сильных взаимодействий и может меняться в случае электромагнитных. Для нейтральных систем имеет место равенство

$$G = C(-1)^I. \quad (63)$$

Здесь C - зарядовая четность системы.

хх) Тройка в показателе степени появляется из-за учета внутренней четности π -мезонов, которая отрицательна.

Для оставшихся трех комбинаций квантовых чисел можно написать матричные элементы распада (61) для минимальных значений L и ℓ (т.е. простейшие матричные элементы). Они приведены в таблице III /118/.

Т а б л и ц а III

Простейшие матричные элементы распада $\omega \rightarrow 3\pi$.

J^P	ℓ	L	Простейшие матричные элементы ^{х)}	Матричный элемент равен нулю
1^-	1	1	$(\vec{p}_0 \times \vec{p}_+) + (\vec{p}_+ \times \vec{p}_-) + (\vec{p}_- \times \vec{p}_0)$	на границе диаграммы Далитца
0^-	1 и 3	1 и 3	$(E_- - E_0)(E_0 - E_+)(E_+ - E_-)$	на прямых линиях, когда $E_- = E_0, E_0 = E_+, E_+ = E_0$
1^+	0 и 2	1	$E_- (\vec{p}_0 - \vec{p}_+) + E_0 (\vec{p}_+ - \vec{p}_-) + E_+ (\vec{p}_- - \vec{p}_0)$	Когда $\vec{p}_0 = \vec{p}_+, \vec{p}_+ = \vec{p}_-, \vec{p}_- = \vec{p}_0$.

На рис. 17 приведена зависимость простейших матричных элементов в произвольных единицах от переменных Далитца:

$$x = \frac{T_- - T_+}{\sqrt{3} Q}, \quad y = \frac{T_0}{Q} \quad (Q = T_+ + T_- + T_0).$$

На рис. 18 на диаграмме Далитца нанесены экспериментальные данные по распаду $\omega \rightarrow 3\pi$, полученные в работе /131/. Визуальное сравнение теоретических распределений и экспериментального (рис. 18) показывает, что наборы 1^+ и 0^- противостоят опыту, так как они дают плотность точек, равную нулю в центре диаграммы и возрастающую к ее границе, в то время, как набор 1^- дает максимальную плотность точек в центре диаграммы, которая спадает к нулю на границе, что согласуется с экспериментальными данными.

На рис. 19 приведены теоретические и экспериментальная зависимости плотности точек в зависимости от расстояния до центра диаграммы, которые подтверждают этот вывод /118/.

Интересно отметить, что хотя анализ для $J > 1$ не проводился, но простейшие матричные элементы для квантовых чисел 2^+ и 2^- дают плотность точек, равную нулю в центре диаграммы.

х) Здесь индексы при E и p обозначают знаки зарядов π^- -мезонов.

Итак, анализ экспериментальных данных, проведенный с помощью простейших матричных элементов в предположении, что $G(\omega) = -1$ и $J < 1$, показывает, что ω -мезон является векторной частицей с отрицательной четностью ($J^{PG} = 1^{- -}$). Однако в этом случае нет уверенности, что в матричном элементе общего вида сохраняются те свойства простейшего матричного элемента, которые были использованы для определения спина и четности резонансного состояния.

Рассмотрение самых общих, не зависящих от динамики процесса свойств матричных элементов общего вида показало, что обращение их в нуль при определенных значениях импульсов совпадает в случае трехпионных систем с запретами, следующими из вида простейших матричных элементов (см. табл. III)^{/146/ x)}. Таким образом, отсутствие экспериментальных точек на границах диаграммы Далитца и наличие их в остальной части диаграммы для распада $\omega \rightarrow 3\pi$ является сильным аргументом в пользу $J^P(\omega) = 1^-$ без ограничения этого утверждения частным видом матричного элемента. Поиски запрещенных конфигураций импульсов частиц имеют еще и то преимущество, что в этом случае вопрос об интерференции резонансных процессов с фоном решается очень просто. Действительно, так как в этих областях матричный элемент резонансного взаимодействия равен нулю, то никакой интерференции не будет.

Приведенный выше анализ распада (61) был сделан в предположении о том, что этот распад идет по сильному взаимодействию ($G(\omega) = -1$). В связи с небольшой шириной резонанса $\Gamma \approx 9$ Мэв было высказано предположение о том, что распад $\omega \rightarrow 3\pi$ является электромагнитным процессом, т.е. $G(\omega) = +1$ ^{/148/}. Однако последующие исследования исключили этот вариант. Так, изучение распада^{/45/}

$$\omega \rightarrow 4\pi, \quad (65)$$

который должен идти в случае $G(\omega) = +1$ по сильному взаимодействию и с большей вероятностью, чем распад (61), показало, что

$$\frac{W(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \pi^0)}{W(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)} \leq 12\%, \quad (66)$$

и

$$\frac{W(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-)}{W(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)} \leq 5\%. \quad (67)$$

С другой стороны, в случае $G(\omega) = -1$ отношение

$$\frac{W(\omega \rightarrow \text{нейтр. частицы})}{W(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)} = a \quad (68)$$

($a = \frac{1}{137}$, постоянная тонкой структуры).

Действительно, распад

$$\omega \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \quad (69)$$

x) Ряд общих свойств многопионных систем рассмотрен в работах^{/147-152/}.

запрещен по сильному и электромагнитному взаимодействиям, так как зарядовая четность ω -мезона отрицательная, а у трех π -мезонов - положительна^{x)}. Поэтому процесс (69) может идти только за счет слабого взаимодействия. Вероятность этого распада значительно меньше электромагнитных процессов первого порядка:

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \gamma, \quad (70)$$

$$\omega \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \gamma, \quad (71)$$

которые и определяют порядок величины отношения (68)^{/130, 131, 125/}.

Для всех комбинаций квантовых чисел с $G(\omega) = +1$ вероятность распадов (70) и (71) должна быть больше или сравнима с вероятностью распада (61), так как этот процесс является электромагнитным процессом второго порядка. Экспериментальное изучение соотношения (68) показало, что

$$\frac{W(\omega \rightarrow \text{нейтр. частицы})}{W(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)} = 0,10 + 0,03, \quad (72)$$

Оценки величины этого отношения, сделанные другими группами, согласуются с (72)^{/131, 125, 130/}. Таким образом, малая вероятность радиационных распадов ω -мезона также подтверждает правильность предположения $G(\omega) = -1$.

Наконец, наблюдение распада (70) служит прямым доказательством того, что $G(\omega) = C(\omega) = -1$ и спин его не равен нулю^{xx)} /153/.

В заключение этого параграфа приведем таблицу 1У, в которой суммируются аргументы, исключающие различные наборы квантовых чисел, кроме $J^{PG}(\omega) = 1^{--}$.

§ 4. Электромагнитные распады ω -частиц

Как было указано в предыдущем параграфе, распад ω -мезона ($J^{PG} = 1^{--}$) на нейтральные частицы является электромагнитным процессом. В настоящее время началось изучение этих распадов с помощью пузырьковых камер, наполненных тяжелыми жидкостями (ксенон, фреон, пропан, смесь пропана с фреоном и т.д.).

^{x)} Если бозоны имеет $I = 0$, то $G = C(-1)^I = C$, т.е. $C(\omega) = -1$. C - четность π^0 -мезона положительна.

^{xx)} C - четность γ -кванта отрицательна.

Т а б л и ц а I V

Данные о возможных квантовых числах ω -мезона ($I(\omega) = 0$)

Возможные значения $J^{PG} (J < 1)$	Исключены следующими аргументами
0^{--}	Диаграмма Далитца, распад $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$
0^{+-}	Сохранение четности, распад $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$
1^{--}	
1^{+-}	Диаграмма Далитца
0^{-+}	Диаграмма Далитца, малая величина отношения $\omega \rightarrow$ нейтр. частицы / $\omega \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^0$ и распад $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$
0^{++}	Сохранение четности, распад $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$
1^{-+}	Малая величина отношения $\frac{\omega \rightarrow 4\pi}{\omega \rightarrow 3\pi}$ и распад $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$
1^{++}	Диаграмма Далитца, малая величина отношений $\frac{\omega \rightarrow 4\pi}{\omega \rightarrow 3\pi}$ и $\frac{\omega \rightarrow \text{нейтр. частицы}}{\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0}$, распад $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$

х) Более подробное обоснование этой таблицы можно найти в работах /45, 148/

С помощью 17 литровой пузырьковой камеры, наполненной смесью пропана (C_3H_8) и ксенона, исследовался распад (70) в реакции /153/



Опыты проводились при импульсах π^- -мезонов 1,25, 1,55 и 2,8 Гэв/с. Отыскивались случаи, когда три и более $e^+ e^-$ -пар, образованных γ -квантами в камере, были направлены в точку остановки π^- -мезона, при условии, что остановка мезона не сопровождается какими-либо следами ядерного взаимодействия (безлучевые звезды). Фон, в основном, получается из-за множественного рождения π^0 -мезонов. Для выделения случаев распада $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma \rightarrow 3\gamma$ использовался кинематический метод, так как энергия конверсионных пар не измерялась и поэтому нельзя было найти распределение по $M(\gamma\gamma\gamma)$. Суть этого метода заключается в следующем. В случае распада $\omega \rightarrow 3\gamma$ через направления трех γ -квантов можно провести круговой конус, причем раствор этого конуса имеет минимальный угол (β_{min}), зависящий от массы ω -мезона и от первичной энергии π^- -мезонов:

$$\sin \frac{\beta_{min}}{2} = \frac{M(\omega)}{E} \quad (73)$$

На рис. 20 представлены распределения по углу β для событий, соответствующих реакции



после вычитания фона. Стрелками указаны значения углов раствора (β_{min}) конуса распада для ω -мезона с $M = 782$ Мэв. Как видно из рис. 20, большинство событий находится в интервале углов, больших β_{min} , как и должно быть для распада (70). Небольшое количество случаев с $\beta < \beta_{min}$ может быть объяснено статистическими флуктуациями, фоном от реакции



или неучтенными систематическими ошибками. Несомненно, что увеличение статистики событий (74) и изучение распадов (70) другими методами необходимо для окончательного заключения о его существовании.

Сравнение вероятностей распадов (70) и



показывает, что распад (70) является основным среди нейтральных мод распада.

В этой же работе была оценена величина отношения

$$\frac{W(\omega \rightarrow 2\pi^0 \gamma)}{W(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma)} < 0,1 \quad (77)$$

Этот результат находится в согласии с теоретической оценкой, которая была получена в предположении, что радиационные распады ω -мезона (71) идут по схеме



Изучение распределения по эффективным массам ($\pi^+ \pi^- \gamma$)-систем^{/51/}, образованных в πN -взаимодействиях при $E \approx 7$ Гэв, показало, что имеется пик при $M \approx 760$ Мэв, который может быть связан с распадом



В работах^{/124, 155/} была получена оценка величины отношения

$$\frac{W(\omega \rightarrow e^+ e^-)}{W(\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)} < 0,01, \quad (80)$$

которая согласуется с соответствующими теоретическими вычислениями^{/156, 157, 158/}.

Итак, исследование электромагнитных распадов ω -мезона только началось. Имеется ряд теоретических моделей, которые предсказывают вероятности этих распадов^{/154, 156-160/}. Сопоставление их с экспериментальными результатами дает возможность определить "силу" взаимодействия ω -мезона с ρ -мезоном и другими частицами (см., например,^{/154/}).

§ 5. ρ - ω переходы

Квантовые числа ρ - и ω - мезонов одинаковы за исключением изотопического спина, поэтому за счет электромагнитных взаимодействий в каждом из них будет примесь состояния с другим изотопическим спином. Волновые функции этих смешанных состояний можно написать в виде ^{/161/}:

$$\tilde{\rho}^0 = \rho^0 + \frac{\delta}{\Delta m} \omega \quad (81)$$

и

$$\tilde{\omega} = \omega - \frac{\delta}{\Delta m} \rho^0 \quad (82)$$

Здесь δ - матричный элемент электромагнитного перехода $\omega \rightarrow \rho$, $Re(\Delta m) \approx 35$ Мэв (разница масс ρ - и ω - мезонов), $Im(\Delta m) = \Gamma(\rho) - \Gamma(\omega) = 100$ Мэв, ρ^0 , ω - волновые функции состояний с определенным изотопическим спином ($I(\rho) = 1$ и $I(\omega) = 0$).

Как видно из формул (81) и (82), примесь состояния с другим изотопическим спином, обусловленная электромагнитным взаимодействием ($\delta \approx 5$ Мэв), будет значительна, если разница масс мезонов мала.

Конкретные вычисления показывают, что в случае ω - и ρ - мезонов распад

$$\omega \rightarrow \rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (83)$$

будет составлять несколько процентов от основного распада (61) ^{/160,162-164/}.

Процесс

$$\rho^0 \rightarrow \omega \rightarrow 3\pi \quad (84)$$

будет незначителен из-за малого времени жизни ρ^0 - мезона.

Распад $\omega \rightarrow 2\pi$ был обнаружен при исследовании $\pi^+ p$ и $K^+ p$ - взаимодействий ^{/124, 165, 166/}. В работе ^{/124/} была определена величина отношения

$$\frac{W(\omega \rightarrow 2\pi)}{W(\omega \rightarrow 3\pi)} = 0,045 \pm 0,016 = (4,5 \pm 1,6) \% \quad (85)$$

В работе ^{/165/} изучалась реакция (2) при импульсе 1,7 Гэв/с в водородной пузырьковой камере. Было зарегистрировано около 2137 событий с $M(\pi^+ \pi^-)$ в области ρ - пика. На рис. 21 (а) показано распределение эффективных масс. Распределение имеет широкий пик в области 650-850 Мэв, который асимметричен относительно значения $M(\pi^+ \pi^-) \approx M(\rho^0) = 750$ Мэв (393 события между 750 и 800 Мэв и 298 событий между 750 и 700 Мэв). Если предположить, что ρ^0 - мезон имеет ту же массу и симметричную форму пика, что и ρ^\pm - мезоны, то асимметрия может быть вызвана концентрацией событий в районе ω - пика - 780 Мэв за счет распадов $\omega \rightarrow 2\pi$. Для более отчетливого выделения ω - пика было построено распределение для событий Δ , имею-

ших значение Δ^2 в интервале $0,25 - 0,70 \left(\frac{\Gamma_{ЭВ}}{c}\right)^2$ (рис. 21 (б)). В этом случае наблюдается резкий пик, соответствующий ω -мезону. Авторы объясняют этот факт тем обстоятельством, что в событиях с малой передачей импульса преобладают процессы, описываемые одномезонными диаграммами, в которых образование ω -мезона запрещено по G-четности, и интенсивно рождаются ρ -мезоны (см. 1 § 4). При больших передачах импульса ($0,25 - 0,70 \left(\frac{\Gamma_{ЭВ}}{c}\right)^2$) эти процессы несут существенны и поэтому распад $\omega \rightarrow 2\pi$ наблюдается более отчетливо. Величина отношения (85) составляет $\sim 0,05$.

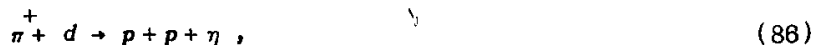
Несомненно необходимы новые эксперименты для более точного определения вероятности распада $\omega \rightarrow 2\pi$ /166/.

VI. η -мезон

Исследование резонансных взаимодействий элементарных частиц привело к открытию η -мезонов, которые по своим свойствам должны быть отнесены к элементарным частицам, а не к резонансам^{х)}. Действительно, время жизни η -мезонов на несколько порядков больше, чем время жизни резонансов ($\tau(\eta) \sim 10^{-17} - 10^{-18}$ сек); рождаются они в процессах сильного взаимодействия, а распадаются по электромагнитному взаимодействию, как и π^0 -мезоны. Однако обычно η -мезоны рассматривают в группе резонансов из-за общности методов их обнаружения.

§ 1. Квантовые числа

Образование η -мезонов наблюдалось во многих реакциях, например, /40,41,121,122, 124, 125, 131, 168-174/.



с последующим распадом



х) Свойства η -мезона подробно рассмотрены в обзоре /167/.

Надежно установлено также отсутствие заряженных аналогов η^0 -мезона, т.е. η^+ и η^- , распадающихся по схеме

$$\eta^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm} + \pi^+ + \pi^- \quad (92)$$

Отсюда следует, что изотопический спин $I(\eta) \approx 0$. Масса η -мезона равна 548 ± 1 Мэв, ширина соответствующего резонанса не превосходит 7 Мэв и может быть целиком отнесена за счет ошибок измерений.

Сечение рождения η -мезона в πN -столкновениях около 1 мб при $E_{\pi} = (1-3)$ Бэв и падает до нескольких десятков миллибарн при более высоких энергиях.

В процессах типа (86-90) в спектре эффективных масс нейтральных частиц (спектр "недостающих масс") имеется резкий пик при массе η -мезона (см., например, рис. 22). Отсюда было получено /175/, что

$$\frac{W(\eta \rightarrow \text{нейтр. частицы})}{W(\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)} = 2,7 \pm 0,6 \quad (93)$$

Поскольку η -мезоны рождаются в сильных взаимодействиях, естественно сначала предположить, что распад (91) также происходит за счет сильного взаимодействия. Тогда G- и C-четность η -мезона отрицательны (см. ω -мезон) и распады на четное число π -мезонов запрещены. Распад на пять мезонов невозможен энергетически ($5m_{\pi} > m_{\eta}$) и единственно возможным остается распад $\eta \rightarrow 3\pi$. Последний вывод относится и к нейтральным распадам и это губит всю схему, поскольку распад

$$\eta \rightarrow 3\pi^0 \quad (94)$$

невозможен по сильному и электромагнитному взаимодействию из-за закона сохранения C-четности (см. V.53). Эксперимент показывает обратное. Необходимо, следовательно, заключить, что за распады типа

$$\eta \rightarrow \text{нейтральные частицы} \quad (95)$$

ответственны не сильные, а электромагнитные взаимодействия.

Дальнейший существенный шаг в решении вопроса о квантовых числах η -мезона связан с анализом соответствующей диаграммы Далитца.

Если считать, что распад (91) вызван сильными взаимодействиями ($G(\eta) = C(\eta) = -1$), то для $J(\eta) \leq 2$ могут быть следующие возможные наборы квантовых чисел: 0^+ , 0^- , 1^+ , 1^- ; 2^+ и 2^- . Набор 0^+ запрещен из-за закона сохранения четности (см. У, § 3).

Для каждого из остальных существуют такие области на диаграмме Далитца, в которых плотность фазовых точек, равна нулю /146/. На рис. 23 показано экспериментальное распределение /131/. Видно, что фазовые точки распределены вполне равномерно,

т.е. предположение $G(\eta)=-1$ не согласуется с опытом и его следует заменить на $G(\eta) = +1$. Это означает, что все распады η -мезонов являются электромагнитными.

В частности, распад (91) связан с электромагнитным процессом второго порядка, в котором имеет место виртуальное испускание и поглощение γ -кванта^{/148/}. В этом случае G -четность меняет знак, а изотопический спин изменяется на единицу, т.е. $I(3\pi)=1$. Докажем это утверждение. При излучении γ -кванта изотопический спин либо не изменяется, либо изменяется на единицу, то же относится к поглощению. Поэтому в результате электромагнитного процесса второго порядка, связанного с излучением и поглощением виртуального γ -кванта, возможно изменение изотопического спина на 0, 1 и 2. С другой стороны, соотношение

$$G = (-1)^I \quad (93)$$

связывает между собой изменения G -четности и изотопического спина, поскольку зарядовая четность в электромагнитных процессах сохраняется. Так как после распадов (91) и (94) G -четность изменяется, то изотопический спин также изменяется, причем только на единицу. Начальный изоспин $I(\eta)=0$, поэтому конечный $I(3\pi)=1$. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работе^{/176/}.

Вернемся теперь к диаграммам Далитца. Для случая $I(3\pi)=1$ они уже имеют другой вид, причем для наборов 1^+ и 1^- по-прежнему имеются области с нулевой плотностью точек, а для набора 0^+ таких областей нет (здесь мы ограничились случаем $J(\eta) \leq 1$)^{/148/}.

В итоге кажется разумным считать, что $J^{PG} = 0^{-+}$. Здесь еще уместна некоторая осторожность, поскольку статистика пока что не очень велика и возможна неоднозначность в вычитании фона. Следует также подчеркнуть, что в случае сильных взаимодействий анализ не проведен для $J \geq 3$, а для электромагнитных - даже при $J = 2$.

Подтверждением правильности выбора квантовых чисел η -мезона (0^{-+}) явились результаты экспериментов по наблюдению радиационных распадов.

Первые опыты по обнаружению возможных распадов

$$\eta \rightarrow \gamma + \gamma \quad (J \neq 1, C = +1), \quad (95)$$

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma \quad (J \neq 0, C = -1), \quad (96)$$

выполненные с помощью пузырьковой камеры, регистрирующей γ -кванты по электрон-позитронным парам конверсии, обнаружили радиационный распад η -мезона^{/177/}. Однако на основании полученных результатов нельзя было сделать выбор между реакциями (95) и (96)^{/178/}. Аналогичные результаты были получены и при исследовании фоторождения η -мезонов^{/177-182/}.

$$\gamma + p \rightarrow p + \eta .$$

(97)

В работе^{/183/} исследовалась реакция

$$\pi^- + p \rightarrow n + \eta$$

(98)

при $p \approx 1,15$ Гэв с помощью пузырьковой камеры, наполненной смесью C_3H_8 и CF_3Br (радиационная длина 22 см). Камера находилась в магнитном поле $H = 17500$ гаусс, позволяющем измерять энергию e^+e^- -пар по магнитному отклонению несмотря на большую роль многократного кулоновского рассеяния. Точность измерений энергии была невелика и составляла 30%. Авторы отбирали снимки с двумя (e^+e^-)-парами и, предполагая, что оба γ -кванта образовались при распаде одной частицы, вычисляли ее массу. На рис. 24 приведено распределение эффективных масс $M(\gamma\gamma)$. Первый пик соответствует π^0 -мезону (среднее значение массы $138,5 \pm 3,7$ Мэв), второй - η -мезону (среднее значение массы 573 ± 26 Мэв). После вычитания фона, связанного с реакцией

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + n ,$$

(99)

в области второго максимума остается 21 ± 6 случаев (фон составляет 7 случаев). Распад (95) также наблюдался в работах^{/175, 184/}.

Итак, совокупность данных указывает, по-видимому, на существование распада (95). Отсюда прежде всего следует, что спин η -мезона не может быть равен единице (ситуация, полностью аналогичная случаю распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$). Обычно считают, что $J(\eta) = 0$, хотя, как отмечалось выше, для такого выбора сейчас нет еще достаточно убедительных оснований^{x)}. В этой связи представляет интерес работа^{/185/}, в которой предложено исследовать реакцию (86) вблизи ее энергетического порога. Можно показать, что в этом случае она запрещена для псевдоскалярного η -мезона и разрешена при любом значении его спина, отличном от нуля. Экспериментально этот вопрос еще не исследован. Другая возможность определения $J(\eta)$ заключается в применении стандартных методов, связанных с угловыми распределениями η -мезонов и распадных π -мезонов.

Существование распада (95) показывает, что $G(\eta) = C(\eta) = +1$, так как γ -квант имеет отрицательную C -четность.

Распад

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

(100)

разрешен по спину, G -четности и зарядовой четности. В этих условиях его отсутствие может означать только то, что пространственная четность η -мезона отрицательна ($P(2\pi) = +1$, если $I(2\pi) = 0$).

x) В работе^{/172/} показано, что угловое распределение π^0 -мезонов в системе η -мезона изотропно, что согласуется с предположением $J(\eta) = 0$.

Некоторые другие возможности определения квантовых чисел обсуждаются в ра-
 ботах /186,187/

Итак, совокупность имеющихся данных показывает, что наиболее вероятный на-
 бор квантовых чисел η -мезона 0^{-+} и $I(\eta) = 0$ (х). В заключение приведем таблицу У,
 в которой суммируются аргументы о возможных наборах квантовых чисел η -мезона.

Т а б л и ц а У

Данные о возможных квантовых числах η -мезона ($I(\eta) = 0$).

Возможные значения $J^{PC} (J \leq 1)$	Исключены следующими аргументами
0^{--}	Диаграмма Далитца, распады $\eta \rightarrow \gamma\gamma$, $\eta \rightarrow 3\pi^0$.
0^{+-}	Сохранение четности, распады $\eta \rightarrow \gamma\gamma$, $\eta \rightarrow 3\pi^0$.
1^{--}	Диаграмма Далитца, распады $\eta \rightarrow \gamma\gamma$, $\eta \rightarrow 3\pi^0$.
1^{+-}	Диаграмма Далитца, распады $\eta \rightarrow \gamma\gamma$, $\eta \rightarrow 3\pi^0$.
0^{-+}	Сохранение четности, отсутствие распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^-$.
0^{++}	
1^{-+}	Диаграмма Далитца, распад $\eta \rightarrow \gamma\gamma$
1^{++}	Диаграмма Далитца, распад $\eta \rightarrow \gamma\gamma$

§ 2. Распадные свойства η -мезона

Псевдоскалярный η -мезон с $I = 0$ может распадаться только за счет электро-
 магнитных или слабых взаимодействий (VI, § 1). В частности, возможными схемами
 распада первого и второго порядка по электромагнитному взаимодействию являются:

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma, \quad (101)$$

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \gamma, \quad (102)$$

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, \quad (81)$$

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0, \quad (94)$$

$$\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma + \gamma, \quad (103)$$

х) Интересно отметить, что задолго до открытия η -мезона свойства частицы с такими же квантовыми числами были рассмотрены в работах /188-189/. Здесь же был предложен использованный впоследствии метод ее обнаружения, основанный на определении величины так называемой "недостающей массы".

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma + \gamma, \quad (104)$$

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \gamma + \gamma, \quad (105)$$

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 + \gamma + \gamma \quad (106)$$

и
$$\eta \rightarrow \gamma + \gamma. \quad (95)$$

Экспериментальное исследование этих процессов наталкивается на существенные методические трудности из-за необходимости регистрации нейтральных частиц или очень точного измерения энергии заряженных частиц. Однако в настоящее время уже имеются первые результаты относительно радиационных распадов η -мезона.

Особенный интерес вызывают данные об относительных парциальных ширинах процессов 1-го порядка по электромагнитному взаимодействию (101) и (102).

В работе /190/, выполненной с помощью 72-дюймовой водородной пузырьковой камеры при $p_c = 1170$ Мэв, очень подробно изучалась реакция

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \pi^- + \pi^+ + X^0, \quad (107)$$

где символом X^0 обозначены любые нейтральные частицы (один или несколько π^0 -мезонов, γ - кванты и т.д.). Было отобрано 76 таких случаев, причем все они оказались связанными с генерацией η -мезона. Вычисления эффективной массы нейтральных частиц (X^0) показали, что все события удовлетворяют либо предположению $X^0 \equiv \pi^0$, либо $X^0 \equiv \gamma$. Никаких других типов распада η -мезона не было найдено (в том числе и распада $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \gamma$). Отношение вероятностей распадов

$$\frac{W(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma)}{W(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)} = 0,26 \pm 0,08. \quad (108)$$

В данном случае очень точные измерения энергии заряженных частиц ($\sim 1\%$) в реакции (107) позволили определить соотношение (108) без регистрации γ -квантов. Малая величина полученного соотношения является неожиданной. Действительно, распад (101) как электромагнитный процесс первого порядка по α должен иметь большую вероятность, чем распад (91)^{х)}. Обсуждение этого вопроса будет проведено ниже.

Оценки вероятностей для других каналов распада η -мезона были получены /175/ на той же экспериментальной установке, что и в работе /190/. В этом случае исследовались реакции

х) Аналогичная ситуация имеет место и для отношения вероятностей распадов $\eta \rightarrow 3\pi$ и $\eta \rightarrow 3\pi$, которое еще меньше, чем (108)/190/. Однако в этом случае распаду $\eta \rightarrow 3\pi$ соответствует меньший фазовый объем. Экспериментальное и теоретическое исследование этого вопроса представляет большой интерес.

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \eta \rightarrow \pi^+ + p + e^+ + e^- + X^0, \quad (109)$$

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \eta \rightarrow \pi^+ + p + \gamma + X^0. \quad (110)$$

В реакции (110) отбирались только те события, в которых γ -квант конвертировал (e^+e^-)-пару в водородной камере

$$\gamma + H \rightarrow e^+ + e^- + H \quad (111)$$

(вероятность конверсии $\approx 2,5\%$).

Вычисления эффективной массы X^0 позволили выделить случаи распада $\eta \rightarrow 2\gamma (M(X^0)=0)$ и $\eta \rightarrow 3\pi^0 (M(X^0))$ лежит в соответствующих кинематических пределах). При этом оказалось, что в области по $M(X^0)$, где разрешены по кинематике только распады на $2\pi^0$ -мезона, нет ни одного случая. Отсюда авторы делают вывод о малой величине фона от реакции

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \pi^0 + \pi^0 \quad (112)$$

в области η -пика.

В результате были получены следующие оценки:

$$\frac{W(\eta \rightarrow 3\pi^0)}{W(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)} = 0,83 \pm 0,32 \quad (113)$$

и

$$\frac{W(\eta \rightarrow 2\gamma)}{W(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)} = 1,24 \pm 0,56. \quad (114)$$

Для соотношения (113) существуют определенные теоретические предсказания. Как отмечалось выше (VI, § 1), при распаде $\eta \rightarrow 3\pi$ изотопический спин трех π -мезонов $I = 1$. В этом случае, исходя из изотопической структуры волновой функции трех π -мезонов, можно показать ^{/191/}, что

$$\frac{W(\eta \rightarrow 3\pi^0)}{W(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0)} \leq 3/2, \quad (115)$$

которое согласуется с (113).

При исследовании фоторождения η -мезонов была определена величина отношения ^{/181/}

$$\frac{W(\eta \rightarrow 2\gamma)}{W(\eta \rightarrow 3\pi^0 + \eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma)} = 0,80 \pm 0,25. \quad (116)$$

В этих результатах обращает на себя внимание тот факт, что вероятности распадов $\eta \rightarrow 2\gamma$ и $\eta \rightarrow 3\pi$ одного порядка. По теоретическим оценкам, учитывающим,

в основном, только различие в фазовых объемах этих процессов, распад $\eta \rightarrow 2\gamma$ имеет во много раз большую вероятность (величина отношения (114) около 100).

Одно из возможных объяснений аномально малой величины отношений (108) и (114) заключается в предположении существования сильного $\pi\pi$ -взаимодействия (или резонанса) с $I=0$, которое и увеличивает вероятность распада $\eta \rightarrow 3\pi$. Действительно, при распаде $\eta \rightarrow 3\pi$ такое состояние может реализоваться ($I(3\pi)=1$ и $I(\pi^+\pi^-)=0$ или 2) в то время, как при распаде $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ изотопический спин двух π -мезонов не может быть равен нулю ($I(\pi^+\pi^-)=1$)^{x)}. Вычисления, проведенные в предположении существования резонанса с $M=370$ Мэв и $\Gamma=50$ Мэв, показали^{/192/}, что

$$\frac{W(\eta \rightarrow 2\gamma)}{W(\eta \rightarrow 3\pi)} = 3,3. \quad (117)$$

С другой стороны, если распад $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ идет по схеме^{/193/}

$$\eta \rightarrow \rho^0 + \gamma \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma, \quad (118)$$

то

$$\frac{W(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)}{W(\eta \rightarrow 3\pi)} \approx 0,4. \quad (119)$$

Как видно, эти оценки совпадают с экспериментальными данными. Исследование энергетического спектра π^0 -мезонов, образованных при распаде $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$, также указывает на возможное существование сильного $\pi\pi$ -взаимодействия (рис.25)^{/194/}. Теоретическая кривая (*Brown and Singer*), дающая наилучшее согласие с экспериментальными данными, была вычислена в предположении существования $(\pi\pi)$ -резонанса с $M=(381 \pm 5)$ Мэв и $\Gamma=(48 \pm 8)$ Мэв^{/192/xx)}. Дальнейшее исследование этого вопроса представляет большой интерес.

Некоторые сведения о характере распадов $\eta \rightarrow 3\pi$ можно извлечь из их аналогии с процессами^{/195-204,206/}

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^+, \quad (120)$$

$$K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0. \quad (121)$$

Оказывается, что три π -мезона, образованные в распадах $K_2^0 \rightarrow 3\pi$ и $\eta \rightarrow 3\pi$, могут иметь одинаковые квантовые числа. Действительно, в случае распада $\eta \rightarrow 3\pi$ $J^P(3\pi)=0, I(3\pi)=1$ (*VI*, § 1). При распаде $K_2^0 \rightarrow 3\pi$, так как $J(K)=0$, то $L(\pi^+\pi^-) = \ell(\pi^0)$

х) При распаде $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ C -четность сохраняется, т.е. $C(\pi^+\pi^-\gamma) = +1$. С другой стороны, $\ell C(\pi^+\pi^-\gamma) = C(\pi^+\pi^-)C(\gamma)$ и $C(\gamma) = -1$, т.е. $C(\pi^+\pi^-) = -1$. Отсюда, так как $C(\pi^+\pi^-) = (-1)^{\ell} = (-1)^{\ell}$, то $I(\pi^+\pi^-) = 1$.

xx) Указание о наличии сильного $\pi\pi$ -взаимодействия с $I(\pi\pi)=0$ и $M=3\pi$ получено также при изучении реакций $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ ^{/99/}.

(в терминах дипиона и одиночного π^0 -мезона для реакции (121)). Отсюда

$$P(3\pi) = (-1)^{\ell+L+3} = (-1)^{2\ell+3} = -1. \quad (122)$$

Так как в процессах слабого взаимодействия сохраняется комбинированная четность (CP), то

$$CP(3\pi) = (-1)(-1)^{I(\pi^+\pi^-)} = -1, \quad (123)$$

так как $CP(K_2^0) = -1$.

Следовательно, изотопический спин $I(\pi^+\pi^-) = 0$ или 2. Полный спин трех π -мезонов может быть равен 1, 2 и 3. Если воспользоваться правилом $\Delta I = \frac{1}{2}$, то остается одна возможность $I(3\pi) = 1$ ($I(K) = \frac{1}{2}$).

Таким образом, четность изоспин и спин 3π -систем, образованных в процессах $K_2^0 \rightarrow 3\pi$ и $\eta \rightarrow 3\pi$ совпадают. Правда, эти системы могут различаться по другим квантовым числам (ℓ, L и $I(\pi^+\pi^-)$). Однако близость масс K и η -мезонов дает основания полагать, что и по этим квантовым числам не будет большого различия. В связи с этим, если предположить, что матричный элемент процессов $K_2^0 \rightarrow 3\pi$ и $\eta \rightarrow 3\pi$ зависит только от взаимодействия π -мезонов в конечном состоянии, то спектры мезонов в этих распадах должны быть подобны /196/. Экспериментальные данные не противоречат этому предположению /196-198/. Совместное изучение этих процессов позволит получить новые сведения о механизме распада η -мезона.

В заключение этого параграфа отметим, что распад $\eta \rightarrow 3\pi$ осуществляется посредством электромагнитных процессов второго порядка. Это означает, что в сильных взаимодействиях изотопический спин сохраняется с точностью до членов порядка $\alpha^2 \approx 10^{-4}$. Само собой разумеется, что речь здесь идет не столько об окончательном утверждении, сколько о направлении дальнейших исследований /205/.

§ 3. Время жизни η -мезона. Поиски новых резонансных (3π) -систем

Электромагнитный характер распадов η -мезона определяет его сравнительно большое время жизни. По различным теоретическим оценкам $\tau(\eta) \sim 10^{-17} - 10^{-18}$ сек., т.е. ожидаемая ширина η -пика $\sim 10^{-4} - 10^{-3}$ Мэв. При современной точности экспериментов, когда разрешающая способность приборов не лучше, чем несколько Мэв, определение $\Gamma(\eta)$ прямыми методами невозможно. Наблюдение же разрывов между точками рождения и распада η -мезонов (определение $\tau(\eta)$) требует очень высоких пространственных разрешений, так как величина этих разрывов $\sim 0,01 - 0,001$ мк (ситуация, аналогичная определению времени жизни π^0 -мезона) /205, 209, 210/.

Поэтому приобретают большое значение косвенные методы определения $\Gamma(\eta)$. Например, исследуя фотогенерацию η -мезонов в кулоновском поле тяжелого ядра, т.е. используя процесс обратный распаду $\eta \rightarrow 2\gamma$, можно оценить величину $\Gamma(\eta)$. При этом величина эффективного сечения пропорциональна ширине η -мезона и при $Z \approx 100$ и $E \approx 4$ Гэв достигает $3 \cdot 10^{-28}$ см²/стерад., если $\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma) \approx 150$ эв²/211, 212/. Для отделения указанного процесса от ядерной генерации η -мезонов можно использовать очень узкое угловое распределение (наиболее вероятный угол $0,5^\circ$) и быстрый рост сечения с Z ($\sigma \approx Z^2$).

Поиски новых резонансных (3π)-систем

При изучении процессов

$$p + p \rightarrow p + \pi + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \quad (124)$$

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \quad (125)$$

был обнаружен пик в распределении по эффективным массам $(\pi^+ \pi^- \pi^0)$ и $(\pi^+ \pi^+ \pi^-)$ -систем с $M \approx 625$ Мэв (α -мезон, $I(\alpha) = 1$ или 2)^{/170/}. Однако в других экспериментах этот резонанс не был обнаружен.

Указания на существование аномалий в распределениях по $M(3\pi)$ с $M = 0,45, 0,63, 0,87,$ и $1,05$ Гэв ($I = 2$) были получены в работах^{/28,213/}.

В настоящее время нет убедительных доказательств существования новых резонансов в 3π -системах.

VII. Многопионные резонансные системы

В связи с открытием двух- и трехпионных резонансных систем (ρ, f, ω и η -мезоны) естественно возникает вопрос о существовании таких резонансов, которые распадались, в основном, на четыре, пять и большее число π -мезонов. В случае открытия значительного числа таких резонансов ситуация с ними возможно будет напоминать в некоторой степени положение, которое имеет место при образовании ядер из нуклонов, и можно было бы надеяться найти общие закономерности в их свойствах. В противном случае будут существовать несколько резонансов, свойства которых могут быть совершенно различны. Решение этого вопроса представляет большой интерес.

В настоящее время начались поиски резонансов, распадающихся на четыре π -мезона^{/123, 214, 215/}.

Изучение процессов типа

$$\pi^{\pm} + p \rightarrow \Lambda + K + n \pi \quad (n = 1, 2, 3, 4 \dots) \quad (126)$$

показало, что в распределении по эффективным массам ($\pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-$)-системы имеется пик с $M = 1,340$ Гэв и $\Gamma \approx 140$ Мэв^{/123/}. Указание на существование резонанса в 4π -системе с $M = 1,04$ Гэв было получено в работах^{/214, 215/}. Однако необходимы дальнейшие исследования для выяснения природы этих аномалий.

B - мезон ($\pi\omega$ -резонанс)

Исследование реакций^{/41, 137/}



проведенное с помощью водородных пузырьковых камер в интервале импульсов от 3,24 до 4 Гэв/с, показало, что имеется пик в распределении по $M(\pi^{\mp} \pi^+ \pi^- \pi^0)$ (B -мезон, рис. 26). Масса B -мезона равна 1,22 Гэв и $\Gamma = 0,100 \pm 0,020$ Гэв.

Было также установлено, что

$$\frac{W(B \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0)}{W(B \rightarrow \pi^+ \omega \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0)} \leq 0,5. \quad (128)$$

Очевидно, что $I(B) = 1$. Интересно отметить, что B -мезон является первым резонансом, который распадается по схеме



с участием уже известного резонанса^{х)}.

Возможные квантовые числа и свойства нового резонанса обсуждаются в работах^{/216, 217/}. Однако увеличение статистики и дальнейшее изучение природы обсуждаемой аномалии необходимы для вывода о существовании B -мезона.

VIII . Резонансные системы K-мезонов

В настоящее время постепенно накапливаются экспериментальные данные по образованию и распадам пар $K\bar{K}$ -мезонов и начинается изучение соответствующих резонансов. В связи с этим мы сначала остановимся на одном очень интересном свойстве систем $K^0\bar{K}^0$, которое оказалось полезным при определении квантовых чисел резонансов, а затем перейдем к имеющимся экспериментальным результатам.

х) Резонансы, распадающиеся на четыре, пять или больше число пионов, вероятно, должны иметь большие значения изотопических слиянов ($I = 4, 5, 6 \dots$). В противном случае, более вероятны их распады на два или на три π -мезона или каскадные распады через известные резонансы.

§ 1. Схемы распада $K^0 \bar{K}^0$ -детектор четности системы

Рассмотрим некоторые распадные свойства пар $K^0 \bar{K}^0$ -мезонов /218-220/.

Система $K^0 \bar{K}^0$, как и любая система бозон-антибозон, обладает одной важной особенностью: ее комбинированная четность всегда положительна ($CP=+1$). Действительно, при любом орбитальном моменте системы l зарядовое сопряжение дает фазовый множитель $(-1)^l$, в точности такой же множитель дает и пространственное отражение P , так что после CP -преобразования общий фазовый множитель равен $(-1)^{2l}=+1$.

С другой стороны, экспериментально наблюдаются распады типа:

$$K^0 \bar{K}^0 \rightarrow K_1^0 K_1^0, \quad (130)$$

$$K^0 \bar{K}^0 \rightarrow K_2^0 K_2^0, \quad (131)$$

$$K^0 \bar{K}^0 \rightarrow K_1^0 K_2^0, \quad (132)$$

где K_1^0 - короткоживущие мезоны, обладающие $CP=+1$ и K_2^0 - долгоживущие мезоны с $CP=-1$. Пары $K_1^0 K_1^0$ и $K_2^0 K_2^0$, в силу тождественности входящих в них частиц, всегда находятся в состояниях с четными моментами и обладают комбинированной четностью $CP=+1$.

Комбинированная четность пар $K_1^0 K_2^0$ зависит от орбитального момента системы и равна $(-1)^{l+1}$. Поэтому, если эта пара образовалась из пары $K^0 \bar{K}^0$, обладающей, как было показано выше, $CP=+1$, то для нее возможны только нечетные моменты. Таким образом, при четных орбитальных моментах пара $K^0 \bar{K}^0$ может распадаться только по схемам (130) и (131), а при нечетном - по схеме $K_1^0 K_2^0$ x).

Итак, схема распада является в данном случае детектором четности орбитального момента системы. Так как четность системы определяется множителем $(-1)^l$, то схема распада является и детектором четности системы.

Если имеется резонансное взаимодействие между $K \bar{K}$ -мезонами в состоянии с определенным орбитальным моментом, то соответствующая нейтральная система ($K^0 \bar{K}^0$) будет распадаться только по схемам (130) и (131) либо по (132) в зависимости от четности резонанса. Причем распады по схемам (130) и (131) равновероятны /218-220/. Это важное свойство пар $K^0 \bar{K}^0$ -мезонов было использовано при определении квантовых чисел ϕ -мезона.

x) Аналогичное рассмотрение может быть проведено и в отношении системы $p \bar{p}$, комбинированная четность которой также не зависит от орбитального момента и равна $(-1)^{S+1}$, S - спин системы. Интересные возможности использования корреляций в типах распада $K \bar{K}$ -мезонов при аннигиляции предложены в работе /221/.

§ 2. ϕ -мезон

Исследования взаимодействий K^- -мезонов в интервале импульсов 1,8-2,2 Гэв/с с протонами, выполненные с помощью водородных пузырьковых камер, привели к открытию резонанса, распадающегося на пары $K\bar{K}$, который был назван ϕ -мезоном^{/222-224/}.

В этих работах изучались реакции



Всего было найдено 46 событий типа (133) и 52 события (134). В распределении по эффективным массам ($K\bar{K}$)-систем имеется четкий резонансный пик с $M(K\bar{K}) = 1019$ Мэв и $\Gamma \leq (3-5)$ Мэв (см. рис. 27 из работы^{/223/}). Сечение рождения ϕ -мезона в этих реакциях равно (50 ± 6) микробарнам.

Ширина резонансного пика ϕ -мезона была определена при изучении аннигиляции остановившихся антипротонов в 30-дюймовой водородной пузырьковой камере (см. в § 1)^{/225/}. Исследовалась реакция



Отбирались только те события, в которых оба K -мезона останавливались в камере. Ошибка в определении $M(K\bar{K})$ была равна $\pm 0,6$ Мэв. На рис. 28 приведена идеограмма распределения найденных событий по $M(K\bar{K})$ и соответствующие кривые разрешения и наилучшего согласия^{/225/х}. Было получено, что $M(\phi) = 1018,6 \pm 0,5$ Мэв и $\Gamma = 3,1 \pm 1,0$ Мэв.

Существенную роль в определении квантовых чисел ϕ -мезона сыграли его нейтральные моды распада:



А именно, было установлено, что ϕ -мезон распадается по схеме



т.е. его четность отрицательна, а значение спина равно целому нечетному числу (см. VIII, § 1).

Этот факт был установлен при изучении реакции



В камере регистрировались только распады Λ и K_1^0 -частиц. Соответствующая кинематическая программа позволяла выделить события типа (138). В работе^{/223/} было

х) Некоторые вопросы, связанные с представлением экспериментальных распределений в виде идеограмм рассмотрены в работах^{/226-228/}.

найденно 23 таких события, в то время как ни одного случая типа (138) с распадами

$$K^0 \bar{K}^0 \rightarrow K_1^0 K_1^0, \quad (130)$$

не наблюдалось, несмотря на высокую эффективность регистрации K_1^0 -распадов. Соответствующие расчеты показывают, что гипотеза о распадах ϕ -мезона по схемам (130) и (131) дает результаты, отличающиеся на 12 стандартных ошибок от экспериментальных /223/.

Некоторые заключения о величине спина ϕ -мезона можно также получить и из величины соотношения

$$\alpha(J) = \frac{W(\phi \rightarrow K_1^0 K_2^0)}{W(\phi \rightarrow K_1^0 K_2^0 + K^+ K^-)} \quad (139)$$

Существенная зависимость $\alpha(J)$ от спина резонанса появляется в связи с малым энерговыделением при распаде $\phi \rightarrow KK$ ($Q \approx 20-30$ Мэв). В этом случае разница масс K^\pm и K^0 -мезонов и кулоновское взаимодействие сильно влияют на величину $\alpha(J)$ при наличии центробежных барьеров ($J \neq 0$)^{x)}. Соответствующие расчеты показывают, что $\alpha(J=1) \approx 0,39$ и $\alpha(J=3) \approx 0,26$ /223, 229, 230/. В работе /223/ было получено $\alpha = 0,45 \pm 0,10$, т.е. имеется предпочтение в пользу $J(\phi) = 1$.

Угловые распределения распадных K -мезонов ($\phi \rightarrow KK$) также лучше согласуются с $J(\phi) = 1$ /222/. Однако статистика событий не является достаточной, чтобы делать окончательные выводы.

Поиски распадов /223/

$$\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad (140)$$

показали, что

$$\frac{W(\phi \rightarrow 2\pi)}{W(\phi \rightarrow KK)} \leq 0,2 \quad (141)$$

Теоретические оценки величины этого соотношения, полученные, в основном, из сравнения фазовых объемов соответствующих распадов ϕ -мезона, дают значение ~ 100 /229/. Такое сильное подавление распада (140) можно объяснить различной G-четностью ϕ -мезона и системы двух π -мезонов (напомним, что $G(\pi\pi) = +1$). Следовательно, $G(\phi) = -1$.

Отсюда, так как G-четность системы KK определяется выражением

$$G(KK) = (-1)^{\ell+1} \quad (xx) \quad (142)$$

x) Если пренебречь этими эффектами, то значение $\alpha(J)$ не зависит от спина резонанса и равно 0,5, в силу изотопической инвариантности.

xx) Действительно, так как $C(KK) = (-1)^\ell$, то $G(KK) = C(-1)^\ell = (-1)^{\ell+1}$ (см. VIII, § 1).

и спин ϕ -мезона равен нечетному числу, то $I(\phi)=0$. И так, ϕ -мезон имеет следующие квантовые числа $I(J^{PG})=0(1^{--})$, т.е. те же самые, что и ω -мезон. В связи с этим возможно "перемешивание" ϕ - и ω -мезонов за счет сильных взаимодействий. (см. также V, § 5).^{/231,232/}

Неожиданными оказались результаты исследований рождения ϕ -мезона в πp -соударениях и поисков распадов

$$\phi \rightarrow \rho + \pi. \quad (143)$$

Было получено^{/233, 223, 41/}

$$\frac{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p \phi)}{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p \omega)} \leq 0,012 \quad (144)$$

при $p_s = 3,7$ Гэв и

$$\frac{W(\phi \rightarrow \rho \pi)}{W(\phi \rightarrow KK)} = 0,35 \pm 0,2. \quad (145)$$

Теоретические оценки величины отношения (145), полученные из соображений, связанных с фазовыми объемами и областью взаимодействия $r = \frac{1}{2 m_\pi}$, дают значения на порядок большие, чем (145). С другой стороны, кажется очень странным малое сечение рождения ϕ -мезона в πp -столкновениях по сравнению с сечением рождения ω -мезона, который имеет те же квантовые числа.

Оба этих экспериментальных результата можно объяснить, если предположить, что

$$\frac{G_{\rho\phi\pi}^2}{G_{\rho\omega\pi}^2} \leq (1-5)\% \quad (146)$$

(здесь G - соответствующие константы связи)^{/233, 230/}. Некоторое объяснение слабой связи ϕ -мезона с ρ - и π -мезонами можно получить в рамках модели унитарной симметрии (несохранение унитарной четности в распадах (143))^{/234/}.

§ 3. KK -взаимодействие при малых энергиях ($KK\pi$)-резонанс.

Изучение взаимодействия K -мезонов, рожденных в πN -соударениях, показало наличие широкого максимума резонансного типа с $M(KK) \approx 1,02$ Гэв и $\Gamma = 100$ Мэв^{/235-239/}

В этом случае изучались реакции

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \bar{K}^0 + n + m\pi \quad (m=0,1,2,\dots) \quad (147)$$

с последующими распадами

$$K^0 \bar{K}^0 \rightarrow K^0_1 K^0_1. \quad (130)$$

Таким образом, система $K^0 \bar{K}^0$ обладает четным орбитальным моментом и положительной четностью (VIII, § 1). Угловое распределение K^0_1 -мезонов имеет анизотропный характер, т.е. $J(K^0 \bar{K}^0) \geq 2$ /235/. Однако статистика найденных событий (147) недостаточна для окончательного вывода (37 событий). Другие возможные квантовые числа $K \bar{K}^0$ -резонансов обсуждаются в работах /240-243/.

Аномалия в распределении $M(K^0 \bar{K}^0)$ может быть также объяснена взаимодействием K -мезонов в конечном состоянии. В этом случае длина $K^0 \bar{K}^0$ -рассеяния может быть невелика $\approx \frac{1}{m_\pi}$ /104/.

Дальнейшее исследование этого явления представляет большой интерес.

Данные о возможном резонансе в $(K \bar{K} \pi)$ -системе были получены при изучении реакции /244/

$$p + \bar{p} \rightarrow K^0 + K^\mp + \pi^\pm + \pi^\pm. \quad (148)$$

Оказалось, что $M(K^0 K^\pm \pi^\mp) \approx 1410$ Мэв и $\Gamma \approx 60$ Мэв. В работах /244, 245/ получено указание о существовании резонанса в $(K^0_1 K^\pm)$ -системах с $M \approx 1,02$ Гэв.

Новые эксперименты необходимы для выяснения природы этих аномалий /246/.

1X. K^* -мезон

Впервые существование K^* -мезона было обнаружено при изучении $K \bar{p}$ -взаимодействия в реакции /247/:

$$K^- + p \rightarrow K^{*0} + \pi^- + p. \quad (149)$$

К настоящему моменту K^* -мезон наблюдался в процессах взаимодействия K^\pm -мезонов /126, 247-257/ и π^\pm -мезонов /258-267/ с нуклонами, а также в процессах аннигиляции /268/.

Характерное распределение эффективных масс $K^0 \pi^-$ -системы в реакции (149) приведено на рис. 29. ($M(K^*) = 890,4$ Мэв и $\Gamma = 47$ Мэв). Сечение рождения K^* -мезона в этой реакции при $p_s = 1,15$ Гэв равно $(1,3 \pm 0,3)$ мб.

Изотопический спин K^* -мезона был определен при совместном изучении процессов (149) и

$$K^- + p \rightarrow K^{*0} + p \rightarrow K^- + \pi^0 + p. \quad (150)$$

Было получено /247-248/, что

$$\frac{W(K^{*0} \rightarrow K^0 \pi^0)}{W(K^{*0} \rightarrow K^0 \pi^-)} = 0,75 \pm 0,35. \quad (151)$$

Из изотопической инвариантности следует, что величина этого отношения для $J(K^*) = \frac{1}{2}$ равна 0,5 и для $J(K^*) = \frac{3}{2}$ равна 2. Отсюда можно сделать заключение о том, что $J(K^*) = \frac{1}{2}$. Этот вывод подтверждается также специальным исследованием возможных резонансных состояний $(K^- \pi^-)$ -системы с $J = \frac{3}{2}$ при $p \approx 1,51$ Гэв в реакции ^{/250/}



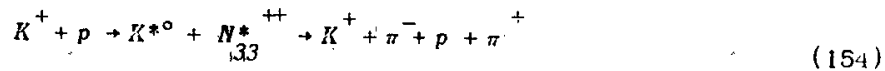
Было показано, что резонанс в $(K^- \pi^-)$ -системе в интервале масс 0,6-1,0 Гэв не образуется с сечением, большим чем 0,01 мб. В то же время, при тех же импульсах первичных K^- -мезонов сечение рождения K^* -мезона в реакции (149) равно 1,6 мб ^{/251/}. Аналогичный результат был получен и при изучении $(K^0 \pi^-)$ -взаимодействия в πN -соударениях ^{/258/}.

Первые выводы о возможной величине спина K^* -мезона были получены в работе ^{/247/}. В этом случае изучалось образование новых мезонов вблизи порога в реакции



Эксперименты проводились при импульсе K^- -мезонов 1150 Мэв/с (пороговый импульс 1080 Мэв/с). Угловое распределение K^* -мезонов в $K\bar{p}$ -системе имеет изотропный характер. В связи с этим можно считать, что K^* -мезоны рождаются в S -состоянии и анализ по Адэйру можно проводить для произвольных углов вылета мезонов ^{/269-270/}. Если $J(K^*) > 1$, то угловое распределение распадающихся мезонов в системе покоя K^* -мезона должно быть анизотропным. Для $J(K^*) = 0$ или 1 возможны и изотропные распределения. Было показано, что значения $J(K^*) > 1$ противоречат экспериментальным данным.

Изучение реакции



позволило получить дополнительные сведения о спине K^* -мезона ^{/255-257/}. Реакция (154) изучалась с помощью пузырьковой водородной камеры, облученной пучком K^+ -мезонов с $p \approx 1,96$ Гэв. Сечение этого процесса оказалось равным $1,1 \pm 0,2$ мб ^{/257/}. На рис. 30 приведены распределения по эффективным массам $(K^+ \pi^-)$ и $(p \pi^+)$ -систем.

Для анализа по методу Адэйра было отобрано 69 случаев, в которых косинус угла вылета K^* -мезона в с.п.и. $(K^+ p)$ находился в интервале

$$1,0 \geq \cos \theta_{K^+} \geq 0,8. \quad (155)$$

На рис. 31 приведены полученные угловые распределения K^+ -мезонов. Резкая анизотропия этого распределения сразу исключает значение $J(K^*) = 0$. Сопоставляя этот результат с полученным выше ($J(K^*) \leq 1$), приходим к выводу о том, что $J(K^*) = 1$.

С другой стороны, заключения о величине спина K^* -мезона можно также получить из анализа угловых распределений K^+ -мезонов. В таблице VI приведены соот-

ветствующие угловые распределения распадов $K^*(I_{K^*}(a))$ и $N_{33}^{*++}(I_{N_{33}^{*++}}(\beta))$ для разрешения проекций спинов этих частиц на направление первичного K^+ -мезонов^{х)}.

Т а б л и ц а VI

$m_J(K^*)$	$m_J(N_{33}^{*++})$	$I_{K^*}(a)$	$I_{N_{33}^{*++}}(\beta)$
+1	-1/2	1/2 sin ² a	1 + 3 cos ² β
0	+1/2	cos ² a	1 + 3 cos ² β
-1	+3/2	1/2 sin ² a	3 sin ² β

Полученные распределения хорошо согласуются с $I(a) = \cos^2 a$ для распадов K^* -мезонов и не противоречат $I(\beta) = 1 + 3 \cos^2 \beta$ для распадов N_{33}^{*++} -изобары. Это обстоятельство является дополнительным аргументом в пользу $J(K^*) = 1'$.

Исследование реакции /267/



при импульсах падающих π^- -мезонов 2,17 Гэв/с и 2,25 Гэв/с также показало наличие существенной анизотропии в распределении распадных K^- -мезонов относительно нормали к плоскости рождения Σ^- -гиперона и K^* -мезона. Этот факт исключает значение $J(K^*) = 0$.

Очень интересный способ определения спина K^* -мезона был предложен в работе /271/. Он основан на свойствах пар $K^0 \bar{K}^{*0}$ -мезонов, образованных в реакции



Экспериментальные данные об аннигиляции остановившихся антипротонов в водороде показывают, что она происходит в S^- -состоянии /272/.

В этом случае процессы



с последующими распадами K^- -мезонов по каналу



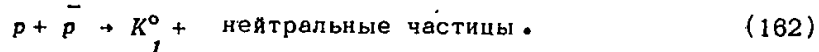
х) Закон сохранения проекции полного момента сталкивающихся частиц в этом случае имеет вид

$$m_J(K^*) + m_J(N_{33}^{*++}) = \pm 1/2 \quad (156)$$

так как проекция орбитального момента на направление первичного K^+ -мезона равна нулю.

запрещены, если $J(K^*) = 0$, т.е. опять, как и в случае ϕ -мезона, тип распада системы является детектором ее спина и четности.

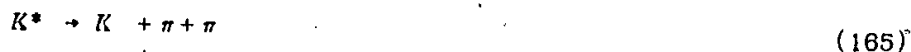
Экспериментальное исследование этого процесса было проведено с помощью 81-см водородной пузырьковой камеры ^{/269/}. Изучалась реакция



Импульсное распределение K_1^0 -мезонов проведено на рис. 32. Имеющийся максимум в распределении при $p_s = 810$ Мэв соответствует реакциям (159) и (160). Оценка событий, связанных с распадами (KK^*) -системы по каналу (161), показала, что число таких случаев равно $36,5 \pm 15$ ^{/269/}. Таким образом, и в этом случае имеется основание думать, что $J(K^*) = 1$.

Итак, совокупность данных о спине K^* -мезона дает основания считать, что $J(K^*) \neq 0$ и наиболее вероятно $J(K^*) = 1$. Это означает, что $(K\pi)$ -система находится в P -состоянии и K^* -мезон имеет положительную четность относительно K -мезона. Поэтому четность K^* -мезона относительно Λ -частицы будет такой же как и у K -мезона, т.е. отрицательной (см. таблицу I).

Отметим также другие возможные эксперименты по определению $J(K^*)$ ^{/273-278/}. Например, если $J(K^*) = 0$, то реакции



запрещены. Однако в случае векторного мезона реакции (164) и (165) имеют малую вероятность. Теоретические оценки показывают ^{/277-278/}, что

$$\frac{W(K^* \rightarrow K\gamma)}{W(K^* \rightarrow K\pi)} \approx (0,8 \pm 0,15) \% \quad (166)$$

и

$$\frac{W(K^* \rightarrow K\pi\pi)}{W(K^* \rightarrow K\pi)} \approx (0,3 \pm 0,3) \% \quad (167)$$

В работах ^{/279-285/} рассматриваются динамические модели K^* -мезона и его роль в процессах взаимодействия элементарных частиц.

X. κ - мезон (K^* (725))

Большой экспериментальный материал по взаимодействию элементарных частиц,

полученный в настоящее время, позволяет приступить к изучению таких резонансов, сечение образования которых составляет несколько микробарн. Именно к таким резонансам относится и κ -мезон ($K^*(725)$).

Первые результаты о κ -мезоне были получены при исследовании реакции ^{/258,259,266/}



в интервале импульсов от 1,51 до 2,36 Гэв/с. В распределении по $M(K^+\pi^-)$ и $M(\pi^+K^0)$ имеются резонансные пики с $M \approx 885$ Мэв (K^* -мезон) и $M \approx 725$ Мэв (κ -мезон, см. рис. 33). Ширина κ -пика $\Gamma \leq 20$ Мэв. Авторы оценивают вероятность появления пика при $M \approx 725$ Мэв в результате статистических флуктуаций $\sim 0,2\%$. Сечение рождения κ -мезона составляет ≈ 4 микробарн, т.е. почти на порядок меньше сечения рождения K^* -мезона в этой же реакции ($\sigma \approx 30$ микробарн).

Некоторые косвенные данные об изотопическом спине κ -мезона были получены при изучении процесса ^{/266/}



В этом случае не наблюдается никаких резонансных пиков в области κ -мезона ($I(\pi^- K^0) = 3/2$). Аналогичный вывод получен и в работе ^{/250/}. Отсюда можно думать, что $I(\kappa) = 1/2$.

Указание о возможном существовании κ -мезона получено также при изучении реакции



в интервале импульсов K^- -мезонов от 1,0 до 1,7 Гэв/с ^{/249/}. Сечение рождения κ -мезона в этой реакции ≈ 40 микробарн, в то время как сечение рождения K^* -мезона ≈ 1000 микробарн. Было найдено, что $M(\kappa) = 723 \pm 3$ Мэв и $\Gamma \leq 12$ Мэв. Из-за малой статистики (≈ 30 κ -мезонов) нельзя сделать каких-либо определенных выводов о других квантовых числах этой частицы.

Следует отметить, что несмотря на определенный вывод о существовании κ -мезона, сделанный авторами работ ^{/266, 249/}, необходимы дальнейшие эксперименты как по доказательству наличия κ -пика, так и по выяснению его природы, так как статистика найденных случаев очень мала.

Возможные квантовые числа и свойства κ -мезона обсуждаются в работах ^{/286-289/}. Например, было показано, что некоторые промежуточные векторные бозоны могут рождаться с сечением порядка нескольких микробарн ^{/287/}. Если κ -мезон является таким бозоном, то его квантовые числа $J^P = 1^-$.

С другой стороны, в работе ^{/286/} рассмотрена возможность существования одиночного странного бозона в рамках модели унитарной симметрии, который слабо взаимодействует с другими частицами и имеет $J^P = 0^+$.

В связи с этим очень интересно исследовать распад

$$K \rightarrow K + \gamma, \quad (172)$$

который запрещен для $J(K) = 0$.

З а к л ю ч е н и е

Открытие большой группы новых частиц - резонансов показывает, что считать все-частицы элементарными, по-видимому, не более разумно, чем считать элементарными атомные ядра. В настоящее время имеется несколько попыток установить закономерности (симметрии) в свойствах частиц, позволяющие объединить большое количество разных частиц в небольшое число групп (мультиплетов).

Особенно популярны модели Сакаты, Гелл-Манна и Неймана ^{/290-293/}. Например, в модели Гелл-Манна и Неймана ^{/292, 291/} бозоны и гипероны (N, Λ, Σ, Ξ) объединяются в мультиплеты по 8 частиц, т.е. 8 мезонов с $J^P = 0^-(\pi, K, \eta)$, 8 мезонов с $J^P = 1^-(\rho, K^*, \phi$ или $\omega)$ и т.д. Все частицы в рамках одного мультиплета имеют одинаковые величины спинов и значения четности. Формула для масс частиц, полученная для этой модели хорошо описывает экспериментальные данные ^{/293/}. Однако сейчас еще рано говорить о том, что эта модель имеет место в действительности, так как не все мультиплеты полностью заполнены и ряд важных выводов, вытекающие из этого представления, еще не проверены.

Отметим также важную роль векторных мезонов. Их существование на основе обобщенной калибровочной инвариантности обсуждалось Сакураи и др. ^{/294/}. С другой стороны, Огиевецким и Полубариновым было показано, что если векторные мезоны обладают спином равным единице во взаимодействии, то в этом случае из факта их существования вытекают изотопическая инвариантность, сохранение барионных и гиперонных зарядов в сильных взаимодействиях ^{/295/}. При этом векторные мезоны должны иметь отрицательную четность. Как видно из таблицы 1, все векторные мезоны действительно имеют $P = -1$.

Обзор основных явлений, связанных с резонансами, показывает, что они касаются таких фундаментальных проблем, как проблема элементарности частиц, вопросы теории взаимодействий и т.п. Поэтому представляет большой интерес дальнейшее детальное изучение свойств известных резонансов и поиски новых.

Л и т е р а т у р а

1. И.В.Чувило. УФН, LXXVI, 329, 1962.
2. G.Puppi. 1962 Ing. Conf. on High-Energy Physics at CERN, 713. Annual Review of Nucl Science 13, 287 (1963).
3. B.P.Gregory. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, 779.
4. G.A.Snow. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, 795.
5. Вопросы физики элементарных частиц. Изд. АН Армянской ССР, Ереван, 1962.
6. Вопросы физики элементарных частиц. Изд. АН Армянской ССР, Ереван, 1963.
7. S.Minami. Supplemento of Progr. of Theor. Phys., 21, 120 (1961).
8. R.Lynch. Proc. Phys. Soc. (London), 80, 46 (1962).
9. A.Salam. Proc. Phys. Soc. (London), 80, 13 (1962).
10. M.Roos. Rev. Mod. Phys., 35, 314 (1963), Phys. Lett., 8, 1 (1964).
11. W.H.Barkas, A.H.Rosenfeld. UCRL-8030, (1963); R.H.Dalitz. Annual Review of Nucl. Science, 13, 339 (1963).
12. С.А.Бунятов. Препринт ОИЯИ Р-1494, 1964.
13. В.С.Барашенков. Препринт ОИЯИ Р-1490, 1963.
14. Д.И.Блохинцев. ЖЭТФ, 29, 33, 1955. Symposium CERN, Geneva, 1956.
15. F.J.Dyson, Phys. Rev., 99, 1037 (1955).
16. G.Takeda. Phys. Rev., 100, 440 (1955).
17. D.McLeod, S.Richert, A.Silverman. Phys. Rev. Lett., 7, 383 (1961);
B.Sechi Zorn. Phys. Rev. Lett., 8, 282 (1962).
18. J.Derado. Nuovo Cimento, XY, 853 (1960).
19. E.Pickup, F.Ayer, E.O.Salant. Phys. Lett., 5, 161 (1960).
20. J.G.Rushbrooke and D.Radojicic. Phys. Lett., 5, 567 (1960).
21. D.L.Stonehill, H.L.Kraybill. Rev. Mod. Phys., 34, 503 (1962).
22. Н.С. Крылов, В.А. Фок. ЖЭТФ, 17, 93, 1947.
23. Л.А.Халфин. ЖЭТФ, 39, 1371, 1960.
Я.Б.Зельдович. ЖЭТФ, 39, 776, 1960.
24. Г.И.Копылов. Препринт ОИЯИ Р-1079, 1962. Nuclear Physics. (В печати).
25. A.R.Erwin, R.March, W.D.Walker, E.West. Phys. Rev. Lett., 6, 628 (1961).
26. V.P.Kenney, W.D.Shephard and C.D.Gall. Phys. Rev., 126, 736 (1962).
27. Я.Я.Шаламов, А.Ф.Грашин. ЖЭТФ, 43, 21, 1962.
28. Yu.V.Trebukhovsky, T.A.Yerofeev, G.D.Tikhomirov. Phys. Lett., 6, 190 (1963).
29. М.С.Айнутдинов, С.М.Зомбковский, С.Я.Никитин, Я.М.Селектор, А.Ф.Грашин.
ЖЭТФ, 42, 1413, 1962.
30. W.D.Shephard and W.D.Walker. Phys. Rev., 126, 278 (1962).
31. C.Grote, J.Klabuhn, J.Klugow, U.Krecker, U.Kundt, K.Lanius, H.W.Meier,
Nucl. Phys., 34, 648 (1962). Nucl. Phys., 34, 659 (1962).
Nucl. Phys., 34, 685 (1962).

32. M.C. Айнутдянов, С.М. Зомбковский, Я.М. Селектор, В.Н. Шуляченко. ЖЭТФ, 45, 1882, 1963.
33. G. Bellini, M. Di Corato, E. Fiorini, A. J. Herz, P. Negri, S. Ratti. Phys. Lett., 7, 157 (1963).
34. E. Pickup, D. K. Robinson and E. O. Salant. Phys. Lett., 7, 192 (1961).
35. E. Pickup, D. K. Robinson, E. O. Salant, F. Ayer, B. A. Munir. Phys. Rev., 132, 1819 (1963).
36. N. P. Samios, A. H. Baehman, R. M. Lea, T. E. Kalogeropoulos, W. D. Shephard. Phys. Rev. Lett., 9, 179 (1962).
37. J. Hennesy, J. J. Veillet, M. Di Corato, P. Negri, 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN., 603.
38. D. O. Caldwell, E. Bleuler, B. Elsner, L. W. Jones and B. Zacharov. Phys. Lett., 2, 253 (1962).
39. P. Fleury, G. Koyos, F. Muller, C. Pelletier. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, 597.
40. C. Alf, D. Berley, D. Colley, N. Gelfand, U. Nauenberg, D. Miller, J. Schultz, J. Steinberger, T. H. Tan, H. Brugger, R. Kramer, R. Plano. Phys. Rev. Lett., 9, 322 (1962).
41. M. Abolins, R. L. Lander, W. A. W. Mehlhop, Nguyen Huu Xuong and P. M. Yager. Phys. Rev. Lett., 11, 381 (1963).
42. W. J. Fickinger, D. K. Robinson, E. O. Salant. Phys. Rev. Lett., 10, 457 (1963).
43. A. Daudin, M. A. Jabiol, C. Kochowski, C. Lewin, F. Selleri, S. Mongelli, A. Romano, P. Waloschek. Phys. Lett., 7, 125 (1963).
44. J. Button, G. R. Kalbfleisch, G. R. Lynch, B. C. Maglic, A. H. Rosenfeld, M. L. Stevenson. Phys. Rev., 126, 1858 (1962).
45. Nguyen Huu Huong and G. R. Lynch. Nuovo Cimento, XXV, 923 (1962).
46. G. B. Chadwick, W. T. Davies, M. Derrick, C. I. B. Hawkins, P. B. Jones, J. N. Mulvey, M. Cresti, A. Grigoletto, S. Limentani, A. Loria, L. Peruzzo, R. Santangelo. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, 73.
47. T. Ferbel, J. Sandweiss, H. D. Taft, M. Gaillard, T. W. Morris, R. M. Lea, T. E. Kalogeropoulos. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, 76.
48. G. B. Chadwick, W. T. Davies, M. Derrick, C. I. B. Hawkins, J. H. Mulvey, D. Radojicic, C. A. Wilkinson, M. Cresti, S. Limentani, R. Santangelo. Phys. Rev. Lett., 10, 62 (1963).
49. Saclay-Orsay-Bar-Bologna Collaboration. J. Alitti, J. P. Baton, A. Berthelot, A. Daudin, B. Deler, O. Goussu, M. A. Jabiol, C. Lewin, M. Neveu-Rene, A. Ragozinski, F. Shively, J. Labarrigue-Frolow, O. Ouannes, M. Sene, L. Vigneron, N. Abbattista, S. Mongelli, A. Romano, P. Waloschek, V. Alles-Boreli, E. Benedetti, J. Litvak, G. Puppi, M. Whitehead. Nuovo Cimento, XXV, 365 (1962).

50. A.H.Rosenfeld, D.D.Carmony, R.T.Van de Walle. Phys. Rev. Lett, 8,293 (1962).
51. В.А.Беляков, Ван Юн-чан, Н.М.Вирясов, Ду Юань-цай, Ким Хи Ин, Е.Н.Кладницкая, А.А.Кузнецов, Нгуен Дин Ты, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев. ЖЭТФ, 44, 1474, 1963.
52. M.Meer, R.Strand, R.Kraemer, L.Madansky, M.Nussbaum, A.Pevsner, C.Richardson, T.Toohig, M.Block, S.Orenstein, T.Fields. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, 103.
53. C.H.Chan. Proc. Phys. Soc. (London), 80, 39 (1962).
54. Paul Singer. Phys. Rev., 130, 2441 (1963).
55. G. Feinberg. Phys. Rev. Lett., 8, 151 (1961).
56. D.Bessis, M.Jacob, A.Morel. Nuovo Cim., XXX, 112 (1963).
57. D.A.Geffen. Phys. Rev., 128, 374 (1962).
58. S.Twao, Nuovo Cim., XXX, 656 (1963).
59. L.Michel. Nuovo Cim., 10, 319 (1953).
60. T.D.Lee, C.N.Yang, Nuovo Cimento, III, 749 (1956).
61. J.Naisse. Phys. Lett., 1, 247 (1962).
62. V.Hagopian, W.Selove. Phys. Rev. Lett., 10, 533 (1963).
63. G.F.Chew, F.E.Low. Phys. Rev., 113, 1640 (1959).
64. F.Selleri. Phys. Lett., 3, 76 (1962).
65. В.И.Руськин, Д.С.Чернавский. ЖЭТФ, 41, 629, 1961.
66. S.B.Treiman, C.N.Yang. Phys. Rev. Lett., 8, 140 (1962).
67. В.Г.Гришин, В.А.Никитин, М.И.Подгорецкий. Препринт ОИЯИ Р-480, 1960.
68. E.Pickup, D.K.Robinson, E.O.Salant. Phys. Rev. Lett., 9, 170 (1962).
69. D.Duane Carmony and R.T.Van De Walle. Phys. Rev., 127, 959 (1962);
Phys. Rev. Lett., 8, 73 (1962).
70. L.B.Auerbach, T.Elioff, W.B.Johnson, J.Lach, C.E.Wiegand, T.Ypsilantis. Phys. Rev. Lett., 9, 173 (1962).
71. Saclay-Orsay-Bari-Bologna Collaboration, J.Alitti, J.P.Baton, A.Berthelot, A.Daudin, B.Deker, O.Goussu, M.A.Jabiol, C.Kochowki, C.Lewin, M.Neveu-Rene, A.Rogozinski, F.Shively, J.Laberrgue-Frolow, Nguyen Huu Khanh, C.Ouannes, M.Sene, L.Vigneron, N.YArmenise, S.Mongelli, L.Nitti, A.Romano, V.Alles-Borelli, E.Benedetti, A.Forino, G.Giacomelli, J.Litvak, G.Puppi, P.Waloschek and W.Whitehead. Nuovo Cimento, XXIX, 515 (1963).
72. G.T.Guiragossian. Phys. Rev. Lett., 11, 85 (1963).
73. W.Selove, V.Hagopian, H.Brody, A.Baker, E.Leboy. Phys. Rev. Lett., 9, 272 (1962).
74. J.J.Veillet, J.Hennessy, H.Bingham, M.Bloch, D.Drijard, A.Lagarrigue, P.Mittner, A.Rousset, G.Bellini, M.di Corato, E.Fiorini, P.Negri, Phys. Rev. Lett., 10, 29 (1963).
75. G.F.Chew, S.C.Frautschi. Phys. Rev.Lett., 8, 41 (1962).
R.Blankenbecler. Phys. Rev., 125, 755 (1962).

76. A.Pignotti. Phys. Rev. Lett., 10, 417 (1963).
77. P.G.Murphy. Phys. Lett., 6, 202 (1963).
78. L.Bondar, K.Bongartz, M.Deutschmann, H.Weber, D.C.Colley, W.P.Dodd, J.Simmons, B.Tallini, J.Moebes, B.Nellen, G.Winter, E.Lohrmann, E.Raubold, G.Wolf, J.M.Brownlee, I.Butterworth, F.I.Campayne, M.Ibbotson, Y.S.Liu, N.N.Biswas, I.Derado, D.Luers, G.Lutjens, N.Schmitz. Phys. Lett., 5, 153 (1963).
79. I.J.R.Aitchison. Phys. Rev., 131, 1797 (1963).
80. S.Minami. Nuovo Cim., XXVIII, 1103 (1963).
81. A.Abashian, N.E.Booth, K.M.Crowe, Phys. Rev. Lett., 5, 258 (1960).
Phys. Rev. Lett., 7, 35, (1961).
Rev. Mod. Phys., 33, 393 (1961).
82. М.С. Айнутдинов, С.М. Зомбковский, Я.М. Селектор, С.Я. Никитин, В.Н. Шуляченко. ЖЭТФ, 43, 1543, 1962.
83. B.Richter. Phys. Rev. Lett., 9, 217 (1962.).
84. L.Sertorio, Nuovo Cim., XXI, 1073 (1961).
85. В.И. Куштан. ЖЭТФ, 43, 581, 1962.
86. J.G.Taylor. Phys. Rev. Lett., 6, 237 (1961).
87. R.G.Sachs, and B.Sakita. Phys. Rev. Lett., 6, 306 (1961).
88. Б.А. Арбузов, Нгуен Ван Хъеу, Р.Н. Фаустов. ЖЭТФ, 44, 329, 1963.
89. B.M.Udgaonkar. Phys. Rev. Lett., 8, 142 (1962).
90. T.N.Truong. Phys. Rev. Lett., 6, 308 (1961):
91. Ю.А. Батусов, С.А. Бунятов, В.М. Сидоров, В.А. Ярба. ЖЭТФ, 43, 2015, 1962.
92. K.Berkelman, G.Cortelessa, A.Reale. Phys. Rev. Lett., 6, 234 (1961).
93. R.Gomez, H.Burkhardt, M.Daybel, H.Ruderman, M.Sands, R.Talman. Phys. Rev. Lett., 5, 170 (1960).
94. Ю.К. Акимов, В.И. Комаров, К.С. Марищ, О.В. Савченко, Л.М. Сороко. ЖЭТФ, 40, 1532, 1961.
95. L.Lapidus. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p. 115.
96. C.Bernardini, R.Querzoli, G.Salvini, A.Silverman, G.Stoppini. Nuov. VCim., 14, 268 (1959).
97. Ю.А. Батусов, С.А. Бунятов, До Ин Себ. ЖЭТФ, 45, 913, 1963.
98. A.V.Arefyev, Yu.D.Bayukov, Yu.M.Zaitsev, M.S.Kosodaev, G.A.Leksin, V.T.Osipenkov, D.A.Suchkov, V.V.Telenkov, V.B.Fedorov. Phys. Lett., 6, 299 (1963).
99. J.Kirz, J.Schwartz, R.D.Tripp. Phys. Rev., 130, 2481 (1963).
100. A.Abashian, N.E.Booth, R.M.Crowe, R.E.Hill, E.H.Rogers. Phys. Rev., 132, 2296 (1963).
101. N.E.Booth. Phys. Rev., 132, 2305 (1963).
102. N.E.Booth, A.Abashian, K.M.Crowe. Phys. Rev., 132, 2309 (1963).

103. N.E.Booth, A.Abashian. Phys. Rev., 132, 2314 (1963).
104. Б.Н.Валуев. Препринт ОИЯИ Е-1581, 1964.
105. R.Barloutand, J.Heughebaert, A.Leveque, J.Meyer, R.Omnes, Phys. Rev. Lett., 8, 32 (1962).
106. Я.Я.Шаламов, А.Ф.Грашин. ЖЭФТ, 43, 726, 1962.
107. V.R.Kenney, W.D.Shephard, C.D.Gall. Nuovo Cim., XXIII, 245 (1962).
108. M.H.Ross. Phys. Rev. Lett., 8, 417 (1962).
109. M.Ross. Phys. Lett., 3, 243 (1963).
110. G.Feinberg, A.Pais. Phys. Rev. Lett., 8, 341 (1962).
111. A.E.Everett. Phys. Rev. Lett., 9, 74 (1962).
112. C.Richardson, R.Kraemer, M.Meer, M.Nussbaum, A.Pevsner, R.Strand, T.Toohig, M.Block. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p.96.
113. C.Clyde Peck, L.W.Jones, M.L.Perl. Phys. Rev., 126, 1836 (1962).
114. N.N.Biswas, I.Derado, K.Gottstein, V.P.Kenney, D.Luers, G.Lutjens, N.Schmitz. Phys. Lett., 3, 11 (1962).
115. H.Hulubei, C.Besliu, T.Besliu, A.Constantinescu, M.Gavrilas, A.Michul, E.Balea, O.Balea, V.Balint, I.Curelaru, I.Makarovitsch, D.Mumuianu, T.Ponta, C.Potoceanu, M.Sabau. Phys. Lett., 6, 77 (1963).
116. Y.Nambu. Phys. Rev., 106, 1366 (1957).
117. B.C. Maglic, L.W.Alvarez, A.H.Rosenfeld, M.L.Stevenson, Phys. Rev. Lett., 7, 178 (1961).
118. M.L.Stevenson, L.W.Alvarez, B.C.Maglic, A.H.Rosenfeld. Phys. Rev., 125, 687 (1962).
119. N.H.Huong and G.R.Lynch. Phys. Rev. Lett., 7, 327 (1961).
120. A.Pevsner, R.Kraemer, M.Nussbaum, C.Richardson, P.Schlein, R.Strand, T.Toohig, M.Block, A.Engler, R.Gessaroli, C.Metzer. Phys. Rev. Lett., 7, 421 (1961).
121. T.Toohig, R.Kraemer, L.Madansky, M.Meer, A.Pevsner, C.Richardson, R.Strand, M.Block. 1962 Int. Conf On High-Energy Phys. at CERN, p.99.
122. M.Meer, R.Strand, R.Kraemer, L.Madansky, M.Nussbaum, A.Pevsner, C.Richardson, T.Toohig, M.Block, S.Orenstein, T.Fields. 1962 Int. Conf. on High-Energy Phys. at CERN, p. 103.
123. В.А.Беляков, В.И. Векслер, Н.М. Вирясов, Е.Н. Кладницкая, Г.И. Копылов, А.Михул, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев. Препринт ОИЯИ Р-1506,1964.
124. J.J.Murray, Jr., M.Ferro-Luzzi, D.D.Huwe, J.B.Shafer, F.T.Solmitz, M. Lynn Stevenson. Phys. Lett., 7, 358 (1963).

125. J.Button-Shafer, M.Ferro-Luzzi, J.Murray, M.L.Stevenson, F.T.Solmitz.
1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p. 307.
126. L.Bertanza, V.Brisson, P.L.Conoly, E.L.Hart, I.S.Muttra, G.C.Moneti, R.R.Rau,
N.P.Samios, I.O.Skillicorn, S.S.Yamamoto, M.Goldberg, L.Gray, J.Leitner,
S.Lichtman, J.Westgard. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN
p. 279 and 284.
127. W.A.Cooper, H.Courant, H.Filthuth, E.L.Malamud, A.Minguzzi-Ranzi, H.Schnei-
der, A.M.Segar, G.A.Snow, W.Willis, E.S.Gelsema, J.C.Kluyver, A.G.Tenner,
K.Browning, I.S.Hughes, R.Turnbull 1962 Int. Conf on High-Energy Phys.
at CERN, p. 298.
128. E.L.Hart, R.I.Louttit, T.W.Morris. Phys. Rev. Lett., 9, 133 (1962).
129. G.B.Chadwick, W.T.Davies, M.Derrick, C.J.B.Hawkins, P.B.Jones, J.H.Mulvey,
R.Radojicic, C.A.Wilkinson, M.Cresti, A.Grigolotto, S.Limentani, A.Loria,
L.Peruzzo, R.Santangelo, 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN,
p. 73.
130. R.Armenteros, R.Budde, L.Montanet, D.R.O.Morrison, S.Nilsson, A.Shapira,
J.Vandermeulen, C.d'Andlau, A.Astier, C.Ghesquière, B.Gregory, D.Rahm,
P.Rivet, F.Solmitz 1962 Int. Conf on High-Energy Phys. at CERN, p. 90.
131. C.Aiff, D.Berley, D.Colley, N.Gelfand, U.Nauenberg, D.Miller, J.Schultz,
J.Steinberger, T.H.Tan, H.Brugger, P.Kramer, R.Plano, Phys. Rev. Lett.,
9, 325 (1962).
132. W.D.Walker, E.West, A.R.Erwin, R.H.March. 1962 Int. Conf. on High-Energy
Physics at CERN, p.42.
133. Aachen-Birmingham-Bonn-Hamburg-London (I.C.)-Munich-Collaboration.
L.Bondar, K.Bondatz, H.Burmeister, M.Deutschmann, B.Keppel, G.Kraus,
H.Weber, D.C.Colley, W.P.Dodd, J.Simmons, B.Tallini, J.Moebes, B.Nellen,
Ch.Schlier, Ch. Dehne, P.Soding, M.Tuecher, I.Vierk, G.Wolf, E.Lohrmann, J.M
J.M.Brownlee, I.Butterworth, F.I.Compayne, B.R.French, M.Ibbotson, Y.S.Liu,
H.Sherman, N.N.Biswas, I.Derado, K.Gottstein, V.P.Kenney, D.Luers,
G.Lutjens, N.Schmitz. Nuovo Cim., XXXI, 485 (1964).
134. N.Gelfand, D.Miller, M.Nussbaum, J.Ratau, J.Shultz, J.Steinberger, T.-H.Tan.
Phys. Rev. Lett., 11, 436 (1963).
135. J.J.Sakurai. Phys. Rev. Lett., 8, 300 (1962).
136. W.R.Frazer, Sharashchandra Patil and H.Lee Watson, Phys. Rev. Lett.,
11, 231 (1963).
137. L.Bondar, E.Keppel, G.Krans, W.P.Dodd, B.Tallini, G.Wolf, I.Butterworth,
F.I.Compayne, M.Ibbotson, N.N.Biswas, I.Derado, D.Luers, N.Schmitz.
Phys. Lett., 5, 209 (1963).

138. N.Huong, R.L.Lander, W.A.W.Mehlhof, P.M.Yager. *Phys. Rev. Lett.*, 11, 227
1963.
139. D.R.Harrington. *Phys. Rev.*, 130, 2502 (1963).
140. В.Н. Байер. *УФН*, LXXVIII, 621, 1962.
141. R.H.Dalitz. *Phil. Mag.*, 44, 1068 (1953).
142. M.Gell-Mann, A.H.Rosenfeld. *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 7, 407 (1957).
(Appendix C).
143. W.H.Barkas, A.H.Rosenfeld. Препринт UCRL-8030 (1963).
144. М.А. Марков. Гипероны и К-мезоны, Физматгиз, 1958.
145. И.Ю. Кобзарев, Л.Б. Окунь. *ЖЭТФ*, 43, 1288, 1962.
146. Г.И. Копылов, В.И. Огиевецкий. Препринт ОИЯИ Р-1161, 1963.
Nucl. Phys., 50, 241 (1964).
147. A.Pais. *Ann. of Phys.*, 9, 548 (1960).
148. H.P.Durr, W.Heisenberg. *Nuovo Cimento*, XXIII, 807 (1962).
149. Z.Koba. *Phys. Lett.*, 1, 34 (1962).
M.Grynberg, Z.Koba. *Phys. Lett.*, 1, 130 (1962).
150. E.M.Henley, B.A.Jakobsohn. *Phys. Rev.*, 128, 1394 (1962)
151. B.Barsella, E.Fabri. *Phys. Rev.*, 126, 1561 (1962).
152. V.De Alfaro, B.Vitale. *Phys. Rev. Lett.*, 7, 72 (1961).
153. В.В. Бармин, А.Г. Долголенко, Ю.С. Крестников, А.Г. Мешковский, Ю.П. Никитин,
В.А. Шебанов. *ЖЭТФ*, 45, 1879, 1963. *Phys. Lett.*, 6, 279 (1963).
154. P.Singer. *Phys. Rev.*, 128, 2789 (1962).
155. В.В. Бармин, А.Г. Долголенко, Ю.С. Крестников, А.Г. Мешковский, В.А. Шебанов.
ЖЭТФ, 45, 2082, 1963.
156. Y.Nambu, J.Sakurai. *Phys. Rev. Lett.*, 8, 79 (1962).
157. Е.Д. Жижин, В.В. Соловьев. *ЖЭТФ*, 43, 268, 1962.
158. M.Gell-Mann, D.Sharp, W.G.Wagner. *Phys. Rev. Lett.*, 8, 261 (1962).
159. D.A.Geffen. *Phys. Rev.*, 128, 374 (1962).
160. G.Feinberg. *Phys. Rev. Lett.*, 8, 151 (1962).
161. S.L.Glashow. *Phys. Rev. Lett.*, 7, 469 (1961).
162. J.C.Taylor. *Phys. Rev. Lett.*, 8, 219 (1962).
163. J.Bernstein, G.Feinberg. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN,
p. 170.
164. J.Bernstein, G.Feinberg. *Nuovo Cimento*, XXV, 1343 (1962).
165. W.J.Fickinger, D.K.Robinson, E.O.Salant. *Phys. Rev. Lett.*, 10, 457 (1963).
166. W.D.Walker, J.Boyd, A.R.Erwin, P.H.Satterblom, M.A.Thompson, E.West.
Phys. Lett., 8, 208 (1964).
167. В.Г. Гришин, М.И. Подгорецкий. Препринт ОИЯИ, Р-1300, 1963.

168. A.Pevsner, R.Kraemer, M.Nussbaum, C.Richardson, P.Schlin, R.Strand, T.Toohig, M.Block, A.Engler, R.Gessardi, C.Meltzer. Phys. Rev.Lett., 7, 421 (1961).
169. P.L.Bastein, J.P.Berge, O.L.Dahe, M.Ferro-Luzzi, D.H.Miller, J.J.Murray, A.H.Rosenfeld, M.B.Wateon. Phys. Rev. Lett., 8, 114 (1962).
170. E.Pickup, D.K.Robinson, E.O.Salant. Phys. Rev. Lett., 8, 329 (1962).
171. D.Duane Carmony, A.H.Rosenfeld and R.T.Van de Walle. Phys. Rev. Lett., 8, 117 (1962).
172. M.C.Foster, M.L.Good, R.P.Matsem, M.V.Peters. G.W.Taufest, R.B.Willmann. 1962 Int. Conf.on High-Energy Physics at CERN, p. 108.
173. H.Foelsche, E.C.Fowler, H.L. raybill, J.R.Stanford, D.Stonehill. Phys. Rev. Lett., 9, 223, 1962.
- 174D.D.Carmony, F.Grard, R.T.Va de Walle, Nguen-Hun Huo ng, 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p. 44.
175. F.S.Crawford, Jr., L.J.Lloyd and E.C.Fowler. Phys. Rev. Lett., 10, 546(1963).
176. G.Feinberg, A.Pais. Phys. Rev.Lett., 9, 45 (1962).
G.Feinberg. 1962 Int. Conf. on High-Energy Phys. at CERN, p. 168.
177. M.Chretien, F.Bulos, H.R.Crouch, Jr., R.E.Lanou, Jr., J.T.Massimo, A.M.Shapiro, J.A.Averell, C.A.Bordner, Jr., A.E.Brenner, D.R.Firth, M.E.Law, E.E.Ronat, K.Strauch, J.C.Street, J.J.Szymanski, A.Weinberg, B.Nelson, L.A.Pless, L.Rosenson, G.A.Salandin, R.K.Yamamoto, L.Guerriero and F.Waldner. Phys. Rev. Lett., 9, 127 (1962).
178. R.Querzoli, V.Silvestrini. Nuovo Cimento, XXVII, 555 (1963).
179. C.Mencuccini, R.Querzoli, G.Salvini, V.G.Silvesgrini. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p.33.
180. K.Berkelman, A.Franklin, D.McLeod, S.Richert, A.Silverman. Nuov. Cim., XXVII, 497 (1962).
181. C.Bacci, G.Penso, G.Salvini, A.Wattenberg, C.Mencuccini, R.Querzoli V.Silvestrini. Phys. Rev. Lett., 11, 37 (1963).
182. D.Delcourt, J.Lefrancois, J.P.Perez, Y.Jorba, J.K.Walker. Phys. Lett., 7, 215 (1963).
183. L.Behr, P.Mittner, P.Musset. Phys. Lett., 4, 22 (1963).
184. В.В. Бурмян, А.Г. Долголенко, Ю.С. Крестников, А.Г. Мешковский, В.А. Шебанов. ЖЭТФ, 48, 142, 1964.
185. S.Minami. Propg. Theor. Phys., 27, 1275 (1962).
186. S.Hori, S.Oneda, H.Hiraki. Phys. Lett., 1, 80 (1962).
187. L.M.Brown and P.Singer. Phys. Rev. Lett., 8, 155 (1962).
188. Я.Б. Зельдович. ЖЭТФ; 34, 1644, 1958.

189. S.Sawada, M.Yonezawa. Progr. Theor. Phys., 22, 610 (1959).
190. E.C.Fowler, F.S.Crawford, Jr. and L.Lloyd, R.A.Grossman, L.Price. Phys. Rev. Lett., 10, 110 (1963).
191. A.Stajano, B.Vitale. Phys. Lett., 1, 127 (1962).
192. L.M.Brown and P.Singer. Phys. Rev. Lett., 8, 460 (1962).
193. M.Gell-Mann, D.Sharp, W.G.Wagner. Phys. Rev.Lett., 8, 261 (1962).
M.Gell-Mann, F.Zachariasen. Phys. Rev., 124, 953 (1963).
194. F.S.Crawford, Jr., R.A.Grossman, L.J.Lloyd, L.R.Price, E.C.Fowler. Phys. Rev.Lett., 11, 564 (1963).
195. M.A.Baqi Beg. Phys. Rev. Lett., 9, 67 (1962).
196. K.C.Wali. Phys. Rev. Lett., 9, 120 (1962):
197. G.Kacser. Phys. Rev., 130, 355 (1963).
198. D.Berley, D.Calley and J.Schultz. Phys. Rev. Lett., 10, 114 (1963).
199. Riazuddin and Fayyazuddin. Phys. Rev., 129 2337 (1963).
200. E.Eberle, S.Iwao. Phys. Lett., 6, 238 (1963).
201. S.Hori, S.Oneda, S.Chiba, A.Wakasa. Phys. Lett., 5, 339 (1963).
202. H.Shimodaira. Nuovo Cimento, XXIX, 1290 (1963).
203. G.Barton, S.P.Rosen. Phys. Rev. Lett., 8, 414 (1963).
204. B.G.Smith. Nuovo Cim., XXVII, 1498 (1963).
205. В.Г.Гришин, М.И.Подгорецкий. ЖЭТФ, 45, 783, 1963.
206. B.Barrett, G.Barton. Phys. Rev., 133, 2B, 466 (1964).
207. S.Okubo, B.Sakita. Phys. Rev. Lett., 11, 50 (1963).
208. B.Barrett, G.Barton. Phys. Rev. Lett., 4, 16 (1963).
209. E.L.Koller, S.Taylor, T.Huetter, Nuovo Cimento, XXVII, 1405 (1963).
210. G.Von Dardel, D.Dekkers, R.Mermod, J.D.Van pPutten, M.Vivargent, G.Weber, K.Winter. Phys. Lett., 4, 51 (1963).
211. G.Bellettini, C.Bemporad, P.L.Braccim, L.Foa, M.Toller. Phys. Lett., 3, 170 1963.
212. C.M.Anderson, A.Halprin, H.Primakoff. Phys. Rev. Lett., 9, 512 (1962).
213. Я.Я.Шаламов, А.Ф.Грашин. ЖЭТФ, 44, 65, 1963.
214. N.H.Huong and G.R.Lynch. Phys. Rev., 128, 1849 (1962).
215. A.R.Erwin, H.R.Fechter, D.Lyon, R.H.March, P.H.Satterblom, E.West. Bull. Americ. Phys. Soc. Ser. II, 7, 281 (1962).
216. R.F.Peierls. Phys. Rev. Lett., 12, 50 (1964).
217. E.Abers. Phys. Rev. Lett., 12, 55 (1964).
218. M.Goldhaber, T.D.Lee, C.N.Yang. Phys. Rev., 112, 1796 (1958).
219. В.И.Огиевецкий, Э.О.Оконов, М.И.Подгорецкий. Препринт ОИЯИ Р-960, 1962.
220. В.И.Огиевецкий, Э.О.Оконов, М.И.Подгорецкий. ЖЭТФ, 43, 720, 1963.

221. G.A.Snow. Phys. Lett., 1, 213 (1962).
222. P.Schlein, W.E.Slater, L.T.Smith, D.H.Sstork, H.K.Ticho. Phys. Rev. Lett., 10, 368 (1963).
223. P.L.Connoly, E.L.Hart, K.W.Lai, G.London, G.S.Moneti, R.R.Rau, N.P.Samios, I.O.Skillicorn, S.S.Yamamoto, M.Goldberg, M.Gundzik, J.Leitner, S.Lichtman. Phys. Rev. Lett., 10, 371 (1963).
224. L.Bertanza, V.Brisson, P.L.Connoly, E.L.Hart, I.S.Mitra, G.C.Moneti, R.Rau, N.P.Samios, I.O.Skillicorn, S.S.Yamamoto, M.Goldberg, L.Gray, J.Leitner, S.Lichtman, J.Westgard. Phys.Rev.Lett., 9, 180 (1962).
225. N.Gelfand, D.Miller, M.Nussbaum, J.Ratau, J.Schultz, J.Steinberger, T.H.Tan, L.Kirsch, R.Plano. Phys. Rev.Lett., 11, 438 (1963).
226. М.И.Подгорецкий. Препринт ОИЯИ Р-1346, 1963.
227. Г.И.Копылов, М.И.Подгорецкий. Препринт ОИЯИ Р-1460, 1963.
228. A.H.Rosenfeld, W.E.Humphrey. Annual Review of Nuclear Science, v.13, 103 (1963).
229. J.J.Sakurai. Phys. Rev. Lett., 9, 472 (1962).
230. S.L.Glashow. Phys. Lett., 2, 472 (1962).
231. S.L.Glashow. Phys. Rev. Lett., 11, 48 (1963).
232. S.Okubo. Phys. Lett., 5, 165 (1963).
233. Y.Y.Lee, W.D.Moebs, Jr., B.P.Rose, D.Sinclair, L.C.Vander Velde, Phys. Rev. Let. 11, 508 (1963).
234. Y.Dothan. Nuovo Cim., XXX, 399 (1963).
235. Ван Юн-чан, В.И.Векслер, Ду Юань-цай, Е.Н.Кладницкая, А.А.Кузнецов, А.Михул, Нгуен Дин Ты, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьев. ЖЭТФ, 43, 815, 1962.
236. A.Bigi, S.Brandt, R.Carrara, W.A.Coper, A.de Mareo, G.R.Macleod, C.Peyrou, R.Sosnowski, A.Wroblewski. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p. 247.
237. A.R.Erwin, G.A.Hoyer, R.H.March, W.D.Walker, T.P.Wangler. Phys. Rev. Lett., 9, 34 (1962).
238. G.A.Alexander, O.I.Dahl, L.Jacobs, G.R.Kalbfleisch, D.H.Miller, A.Rittenberg, J.Schwartz, G.Smith. Phys. Rev. Lett., 9, 460 (1962).
239. J.Belliere, M.Bloch, D.Drijard, J.Hennessy, J.P.Lowys, P.Mittner, A.Orkin-Lecourtois, M.Zahaczewski, H.H.Bingham, M.Di Corato, E.S.Gelsema, M.Nicolic, A.Minguzzi-Ranzi, G.Borreani, M.L.Ferrero, C.M.Garelli, M.Vigone, A.Grigoletto, S.Limentani, A.Ioria, F.Waldner, C.Baglin, H.H.Bingham, M.M.Bloch, P.Rancon, A.Rousset, B.De Road, R.Salméron, R.Voss. Nuovo Cimento, XXIX, 339 (1963).

240. S.Minami, P.L.Okhuysen. *Nuovo Cimento*, XXVIII, 215 (1963).
241. S.Minami, R.W.Huggett. *Phys. Rev. Lett.*, 9, 507 (1963).
242. S.Minami. *Progr. Theor. Phys.*, 27, 215 (1962).
243. S.N.Biswas. *Nuovo Cimento*, XXVIII, 528 (1963).
244. R.Armenteros, R., D.N.Edwards, T.Jacobsen, A.Shapira, J.Vandermeulen, Ch. Ch. d'Andlau, A.Astier, P.Baillon, H.Briand, J.Cohen-Ganouna, C.Defoix, J.Siand, C.Ghesquiere, P.Rivet. *Proceedings on Elementary Particles*, Siena, Italy, 1962. (unpublished).
245. В.А.Беляков, Н.М.Ви́рясов, Е.Н.Кладни́цкая, В.Н.Пенев, Е.С.Соколова, М.И.Соловьёв. *Препринт ОИЯИ Р-1586*, 1964.
246. R.J.Oakes. *Phys. Rev.Lett.*, 12, 134 (1964).
247. M.Alston, L.W.Alvarez, P.Eberhard, M.L.Good, W.Gaziano, H.K.Ticho, S.G S.G.Wojcicki. *Phys. Rev. Lett.*, 6, 300 (1961).
248. M.Alston, G.R.Kalbfleisch, H.T.Ticho, S.G.Wojcicki. *En 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN*, p. 291.
249. S.G.Wojcicki, G.R.Kalbfleisch and M.Alston, *Phys. Lett.*, 5, 283 (1963).
250. A.Barbaro-Caltieri, A.Hussain, R.D.Tripp. *Phys. Lett.*, 6, 296 (1963).
251. W.A.Cooper, H.Courant, H.Filthuth, E.L.Malamud, A.Minguzzi-Ranzi, H.Schneider, A.M.Segar, G.A.Snow, W.Willis, E.S.Gelsema, J.C.Kluyver, A.G.Tenner, K.Browning, I.S.Hughes, R.Turnbull. *1962 Int. Conf. on High-Energy Phys. at CERN*, p. 298.
252. G.B.Chadwick, D.J.Crennell, W.T.Davies, M.Derrick, J.H.Mulvey, P.B.Jones, D.Radojicic, C.A.Wilkinson, A.Bettini, M.Cresti, S.Limentani, L.Peruzzo, P P.Santangelo. *Phys. Lett.*, 6, 309 (1963).
253. G.B.Chadwick, D.J.Crenell, W.T.Davies, M.Derrick, P.B.Jones, J.H.Mulvey, R.Radojicic, C.A.Wilkinson, M.Cresti, S.Limentani, L.Peruzzo, R.Santangelo. *1962 Int. Conf. on High-Energy Physics. at CERN*, p. 378.
- 254 J.Dubock, N.H.Duong, P.Eberhard, R.George, V.P.Henri, F.Levy, J.Poyen, M.Pripstein, J.Crussard, A.Tran. *Phys. Lett.*, 6, 233 (1963).
E.Boldt, J.Dubock, N.H.Duong, P.E.Eberhard, R.George, V.P.Henri, F.Levy, J.Poyen, M.Pipstein, J.Cussard, A.Tran. *Phys. Rev.*, 133, 1B, 220 (1964).
- 255.W.Chinowsky, G.Goldhaber, S.Goldhaber, W.Lee, T.O'Halloran. *1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN*, p. 380.
- 256.W.Chinowsky, G.Goldhaber, S.Goldhaber, W.Lee, T.O'Halloran. *Phys. Rev. Lett.*, 9, 930 (1962).
257. G.Goldhaber, W.Chinowsky, S.Goldhaber, W.Lee, T.O'Halloran. *Phys. Lett.*, 6, 62 (1963).

258. G.Alexander, L.Jacobs, G.B.Kalbfleisch, D.H.Miller, G.A.Smith, J.Schwartz.
1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p. 320.
259. G.Alexander, G.Kalbfleisch, D.H.Miller, G.A.Smith. Phys. Rev. Lett., 8, 447
(1962).
260. G.R.Kalbfleisch, G.Alexander, O.I.Dahl, D.H.Miller, A.Rittenberg, G.A.Smith.
Phys. Lett., 4, 225 (1963).
261. L.Bertanza, B.B.Culwick, K.W.Lai, I.S.Mitra, N.P.Samios, A.M.Thorndike,
S.S.Yamamoto, R.M.Lea. Phys. Rev., 130, 786 (1963).
262. R.H.March, A.R.Erwin, W.D.Walker. Phys. Lett., 3, 99 (1962).
263. D.Colley, N.Gelfand, U.Nauenberg, J.Steinberger, S.Wolf, H.R.Brugger,
P.R.Kramer, R.J.Plano. Phys. Rev., 128, 1930 (1962).
264. A.F.Grashin, E.V.Kuznetsov, Ya.Ya.Shalamov. Phys. Lett., 4, 71 (1963).
265. A.R.Erwin, R.H.March, W.D.Walker. Nuovo Cimento, XXIV, 237 (1962).
266. D.H.Miller, G.Alexander, O.I.Dahl, L.Jacobs, G.R.Kalbfleisch, G.A.Smith.
Phys. Lett., 5, 279 (1963).
267. G.A.Smith, J.Schwartz, D.H.Miller, G.R.Kalbfleisch, R.W.Huff, O.J.Dahl, G.Alex-
ander. Phys. Rev. Lett., 10, 138 (1963).
268. R.Armenteros, L.Montanet, D.R.O.Morrison, S.Nilsson, A.Shapira, J.Vandermeulen,
Ch.d" Andlau, A.Astier, A.Chesquire, B.P.Gregory, D.Rahm, P.Rivet, F.Sol-
nitz. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p. 295.
269. R.K.Adair. Phys. Rev., 100, 1540 (1955).
270. S.B.Treiman. Phys. Rev., 128, 1342 (1962).
271. M.Schwartz. Phys. Rev. Lett., 6, 556 (1961).
272. R.Armenteros, L.Montanet, D.R.O.Morrison, S.Nilsson, A.Shapira, J.Vandermeu-
len, Ch. d" Andlau, A.Astier, J.Ballam, C.Chesquire, B.P.Gregory, D.Rahm,
P.Rivet, F.Solnitz. 1962 Int. Conf. on High-Energy Physics at CERN, p.351.
273. D.O.Caldwell. Phys. Rev. Lett., 7, 259 (1961).
274. M.A.B.Beg, P.C.DeCelles and R.B.Marr. Phys. Rev., 124, 622 (1961).
275. С.М.Биленький, Р.М.Рындин. ЖЭТФ, 44, 326, 1963.
276. B.T.Feld and D.B.Lichtenberg. Nuovo Cimento, XXII, 996 (1961).
277. A.Fujii. Phys. Rev., 124, 1240 (1961).
278. M.J.Sweig. Phys. Rev., 131, 860 (1963).
279. A.Kanazawa, N.Tokuda. Progr. Theor. Phys., 30, 142 (1963).
280. B.Diu, J.L.Gervais, H.R.Rulinstein. Nuovo Cimento, XXXI, 27, (1964).
281. E.M.Ferreira, C.G.De Olivera, P.P.Srivastaka. Nuovo Cim., XXVI, 1128 (1962).
282. A.Pignotti. Phys. Rev. 129, 1807 (1963).
283. R.H.Capps. Phys. Rev., 131, 1306 (1963).
284. G.T.Haff. Phys. Rev., 131, 1302 (1963).

285. Raizuddin and Fayyazuddin. Phys.Rev. Lett., 7, 464 (1961).
286. Y.Nambu, J.J.Sakurai, Phys. Rev. Lett., 11, 42 (1963).
287. G.Takeda. Phys. Rev. Lett., 10, 167 (1963).
288. D.Horn Nuovo Cimento., XXIX, 57 (1963).
289. S.Minami. Progr. Theor. Phys., 28, 566 (1962).
290. S.Sakata. Progr. Theor. Phys., 16, 686 (1956).
291. M.Gell-Mann. Phys. Rev., 125, 1067 (1962).
292. Y.Ne"eman. Nucl . Phys., 26, 222 (1961).
293. S.Okubo. Progr. Theor. Phys., 27, 949 (1962).
294. J.J.Sakurai. Ann. Phys. (New York). 11, 1 (1960).
295. В.И.Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 45, 237, 1963.
ЖЭТФ, 45, 966, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 марта 1964 г.

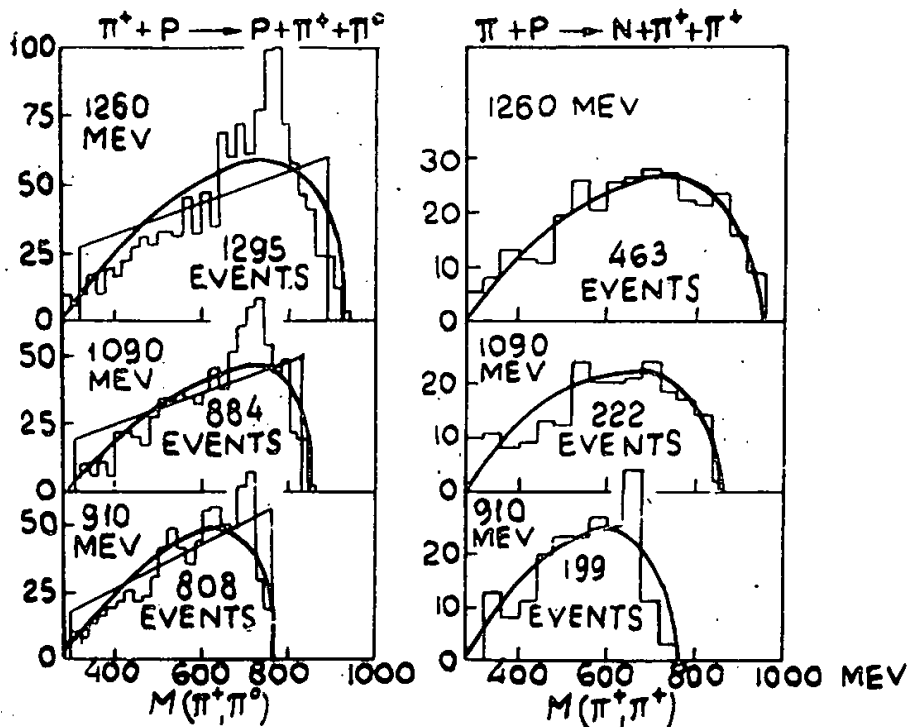


Рис. 1. Распределения по эффективным массам $(\pi^+\pi^0)$ и $(\pi^+\pi^+)$ -систем, полученные при исследовании реакций (1) и (3).

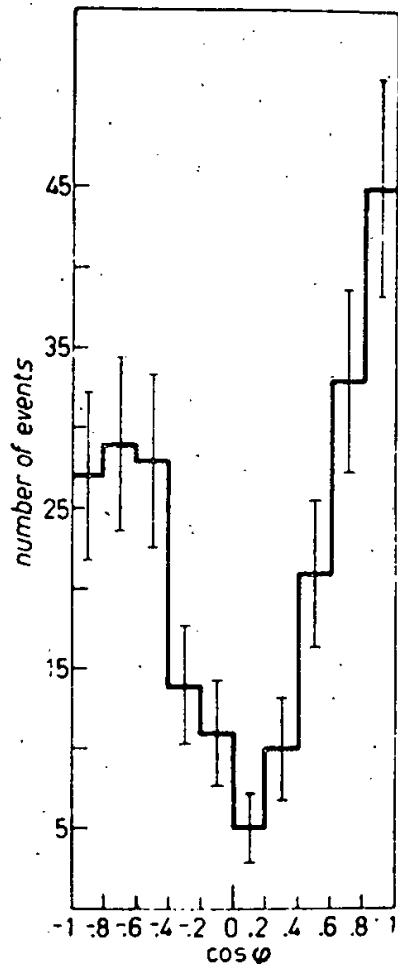


Рис. 2. Угловое распределение π^- -мезонов, образованных при распаде ρ^- -мезонов.

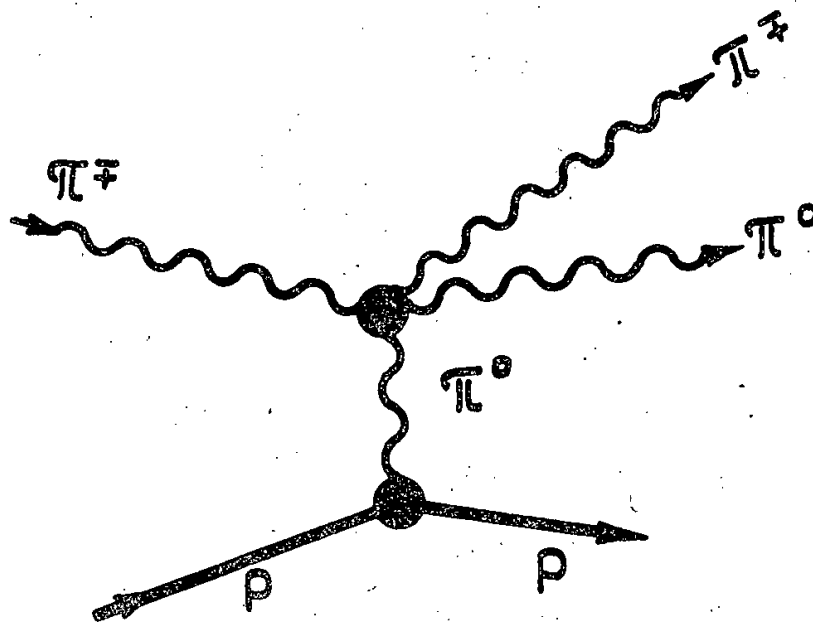


Рис. 3.

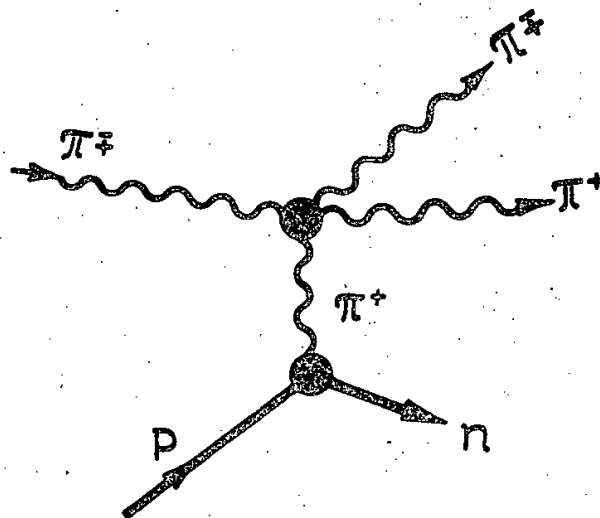


Рис. 4.

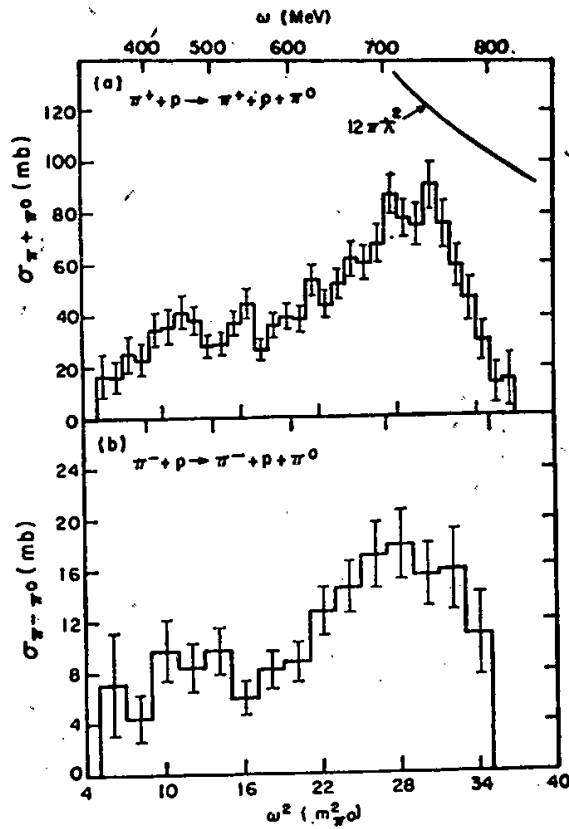


Рис. 5. Полные сечения $\pi\pi$ -рассеяния,
 ω^2 ($m_{\pi^0}^2$) - квадрат полной энергии
 π -мезонов в единицах $m_{\pi^0}^2$.

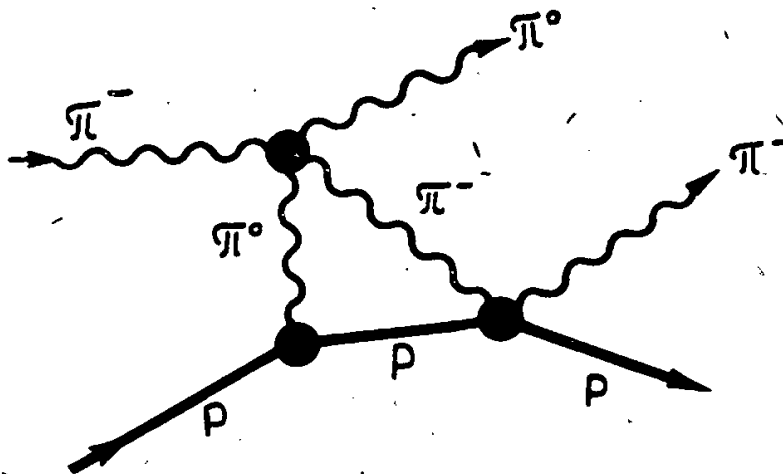


Рис. 6.

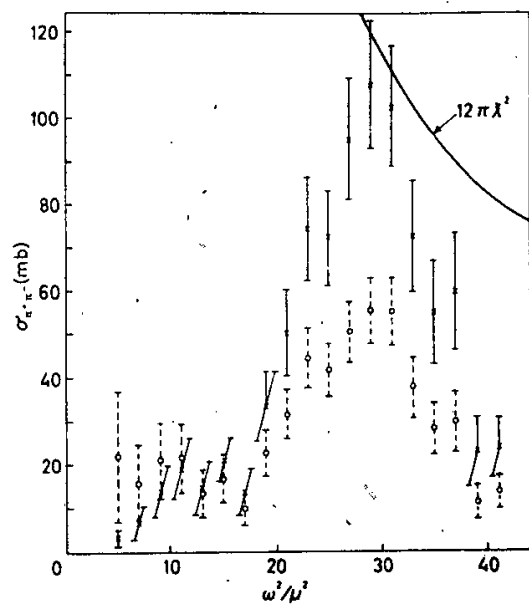


Рис. 7. Сечение $\pi^- \pi^+$ -рассеяния, ω/μ - полная энергия дипиона в единицах m_π . Теоретическая кривая представляет сечение резонансного $\pi\pi$ -рассеяния с $J=1$. \circ - формула Чу и Лоу, \times - формула Селлери.

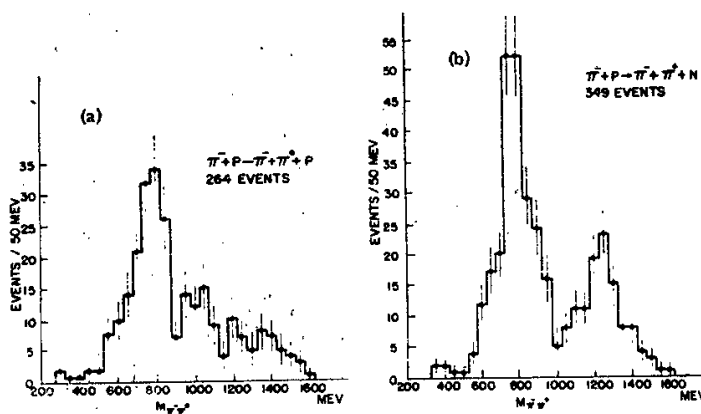


Рис. 8. Распределение по эффективным массам $(\pi^- \pi^0)$ и $(\pi^- \pi^+)$ -систем.

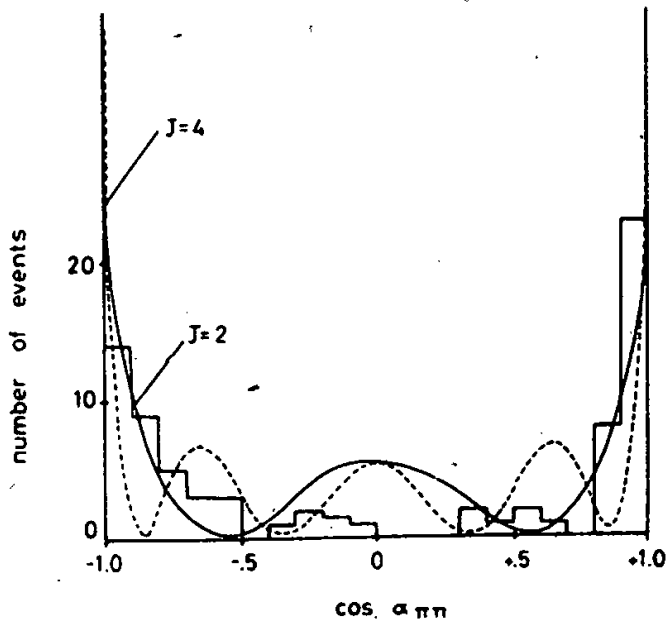


Рис. 9. Угловое распределение π^- -мезонов, образованных при распаде ρ^- -мезона. Теоретические кривые вычислены для $J=2$ и $J=4$.

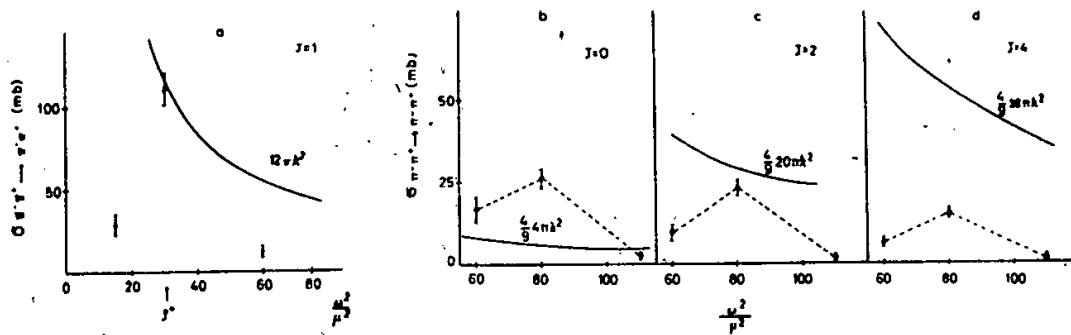


Рис. 10. Сечения $\pi\pi$ -рассеяния, полученные из анализа реакций $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$.

а- в области ρ -резонанса, б- в области f -резонанса для $J=0$,
 с- в области f -резонанса для $J=2$, д- в области f -резонанса для $J=4$

ω/μ - полная энергия дилпиона в единицах m_π .

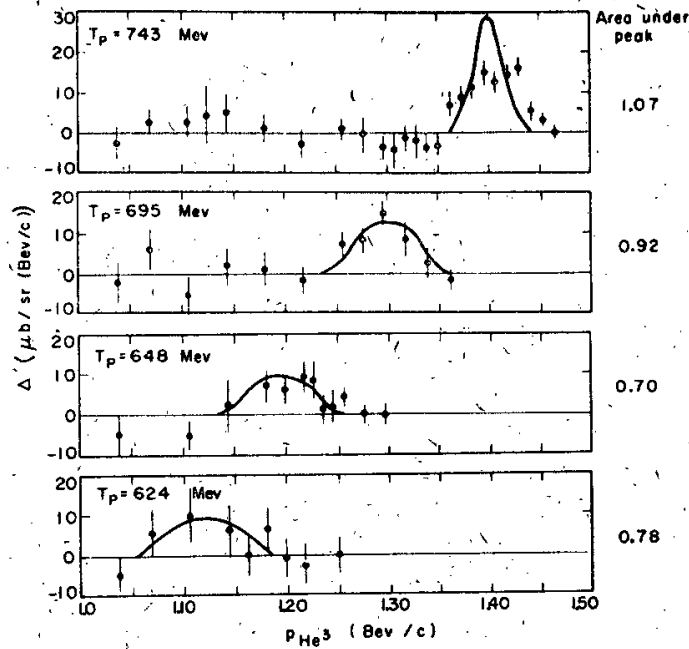


Рис. 11. Импульсный спектр ядер He^3 , образованных в реакции (39), полученный после вычитания статистического фона (см. работу /81/).

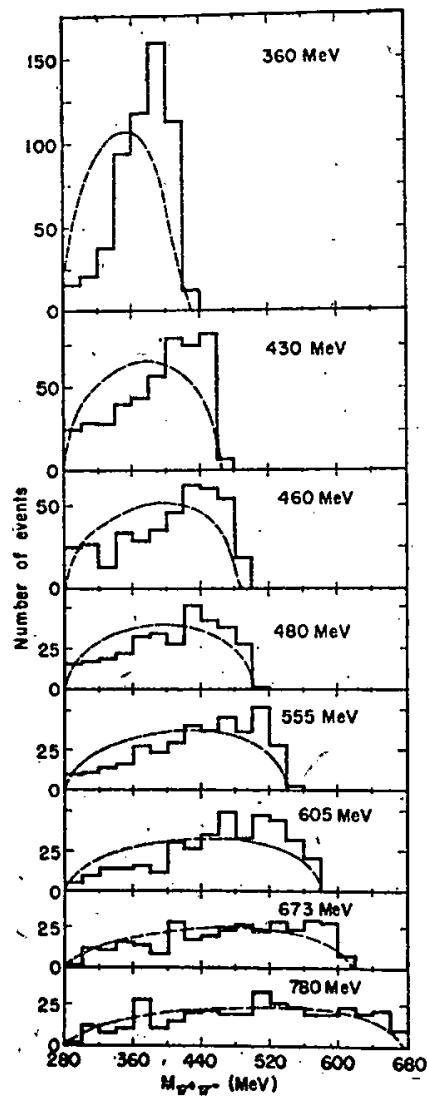


Рис. 12. Распределения по эффективным массам $(\pi^+\pi^-)$ -систем, образованных в реакциях (2).

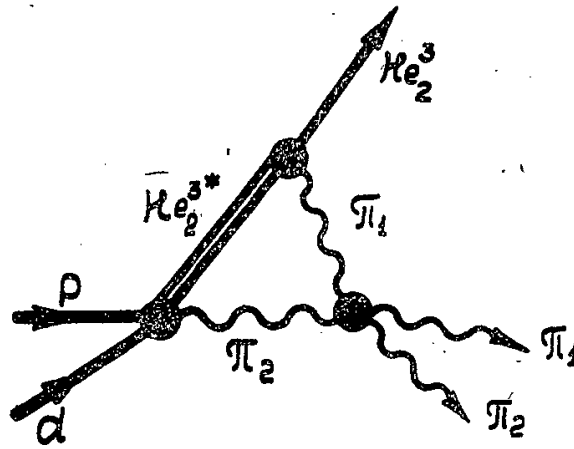


Рис. 13.

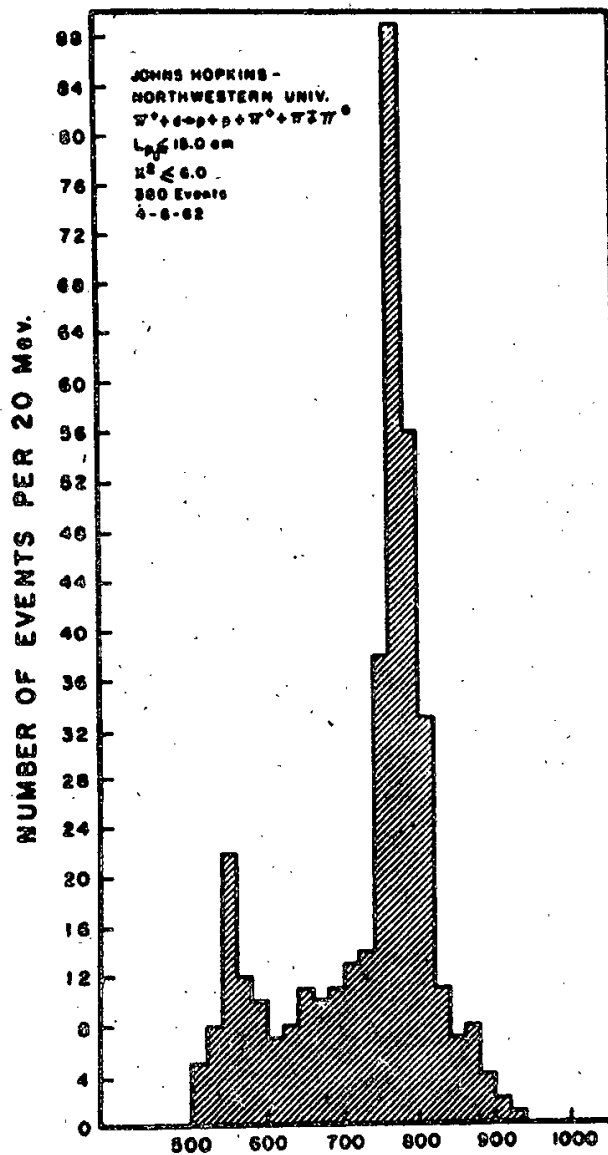


Рис. 14. Спектр эффективных масс ($\pi^+ \pi^- \pi^0$)-систем, образованных в реакции (46).

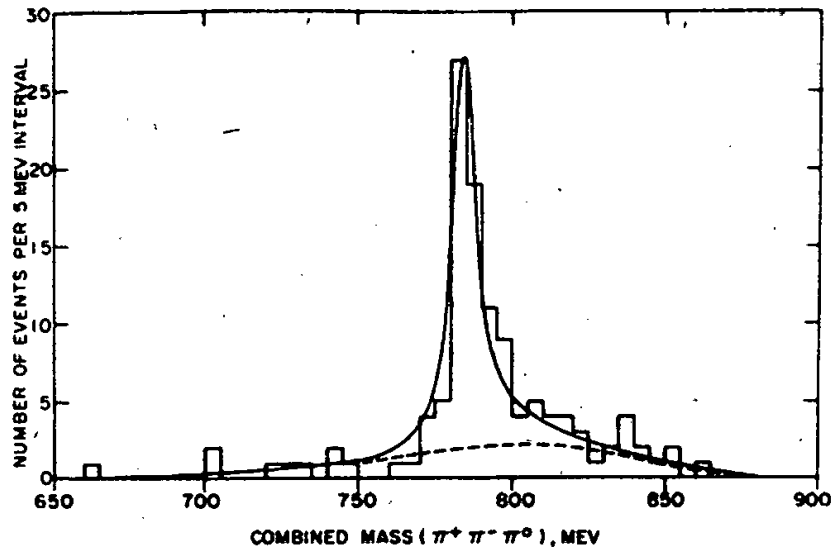


Рис. 15. Спектр эффективных масс ($\pi^+ \pi^- \pi^0$)-систем, образованных в реакции (51).

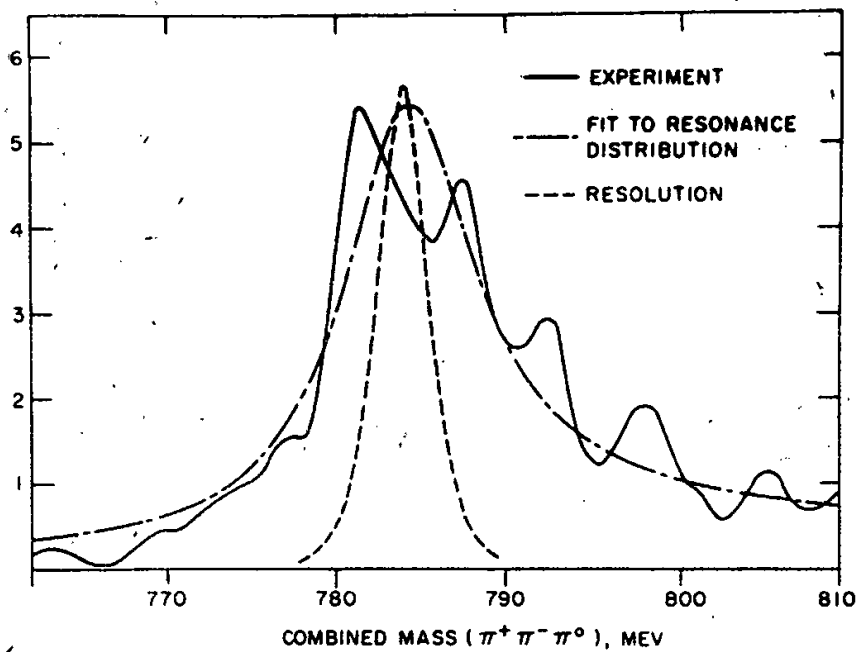


Рис. 16. Идеограмма случаев, представленных на рис. 15.

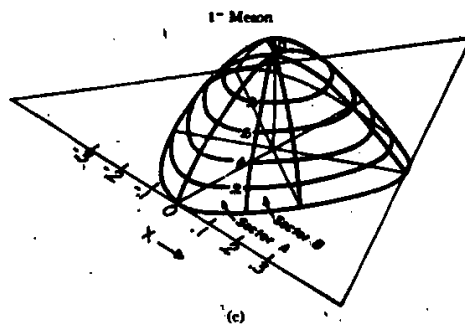
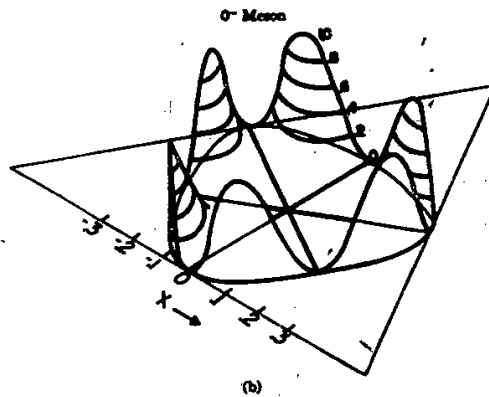
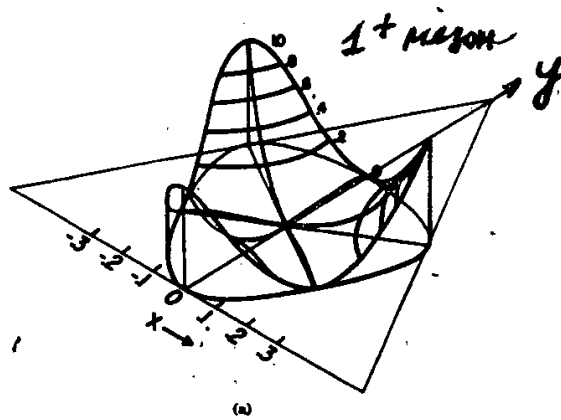


Рис. 17. Простейшие матричные элементы для 1^+ , 0^- и 1^- -
 мезонов, $\chi = \frac{T_- - T_+}{\sqrt{3} Q}$ и $Y = \frac{T_0}{Q}$

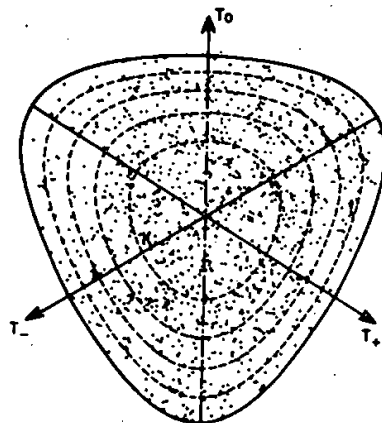


Рис. 18. Диаграмма Далитца,
для распадов $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$
(1100 событий). T_0, T_-, T_+ -
-кинетические энергии
 π -мезонов.

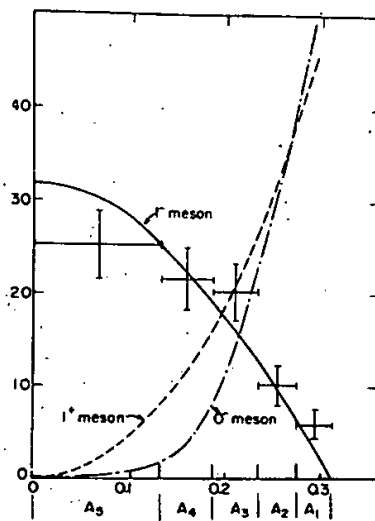


Рис. 19. Теоретические и экспериментальная
зависимости плотности точек от
расстояния до центра диаграммы
Далитца /118/.

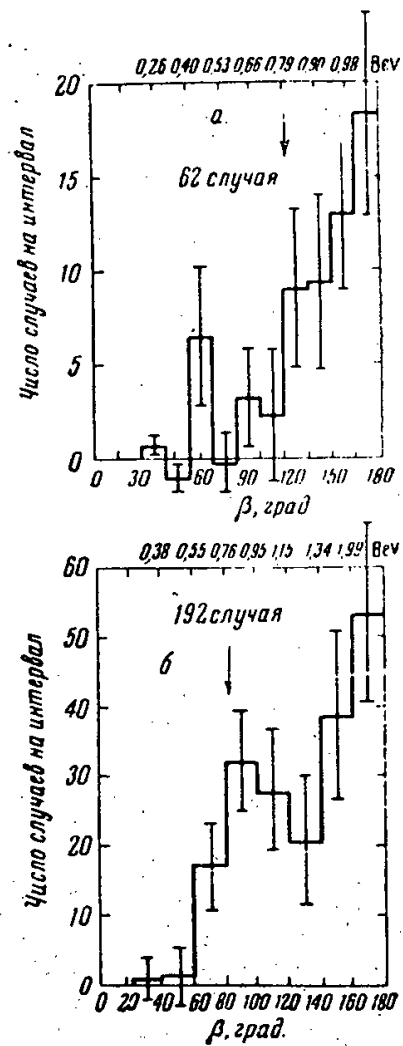


Рис. 20. Распределение случаев, соответствующих реакции $\pi^- p \rightarrow n + 3\gamma$ по углу β . (а) $p_c = 1,55$ Гэв, б) $p_c = 2,8$ Гэв).

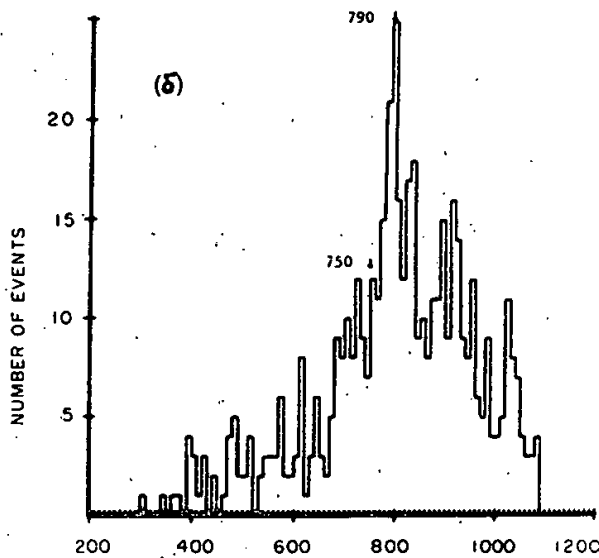
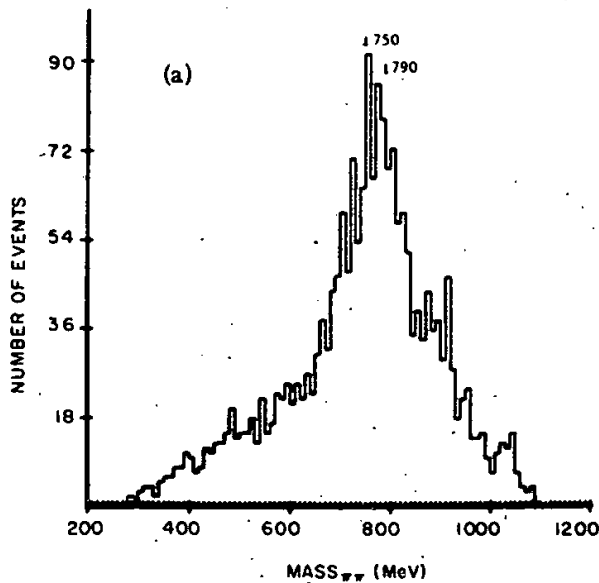


Рис. 21. а) Распределение по эффективным массам $(\pi^+ \pi^-)$ систем, образованных в реакции (2).

б) Распределение по эффективным массам $(\pi^+ \pi^-)$ систем, образованных в реакции (2).
 $(0,25 (\frac{\Gamma_{\text{ЭВ}}}{c})^2 \leq \Delta^2 \leq 0,70 (\frac{\Gamma_{\text{ЭВ}}}{c})^2)$.

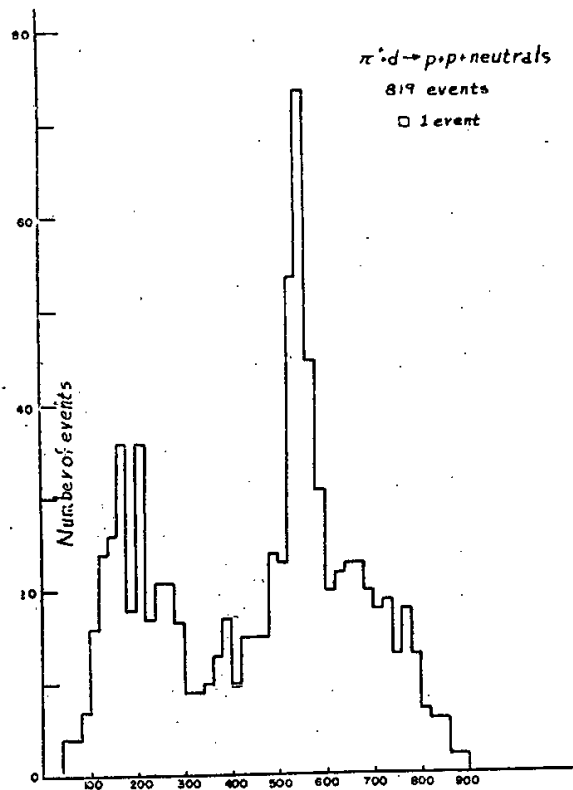


Рис. 22. Распределение по эффективным массам нейтральных частиц, образованных в реакции $\pi^+ d \rightarrow pp + \text{нейтральные частицы}$.

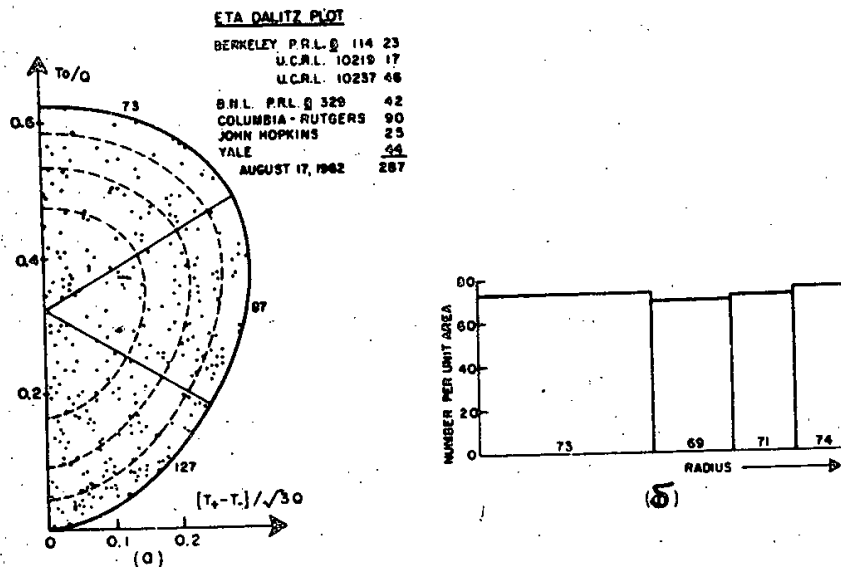


Рис. 23. а) Диаграмма Далитца для распадов $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$.
 б) Радиальная плотность фазовых точек для распадов $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$.

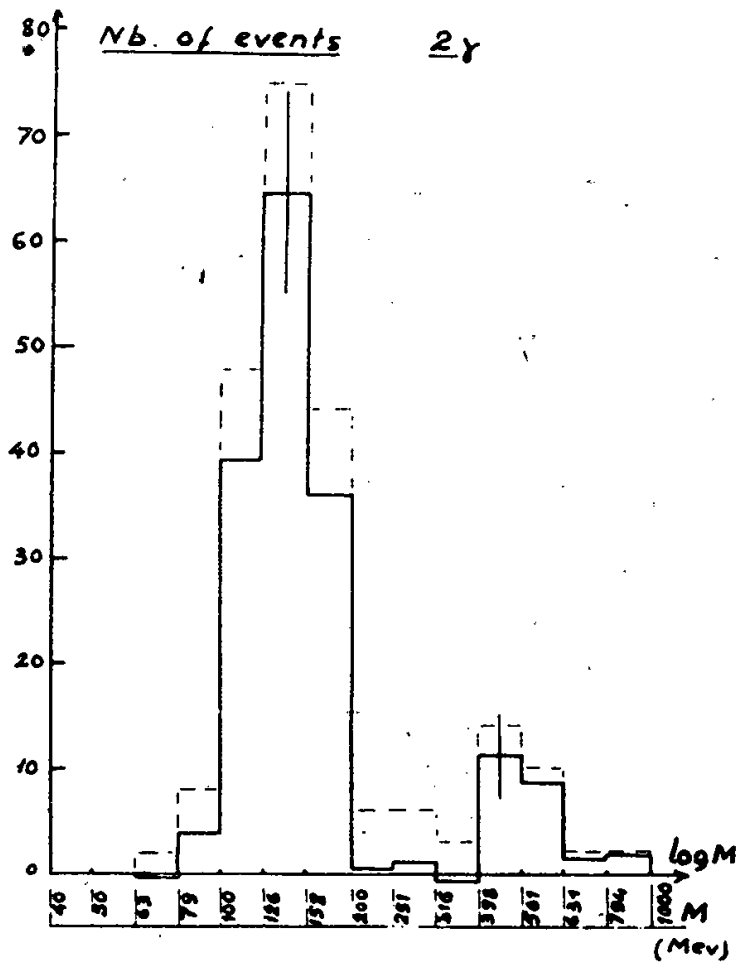


Рис. 24. Распределение по эффективным массам $M(\gamma\gamma)$, полученное при изучении реакции (98).

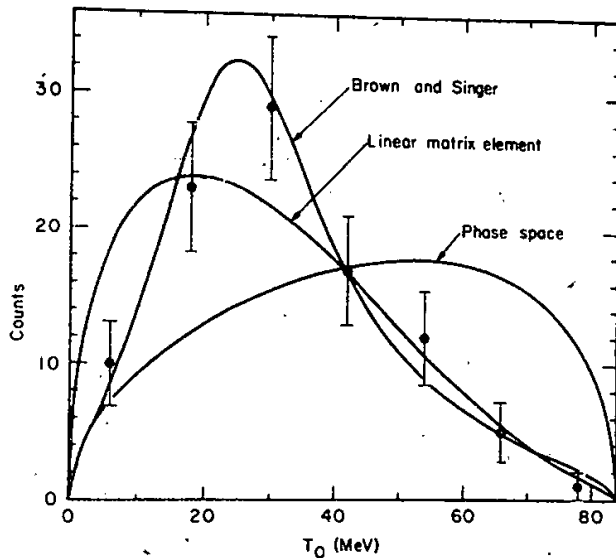


Рис. 25. Энергетический спектр π^0 -мезонов, образованных в распадах $\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$. Смысл теоретических кривых см. в работе [194] и в гл. IV § 2.

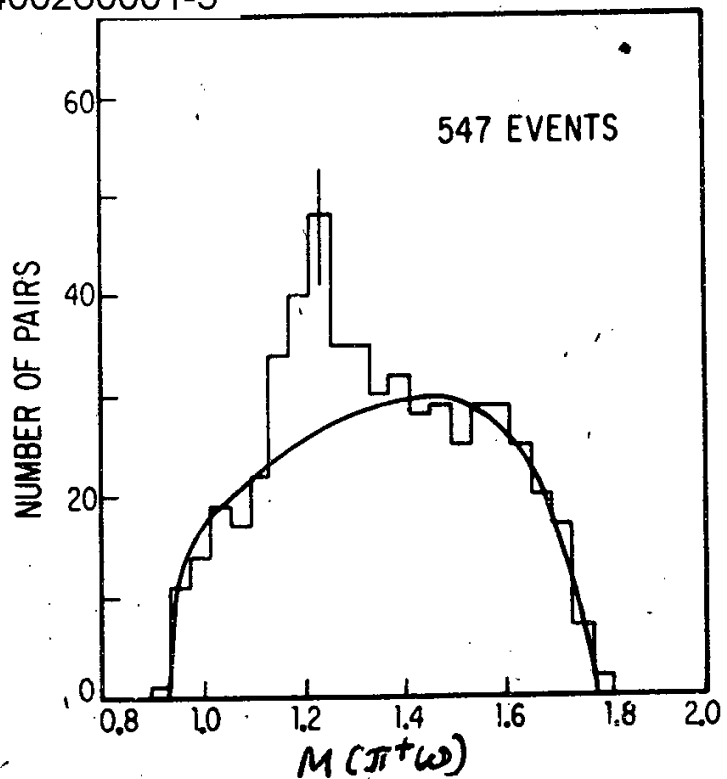


Рис. 26. Распределение эффективных масс $(\pi^+ \omega)$ -систем, образованных в реакции (127).

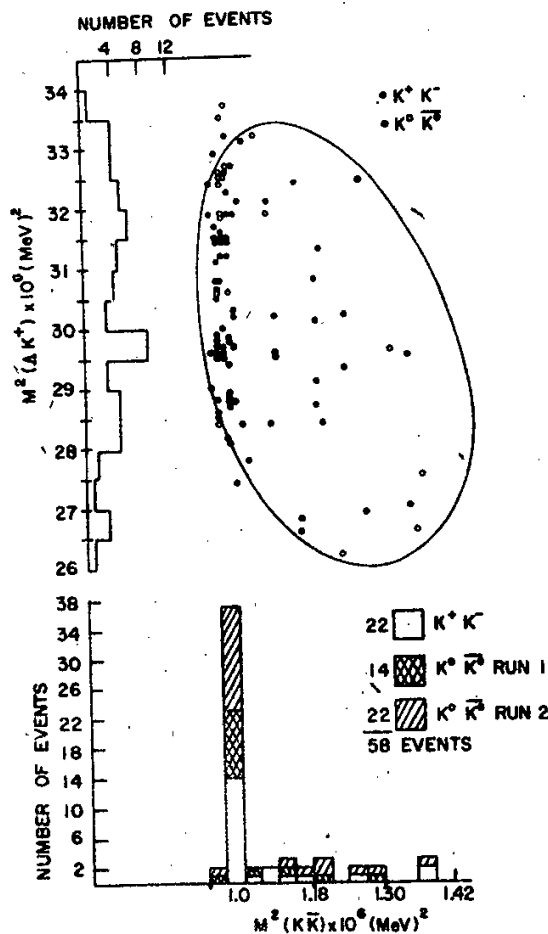


Рис. 27. Диаграмма Далица для реакции $K^+ p \rightarrow \Lambda K K^-$.

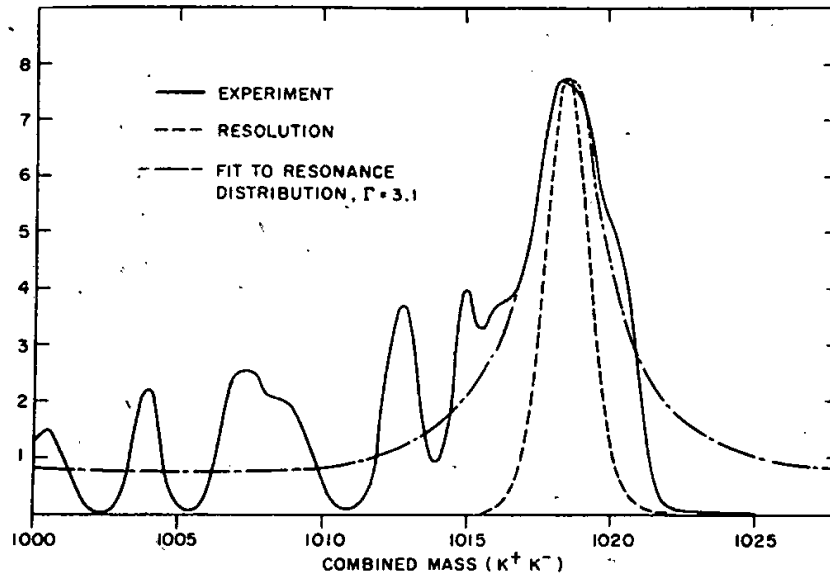


Рис. 28. Идеограмма распределения по эффективным массам (K^+K^-) -систем, образованных в реакции $p \bar{p} \rightarrow K^+ K^- \pi^+ \pi^-$ /225/.

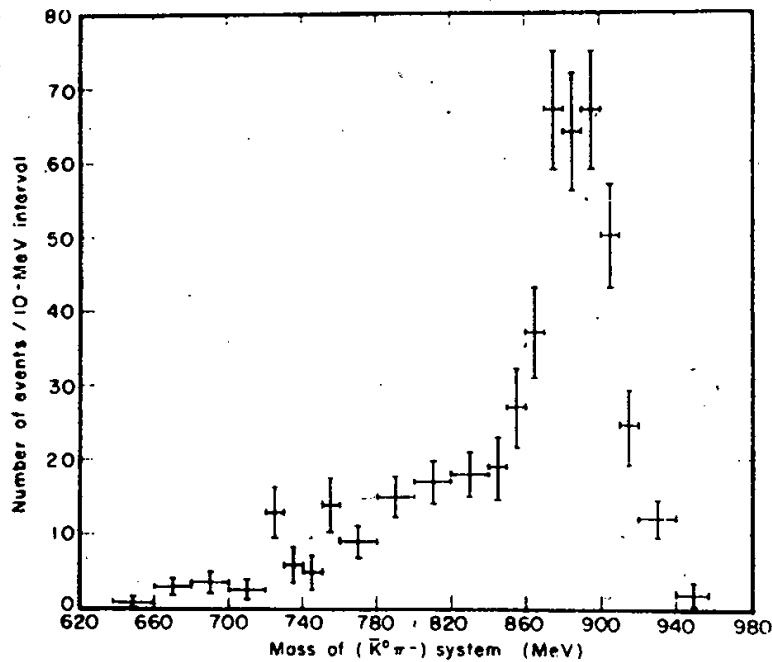


Рис. 29. Распределение эффективных масс $(K^0 \pi^-)$ -систем, образованных в реакции (149).

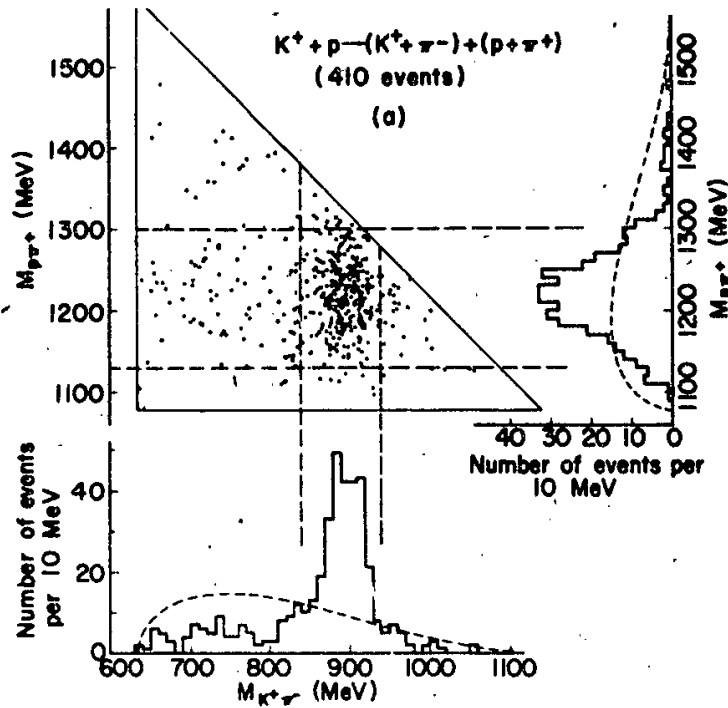


Рис. 30. Диаграмма Далица для реакции $K^+ p \rightarrow (K^+ \pi^-) + (p \pi^+)$

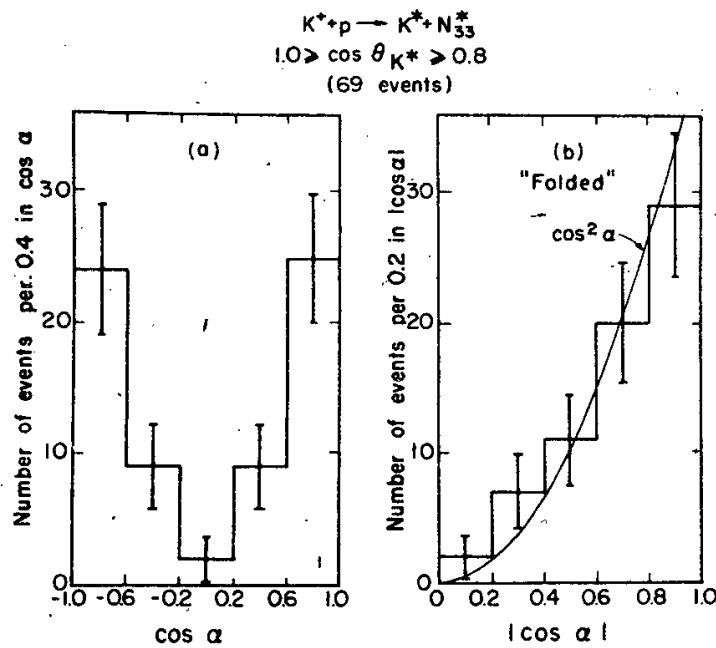


Рис. 31. Угловые распределения K^- -мезонов, образованных в распадах $K^{*0} \rightarrow K^+ \pi^-$ (в системе покоя K^* -мезона).

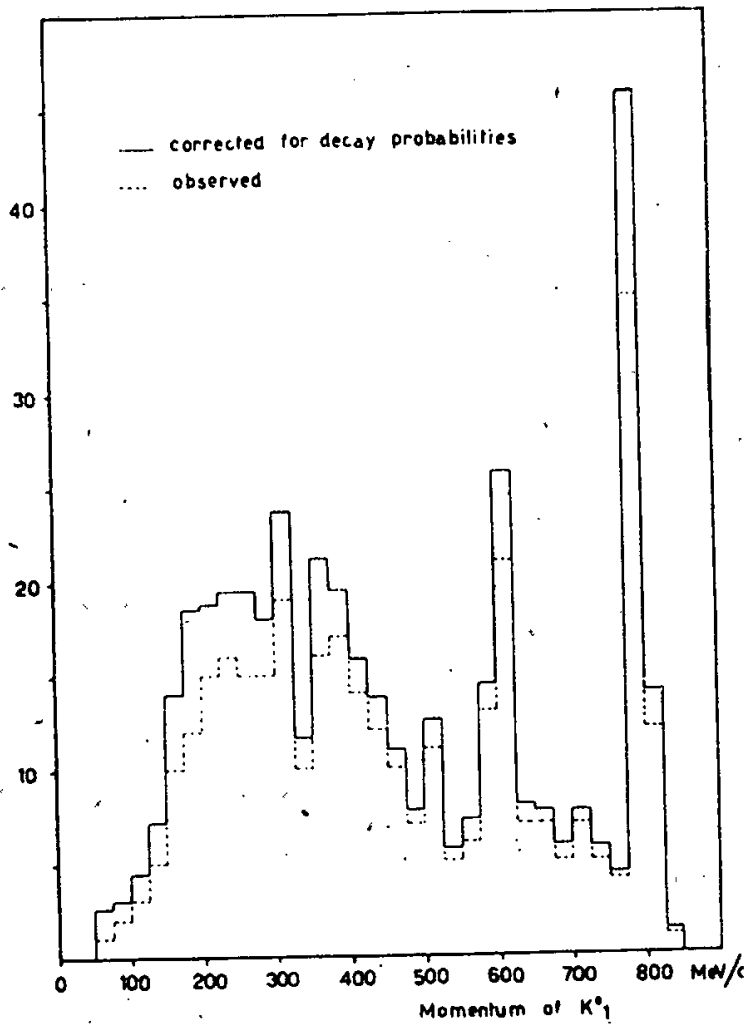


Рис. 32. Импульсное распределение K_1^0 -мезонов в реакции $pp \rightarrow K_1^0 +$ нейтральные частицы.

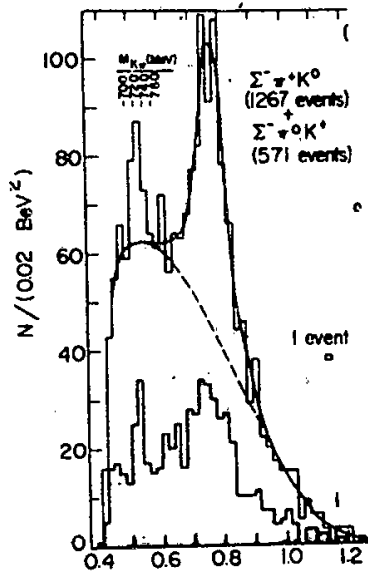


Рис. 33. Распределение по $M^2(K\pi)$, полученное при изучении реакций (168) и (169).

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3704. Тираж 430. 5,7 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р. Саранцева Апрель 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

А.В. Кессених, В.И. Лушиков, А.А. Маненков, Ю.В. Таран

P-1518

ОРИЕНТАЦИЯ ПРОТОНОВ
И МАГНИТНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ
В ОБЛУЧЕННЫХ ПОЛИЭТИЛЕНАХ

Дубна 1964

Кессених А.В., Лушиков В.И., Маненков А.А.,
Таран Ю.В.

P-1518

Ориентация протонов и магнитная релаксация в облученных полиэтиленах.

Исследована динамическая поляризация протонов и магнитная релаксация протонов и неспаренных электронов в полиэтиленах, облученных в ядерном реакторе. Измерения проведены при температурах $1,6^{\circ}\text{K}$, $4,2^{\circ}\text{K}$ и 77°K . Динамический коэффициент усиления поляризации протонов не зависит от температуры образца и изменяется от 20 до 34 от образца к образцу. Расстояние между точками максимальных значений отрицательного и положительного коэффициентов усиления (в функции магнитного поля) растет с понижением температуры, что объясняется влиянием электронной спин-спиновой кросс-релаксации. Показано, что динамическая поляризация в исследованных образцах вызывается насыщением электронного парамагнитного резонанса долгоживущих радикалов полиенового типа. Результаты обсуждаются и сравниваются с феноменологической теорией динамической поляризации и ядерной магнитной релаксации.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

P-1518

Kessenikh A.V., Luschykov V.I., Manenkov A.A., Taran Yu.V.

Proton Orientation and Magnetic Relaxation in Irradiated Polyethelene.

The dynamical proton polarization and the magnetic relaxation of protons and unpaired electrons in polyethelene irradiated in the nuclear reactor have been investigated. The measurements were made at the temperatures 1.6°K , 4.2°K and 77°K . The dynamical enhancement factor of the proton polarization does not depend on the sample temperature and varies from 20 to 34 for different samples. The distance between the maximum values for the negative and positive enhancement factor (as a function of the magnetic field) is becoming longer with the decrease in temperature what is accounted for the effect of electron spin-spin cross relaxation. It is shown that the dynamical polarization in the samples under investigation is due to the saturation of the electron paramagnetic resonance of the long-lived radicals of the $\text{CH}_2 - \text{CH} - (\text{CH} - \text{CH})_n - \text{CH}_2$ type. The results are discussed and compared with the phenomenological theory of the dynamical polarization and nuclear magnetic relaxation.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

А.В. Кессенях, В.И. Лушняков, А.А. Маненков, Ю.В. Таран

P-1518

ОРИЕНТАЦИЯ ПРОТОНОВ
И МАГНИТНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ
В ОБЛУЧЕННЫХ ПОЛИЭТИЛЕНАХ

Дубна 1964

В в е д е н и е

В связи с успешным развитием экспериментальной техники получения ориентированных ядерных мишеней (ОЯМ) методом динамической поляризации ядер (ДПЯ) значительный интерес представляют поиски разнообразных систем, пригодных для ОЯМ. В настоящей работе подводятся некоторые итоги исследований ДПЯ в облученных полиэтиленах (ПЭ), начатых в ^{11, 12/}.

Результаты эксперимента сопоставляются с феноменологической теорией ДПЯ и ядерной магнитной релаксации.

На установке ^{11/} измерено относительное возрастание ядерной поляризации (коэффициент ДПЯ η) при насыщении электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) в нескольких образцах ПЭ высокой плотности, облученных в канале ядерного реактора. Коэффициент ДПЯ измерен при 77°K , $4,2^\circ\text{K}$ и $1,6^\circ\text{K}$ по относительному возрастанию сигнала ядерного магнитного резонанса (ЯМР) протонов. Частота генератора СВЧ, насыщающего ЭПР, $\nu = 9400$ Мгц оставалась в наших экспериментах постоянной, а магнитное поле H и частота ЯМР соответственно менялись, что позволило насыщать преимущественно один из переходов с одновременным изменением ориентации электронного и ядерного спинов. При некотором значении $H = H_+$ коэффициент ДПЯ η достигал максимального положительного значения η_+ , а при $H = H_-$ наблюдалась максимальная отрицательная ДПЯ, характеризуемая значением η_- .

Нами измерены также времена ядерной и электронной спинрешеточной релаксации ($T_{1Я}$ и $T_{1Э}$), изучены природа и концентрация парамагнитных центров (ПЦ) в исследованных образцах ПЭ, сняты спектры ЯМР облученных и необлученных ПЭ при комнатной температуре.

1. Общая характеристика изученных образцов ПЭ

Изучались образцы из ПЭ низкого давления, не подвергавшиеся специальной очистке от примесей. Средние молекулярные веса ПЭ до облучения, определенные по вязкости растворов, экстраполированной к бесконечному разведению, лежали в пределах $M = 10^5 - 2,3 \cdot 10^6$. Исследован также один образец ПЭ высокого давления с $M = 1,3 \cdot 10^5$. Степень кристалличности необлученных ПЭ, определенная нами методом ЯМР (по соотношению интегральных интенсивностей широкой и узкой линий ЯМР при комнатной температуре, которые можно, следуя ^{12/}, отнести к протонам затормо-

женной кристаллической и аморфной фазы ПЭ, соответственно), достигала 90%. В образце высокого давления кристалличность не превышала 65%.

Образцы облучались в канале ядерного реактора при 60-70°C в течение 20 часов. Интегральная доза облучения составляла около $7 \cdot 10^{17}$ нейтр. см⁻².

Известно, что при действии на ПЭ нейтронов и ионизирующих излучений происходит в основном отщепление атомов H от молекулы $(CH_2)_n$, в меньшей степени идет процесс деструкции (разрыв связей C-C). За счет освободившихся связей атомов C в полимере образуются сшивки между молекулами, двойные связи, или же неспаренный электрон локализуется в некоторой части макромолекулы, образуя F-центр (свободный радикал). По данным рентгеноструктурного анализа, кристалличность ПЭ при облучении падает. Применение метода ЯМР для определения кристалличности облученных полимеров оказывается невозможным, поскольку начинает проявляться локальная заторможенность внутренних движений в полимере, обусловленная сшивками между молекулами, что вызывает увеличение вклада широкой линии, не зависящее от дальнего порядка (кристалличности)^{/3/}. Спектры ЯМР облученных и необлученных образцов ПЭ приводятся на рис. 1.

Установлено (см. например^{/4/}), что делокализация неспаренного электрона увеличивает стабильность свободного радикала в облученных полимерах. Так, время жизни алкильных радикалов $-(CH_2-CH-CH_2)^\bullet$ при 300°K исчисляется часами, алкильных радикалов $-(CH_2-CH-CH=CH-CH_2)^\bullet$ - сутками, а полиеновых радикалов $-(CH_2-CH-(CH=CH)_n-CH_2)^\bullet$ - месяцами. Увеличение дозы и времени облучения, а также повышение температуры, при которой ведется облучение, способствуют увеличению выхода наиболее стабильных полиеновых радикалов. Благодаря наличию большого числа неразрешенных компонент сверхтонкой структуры в спектре ЭПР, линия ЭПР полиеновых радикалов имеет вид синглета с функцией формы линии, близкой к гауссовой кривой, и с шириной между точками с максимальной крутизной $\Delta g = 23$ э. Наши измерения спектров ЭПР и времени жизни свободных радикалов показали, что в изученных образцах образуются радикалы полиенового типа. Спектры ЭПР представляют во всех образцах синглет с g-фактором $g = 2,00$, $\Delta g = 23-25$ э, число ПЦ в образцах при хранении на воздухе в течение 60 суток уменьшалось примерно вдвое (при комнатной температуре). После выдержки образца в течение 90 мин при 100°C число ПЦ не изменилось.

Наблюдавшееся после выдержки образца при 300°K (на воздухе) в течение 2-3 суток падение коэффициента ДПЯ следует приписать влиянию диффундирующего в ПЭ кислорода, в связи с чем оказалось полезным хранить образцы в жидком азоте. Концентрация ПЦ в образцах определялась по сравнению интегральных интенсивностей сигналов ЭПР от образца и эталона с известным числом спинов. Значения концентрации ПЦ в исследованных образцах лежали в пределах $N = 3-8,5 \cdot 10^{18}$ см⁻³.

Спектр ЭПР облученных ПЭ приводится на рис. 2.

2. Измерения ДПЯ в облученных ПЭ

Измерения на ряде образцов, проведенные нами, показали, что в согласии с ^{1,2/} коэффициент ДПЯ в ПЭ не зависит от температуры в области $1,6^{\circ}-77^{\circ}\text{K}$. Значения η для всех исследованных образцов лежали в пределах от 20 до 34.

На четырех образцах ПЭ, измеренных первоначально и принадлежащих к одной технологической серии, была обнаружена линейная зависимость коэффициента ДПЯ от среднего молекулярного веса ПЭ до облучения. Однако измерения на различных образцах, проведенные вслед за этим, показали, что непосредственная корреляция между коэффициентом ДПЯ η и исходным значением M отсутствует. Не обнаруживается также зависимость η от концентрации ПЦ в диапазоне $3-8,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Мы считаем, что разброс значений η от среднего значения (для измеренных нами образцов среднее относительное отклонение η от своего среднего значения достигало 20%) определяется факторами технологического порядка и, в особенности наличием примесей. Наибольшее значение η было получено на наиболее чистых образцах. Изменение же концентрации ПЦ, в частности при возрастании интенсивности облучения, сопровождается также более сильными нарушениями структуры полимера, что должно в какой-то мере маскировать влияние концентрации ПЦ на коэффициент ДПЯ. Один из исходных образцов облучался дважды, и, хотя концентрация ПЦ различалась при этом в полтора раза, измерения η дали одинаковый результат.

Результаты измерений ДПЯ и релаксации сведены в таблицу 1.

3. Зависимость коэффициента ДПЯ от магнитного поля

На исследованных нами образцах ПЭ обнаружена температурная зависимость расстояния между максимумами положительной и отрицательной ДПЯ $\Delta_{\Pi} = H_{+} - H_{-}$. С понижением температуры расстояние между максимумами возрастает. Расстояние между максимумами зависело также от интенсивности облучения. При 77°K имело место, в согласии с ^{15/}, $\Delta_{\Pi} = \Delta'_{\Pi}$. При $4,2^{\circ}\text{K}$ $\Delta_{\Pi} \approx 50$ э и 67 э (соответственно для образцов, подвергающихся более сильному и более слабому облучению), при $1,6^{\circ}\text{K}$ $\Delta_{\Pi} \approx 65$ э и 90 э. От образца к образцу при облучении в одинаковых условиях расстояние между максимумами практически не менялось. Нами установлено, что величина Δ_{Π} не меняется в широких пределах изменения мощности СВЧ, лишь при мощности порядка 0,004 мвт (максимальная мощность генератора 20 мвт) отмечено некоторое уменьшение расстояния между максимумами. Коэффициент ДПЯ при соответствующем изменении мощности снижался в 6 раз.

На рис. 3 показана зависимость коэффициента ДПЯ (при фиксированном значении частоты ЭПР) от магнитного поля.

4. Зависимость коэффициента ДПЯ от мощности СВЧ

Измерения коэффициента ДПЯ η в зависимости от мощности СВЧ W_r показали, что (см. рис. 4) при $4,2^\circ\text{K}$ для различных образцов:

$$\eta = 1 + A \frac{W_r/a}{1 + W_r/a},$$

где $A = |\eta_{\text{max}} - 1|$, a - мощность, соответствующая значению $\eta = \frac{|\eta_{\text{max}} - 1|}{2}$. В наших измерениях при добротности резонатора $Q = 2000$, оказалось $a \approx 0,0155$ мвт, что соответствует амплитуде высокочастотного поля усредненной по образцу $H \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$ э.

5. Измерения ядерной релаксации при $4,2$ и $1,6^\circ\text{K}$

Измерения ядерной релаксации осуществлялись обычно путем записи сигнала ЯМР после выключения СВЧ - мощности, насыщающей ЭПР. Нами были проведены также измерения релаксации по записи сигнала ЯМР после снятия насыщения ЯМР. Релаксационные измерения, проведенные обоими способами, дают идентичные результаты. Некоторые типичные релаксационные зависимости сигнала ЯМР приведены на рис.5.

Измерялось также τ - время нарастания ДПЯ после включения мощности СВЧ, достаточной для полного насыщения ЭПР. При $T = 4,2^\circ\text{K}$ $\frac{\tau_{\text{я}}}{T_{\text{я}}} = 1$, а при $1,6^\circ\text{K}$ $\frac{\tau_{\text{я}}}{T_{\text{я}}} \approx 0,5$ для всех изученных образцов.

У ряда образцов наблюдалась релаксационная зависимость, которая описывается суммой двух экспонент с характеристическими временами $T'_{\text{я}}$ и $T''_{\text{я}}$ и относительными весами a' и a'' . Один из образцов облучался дважды в различных условиях, и оба раза обнаружил двухэкспонентную релаксацию. Величины $\frac{T'_{\text{я}}}{T''_{\text{я}}}$ и $\frac{a'}{a''}$ не зависели от температуры. Нам не удалось связать наличие двух экспонент в ядерной релаксации со степенью кристалличности исходных образцов ПЭ, скорее всего здесь также играют роль какие-либо структурные особенности образцов, влияющие на неравномерность распределения ПЦ. Анализ зависимости между обратной величиной времени релаксации и концентрацией ПЦ N , показал, что эта зависимость приближенно описывается формулой $T_{\text{я}}^{-1} \approx \text{const} \cdot N^a$, где $a = 1-2$.

Время релаксации $T_{\text{я}}$ ($T'_{\text{я}}$ и $T''_{\text{я}}$) приближенно обратно пропорционально температуре. При $4,2^\circ\text{K}$ $T_{\text{я}} \approx 40-100$ сек, при $1,6^\circ\text{K}$ $T_{\text{я}} \approx 90-230$ сек (см. табл. 1). По данным ^{1/1} при 77°K $T_{\text{я}} \approx 2$ сек.

6. Измерения электронной релаксации

Измерения времени электронной спин-решеточной релаксации были осуществлены

методом импульсного насыщения^{/6/}. В электронной релаксации при $4,2^{\circ}\text{K}$ наблюдается короткая экспонента с длительностью порядка 10^{-4} сек и длинная экспонента с характеристическим временем около 1 сек. Относительный вес короткой экспоненты падает с увеличением длительности насыщающего импульса, а ее характеристическое время не зависит от температуры. Это свидетельствует о том, что мы наблюдаем наряду со спин-решеточной релаксацией (длинная экспонента) спин-спиновую кросс-релаксацию внутри ширины неоднородно уширенной линии. Обратная величина времени спин-решеточной релаксации сильно зависит от температуры при переходе от 77°K до $4,2^{\circ}\text{K}$ и приближенно линейно в диапазоне гелиевых температур. При 77°K $T_{1\rho} = 3 \cdot 10^{-3}$ сек. Релаксационные зависимости сигнала ЭПР см. на рис. 6.

7. Обсуждение результатов

Прежде чем перейти к обсуждению экспериментальных результатов, мы остановимся на некоторых общих вопросах теории динамической поляризации. Рассмотрим систему n ядерных и N электронных спинов $I = 1/2$, $S = 1/2$ с магнитными моментами μ_n , μ_e и гиромагнитными отношениями γ_n , γ_e . Для наиболее простого случая, когда каждый ядерный спин непосредственно взаимодействует с одним электронным спином, схема энергетических спиновых уровней в магнитном поле H_0 представлена на рис. 7.

В состоянии термического равновесия с решеткой значения поляризации ядерных и электронных спинов $p = \frac{n_+ - n_-}{n}$ и $P = \frac{N_+ - N_-}{N}$, где N_+ , n_+ ; N_- , n_- - числа спинов, ориентированных по и против поля, определяются соотношениями $p_0 = th \frac{\gamma_n \hbar H_0}{2kT}$, $P = th \frac{\gamma_e \hbar H_0}{2kT}$ (по Больцману).

Динамическая поляризация (возрастание p до величин порядка P_0) становится в принципе возможной, если путем возбуждения резонансных переходов между какой-либо парой уровней удастся выравнять заселенность этих уровней, но, кроме того, существует некоторый релаксационный механизм, за счет которого идет дальнейшее перераспределение заселенностей между одним из насыщаемых и каким-либо третьим уровнем.

В случае эффекта Оверхаузера насыщаются чисто электронные спиновые переходы, а роль перекачивающего релаксационного механизма играют комбинированные переходы. Эффект Оверхаузера (см. ^{/7/}) наблюдается, как правило, в области низких полей и высоких температур.

С точки зрения получения ОЯМ эффективным методом оказалась ДПЯ при насыщении "запрещенных" (комбинированных) переходов, как это имеет место в нашем случае. Здесь роль перекачивающего релаксационного механизма играет чисто электронная

релаксация, которая от электронно-ядерных спиновых взаимодействий по большей части зависит слабо. Электронная релаксация может оказаться достаточно быстрой и при довольно низких температурах и высоких полях, что необходимо для получения достаточно высоких абсолютных значений ядерной поляризации.

Эффект Оверхаузера наблюдается в системах, обладающих однородно уширенной линией ЭПР, тогда как ДПЯ при насыщении комбинированных переходов в таких системах практически невозможна^{/8/}, поскольку насыщаются одновременно два перехода, ведущие к поляризации различных знаков.

При магнитном разведении, то есть при уменьшении концентрации парамагнитных центров, и при понижении температуры большинство линий ЭПР становится неоднородно уширенными, и функция формы линии ЭПР соответствует функции распределения спинов по значениям локальных полей. Это делает возможным раздельное насыщение комбинированных переходов, ведущих к поляризации различных знаков, даже для широких линий (ширина линии $\Delta_{\Sigma} > \frac{\gamma_{\Sigma}}{\gamma_{\Sigma}} H_0$ ^{/8/}). Выбор же систем с достаточно узкой линией ЭПР позволяет получить высокие значения коэффициента динамической поляризации. Теория^{/8/} указывает на два принципиальных затруднения в осуществлении метода ДПЯ при насыщении комбинированных переходов. Дело в том, что с понижением концентрации ПЦ коэффициент ДПЯ уменьшается пропорционально $(1 + \frac{n}{N} \frac{T_{1\Sigma}}{T_{1Я}})^{-1}$, где $T_{1Я}$ и $T_{1\Sigma}$ - времена ядерной и электронной релаксации, n и N - числа ядерных и электронных спинов в образце. С уменьшением концентрации ПЦ этот множитель уменьшается. С возрастанием же концентрации ПЦ спин-спиновые взаимодействия ведут к выравниванию факторов насыщения по всем переходам внутри ширины линии за счет кросс-релаксации^{/9,11/}, что также снижает коэффициент ДПЯ.

Таковы выводы простой феноменологической теории ДПЯ.

При сравнении экспериментальных результатов по ДПЯ и магнитной релаксации в облученных ПЭ с выводами простой феноменологической теории, которые изложены выше, нами обнаружены следующие противоречия: во-первых, расстояние между максимумами положительной и отрицательной ДПЯ оказалось зависящим от температуры, тогда как коэффициент ДПЯ от температуры не зависит. Во-вторых, уже при 77°К простая феноменологическая теория ДПЯ не дает вполне удовлетворительного согласия с экспериментом, поскольку фактор релаксации равен $(1 + \frac{n}{N} \frac{T_{1\Sigma}}{T_{1Я}})^{-1} = 0,1$, что с учетом большой ширины линии ЭПР дает возможное значение коэффициента усиления $\eta \approx \frac{H_0}{\Delta_{\Sigma}} (1 + \frac{n}{N} \frac{T_{1\Sigma}}{T_{1Я}})^{-1} = 7-15$. При 4,2°К аналогичная оценка дает $\eta \approx 1$ по сравнению с наблюдаемой величиной $\eta \approx 20-30$. Последнее противоречие с данными эксперимента, по-видимому, следует сопоставить с расхождением измеренной зависимости $T_{1Я}$ от $T_{1\Sigma}$ с теорией пространственной диффузии ядерного спина^{/10/}.

Если отнести наблюдаемую нами в электронной релаксации длинную экспоненту к спин-решеточной релаксации, а короткую - к спин-спиновой кросс-релаксации (сопоставление с результатами других аналогичных измерений, в частности зависимость веса короткой экспоненты от длительности насыщающего импульса, не оставляет сомнения в правильности этого отнесения), то теория дает $T_{1Я} \approx 10^6$ сек. В ^{/10/} имеется указание на то, что в отдельных случаях характеристическим временем для электронно-ядерных спиновых взаимодействий будет время спин-спиновой электронной кросс-релаксации T_{12} , которое следует подставить в соответствующую формулу ^{/10/} вместо $T_{1Я}$. В последнем случае получим для времени ядерной релаксации значение более близкое к экспериментальному, однако $T_{1Я}$ не должно зависеть от температуры. Г.Р. Хуцишвили ^{/10/} обратил наше внимание на то, что температурная зависимость при этом может быть обусловлена зависимостью от температуры так называемого "радиуса диффузионного барьера", то есть минимального расстояния ядерного спина от электронного, на котором взаимодействие двух соседних ядерных спинов (ведущее к диффузии ядерной поляризации), превышает взаимодействие ядерного спина с электронным. Хотя количественные оценки в упрощенной сферически симметричной модели спиновой диффузии настолько грубы для облученного ПЭ с его сильно делокализованными ПЦ, что подробное обсуждение модели спиновой диффузии ^{/10/} в нашем случае не имеет смысла, можно сказать, что учет влияния спин-спиновых электронных взаимодействий на релаксацию ядер улучшает согласие теории с экспериментом.

Укажем, что учет спин-спиновых взаимодействий для однородно-уширенных линий ЭПР не улучшает согласия с экспериментом, а, напротив (сравни с результатами ^{/8/}), ведет к снижению η . Однако в случае неоднородно уширенных линий ЭПР положение меняется, поскольку одновременная переориентация электронных спинов с различными резонансными частотами может служить дополнительным источником энергии для переориентации ядерного спина.

Удлинение времени электронной релаксации $T_{1Э}$ с понижением температуры ведет к тому, что спин-спиновые электронные взаимодействия (кросс-релаксация) в значительной мере выравнивают факторы насыщения ЭПР для спинов с различным значением резонансной частоты. При этом эффективным становится насыщение на крыльях линии ЭПР, то есть возможен рост расстояния между максимумами ДПЯ. Процесс установления равновесных значений электронной поляризации $P(h)$ для спинов с разными значениями резонансной частоты (или резонансного поля h при фиксированной частоте ЭПР ν_0) подчиняется уравнению спектральной спиновой диффузии ^{/11/}:

$$T_{1Э}^{-1} \frac{dP(h)}{dt} = a^2 G(h) P''(h) + 2a^2 G'(h) P'(h) - 2a^2 G''(h) P(h) - P(h) + P_0(h),$$

где $G(h)$ - функция формы линии ЭПР с центром при $h = H_0$, $a = \delta h \sqrt{T_{13} / T_{12}}$, δh - некоторый интервал^{1/}, соответствующий однородной ширине ЭПР (ширина спинов-го пакета). При некотором значении $h = H$ достигается полное насыщение ЭПР $P(H) = 0$. Значение ядерной поляризации, среднее по образцу при этом определяется зависимостью $P(h)$ и выражается приближенно в виде:

$$\langle p \rangle \approx \int_{-\infty}^{\infty} G(h) \left\{ \frac{G(h+\delta) [P(h+\delta) - P(h)]}{2 + \beta [G(h+\delta) + G(h-\delta)]} - \frac{G(h-\delta) [P(h-\delta) - P(h)]}{2 + \beta [G(h+\delta) + G(h-\delta)]} \right\} dh,$$

где $\delta = \frac{\gamma_{\text{я}} N}{\gamma_{\text{э}}}$, $\beta \approx \sqrt{T_{\text{я}} C_0}$,

C_0 - вероятность кросс-релаксационного перехода, сопровождающегося одновременной переориентацией двух электронных и одного ядерного спина (то есть электронного спина с резонансным полем h и спина с полем $h + \delta$ совместно с взаимодействующим с ним ядерным спином).

Приведенные выше формулы получены с предположении, что:

1. Учитываются кросс-релаксационные взаимодействия между переходами с близкими резонансными частотами;
2. Считается, что каждый ядерный спин взаимодействует лишь с одним ПЦ;
3. Пренебрегается влиянием насыщения комбинированных спиновых переходов на поляризацию электронов.

Зависимость η от T_{13} , наблюдаемая в экспериментах, качественно соответствует зависимости $\langle p \rangle$ от параметра a , предсказываемой приведенными формулами: расстояние между максимумами η должно расти с ростом a , то есть с ростом T_{13} .

При разумном выборе значений параметра a численный расчет показал согласие с экспериментом по порядку величины η и по зависимости $\eta(H)$ (см. рис. 8).

З а к л ю ч е н и е

В ходе настоящей работы:

1. Исследована динамическая поляризация протонов в облученных полиэтиленах при 77°К, 4,2°К и 1,6°К. Коэффициент динамической поляризации η в исследованных образцах колебался в пределах от 20 до 34. Влияние технологических факторов,

^{1/} Количественная оценка δh затруднительна. Мы предполагаем, что $\delta h = \Delta H_{\text{лосэ}}$ (в нашем случае $\approx 0,1\text{э}$), где $\Delta H_{\text{лосэ}}$ - величина изменения локального поля, создаваемого электронным спином, при изменении его ориентации в месте нахождения его ближайшего соседа. При более высоких температурах величина δh может быть обусловлена модуляцией эффективных локальных магнитных полей внутренними движениями в решетке.

времени облучения, исходного молекулярного веса образцов в некоторых пределах существенно не сказывается на величине η .

2. Расстояние между максимумами отрицательной и положительной ДПЯ Δ_{II} растет с понижением температуры. Измерены времена спин-решеточной релаксации ядерных и электронных спинов, концентрация парамагнитных центров в облученных полиэтиленах. Установлено, что величина коэффициента ДПЯ и зависимость расстояния между максимумами ДПЯ не могут быть объяснены простой феноменологической теорией ДПЯ. Наблюдаемая зависимость Δ_{II} от температуры объясняется с учетом кросс-релаксации внутри ширины неоднородно-уширенной линии ЭПР.

3. Определена природа парамагнитных центров в полиэтиленах, облученных в ядерном реакторе. Установлено, что в исследованных нами образцах наблюдались радикалы типа полиеновых с сильной делокализацией неспаренного электрона.

Л и т е р а т у р а

1. В.И. Лушиков, А.А. Маненков, Ю.В. Таран. ФТТ, 3, 3503 (1961).
2. А.В. Кессених, В.И. Лушиков, А.А. Маненков, Ю.В. Таран. ФТТ, 5, 443 (1963);
ФТТ, 5, 1640 (1963).
3. W.P.Slichter, R.F.Mandel. J. Phys. Chem, 62, 334 (1958).
4. S.I.Onichi, Y.Ikeda, S.I.Sugimoto, I.Nitta. J. Polymer Sci., 47, 503 (1960).
5. M.Abraham, M.A.McCoul, F.N.Robinson. Phys. Rev. Let., 2, 449 (1959).
6. А.А. Маненков, В.А. Миляев. ЖЭТФ, 41, 100 (1961).
7. А.В. Кессених. Проблемы физической химии, вып. 3, стр. 187, ГХИ (1963).
8. O. S. Leifson, C.D.Jeffries. Phys. Rev., 122, 1781 (1962).
9. N.Bloembergen, N.S.Shapiro, P.S.Pershan, I.O.Artman. Phys. Rev., 114, 445 (1959).
10. Г.Р. Хуцишвили. ЖЭТФ, 42, 1311 (1962);
ЖЭТФ, 43, 2179 (1962).
11. А.В. Кессених, А.А. Маненков. ФТТ, 5, 1143 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1963 г.

Т а б л и ц а I
 Результаты измерения ДП и релаксации в полиэтиленах при 4,2°K

Образец	Исходное M	Концентрация ПЦ $n \cdot 10^{-18} \text{ см}^{-3}$	η	τ_1 (сек)	Δ (э)	Примечание
ПЭ I/1/	$9,23 \cdot 10^5$	4 ± 1	31 ± 3	$T_{IЯ} = 20 \pm 5$ $T_{IЯ} = 100 \pm 20$ $\frac{a'}{a} = 0,25$	64 ± 4	Окраска светло-бурая
ПЭ II/1/	$6,35 \cdot 10^5$	4 ± 1	24 ± 3	$T_{IЯ} = 20 \pm 5$ $T_{IЯ} = 100 \pm 20$ $\frac{a'}{a} = 0,25$	67 ± 4	Окраска светло-бурая
ПЭ III/1/	$4,78 \cdot 10^5$	4 ± 1	21 ± 2	$T_{IЯ} = 20 \pm 5$ $T_{IЯ} = 100 \pm 20$ $\frac{a'}{a} = 0,25$	64 ± 4	Окраска светло-бурая
ПЭ I /2/	$2,3 \cdot 10^6$	$5,2 \pm 0,5$	28 ± 3	70 ± 10	52 ± 5	Образец полу- прозрачный бурый со свет- лыми включени- ями
ПЭ II/2/	$9,5 \cdot 10^5$	$8,5 \pm 0,8$	34 ± 3	39 ± 5	50 ± 2	Образец бурый полупрозрачн.
ПЭ III/2/	$4,78 \cdot 10^5$	$5,8 \pm 0,5$	20 ± 2	$T_{IЯ} = 10 \pm 2$ $T_{IЯ} = 40 \pm 5$ $\frac{a'}{a} = 0,5$	49 ± 2	Образец бурый полупрозрачн. со светлыми включениями
ПЭ IV/2/	10^5	$5,9 \pm 0,5$	33 ± 3	80 ± 10	52 ± 2	Образец полу- прозрачный с массивным не- прозрачным включением
ПЭ V/2/	$1,3 \cdot 10^5$	$2,8 \pm 0,3$	24 ± 3			Измерения при 77°K, полити- лен высокого давления. Обра- зец прозрачный с включениями пузырьков, дефор- мированная при об- лучении

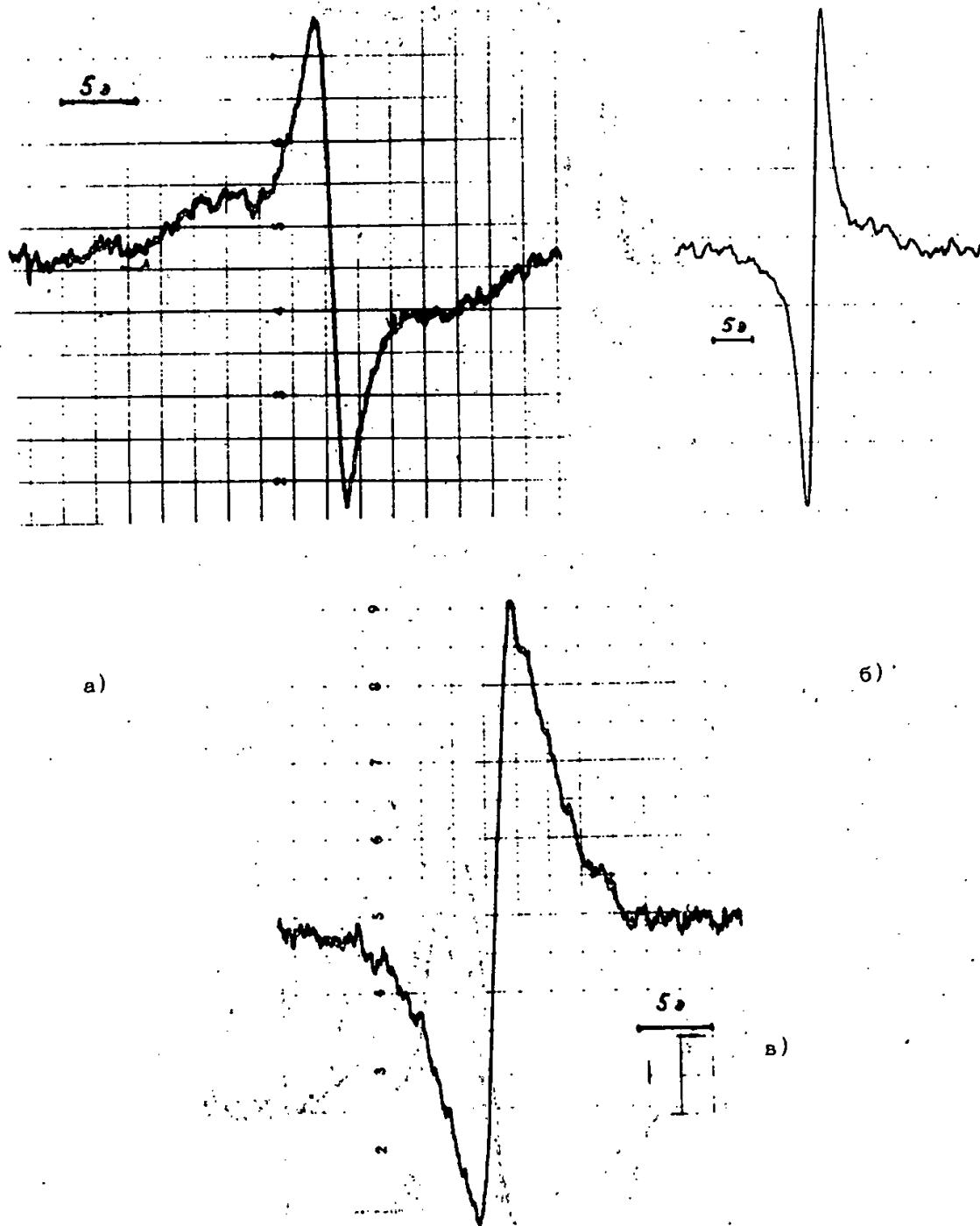


Рис. 1. Производные сигналов поглощения ЯМР протонов в полиэтиленах при 300° К.
а) высококристаллический полиэтилен низкого давления $M = 9,23 \cdot 10^5$;
б) полиэтилен высокого давления $M = 1,3 \cdot 10^5$;
в) облученный в течение 20 часов в ядерном реакторе полиэтилен с исходным $M = 9,23 \cdot 10^5$ (образец ПЭ 1/17).

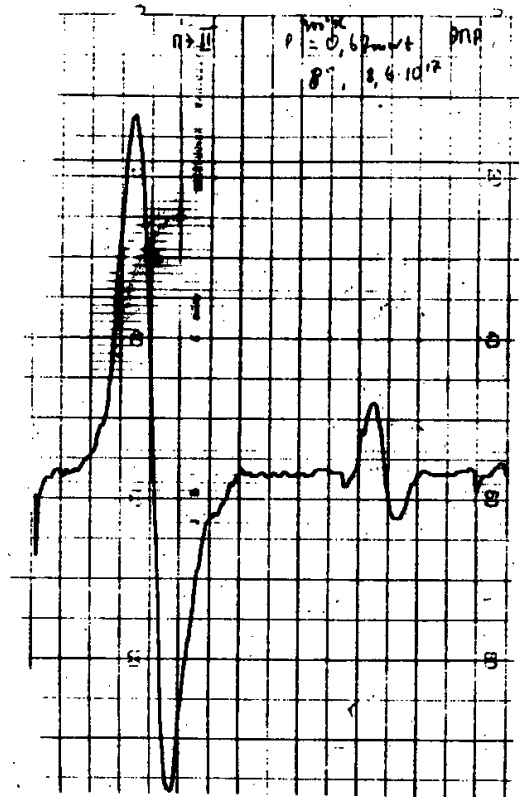


Рис. 2. Производная сигнала поглощения ЭПР при 300°K
в ПЭ /2/, $N = 8,5 \pm 0,8 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $\Delta' = 23 \pm 2 \varepsilon'$.
На той же спектрограмме сигнал ЭПР Cr^{3+} в Al_2O_3 .

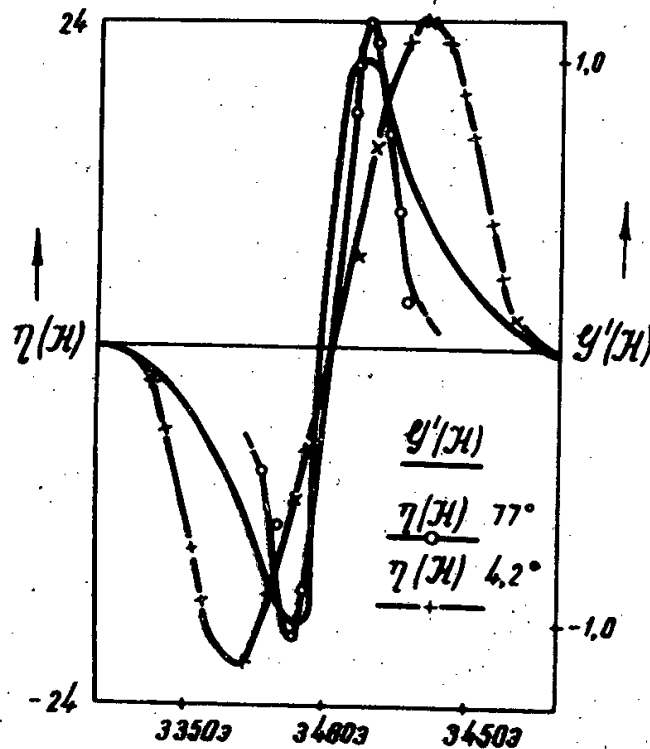


Рис. 3. Зависимость коэффициента динамической поляризации
в облученном ПЭ от магнитного поля при 77° и $4,2^{\circ}\text{K}$.
Для сравнения приводится форма производной сигнала
поглощения ЭПР.

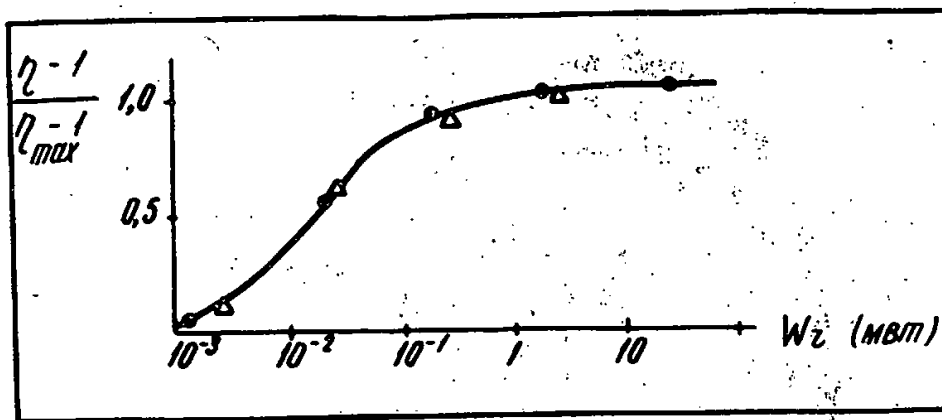


Рис. 4. Зависимость η от мощности генератора СВЧ при 4,2°К.

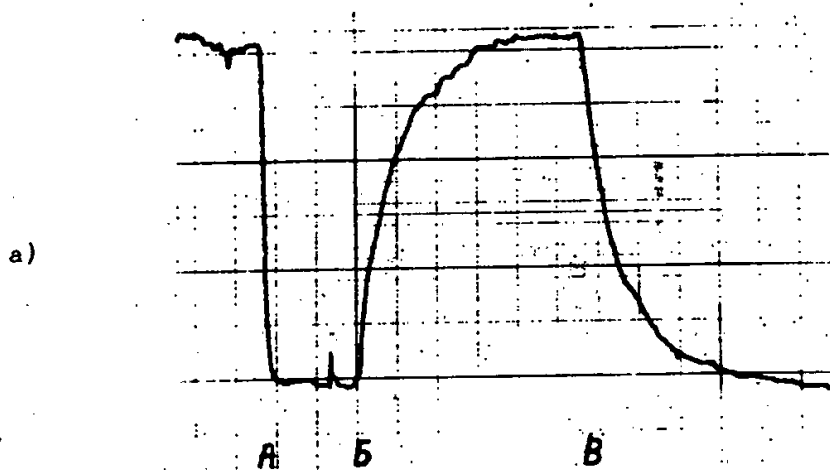


Рис. 5. Релаксационные зависимости сигналов протонного магнитного резонанса в облученных ПЗ при 4,2°К.

а) При включенной мощности СВЧ А - насыщение ЯМР, Б - насыщение ЯМР снято; В - мощность СВЧ выключена;

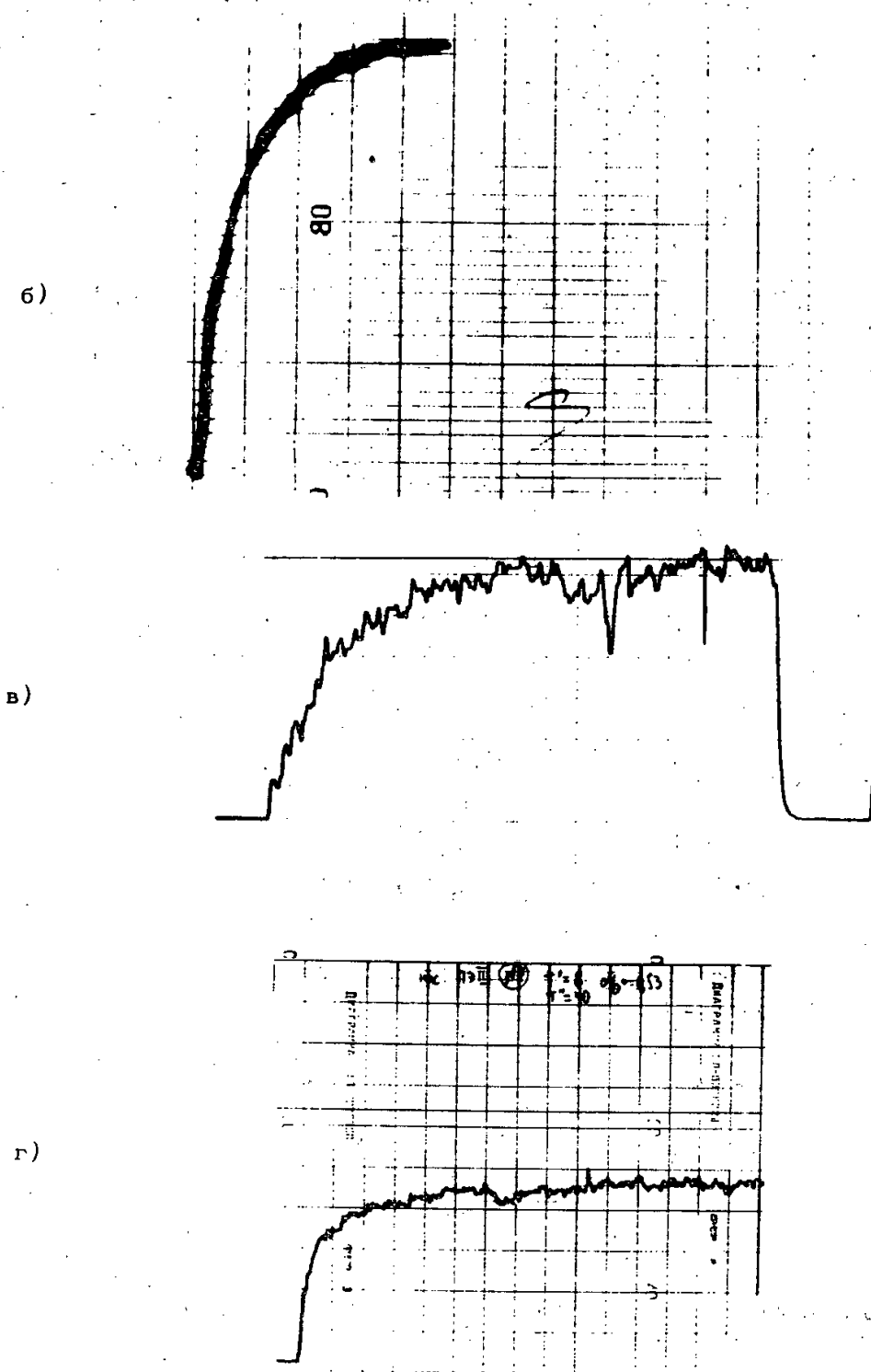


Рис. 5. Релаксационные зависимости сигналов протонного магнитного резонанса в облученных ПЭ при $4,2^{\circ}\text{K}$.

- б) Сравнение кривых нарастания и разрушения поляризации, полученных на спектрограмме /а/;
- в) Восстановление поляризации при снятии насыщения ЯМР в отсутствие СВЧ мощности в ПЭ /2/ описывается одной экспонентой;
- г) Восстановление поляризации при снятии насыщения ЯМР в ПЭ /2/ описывается двумя экспонентами.



а)



б)

Рис. 6. Релаксационная зависимость сигналов ЭПР в ПЭ /2/.

- а) При $4,2^{\circ}\text{K}$ насыщение прямоугольными импульсами со скважностью $1/2$ и частотой следования $0,1$ гц.
- б) При 77°K длительность насыщающего импульса 50 мксек, метки времени 2 мсек.

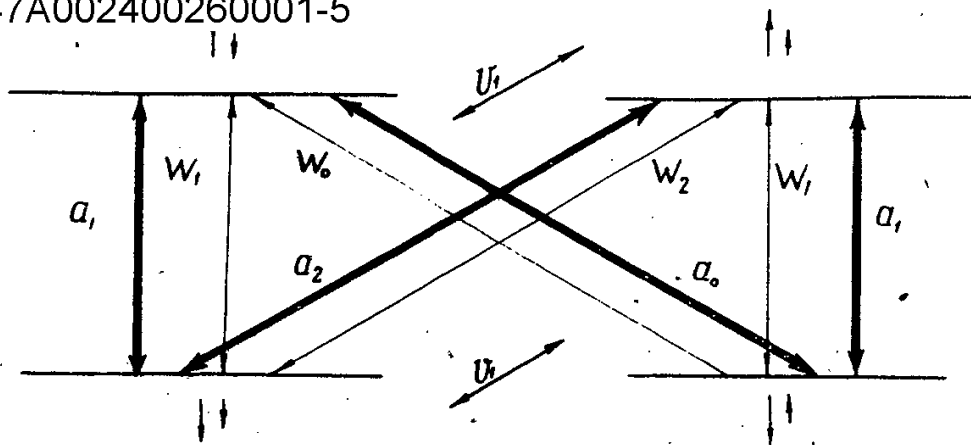


Рис. 7. Схема энергетических уровней изолированной пары (электронный и ядерный спин, взаимодействующие между собой $S=I=1/2$).
 Средние вероятности релаксационных переходов с соответствующим изменением магнитного квантового числа m :

$$\Delta m_I = +1 \quad -w_1; \quad \Delta m_I = -1 \quad -w_1;$$

$$\Delta(m_I + m_N) = 0 \quad -w_0; \quad \Delta(m_I + m_N) = +2 \quad -w_2$$

Средние вероятности переходов, индуцированных внешним радиочастотным полем a_1, a_0, a_2 .
 Стрелки соответствуют знакам, указывающим на ориентацию спинов \vec{S} и \vec{I} в магнитном поле.

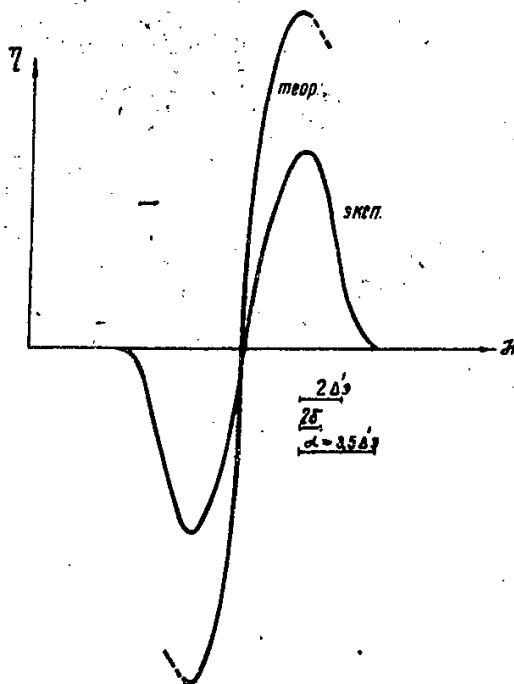


Рис. 8. Сравнение теоретической зависимости коэффициента динамической поляризации $\eta(H)$, при значении параметра диффузии $2a = 3,5 \Delta_0$. (функция формы линии $G(h)$ в расчете взята из эксперимента) с экспериментом при $4,2^\circ \text{K}$. Выбранное значение a примерно соответствует $\delta h \approx 3 \cdot 10^{-1} \text{э}$, $T_{10} \approx 1 \text{ сек}$, $T_{12} \approx 10^{-4} \text{ сек}$ (для одного спинового пакета), т.е. условиям эксперимента.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3546. Тираж 310. Февраль 1964 г.
Тех. редактор Н.Н.Зрелова 1,1 уч.-изд. л.

STAT
20



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

А.Ф. Дунайцев, В.И. Петрухин, Ю.Д. Прокошкин, В.И. Рыкалин

P - 1559

БЕТА-РАСПАД ПИОНА

Дубна 1964

Дунайцев А.Ф., Петрухин В.И., Прокошкин Ю.Д., Р-1559
Рыкалин В.И.

Бета-распад пиона

При помощи черенковских спектрометров зарегистрировано 43 случая бета-распада пиона. Величина относительной вероятности этого распада найдена равной $\lambda = (1,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$, что подтверждает гипотезу сохранения векторного тока. Величины констант G и G_β , характеризующие бета-распад пиона и нуклона, совпадают: $G = (1,03 \pm 0,11) G_\beta$. Энергетический спектр позитронов, образующихся при бета-распаде пиона, согласуется с рассчитанным на основе гипотезы сохранения векторного тока.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Dunajtsev A.F., Petrukhin V.I., Prokoshkin Yu.D., Rykalin V.I.

P-1559

Beta Decay of the Pion

43 events of the pion beta-decay have been detected by means of Cerenkov spectrometers. To identify events, use was made of a fast five-ray oscilloscope. The relative probability of the pion beta-decay was found to be $(1.1 \pm 0.2) 10^{-8}$ in agreement with the conserved vector current hypothesis. The positron spectrum is also consistent with that predicted by theory.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

А.Ф. Дунайцев, В.И. Петрухин, Ю.Д. Прокошкин, В.И. Рыкалин

P-1559

БЕТА-РАСПАД ПИОНА

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

1. Введение

Характеристики бета-распада пиона



с большой точностью предсказываются теорией слабого взаимодействия^{/1,2/}, если справедлива гипотеза сохранения векторного тока^{/3,2/}. В рамках этой гипотезы вероятность бета-распада пиона может быть определена с погрешностью, не превышающей нескольких процентов^{/4,5/}:

$$\omega(\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu) = \frac{G^2 \Delta^8}{30 \pi^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Delta}{\mu} - 5 \frac{m^2}{\Delta^2} + \delta \right) \quad h = c = 1. \quad (2)$$

Здесь G - константа слабого векторного взаимодействия, Δ - разность масс заряженного и нейтрального пионов^{/6,7/}, μ - масса π^+ -мезона, m - масса электрона, δ - радиационная поправка.

Первые исследования, проведенные в 1961-62 г.г.^{/8-11/}, показали, что несмотря на исключительно малую величину относительной вероятности $\lambda = \omega(\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu) / \omega(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu)$, составляющей, согласно теории, всего лишь $1,04 \cdot 10^{-8}$, процесс (1) доступен измерениям. Полученная при этом вероятность λ оказалась близкой к величине, предсказанной на основе гипотезы сохранения векторного тока. Ниже сообщаются результаты дальнейших исследований бета-распада пиона^{/12/}, целью которых являлось измерение спектра позитронов и уточнение величины вероятности λ .

2. Постановка опыта

Для регистрации бета-распада пиона использовалась установка^{/13/}, содержащая четыре черенковских спектрометра полного поглощения (рис. 1). Эксперименты были выполнены на синхротроне Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ в конце 1962 г. Выведенный из камеры ускорителя пучок положительных пионов формировался свинцовыми диафрагмами и магнитными линзами. Пионы проходили через ряд сцинтилляционных счетчиков 1-5 и останавливались в сцинтилляторе последнего счетчика 6, предназначенного для регистрации позитрона распада. Амплитудный анализ импульсов от этих счетчиков позволял четко выделять акты остановки пиона^{/14/}. Гамма-кванты от распада π^0 -мезонов регистрировались черенковскими спектрометрами. Между счетчиком 6 и спек-

1) Формула (2) получена Герштейном^{/9/}.

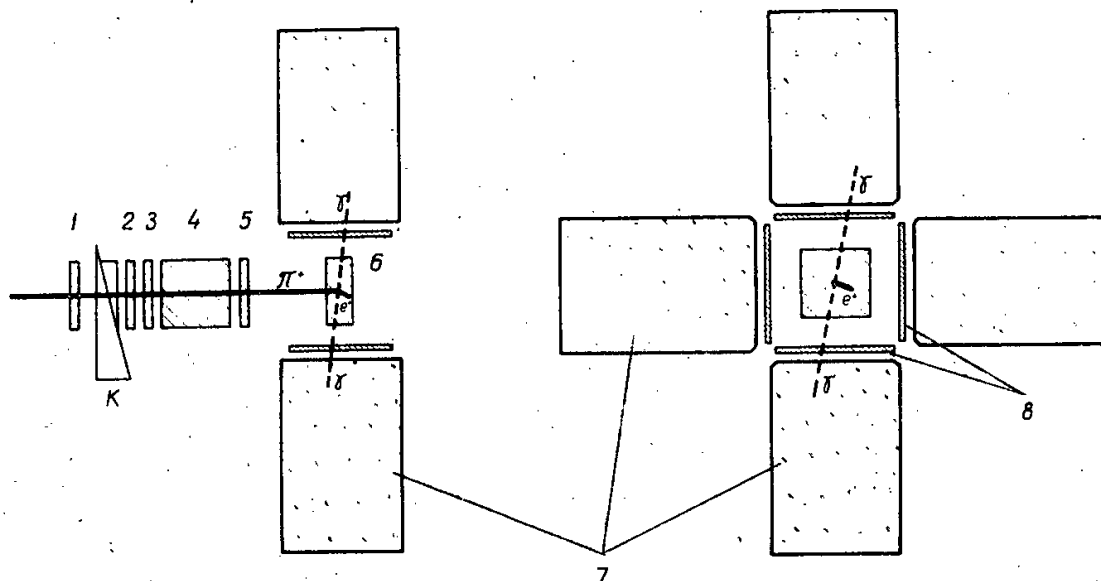


Рис. 1. Постановка опыта. 1-6 - сцинтилляционные счетчики, 7 - черенковские спектрометры полного поглощения, 8 - сцинтилляционные счетчики антисовпадений, К - тормозящий фильтр. В спектрометрах использованы фотоумножители 58 АУР, в сцинтилляционных счетчиках - 56 АУР

тросметрами были помещены сцинтилляционные счетчики, защищавшие спектрометры от заряженных частиц (счетчики антисовпадений).

Сцинтилляционные счетчики и черенковские спектрометры были помещены в многослойные магнитные экраны для устранения влияния рассеянного магнитного поля ускорителя. Все счетчики и спектрометры были снабжены импульсными источниками света наносекундной длительности, при помощи которых можно было моделировать остановку пиона и распад (1). Это позволяло быстро производить калибровку всей аппаратуры в процессе измерений.

Черенковские спектрометры и счетчик 5 были включены в схему совпадений^{/15/} с задержанными "воротами" длительностью $8 \cdot 10^{-8}$ сек, которая запускала развертку пятилучевого скоростного осциллографа^{/16/}. Время нарастания импульсов на экране осциллографа составляло $4 \cdot 10^{-9}$ сек при чувствительности вертикального отклонения лучей 60 мв/см. Импульсы от всех счетчиков и спектрометров установки смешивались^{/16/} и подавались на входы осциллографа. При этом импульсы счетчиков 3, 4, 6, 8 формировались по длительности. Особое внимание было обращено на формирование импульса в счетчике 6. Для этого счетчика был выбран режим питания, при котором выбросы и послеимпульсы были сведены к минимуму. Счетчик 6 был испытан при помощи двух импульсных источников света, моделировавших импульс от остановки пиона и возникающий через некоторое время импульс от позитрона распада. Вари-

рование времени задержки и амплитуд этих импульсов показало, что позитрон в рас-
паде (1) может быть надежно зарегистрирован; если временная задержка t между
моментом его возникновения и остановкой пиона превышает $6 \cdot 10^{-9}$ сек. Такой же ре-
зультат был получен при анализе зарегистрированных в калибровочных экспериментах
событий $\pi^+ - \mu^+$ -распада (рис. 2, 10).

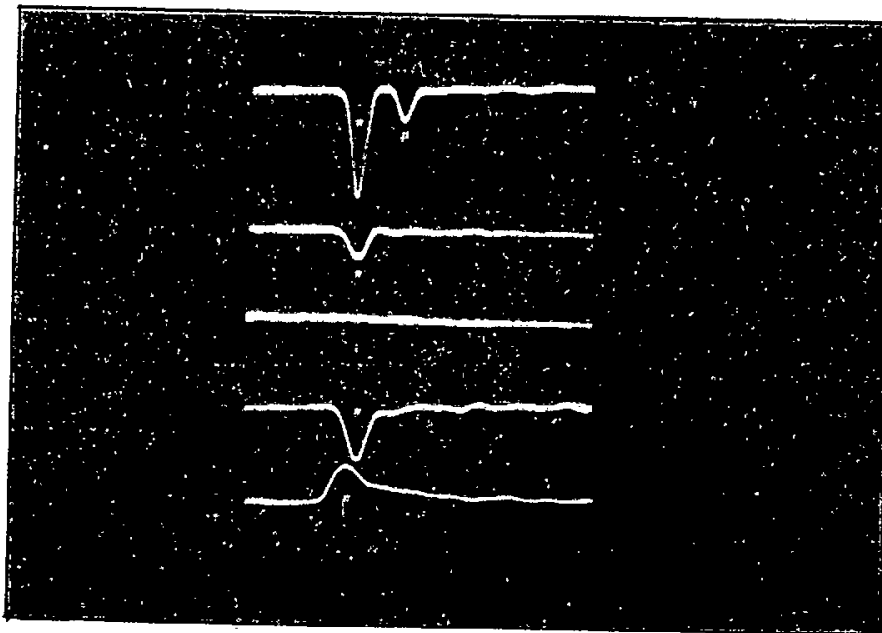


Рис. 2. Фотография случая $\pi^+ - \mu^+$ -распада. π -импульсы, возникающие в счетчи-
ках 5, 4, 3, 6 при торможении и остановке π^+ -мезона, μ -импульс в счет-
чике 6 от μ^+ -мезона.

Для фотографирования импульсов был использован объектив Zeiss (ГДР) со
светосилой 1:0,75 и фокусным расстоянием 100 мм. Фотографирование производилось
при помощи киноаппарата РФК на высокочувствительную пленку "Изопанхром-13".

Настройка и калибровка аппаратуры была выполнена в опытах, где регистрирова-
лась перезарядка остановившихся π^- -мезонов в мишени, помещенной между черен-
ковскими спектрометрами. В качестве мишеней использовались жидкий водород и
гидрид лития. Окончательная калибровка аппаратуры была проведена на основе ампли-
тудно-временного анализа фотографий, полученных при регистрации малоинтенсивного
процесса перезарядки $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$ /17/ в сцинтиляторе счетчика 6 (рис. 3).
Этот анализ показал, что выбранный метод регистрации обеспечивает разрешающее
время для сцинтилляционных счетчиков $2 \cdot 10^{-10}$ сек, а для спектрометров - $7 \cdot 10^{-10}$ сек.

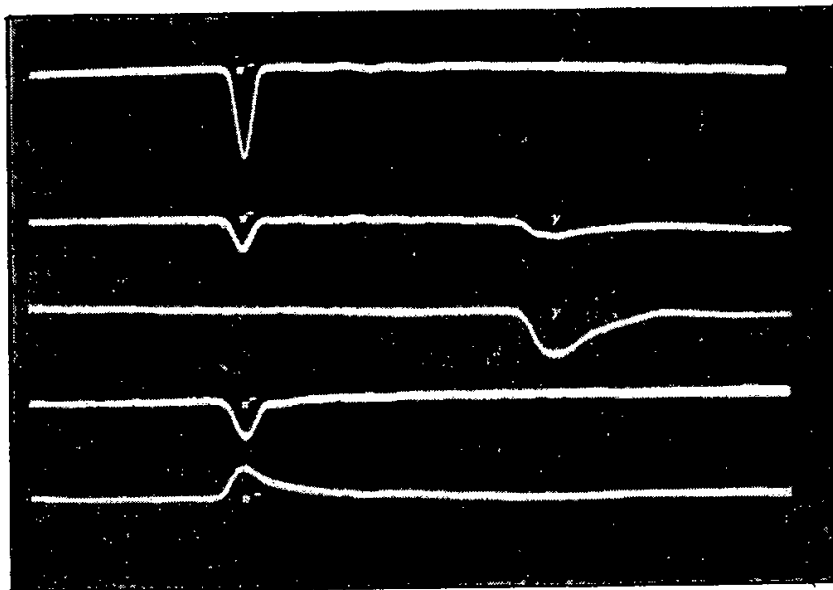


Рис. 3. Фотография случая перезарядки π^- -мезона в сцинтилляторе счетчика 6.
 π^- - те же импульсы, что на рис. 2, γ - импульсы от двух противоположных спектрометров.

3. Измерения

Основные измерения продолжались около 500 часов. За это время через установку было пропущено $4 \cdot 10^{10}$ пионов. В процессе измерений каждые два часа проводилась контрольная калибровка всей аппаратуры при помощи импульсных источников света (рис. 4). Проверка стабильности и линейности развертки осциллографа производилась также путем фотографирования стандартных синусоидальных сигналов с частотой 100 мгц от стабилизированного кварцевого генератора. Наряду с этим периодически повторялись контрольные эксперименты, в которых регистрировалась перезарядка отрицательных пионов в сцинтилляторе счетчика 6 и в мишени из гидрида лития.

Полученные фотографии предварительно просматривались на диакопе. При этом были отобраны случаи, когда на фотографии была видна остановка пиона, сопровождаемая запаздывающим импульсом, и отсутствовали импульсы от счетчиков антисовпадений (рис. 5 а, б, в). Фотографии, на которых были зарегистрированы импульсы от счетчиков антисовпадений (рис. 6), обрабатывались отдельно - они служили источником информации о радиационном распаде пиона $\pi^+ \rightarrow \gamma + e^+ + \nu$.

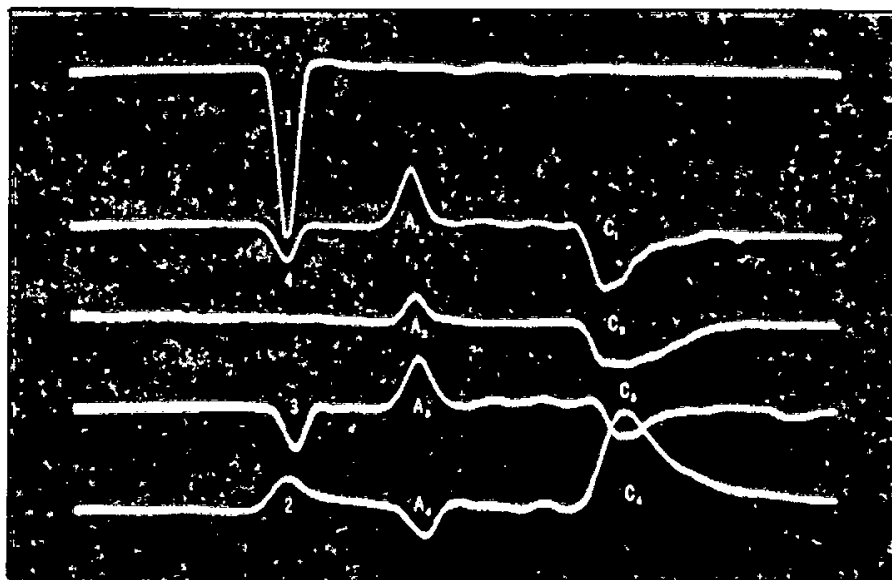


Рис. 4. Одновременное срабатывание импульсных источников света во всех счетчиках и спектрометрах установки (калибровка). 2, 3, 4, 1 - импульсы от счетчиков 5, 4, 3, 6. $A_1 - A_4$ - импульсы от счетчиков антисовпадений, $C_1 - C_4$ - импульсы от черенковских спектрометров.

Оставшиеся после проведения предварительного отбора 330 фотографий были подвергнуты временному анализу. При этом оказалось, что 81 событие, удовлетворяющее необходимым временным критериям (импульсы от γ -квантов и позитрона совпадают в пределах временного разрешения), может быть отнесено к распаду (1). Окончательный отбор событий был проведен на основе амплитудного анализа импульсов от черенковских спектрометров. Этот анализ показал, что с увеличением энергетического порога регистрации гамма-квантов $E_{\text{п}}$ уровень фона резко падает ^{/12/} и при $E_{\text{п}} = 30$ Мэв события бета-распада пиона могут быть надежно выделены.

После введения порога $E_{\text{п}} = 30$ Мэв необходимым временным и амплитудным критериям удовлетворяло 52 события. Уровень фона случайных совпадений мы определили исходя из временных распределений импульсов от черенковских спектрометров и в счетчике 6. Одно из таких распределений приведено на рис. 7. Найденное число случайных $\gamma\gamma - e^+ -$ и $\gamma e^+ - \gamma$ -совпадений оказалось равным 6. Фон, связанный с имитирующим процессом $\mu^+ - e^+$ -распада (с испусканием γ -кванта), был определен на основании фотографий (рис. 8), на которых между импульсами от остановившегося пиона и позитрона был виден импульс от μ^+ -мезона (1 событие). Наконец, следовало ожидать еще 2 фоковых события на основании двух зарегистрированных

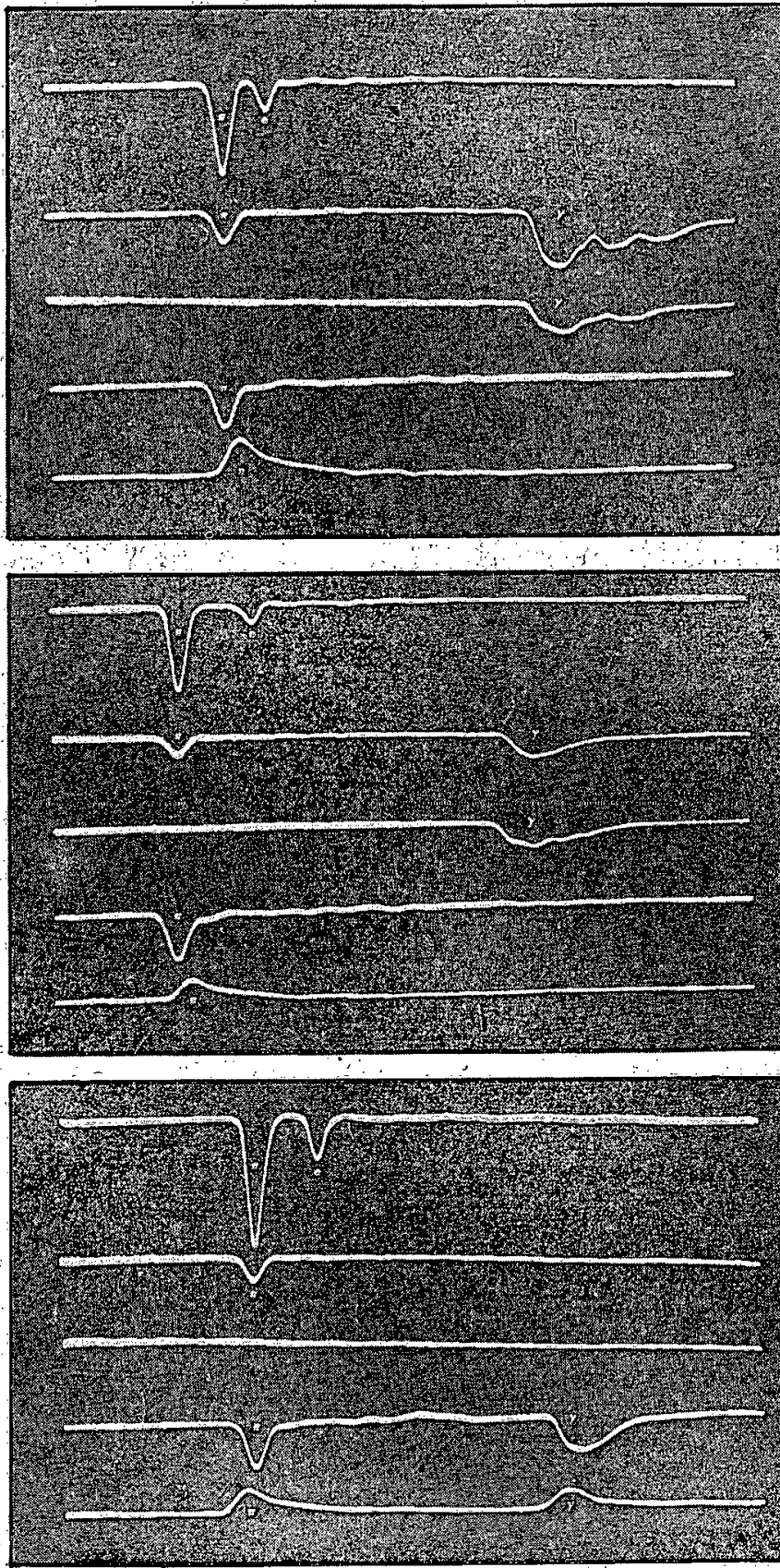


Рис. 5 а, б, в. Типичные фотографии бета-распада пионов. π и γ - те же импульсы, что и на рис.3. e^- - импульсы от позитронов распада.
 $t = 17, 31$ и $25 \cdot 10^{-9}$ сек, соответственно.

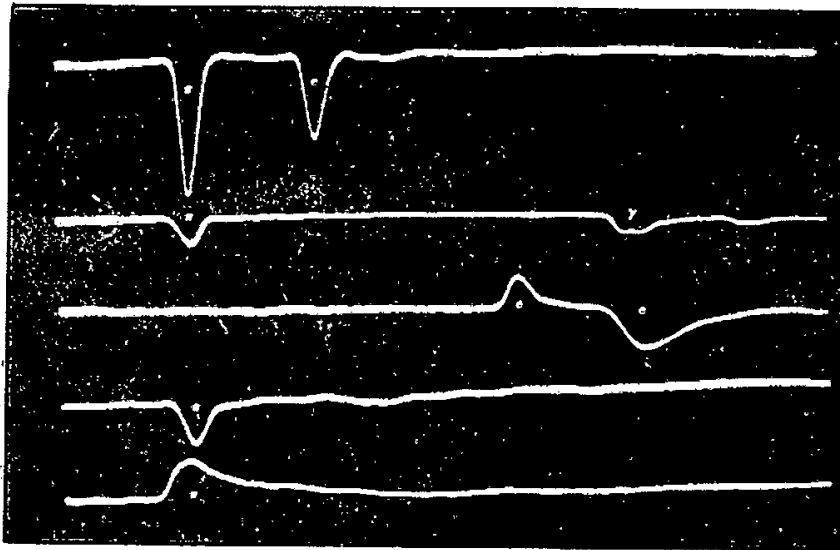


Рис. 6. Фотография радиационного распада $\pi^+ \rightarrow \gamma + e^+ + \nu$, π^- и γ^- те же импульсы, что на рис. 3. e^- - импульсы от позитрона в счетчиках 6 и 8 и в спектрометре.

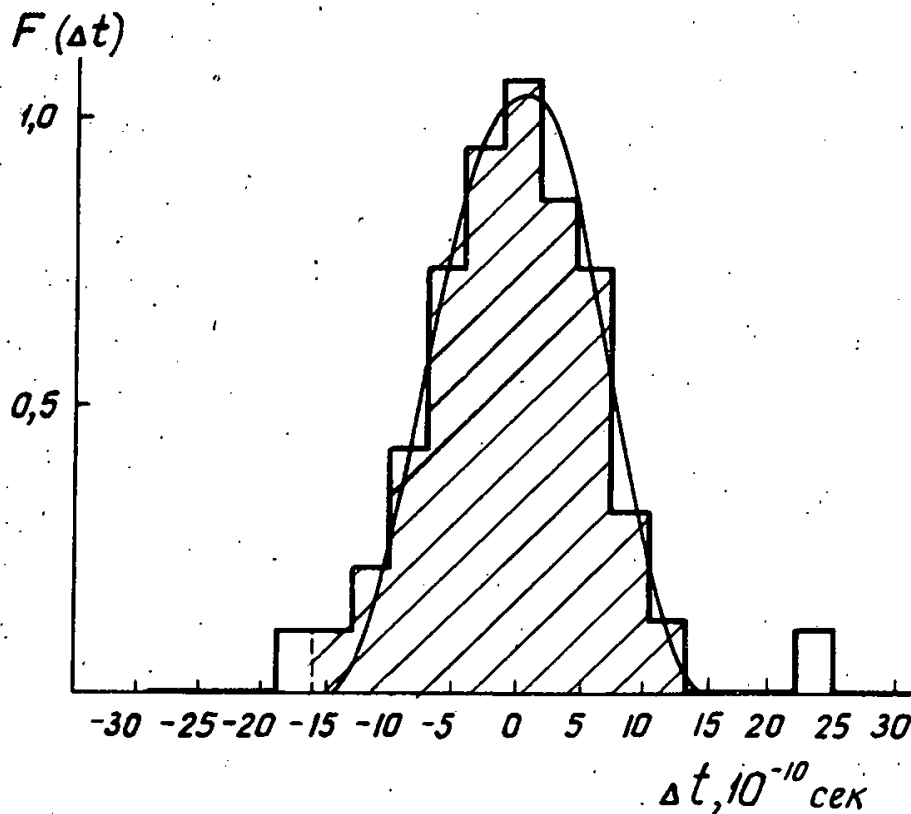


Рис. 7. Временное распределение зарегистрированных событий. Δt - задержка импульса от счетчика 6 (позитрон) относительно импульсов от спектрометров. Кривая - то же распределение, полученное в калибровочных опытах при регистрации перезарядки K^+ -мезонов.

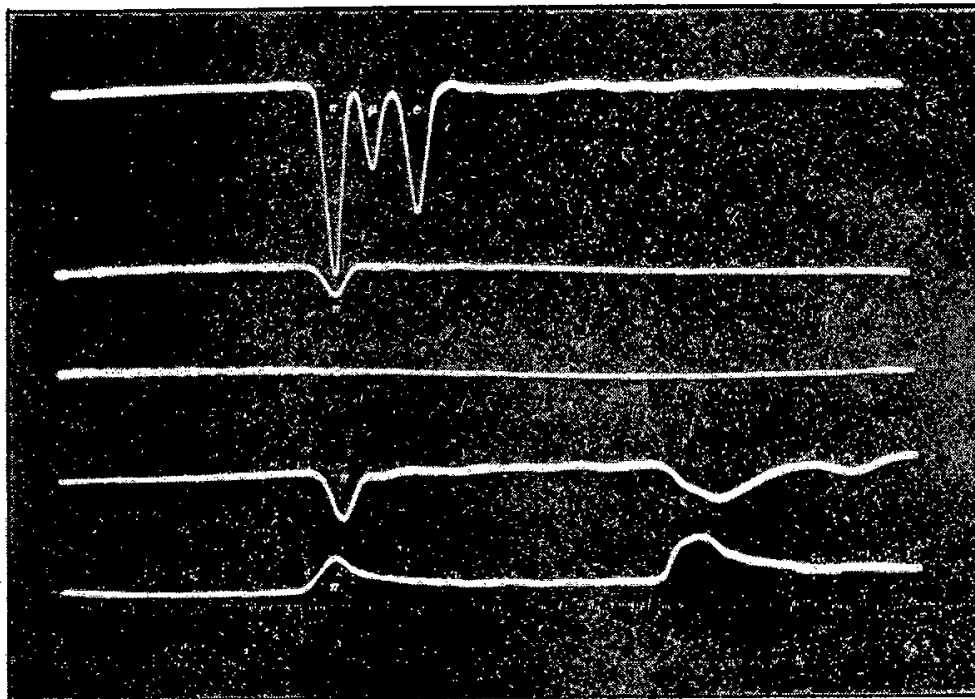


Рис. 8. Фотография одного из случаев, где между импульсами от пиона и позитрона виден импульс от μ^+ -мезона.

случаев со слишком большой амплитудой импульса от позитрона. Общее число фоновых событий получено, таким образом, равным 9. Число зарегистрированных случаев бета-распада пиона N при этом составляет

$$N = 43 \pm 7.$$

4. Результаты измерений

При проведении описываемых экспериментов производилась регистрация совпадений пар γ -квантов, летящих как в противоположные стороны (рис. 3), так и под углом 90° (рис. 9). Образующиеся при распаде (1) γ -кванты разлетаются под углом, близким к 180° . В условиях нашего опыта это должно было приводить к тому, что ожидаемое (с учетом углового разрешения установки) число случаев бета-распада пионов, зарегистрированных противоположными спектрометрами, N_{\parallel} , на порядок величины превышает число случаев, зарегистрированных двумя соседними спектрометрами N_{\perp} : $N_{\perp} / N_{\parallel} = 0,12$. Указанная угловая корреляция действительно имеет место для отображенных событий;

$$N_{\perp} / N_{\parallel} = 0,16 \pm 0,11.$$

При $E_{\pi} = 36$ Мэв $N_{\perp} / N_{\parallel} = 0,05 \pm 0,13$.

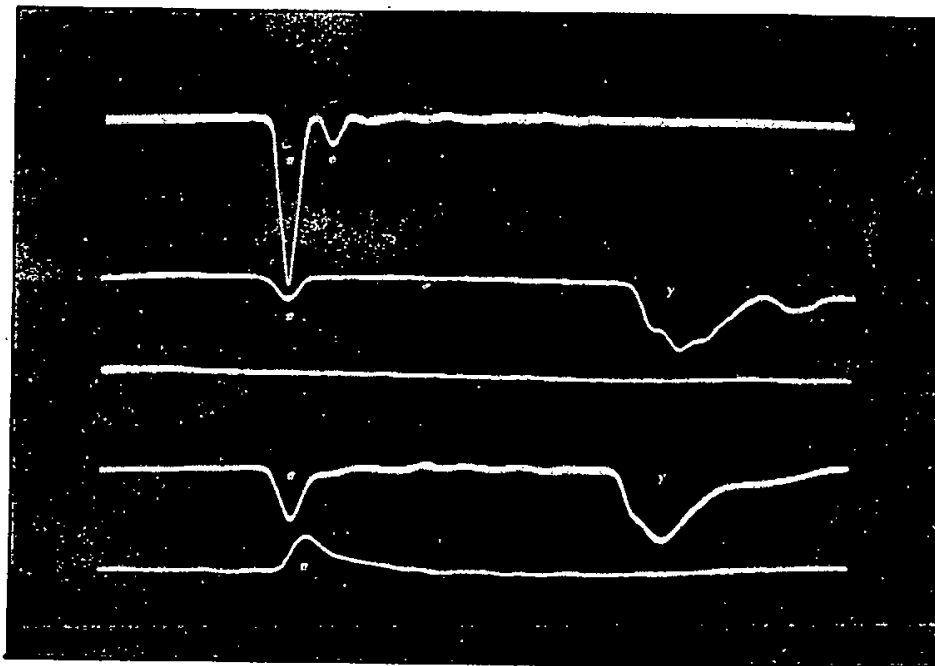


Рис. 9. То же, что и на рис. 5, но γ -кванты зарегистрированы двумя соседними спектрометрами. $t = 15 \cdot 10^{-9}$ сек.

Временное распределение зарегистрированных случаев, представленное на рис. 10, также подтверждает правильность идентификации наблюдавшегося распада. Как видно из этого рисунка, где для сравнения приведено распределение для обычного $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ -распада, среднее время жизни наблюдавшегося распада совпадает со средним временем жизни π^+ -мезона. Амплитудное распределение импульсов в черенковских спектрометрах (энергетический спектр γ -квантов) также близко к ожидаемому для бета-распада пиона (рис. 11).

Энергетический спектр позитронов, образующихся при бета-распаде пионов, приведен на рис. 12. Он совпадает со спектром, вычисленным на основании сохранения векторного тока и исправленным с учетом разрешения счетчика θ .

Вероятность бета распада пиона мы определили, исходя из числа зарегистрированных случаев распада N с учетом экспериментально найденной эффективности установки. Для определения эффективности спектрометры облучались γ -квантами от перезарядки π^- -мезонов в водороде. При этом варьировались место и угол входа γ -квантов в спектрометр. Полученная скорость счета сравнивалась со скоростью счета сцинтилляционных детекторов γ -квантов с известной эффективностью. При определении эффективности установки учитывались сдвиг и конечная длина "ворот" ($10 < t < 85 \cdot 10^{-9}$ сек),

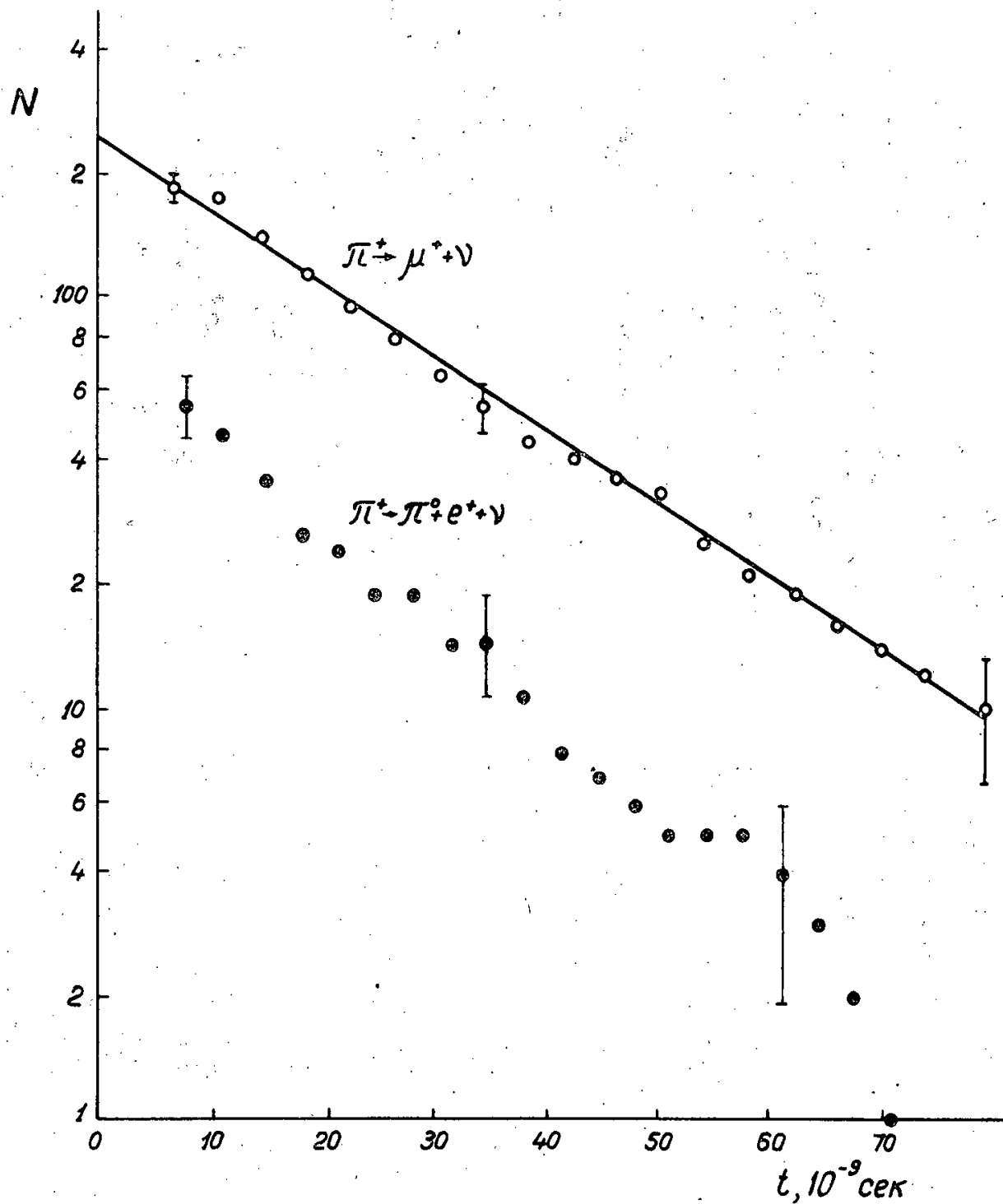


Рис. 10. Интегральное временное распределение, зарегистрированных событий.
● - случаи бета-распада пиона, ○ - распад $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$. Прямая соответствует среднему времени жизни $\tau = 25,5 \cdot 10^{-9}$ сек.

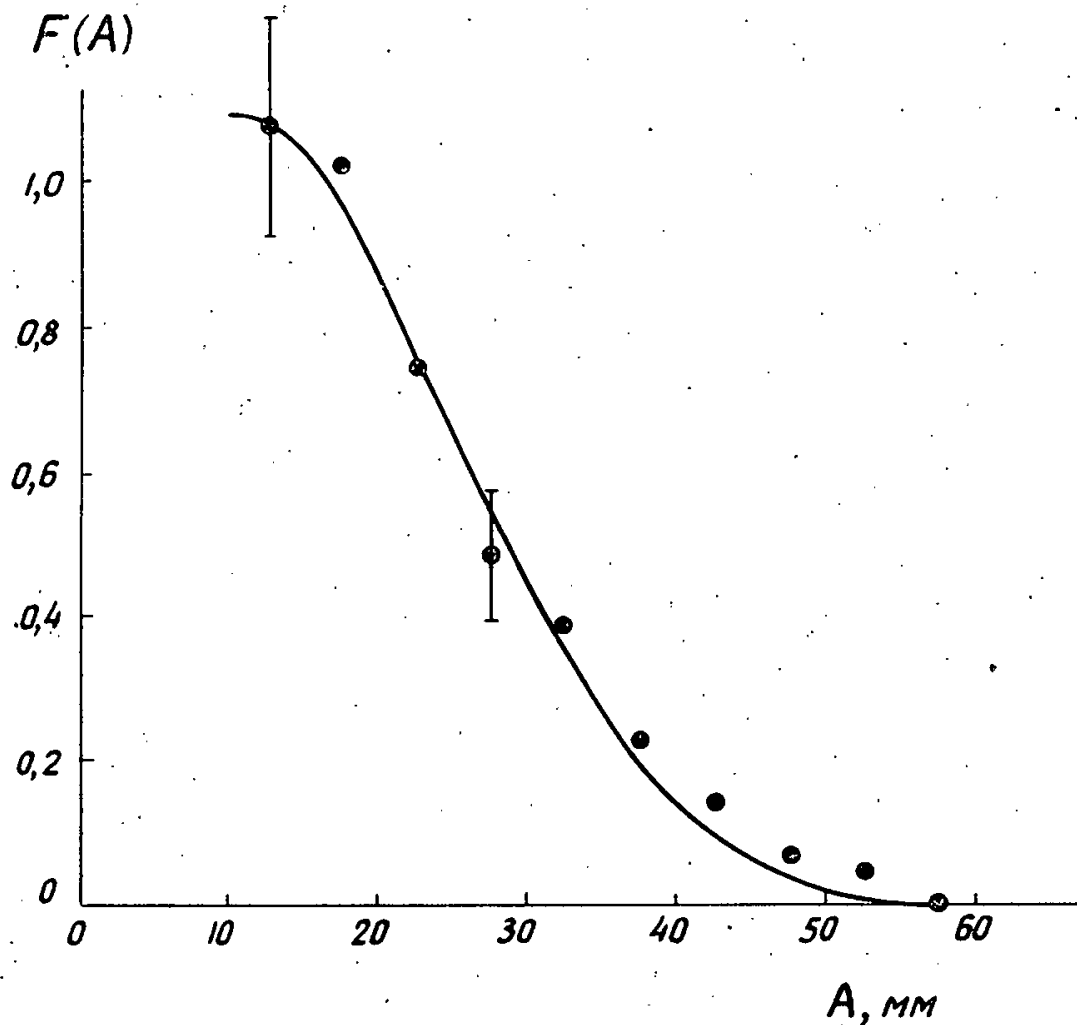


Рис. 11. Интегральное распределение $F(A)$ зарегистрированных событий по амплитудам A импульсов в черенковских спектрометрах. Кривая - то же распределение, полученное в калибровочных опытах при регистрации перезарядки π^- -мезонов.

энергетические пороги для γ -квантов ($E_{\pi} = 30$ Мэв) и позитрона (0,6 Мэв), поглощение γ -квантов в счетчиках 6 и 7 и эффективность просмотра. Эффективность регистрации бета-распада пиона получена равной $(10,5 \pm 1,4)\%$.

Величина относительной вероятности бета-распада пиона найдена равной

$$\lambda = (1,1 \pm 0,2) 10^{-8},$$

что согласуется с теоретически ожидаемым значением. Константа G , характеризующая бета-распад пиона (см. (2)), совпадает с векторной константой G_{β} , характеризующей бета-распад ядер:

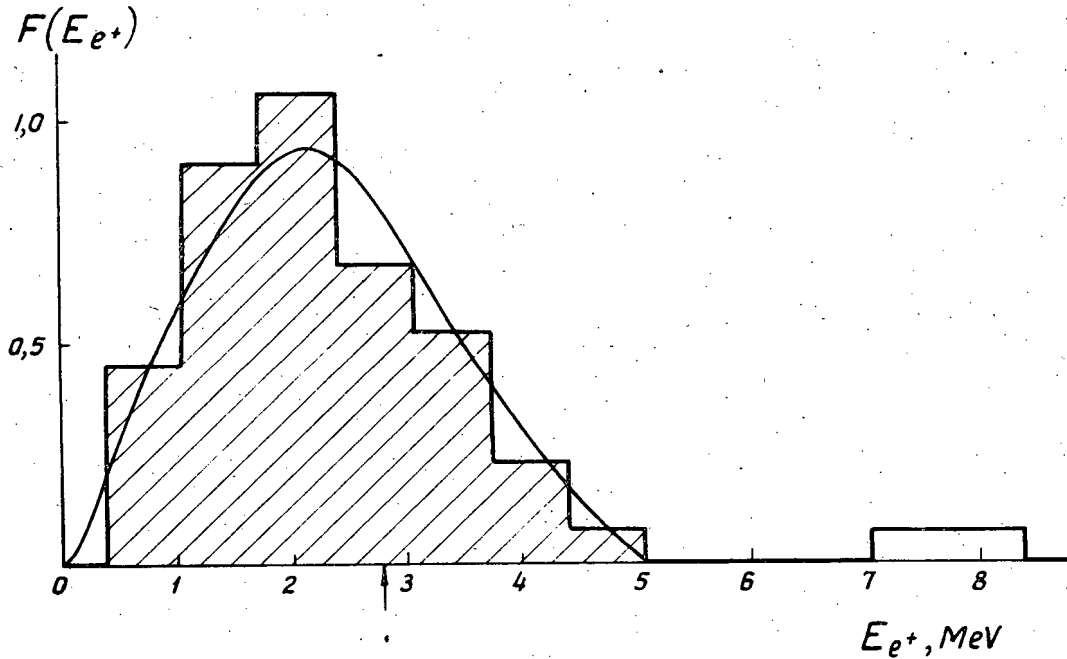


Рис. 12. Энергетический спектр позитронов, образующихся при бета-распаде пионов. Кривая вычислена с учетом разрешения аппаратуры. Стрелкой на шкале энергий позитронов E_{e^+} указано положение максимума распределения импульсов от μ^+ -мезонов в распаде $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$.

$$G = (1,03 \pm 0,11) G_{\beta} .$$

Усредняя данные настоящей работы с результатами, полученными в ЦЕРН^{/18/}, находим

$$G = (1,04 \pm 0,07) G_{\beta} .$$

В заключение пользуемся случаем поблагодарить Г.П.Зорина, В.И.Орехова, А.В.Ревенко, Н.Н.Хованского, В.А.Черных, Л.Н.Андианову и ее сотрудников, Н.Б.Едовину, Н.М.Ковалеву и К.А.Байчера и его сотрудников за помощь в создании аппаратуры и в работе. Мы благодарны Ким Ге Фа, Э.В.Нягу, З.Ф.Прокошкиной и М.Сгоновой за просмотр и обработку фотографий.

Л и т е р а т у р а

1. Я.Б.Зельдович. ДАН СССР, 97, 421 (1954).
2. R.P.Feinman, M.Gell-Mann. Phys. Rev., 109, 193 (1958).
3. С.С.Герштейн, Я.Б.Зельдович. ЖЭТФ, 29, 698 (1955).
4. G.Da Prato, G.Putzolu. Nuovo Cim., 21, 541 (1941).
5. М.В.Терентьев. ЖЭТФ, 44, 1320 (1963).
6. J.V.Czirr. Phys. Rev., 130, 341 (1963).
7. В.И.Петрухин, Ю.Д.Прокошкин. ЖЭТФ, 46, 1737 (1963).
8. А.Ф.Дунайцев, В.И.Петрухин, Ю.Д.Прокошкин, В.И.Рыкалин, ЖЭТФ, 42, 632 (1962); 42, 1423 (1962).
9. A.F.Dunaitsev, V.I.Petrukhin, Yu.D.Prokoshkin, V.I.Rykalin. Phys. Lett., 1, 138 (1962).
10. P.Derommier, J.Heintze, A.Mukhin, C.Rubbia, V.Soergel, K.Winter. Phys. Lett., 2, 23 (1962).
11. R.Bacastov, T.Elioff, R.Larsen, C.Wiegand, T.Ypsilantis. Phys. Rev. Lett., 9, 400 (1962).
12. A.F.Dunaitsev, V.I.Petrukhin, Yu.D.Prokoshkin, V.I.Rykalin. Intern. Conf. on Fundamental Aspects of Weak Interaction. Brookhaven, USA (1963).
13. A.F.Dunaitsev, V.I.Petrukhin, Yu.D.Prokoshkin, V.I.Rykalin. Proc. 1962 Intern. Conf. on Instrum. for High-Energy Physics, p. 252, Geneva, 1963.
14. А.Ф.Дунайцев, В.И.Петрухин, Ю.Д.Прокошкин, В.И.Рыкалин. ПТЭ, 1, 159 /1963/.
15. А.Ф.Дунайцев, Ю.Д.Прокошкин. Дубна, препринт 1415 /1963/.
16. А.Ф.Дунайцев, В.И.Петрухин, Ю.Д.Прокошкин, В.И.Рыкалин. ПТЭ. /в печати/.
17. V.I.Petrukhin, Yu.D.Prokoshkin. Nuovo Cim., 28, 99 (1963); Dubna, preprint E-1471 (1963).
18. P.Derommier, J.Heintze, C.Rubbia, V.Soergel. Phys. Lett., 5, 61 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 февраля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3587. Тираж 410. 0,9 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р. Сараниева Февраль 1964 г.

21



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Ю.К. Акимов, А.И. Калинин, А.И. Сидоров

P - 1526

**КРЕМНИЕВЫЙ СПЕКТРОМЕТРИЧЕСКИЙ СЧЕТЧИК
КАК ЛИНЕЙНЫЙ ДЕТЕКТОР
КОРОТКИХ СВЕТОВЫХ СИГНАЛОВ**

Д у б н а 1964

P - 1526

Акимов Ю.К., Калинин А.И., Сидоров А.И.

Кремниевый спектрометрический счетчик как линейный детектор коротких световых сигналов.

Описываются амплитудно-временные характеристики импульсов, возникающих в кремниевых, компенсированных литием, по-верхностно-барьерных $p-n$ - переходах с широким слоем объемного заряда при воздействии на них световых вспышек длительностью в несколько десятых микросекунды. Рассматривается способ определения координат искры с помощью таких детекторов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1964.

P - 1526

Akimov Yu., Kalinin A.I., Sidorov A.I.

A Silicon Spectrometer Counter as a Linear Detector of Short Light Signals.

The amplitude - time characteristics of the pulses arising in lithium deep drifted - surface barrier silicon $p-i-n$ junctions when affected with light flashes several tenths of a microsecond long are described. A method of determining the spark coordinates with the help of such detectors is considered.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

Ю.К. Акимов, А.И. Калинин, А.И. Сидоров

P - 1528

КРЕМНИЕВЫЙ СПЕКТРОМЕТРИЧЕСКИЙ СЧЕТЧИК
КАК ЛИНЕЙНЫЙ ДЕТЕКТОР
КОРОТКИХ СВЕТОВЫХ СИГНАЛОВ

Дубна 1984

В литературе имеется много работ, посвященных полупроводниковым фотодиодам с диффузионным механизмом собирания электронно-дырочных пар, освобожденных светом.

Основными недостатками таких приборов являются относительная медленность процесса собирания, протекающего в течение микросекунд, и существенная зависимость квантового выхода от длины волны. Квантовый выход резко падает в области коротких длин волн вследствие рекомбинаций в "мертвом" слое диода, а также заметно уменьшается в инфракрасной области, когда глубина поглощения света становится соизмеримой с диффузионной длиной неравновесных носителей.

Появление полупроводниковых детекторов ядерных частиц привело к новым возможностям для регистрации световых сигналов, поскольку фототок таких детекторов обусловлен в основном носителями, образующимися в слое объемного заряда $p-n$ -перехода, где время собирания носителей составляет несколько десятков или даже единиц наносекунд. В работе ^{/1/} описаны свойства диффузионного кремниевых детектора, используемого в качестве фотодиода. Однако наличие в детекторе "мертвого" слоя и недостаточная толщина $p-n$ -перехода и в этом случае явились причиной снижения фоточувствительности прибора в области коротких и длинных волн. Кроме того, указанная работа не содержит характеристик фотодиода для световых сигналов, создающих в $p-n$ -переходе большую концентрацию электронно-дырочных пар, что представляет определенный интерес для практического применения.

В настоящей работе приводятся результаты исследований фотоэлектрических свойств кремниевых детекторов со слоем объемного заряда толщиной около 1 мм и площадью 1,5 - 2 см², практически не имеющих "мертвого" слоя ^{/2/}. Эти детекторы чувствительны к фотонам с длиной волны $\lambda = 300 - 1150$ нм. При этом для образования на выходе детектора заряда, равного одному электрону, расходуется примерно два фотона.

Чувствительность детектора к световым сигналам ограничивается уровнем собственных шумов /а также шумов усилителя/. В частности, полная шумовая "дорожка" применявшегося нами детектора составляла 15000 электронов в области частот 0,5 - 10 мгц. Для сравнения укажем, что шумы промышленного фотодиода типа ФД-2, имеющего площадь всего лишь 1 мм², составляли около 300000 электронов.

Линейность преобразования светового сигнала в электрический исследовалась с помощью искусственной искры, возникавшей в результате пробоя между двумя ост-

риями, к которым прикладывалось высокое напряжение /4 - 5 кв/. При различных расстояниях r от искры измерялась амплитуда импульса i детектора, нагруженного на сопротивление $R_H = 6,5$ ком или непосредственно на кабель РК-150. В последнем случае импульс напряжения в первом приближении совпадал по форме с импульсом тока. Длительность импульса на полувысоте равнялась 0,3 мксек и определялась в основном длительностью искры, поскольку время собирания зарядов в детекторе составляло - 0,03 мксек. Напряжение смещения на детекторе равнялось 150в. Измерения осуществлялись амплитудным анализатором и осциллографом. Результаты измерений представлены в двойном логарифмическом масштабе на рис. 1. Прямые линии, нанесенные на рис. 1, выражают зависимость $i \sim \frac{1}{r^2}$. Эта зависимость достаточно хорошо выполняется в широкой области амплитуд до 70 в при $R_H = 6,5$ ком и до 7в в случае, когда $R_H = 150$ ом. Нелинейность возникла примерно при одном и том же расстоянии между детектором и искрой, независимо от величины нагрузочного сопротивления. При дальнейшем уменьшении r рост импульса фототока резко замедлялся, и он начинал растягиваться в основании вплоть до нескольких микросекунд.

Интересно отметить, что подобная картина наблюдалась также и в случае уменьшенной площади освещения детектора, что указывало на проявление плазменного эффекта в слое объемного заряда.

Поскольку чувствительность анализатора возрастала с увеличением длительности импульса, то измеренный анализатором верхний предел области линейности амплитуд оказался в 1,5 - 2 раза выше, чем в случае наблюдений на осциллографе.

При неперпендикулярном падении света на детектор амплитуда его импульса уменьшалась по закону, представленному на рис. 2. Изменению угла падения α , например, от 0 до 40° соответствовало уменьшение амплитуды импульса на 40%. Снижение амплитуды импульса с ростом α было обусловлено уменьшением телесного угла, "вырезаемого" в пространстве детектором, и увеличением доли света, отраженного от поверхности детектора.

Амплитуда импульса детектора в довольно широкой области практически не зависит от величины напряжения смещения U_c . На рис. 3 приведена характеристика $U = f(U_c)$ для детектора, нагруженного непосредственно на кабель. Эта характеристика, начиная с $U_c = 120$ в, имеет вид горизонтальной прямой, в то время как изменение амплитуды импульса фотодиода ФД-2 составляет 0,5% на 1 в.

Амплитуда импульса кремниевого детектора практически не подвержена влиянию температурных колебаний, что было проверено в области 17 - 55°C. Во всяком случае амплитудная нестабильность в этой области была не более 0,1% на 1°C, между тем как для ФД-2 нестабильность равнялась 0,5% на 1°C.

Стабильность амплитуды импульсов во времени проверялась с помощью дифференциального усилителя, которым регистрировалась разность амплитуд импульсов с двух детекторов, одинаково удаленных от искры. Серия измерений, проведенных в течение двух суток, свидетельствовала об относительном постоянстве амплитуд этих детекторов с точностью, лучшей 1%. Это и не удивительно, так как в опытах с сильно ионизирующими частицами, где использовались подобные детекторы, были получены амплитудные разрешения около десятой процента.

Итак, рассмотренные выше результаты измерений свидетельствуют о том, что кремниевый поверхностно-барьерный детектор с широким слоем объемного заряда является не только хорошим спектрометрическим счетчиком ядерных частиц в широком диапазоне их энергий, но и весьма совершенным быстродействующим фотодиодом, стабильно и линейно преобразующим световые сигналы в электрические с амплитудой вплоть до сотни вольт.

Остановимся на некоторых возможных вариантах практического использования фотоэлектрических свойств кремниевых детекторов.

1. С помощью световых источников удобно проверять и калибровать аппаратуру, в которой ядерные частицы регистрируются полупроводниковыми детекторами. При этом могут быть измерены как амплитудные, так и временные характеристики аппаратуры, если освещать несколько детекторов одновременно.

2. Сочленив полупроводниковый счетчик со сцинтиллятором^{/2/} и поместив последний в пульсирующий пучок частиц ускорителя, можно применить такое устройство для определения интенсивности пучка. При этом используется большая радиационная стойкость сцинтилляторов по сравнению с кремниевыми *p-n*-переходами.

3. Кремниевые детекторы могут быть использованы для определения координат искры^{/5/}.

Чтобы определить положение искры в одномерном случае, необходимо и достаточно измерить отношение амплитуд двух детекторов $U_1 = \frac{A}{x^2}$ и $U_2 = \frac{A}{(\ell - x)^2}$, где ℓ - расстояние между детекторами, x - расстояние от искры до одного из детекторов, A - коэффициент, пропорциональный яркости искры. Если измерять не отношение $\frac{U_1}{U_2}$, а сами значения U_1 и U_2 , то можно получить, кроме x , также и информацию об яркости искры.

Численный пример. Пусть $\ell = 300$ мм. Если искра возникла точно в середине, а затем переместилась на 1 мм, то при этом изменение отношения $\frac{U_1}{U_2}$ составит 2,5%. Предположим теперь, что $x = 30$ мм. В данном случае сдвигу $\Delta x = 1$ мм будет соответствовать $\Delta \frac{U_1}{U_2} = 7,5\%$. Измерять такие различия в настоящее время не является трудной задачей.

Для определения координат искры в плоскости требуется две пары детекторов, расположенных по взаимно перпендикулярным направлениям /см.рис. 4/. При этом учитывается как разброс в яркости искры, так и угловые зависимости в чувствительности детекторов. Если положение искры определяется в прямоугольной секции искровой камеры, то удобнее всего располагать детекторы по углам данной секции.

При измерении координат искры в камере могут возникнуть некоторые осложнения, обусловленные отражением света от электродов камеры, в результате чего появятся соответствующие трудности в описании зависимости амплитуды импульса от положения искры. Эти трудности можно в существенной мере обойти, тщательно прокалибровав камеру с помощью искусственной искры. Как показали измерения, доля отраженного от электродов света, попадающего на детектор, составляет ~ 15%. Влияние отражений в принципе может быть заметно уменьшено, если перед детектором поставить светофильтр, не пропускающий длинноволновую часть спектра, поскольку именно эта часть спектра преобладает в отраженном свете. Кстати сказать, ослабление уровня освещенности детектора в условиях работы обычной искровой камеры все равно необходимо, иначе световые сигналы будут слишком велики и возникнут амплитудные искажения импульсов. Показания детекторов должны обрабатываться соответствующим электронным устройством и подаваться далее на вычислительную машину. В случае одновременного возникновения двух или более искр амплитуда импульсов не удовлетворяет заданным отношениям, и такой случай автоматически исключается.

К достоинствам рассмотренного способа определения координат искры относятся:

1. Большая амплитуда импульсов детекторов, благодаря чему нет надобности в усилителях.
2. Способность детекторов работать в больших магнитных полях.
3. Возможность одновременного измерения яркости искры, что важно для камер, в которых яркость искры зависит от ионизационных потерь регистрируемой частицы.
4. Быстродействие детекторов.

Быстродействие является исключительно важным свойством для предварительного отбора событий, который может быть осуществлен быстрой логической схемой за время ~ 1 мксек с целью последующего запуска других искровых камер^{/4/}.

Следует также отметить, что электронная аппаратура для вывода информации из камеры существенно упрощается, например, когда камера цилиндрическая и требуется измерять только угол вылета частицы из мишени, не интересуясь при этом

зависимостью от азимутального угла. В данном частном случае на каждую секцию камеры достаточно использовать лишь по два детектора, на которые собирается свет с противоположных торцов цилиндров.

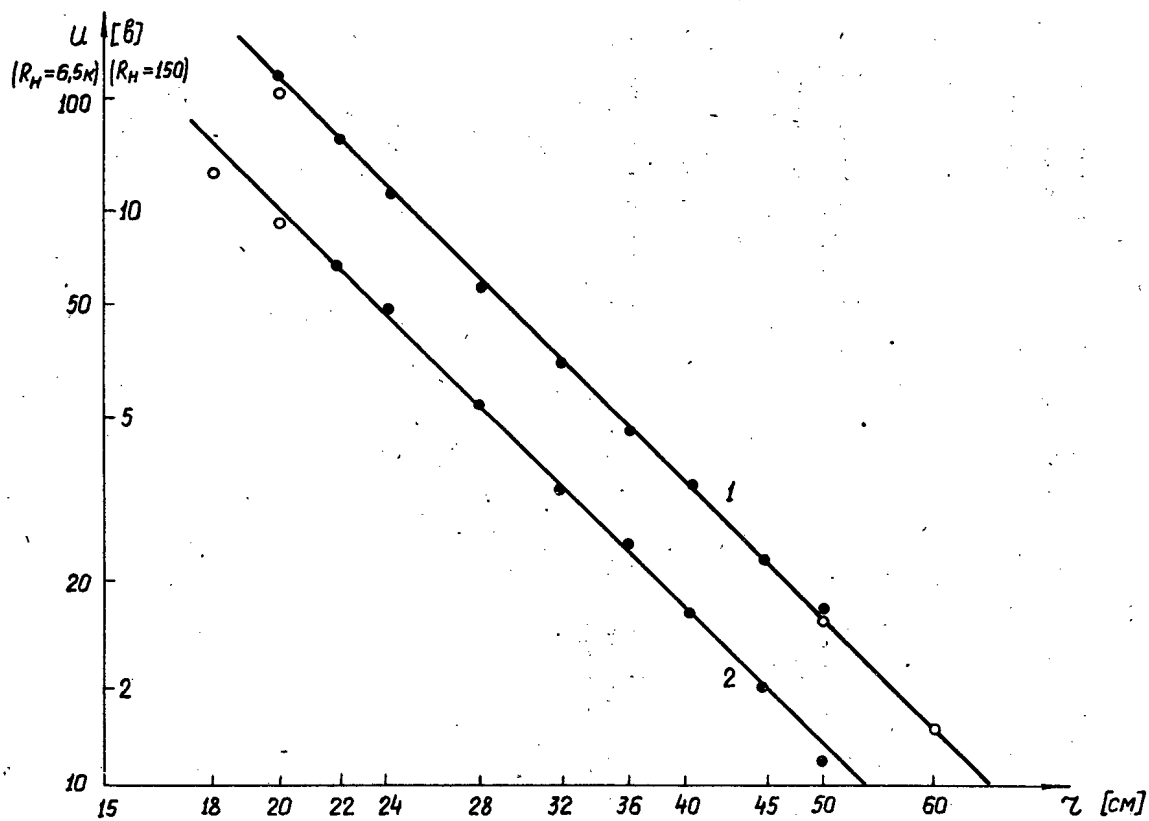
В заключение авторы выражают благодарность В.Ф. Борейко и В.Д. Шейко за техническую помощь в работе. Авторы признательны также А.А. Тяпкину и А.Ф. Писареву за полезные обсуждения вопросов, связанных с искровой камерой.

Л и т е р а т у р а

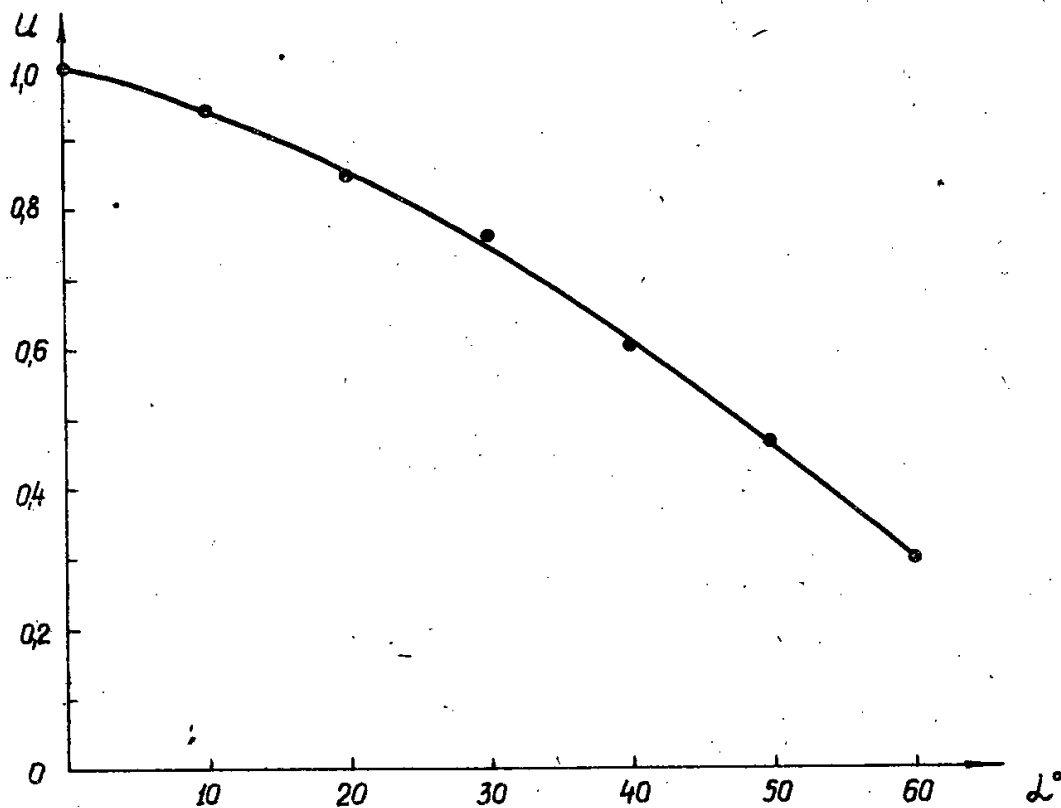
1. R.L. Williams. Journ.Opt.Soc.Am., 52, 1237, 1962.
2. А.И. Сидоров, Вань Цень-ва, Л.П. Сидорова, Л.И. Симонова. Метод получения кремниевых спектрометрических детекторов с широкой областью чувствительного слоя. Регистрационное удостоверение № 35289 с приоритетом 5/IV 1963 г.
3. A.J. Tuzzolino, E.L. Hubbard, M.A. Perkins, C.Y. Fan. Journ. Appl.Phys. 33, 148, 1962.
4. G. Charpak. Nucl.Instr. and Meth., 15, 318, 1962.
5. Ю.К. Акимов, А.И. Калинин, А.И. Сидоров. Определение координат искры с помощью поверхностно-барьерных $p-n$ -переходов с широким слоем объемного заряда. Регистрационное удостоверение № 39298 с приоритетом 26/VII 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел

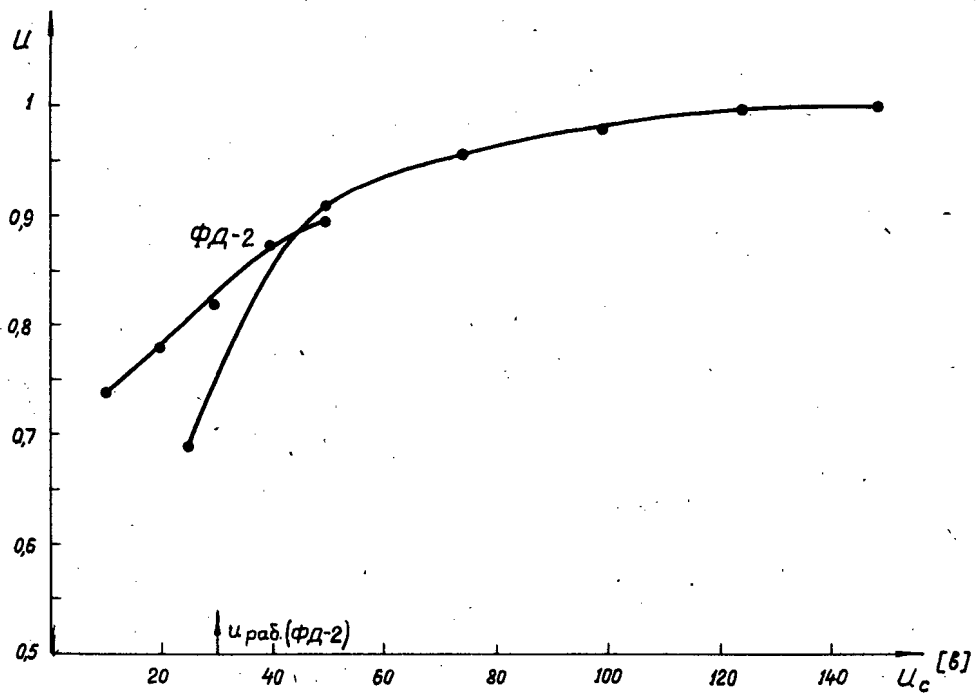
13 января 1964 г.



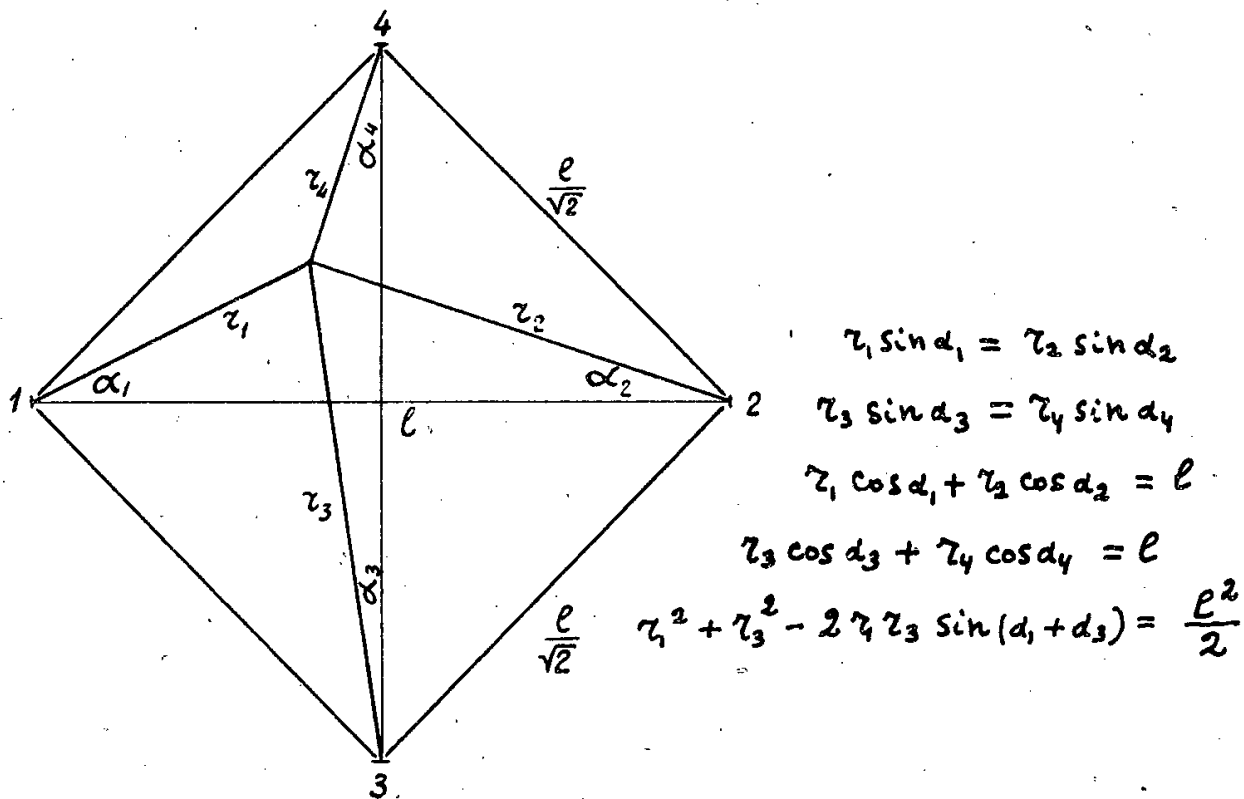
Р и с. 1. Зависимость амплитуды импульса детектора от расстояния до искры:
1 - $R_H = 6,5 \text{ Ом}$, 2 - $R_H = 150 \text{ Ом}$; точки - показания анализатора, кружочки - измерения на осциллографе.



Р и с. 2. Зависимость амплитуды импульса от угла падения света на детектор.



Р и с. 3. Зависимость амплитуды импульса от напряжения смещения на детекторе.



Р и с. 4. К определению координат искры с помощью четырех детекторов.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3527. Тираж 360. 0,7уч.-изд. л.
Техн. ред. Н.Н.Зрелова. Январь 1964 г.

22 STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Л.С. Брыкина, Б.М. Головин, А.П. Ландсман, Б.П. Осипенко, О.П. Федосеева

P - 151

**ДЕЙСТВИЕ ПРОТОНОВ
ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ
НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДЕТЕКТОРЫ
ЯДЕРНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ**

Дубна 1964

P-1516

Брыкина Л.С., Головин Б.М., Ландсман А.П.,
Осипенко Б.П., Федосеева О.П.

Действие протонов высокой энергии на полупроводниковые
детекторы ядерных излучений

Экспериментально изучено действие протонов высокой энергии,
вызывающее повреждение кремниевых поверхностнобарьерных де-
текторов ядерных излучений.

Получены расчетные оценки зависимости некоторых парамет-
ров таких детекторов от продолжительности их пребывания в ра-
диационных поясах Земли.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна . 1964.

P-1516

Brykina L.S., Golovin B.M., Landsman A.P., Osypenko B.P., Fedoseeva O.P.

Effect of High Energy Protons on Semiconductor Detectors of Nuclear Radia-
tions

The effect of high energy protons which causes the damage of the silicon surface
barrier detectors of nuclear radiations has been studied experimentally. The depen-
dence of some parameters of these detectors on the duration of their presence in the
radiation belt of Earth has been estimated theoretically.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

Л.С.Брыкина, Б.М.Головин, А.П.Ландсман, Б.П.Осипенко, О.П.Федосеева

P - 1516

ДЕЙСТВИЕ ПРОТОНОВ
ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ
НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ДЕТЕКТОРЫ
ЯДЕРНЫХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Направлено в журнал
"Космические исследования"

Дубна 1964

Настоящая работа является частью проводимых нами исследований действия протонов высокой энергии на полупроводниковые устройства и содержит предварительное сообщение об изменении некоторых свойств полупроводниковых детекторов при их бомбардировке протонами с энергией около 650 Мэв.

Облучению подвергались образцы поверхностнобарьерных детекторов, изготовленных из кремния n -типа с удельным сопротивлением 200-500 ом·см и разрешением от 1 до 3% при регистрации альфа-частиц с энергией 4,8 Мэв.

При изготовлении детекторов была использована технология, которая будет взята за основу и при серийном выпуске этих приборов.

В ходе опытов изучались зависимости от полученных доз амплитуды импульса, емкостей, энергетического разрешения, величины обратного тока и уровня шумов детекторов.

Всего облучению подверглось 14 образцов. Интенсивность протонного пучка определялась по активации алюминиевой фольги (по реакции $Al^{27}(p,3\alpha)Na^{24}$), устанавливаемой в месте расположения детекторов. Проведенные измерения показали, что интенсивности протонного пучка в разных сеансах облучения менялись от $1,7 \cdot 10^8$ до $6 \cdot 10^8$ протон/см²·сек. Максимальная доза, полученная детекторами в этой работе, близка к $2 \cdot 10^{13}$ протон/см².

Для того, чтобы иметь возможность сравнить наши данные с результатами других авторов^{/1,2/}, полученными при облучении полупроводниковых детекторов нейтронами с энергией 14 Мэв, можно воспользоваться результатами нашей работы^{/3/}. В этой работе энергетическая зависимость поврежденного действия ядерных частиц на кремниевые фотоэлементы рассчитывалась в предположении, что повреждающее действие ядерной радиации определяется количеством энергии, затрачиваемой в образце в единицу времени на образование смещенных атомов.

Согласно результатам этой работы повреждения образцов при облучении нейтронами с энергией T_n и протонами с энергией T_p будут одинаковы в том случае, когда выполняется соотношение

$$D_p(T_p) \cdot W_p(T_p) = D_n(T_n) \cdot W_n(T_n),$$

где D_n и D_p - полученные образцом соответственно нейтронная и протонная дозы; W_n и W_p - повреждающие действия нейтронов и протонов.

Используя это соотношение, можно утверждать, что такие же изменения харак-

теристик образцов, которые наблюдались при получении ими дозы нейтронов D_n , будут иметь место при получении дозы протонов D_p в том случае, если $D_p(T) = \frac{W_n(T_n)}{W_p(T)} D_n(T_n)$. При энергии нейтронов 14 Мэв и энергии протонов 650 Мэв в соответствии с результатами работы^{/3/} это приводит к соотношению

$$D_p(650) \text{ Мэв} = 0,52 \cdot D_n(14 \text{ Мэв}).$$

Изменения характеристик детекторов в результате их облучения иллюстрируются рисунками 1-4, при построении которых, кроме наших данных, усредненных по всем облученным образцам, использованы также результаты работ^{/1,2/}, посвященных нейтронному облучению полупроводниковых детекторов. Полученные данные можно кратко характеризовать следующим образом:

1. Не наблюдается сколько-нибудь заметной разницы в радиационных стойкостях образцов, при изготовлении которых использовалась химическая и электрохимическая полировка поверхности. Такую же радиационную стойкость, как обычные образцы, имеют полупроводниковые детекторы с пленкой окиси олова.

2. Все параметры детекторов довольно слабо меняются при дозах $D_p(650) < 5 \cdot 10^{11} - 10^{12}$ протонов/см². При получении доз, превышающих эту величину, характеристики детекторов начинают меняться с увеличением дозы значительно быстрее.

3. Амплитуда импульсов (см. рис. 1), вырабатываемых счетчиком при стандартном возбуждении (альфа-частицы с энергией 4,8 Мэв), слабо меняется во всем исследованном интервале радиационных доз, причем этот эффект более заметен при работе детектора без смещения ($\Delta u \approx 20-30\%$ при $D_p \approx 10^{13}$ протонов/см²) и практически отсутствует при смещениях 10-15 вольт.

4. Изменения обратного тока детектора (см. рис. 2) оказываются значительно более резкими при малых величинах смещения (0-5 в), чем при больших (20-50 в).

5. Зависимость оптимального отношения $\frac{u \text{ СИГН.}}{u \text{ ШУМ.}}$ от радиационной дозы приведена на рис. 3. Интересно отметить, что смещение, соответствующее оптимальной величине этого отношения, несколько меняется с радиационной дозой.

6. Изменение энергетического разрешения детекторов при их облучении показано на рис. 4. Заметное ухудшение разрешения начинается при дозе $D_p \approx 10^{12}$ протонов/см², и при дозе $1,5-2 \cdot 10^{13}$ протонов/см² это ухудшение разрешения может достигать 250-300%. Смещение, при котором разрешение детектора оказывается наилучшим, также несколько меняется с увеличением полученной образцом дозы. Однако, как и в случае отношения $\frac{\text{СИГН.}}{\text{ШУМ.}}$, при переходе от образца к образцу закономерности этого изменения проследить не удается.

7. Изменение емкости детекторов во всем исследованном интервале радиационных доз было незначительным. Намечившаяся тенденция указывает на некоторое

уменьшение емкости облученных образцов. Сильное уменьшение емкости было отмечено лишь для одного образца, у которого после получения дозы $1,6 \cdot 10^{13}$ значительно ухудшились все его характеристики.

За последние годы в литературе неоднократно поднимался вопрос о целесообразности использования полупроводниковых детекторов при изучении космических лучей. Действительно, портативность, малая потребляемая мощность, высокая разрешающая способность делают настолько привлекательным применение этих приборов в специфических условиях работы на искусственных спутниках Земли, что можно с уверенностью ожидать в будущем все более широкого их использования в космических исследованиях.

Поэтому уже сейчас представляет интерес оценить возможную продолжительность работы и изменение основных свойств полупроводниковых детекторов при их длительном пребывании в радиационных поясах Земли. Для получения таких оценок были использованы методы расчета, описанные в упоминавшейся уже работе^{/3/}, и найденные в настоящей работе экспериментальные данные. При проведении расчетов, как и в^{/3/}, предполагалось, что спектр протонов во внутреннем радиационном поясе приближенно описывается функцией

$$I_p \approx T^{-1,84}, \quad (3)$$

а спектр электронов во внешнем поясе имеет вид, приведенный в работе^{/5/}. Вычисления проводились в предположении, что нижняя граница T_{min} протонного спектра принимает одно из значений $T_{min} = 1$ Мэв; 5 Мэв; 10 Мэв.

Если детектор подвергается одновременному действию протонов со спектром (3) и электронов со спектром^{/5/}, то изменение его параметров при $T_{min} = 5$ Мэв - 10 Мэв будет определяться в основном повреждающим действием электронов. При $T_{min} = 1$ Мэв, наоборот, повреждающим действием электронов можно пренебречь.

Авторы благодарны В.П. Джелепову за постоянный интерес к работе и помощь при ее проведении и Н.Г. Зайцевой за помощь в определении интенсивности протонного пучка.

Л и т е р а т у р а

1. С.А. Матвеев, С.М. Рывкин, Н.В. Строкан. Материалы совещания по полупроводниковым детекторам ядерных излучений (Дубна, апрель 1962 г.), стр.50.
2. R.W. Klingensmith. Trans. IRE. NS-8, No. 1, 112 (1961).
3. Б.М. Головин, А.П. Ландсман, Г.М. Григорьева, Б.П. Осипенко. Препринт ОИЯИ Р-1247, Дубна, 1963.
4. См. например, R. Takali, M. Perkins, A. Tuzzolino. Trans. IRE NS-8, No. 1, 64 (1961).
5. B. J. O'Brien, J. A. Van Allen, C. D. Lauchlin, L. A. Frank. Journ. Geophys. Res., 67, 397 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 декабря 1963 г.

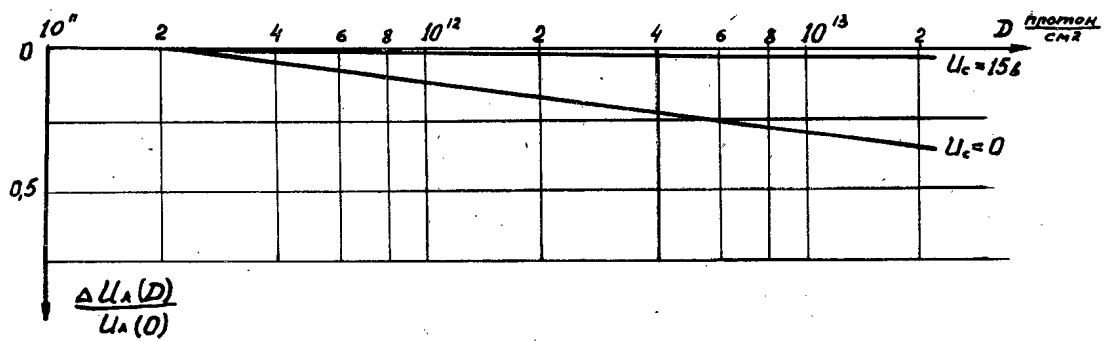


Рис. 1. Зависимость амплитуды импульса, вырабатываемого счетчиком при возбуждении альфа-частицами с энергией 4,8 Мэв от полученной счетчиком радиационной дозы.

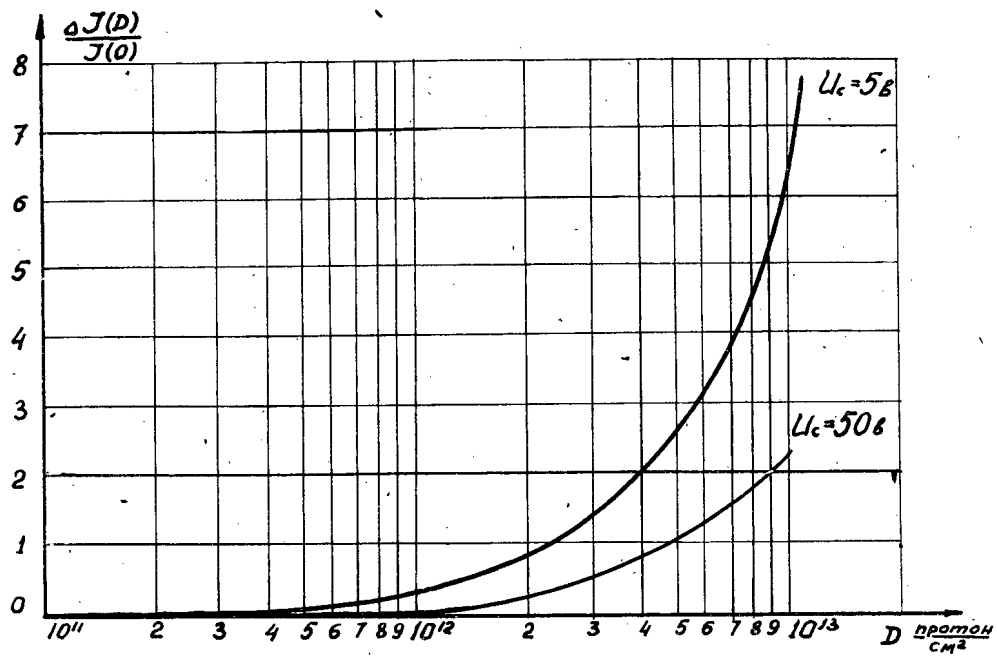


Рис. 2. Зависимость измерения обратного тока детектора от полученной им радиационной дозы.

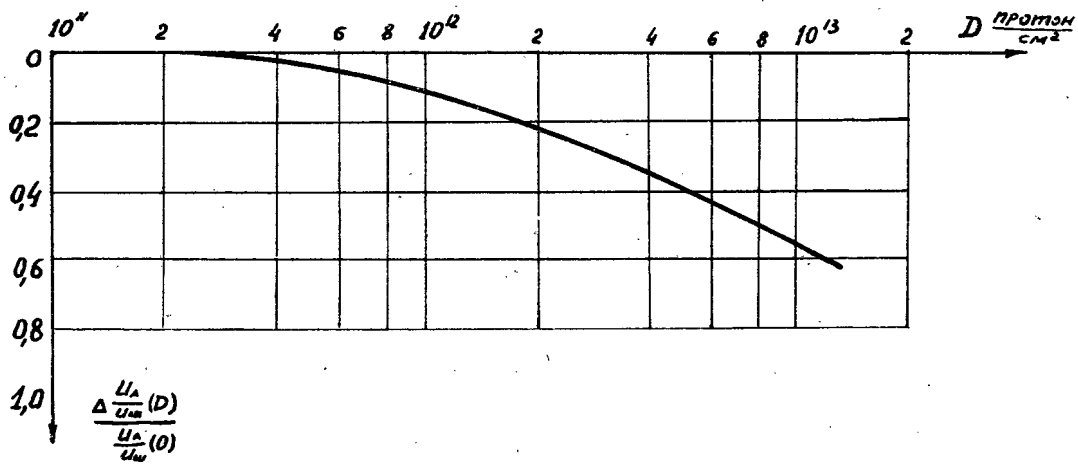


Рис. 3. Зависимость оптимальной величины отношения сигнал от полученной шум счетчиком радиационной дозы.

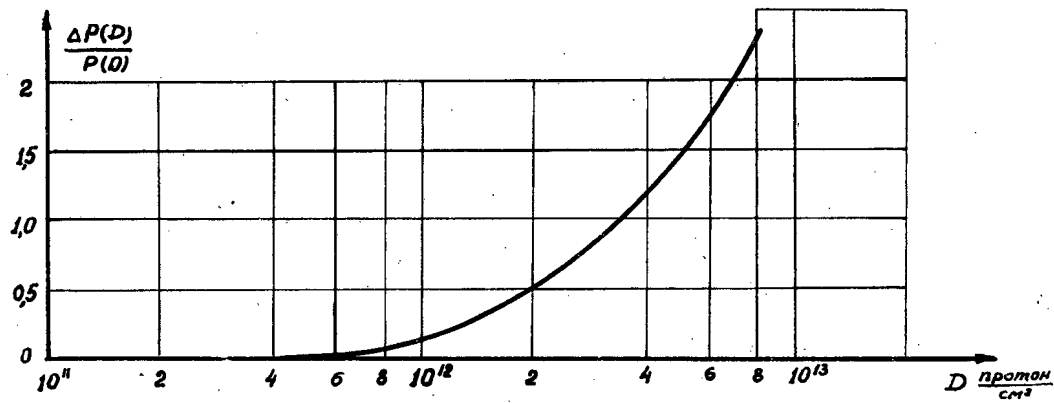


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость энергетического разрешения детектора от полученной им радиационной дозы.

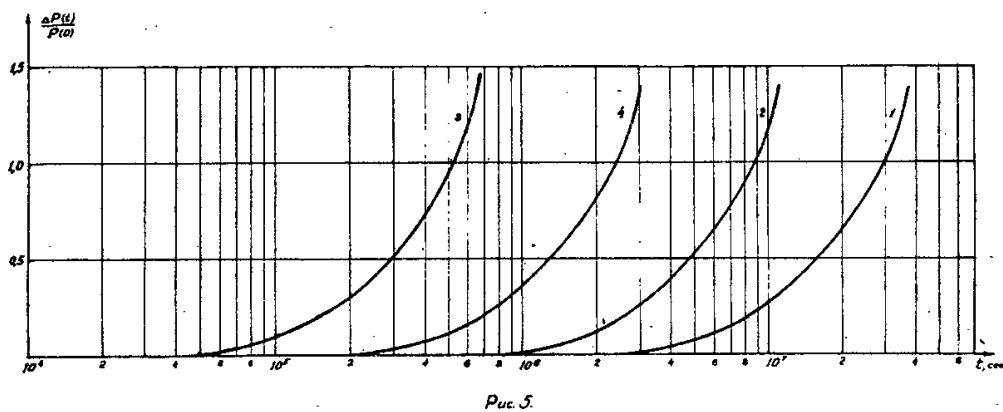


Рис. 5. Зависимость энергетического разрешения детектора от продолжительности его пребывания в зонах максимальной интенсивности радиационных поясов Земли.
1 - действие протонов со спектром /3/ и $T_0 = 10$ Мэв ,
2 - " " " " " " и $T_0 = 5$ Мэв ,
3 - " " " " " " и $T_0 = 1$ Мэв ,
4 - действие электронов со спектром /5/.

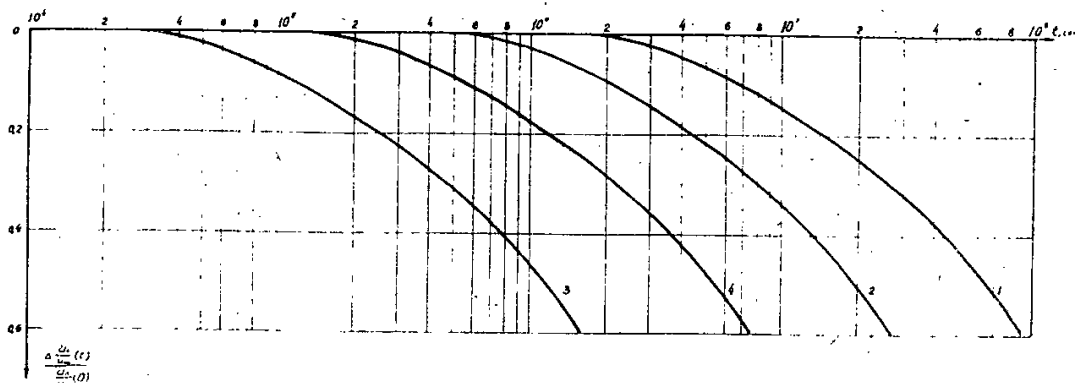


Рис. 6. Зависимость отношения СИГНАЛ от продолжительности пребывания шум

счетчика в зонах максимальной интенсивности радиационных поясов Земли.

- 1 - действие протонов со спектром $^{1/3/}$ и $T_0 = 10$ Мэв,
- 2 - " " " " " " и $T_0 = 5$ Мэв,
- 3 - " " " " " " и $T_0 = 1$ Мэв.
- 4 - действие электронов со спектром $^{1/5/}$..

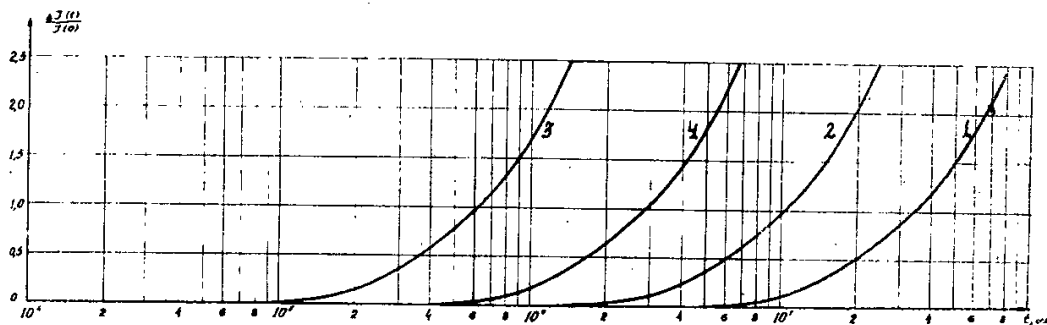


Рис. 7. Зависимость обратного тока счетчика от продолжительности его пребывания в зонах максимальной интенсивности радиационных поясов Земли.

- 1 - действие протонов со спектром $^{1/3/}$ и $T_0 = 10$ Мэв,
 - 2 - " " " " " " и $T_0 = 5$ Мэв,
 - 3 - " " " " " " и $T_0 = 1$ Мэв,
 - 4 - действие электронов со спектром $^{1/5/}$.
- Смещение на детекторе равно 50 в.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3522. Тираж 300. 0,7 уч.-изд. л.
Техн. ред. Н.Н.Зрелова. Январь 1964 г.

СТАТ 3
23



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Смирн

P-1524

НЕУПРУГИЕ ПЕРИФЕРИЧЕСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ
ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Дубна 1964

Смрж П.

P-1524

Неупругие периферические столкновения при сверх-
высоких энергиях

Показано, что в терминах мультипериферической модели постоянство сечений означает и постоянство среднего коэффициента неупругости и поперечного импульса нуклона отдачи. На основе асимптотических значений полных сечений $\sigma_{NN} = 40$ мб и $\sigma_{\pi N} = 22,5$ мб получено $\bar{K} = 0,36$, $\bar{P}_t = 0,47$ Бэв/с в асимптотике. Предложена определенная модель для неупругих $N-N$ взаимодействий при высоких, но конечных энергиях, описывающая рождение двух "файр-болов", которая, кроме величин σ_{NN} и $\sigma_{\pi N}$, не содержит свободных параметров.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Smrž P.

P-1524

Peripheral Inelastic Interactions of Very High Energies.

It is shown that in terms of the multiperipheral model constancy of the cross-sections leads to the constant inelasticity and the constant transversal momenta of the recoil nucleon. From the asymptotic values of the total cross-sections $\sigma_{NN} = 40$ mb and $\sigma_{\pi N} = 22.5$ mb we get $\bar{K} = 0,36$, $\bar{P}_t = 0,47$ GeV/c in the asymptotic region. The definite model for inelastic $N-N$ interactions at high, but finite, energy is suggested, which describes the creation of the two "fireballs" and which contains no free parameters, except σ_{NN} and $\sigma_{\pi N}$.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

П. Смирн

P-1524

НЕУПРУГИЕ ПЕРИФЕРИЧЕСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ
ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

В в е д е н и е

В последнее время указывается, что мультипериферическая модель, предложенная Амати и др.^{/1/}, не может в своей сегодняшней форме удовлетворительно описать неупругие процессы при сверхвысоких энергиях^{/2/}. Именно то предположение, что рассеяние пионов в элементарных вершинах является только низкоэнергетическим (резонансным), кажется наиболее сомнительным. В предлагаемой работе показано, что и без конкретного вида поведения сечений центральных $\pi-\pi$ столкновений можно с помощью модели получить некоторые заключения об асимптотике неупругих процессов. В частности, получена зависимость между поведением полного сечения и поведением поперечного импульса нуклона и коэффициента неупругости в асимптотической области.

1. Мультипериферическая модель

Сумму мультипериферических диаграмм, описывающих $N-N$ и $\pi-N$ взаимодействия, можно представить в виде обычных одномезонных диаграмм (рис. 1), где в одной из вершин возникает только нуклон или $\pi-N$ резонанс^{/3/}. Не учитывая зависимость центральных сечений от Δ^2 , можно писать:

$$\sigma_{NN}^{(1)}(U) = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 U^2} \int d\mathbf{w}_r d\mathbf{w} d\Delta^2 p_{\mathbf{w}_r} w_r^2 \sigma_{\pi N}^r(\mathbf{w}_r) p_{\mathbf{w}} w^2 \sigma_{\pi N}(\mathbf{w}, \Delta^2) \frac{1}{(\Delta^2 + \mu^2)^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{\pi N}^{(2)}(U) = \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{p^2 U^2} \int d\mathbf{w} d\Delta^2 p_{\mathbf{w}} w^2 \sigma_{\pi N}(\mathbf{w}, \Delta^2) \frac{\Delta^2 F(\Delta^2)}{(\Delta^2 + \mu^2)^2}, \quad (2)$$

$$\sigma_{\pi N}^{(1)}(U) = \frac{2}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 U^2} \int d\mathbf{w}_r d\mathbf{w} d\Delta^2 p_{\mathbf{w}_r} w_r^2 \sigma_{\pi N}^r(\mathbf{w}_r) p_{\mathbf{w}} w^2 \sigma_{\pi\pi}(\mathbf{w}, \Delta^2) \frac{1}{(\Delta^2 + \mu^2)^2}, \quad (3)$$

$$\sigma_{\pi N}^{(2)}(U) = \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{p^2 U^2} \int d\mathbf{w} d\Delta^2 p_{\mathbf{w}} w^2 \sigma_{\pi\pi}(\mathbf{w}, \Delta^2) \frac{\Delta^2 F(\Delta^2)}{(\Delta^2 + \mu^2)^2}, \quad (4)$$

где $F(\Delta^2)$ - формфактор нуклона и $\sigma_{\pi\pi}(\mathbf{w}, -\mu^2)$ является полным сечением $\pi-\pi$ взаимодействия при энергии w и $\sigma_{\pi N}(\mathbf{w}, -\mu^2) \equiv \sigma_{\pi N}(w)$ - полным сечением $\pi-N$ взаимодействия. Зависимость этих сечений от Δ^2 получается, если в диаграммах

типа рис. 1 заменим квадрат массы первичного пиона на $-\Delta^2$. Тогда нижний и верхний предел интеграции по передаче импульса растет при увеличении Δ^2 и таким образом из-за своей периферичности $\sigma(w, \Delta^2)$ всегда убывает с ростом Δ^2 . Для каждой мульти-периферической диаграммы с определенным числом элементарных вершин зависимость от Δ^2 исчезает при $w \rightarrow \infty$. Поэтому желательно исследовать асимптотические свойства формул (1), (2), (3) и (4) при предположении, что такое свойство остается и после суммирования диаграмм, то есть что

$$\sigma(w, \Delta^2) \xrightarrow{U \rightarrow \infty} \sigma(w, -\mu^2). \quad (5)$$

2. Асимптотические свойства

Предполагая отсутствие зависимости $\sigma(w, \Delta^2)$ от Δ^2 , в асимптотике можно в формулах (1), (2), (3) и (4) интегрировать по Δ^2 . Аппроксимируя формфактор нуклона скачком

$$F(\Delta^2) = 1 \quad (\Delta^2 < \Delta_0^2),$$

$$F(\Delta^2) = 0 \quad (\Delta^2 > \Delta_0^2),$$

мы получим, что в асимптотике

$$\sigma_{NN}^{(1)}(U \rightarrow \infty) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 U^2} \int p_w w_r^2 \sigma_{\pi N}^2(w_r) dw_r \int_0^{U^2} d(w^2) \frac{(U^2 - w^2) w^2}{w^2(w^2 - m^2) + \frac{w^4 m^2}{U^2}} \sigma_{\pi N}(w, -\mu^2) \quad (6)$$

$$\sigma_{NN}^{(2)}(U \rightarrow \infty) = \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{4p^2 U^2} \int_0^{U^2} w^2 \sigma_{\pi N}(w, -\mu^2) \left\{ \lg \frac{\Delta_0^2 + \mu^2}{\Delta_{min}^2 + \mu^2} - \frac{\mu^2}{(\Delta_0^2 + \mu^2)(\Delta_{min}^2 + \mu^2)} \right\} d(w^2) \quad (7)$$

где

$$\Delta_{min}^2 = m^2 \frac{w^4}{U^2(U^2 - w^2)},$$

и эквивалентные соотношения между $\sigma_{\pi N}$ и $\sigma_{\pi\pi}$. Видно, что в этом случае предположение $\sigma_{\pi\pi}(w \rightarrow \infty) \rightarrow const$ приводит к постоянству $\sigma_{\pi N}$ и σ_{NN} в асимптотике. Кроме того, можно с помощью формул

$$P = \frac{U^2 + m^2 - w^2}{2U}, \quad (8)$$

$$\Delta^2 = \frac{U}{2P} \left(P^2 + m^2 \frac{(U - 2P)^2}{U^2} \right) \quad (9)$$

получить, например, из (2), распределение поперечного импульса нуклона P , и энергии нуклона отдачи P_0 в системе центра масс:

$$\frac{\partial \sigma_{NN}^{(2)}}{\partial P_0} \approx \frac{w^2}{U^3} \left\{ I g \frac{\Delta_0^2 + \mu^2}{\Delta^2 + \mu^2} - \mu^2 \frac{\Delta_0^2 - \Delta_{min}^2}{(\Delta_0^2 + \mu^2)(\Delta_{min}^2 + \mu^2)} \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{NN}^{(2)}}{\partial P_t} \approx P_t \int \frac{U \cdot 2P}{P} \frac{\Delta^2 F(\Delta^2)}{(\Delta^2 + \mu^2)^2} dP. \quad (11)$$

Подобные формулы получаются из (1) и (3), (4). Из (10) и (11) видно, что распределения величин P_0/U и P_t являются непеременимыми в асимптотике, а это означает постоянство среднего значения коэффициента неупругости и среднего поперечного импульса нуклона. Таким образом, в случае постоянных сечений и неупругости, и поперечный импульс являются постоянными, и на основе отношения $\sigma_{NN} / \sigma_{\pi N}$ можно в данном случае вычислить их средние асимптотические значения. Формула (6) ведет с учетом пяти πN резонансов к значению

$$\sigma_{NN}^{(1)} = 0,44 \sigma_{\pi N}. \quad (12)$$

Поскольку $\sigma_{NN} / \sigma_{\pi N} = 40/22,5 = 1,78$, то можно утверждать, что

$$\sigma_{NN}^{(2)} = 1,34 \sigma_{\pi N} \quad (13)$$

чему соответствует $\Delta_0^2 = 1,75 \text{ Бэв}^2$. Для средних значений коэффициента неупругости и поперечного импульса нуклона получается $\bar{K} \equiv \frac{U - 2P_0}{U} = 0,36$ и $\bar{P}_t = 0,47 \text{ Бэв/с}$. Уменьшение отношения $\sigma_{NN} / \sigma_{\pi N}$ уменьшает и значение обеих величин.

Следует отметить, что учет зависимости $\sigma_{\pi N}^*(w)$ от Δ^2 и замена предположения (5) на более слабое

$$\sigma(w, \Delta^2) \xrightarrow{w \rightarrow \infty} \sigma(w, -\mu^2) f(\Delta^2), \quad f(\Delta^2) \neq 1, \quad (14)$$

мало изменяет результаты расчета. Действительно, такое изменение зависимости подынтегральной функции в (6) означает изменение коэффициента в отношении (12). Рассмотрим крайний случай, когда этот коэффициент равен нулю. Тогда $\sigma_{NN}^{(2)} = 1,78 \sigma_{\pi N}$ и $\Delta_0^2 = 2,7 \text{ Бэв}^2$. Обрезание у Δ_0^2 означает здесь приближенный учет не только фактора, а всей зависимости подынтегральных функций от Δ^2 . В этом случае получим средние значения $\bar{K} = 0,4$ и $\bar{P}_t = 0,55 \text{ Бэв}$.

3. Двухцентровая модель

Из приведенных выше соображений видно, что $N-N$ взаимодействия при сверхвысоких энергиях можно представить в виде диаграмм на рис. 2 и диаграмм такого же типа, где нуклоны в конечном состоянии заменены резонансами. Поскольку ничего неизвестно о поведении центральных $\pi-\pi$ взаимодействий нельзя среднюю вершину полностью разлагать на элементарные вершины. Для больших, но конечных энергий можно представить $\pi-\pi$ столкновения в виде двухвершинной одномезонной диаграммы (рис. 3), где требование постоянства полного сечения в асимптотике означает, что сечения в вершинах такой диаграммы уменьшаются при $w \rightarrow \infty$ как $\sigma(w) = k/w$. Константа k определяется асимптотическим значением сечения $\pi-\pi$ взаимодействия. Для $\sigma_{\pi\pi} = 12,5$ мб (что соответствует $\sigma_{NN} / \sigma_{\pi N} = \sigma_{\pi N} / \sigma_{\pi\pi} = 1,78$ и $\sigma_{NN} = 40$ мб) получается $k = 27,5$ мб Бэв. Таким образом, возникает определенная модель, где диаграммы типа рис. 3 описывают процесс рождения двух "файрболлов" и которая, кроме асимптотических значений σ_{NN} и $\sigma_{\pi N}$, не содержит других свободных параметров.

З а к л ю ч е н и е

В заключении хотим подчеркнуть, что в терминах мультипериферической модели асимптотическое поведение сечений связано с поведением коэффициента неупругости и поперечного импульса нуклона. Постоянство сечений означает постоянство этих двух величин, и значения $\sigma_{NN} = 40$ мб, $\sigma_{\pi N} = 22,5$ мб ведут к разумным значениям $\bar{K} = 0,36$, $\bar{P}_t = 0,47$ Бэв. Однако для точных расчетов мультипериферических диаграмм при конечных энергиях нужно знать сечения центральных $\pi-\pi$ столкновений. Поскольку для этого пока нет ни теоретических, ни экспериментальных данных для вычислений можно лишь использовать модели с заданным числом $\pi-\pi$ вершин. Наиболее привлекательной является модель с двумя вершинами, которая может описывать процесс рождения двух "файрболлов" и которая не содержит свободных параметров, если известны асимптотические значения σ_{NN} и $\sigma_{\pi N}$.

Автор выражает благодарность В.С. Барашенкову, Д.И. Блохинцеву и П. Шурани за ценные дискуссии и критические замечания.

Л и т е р а т у р а

1. D. Amati, G. Fubini, A. Stanghellini, M. Tonin. Nuovo Cim., 22, 569 (1961) 1.
2. Z. Koba, A. Krzywicki. Nucl. Phys., 46, 485 (1963).
3. F. Salzman. Phys. Rev., 131, 1786 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1964 г.

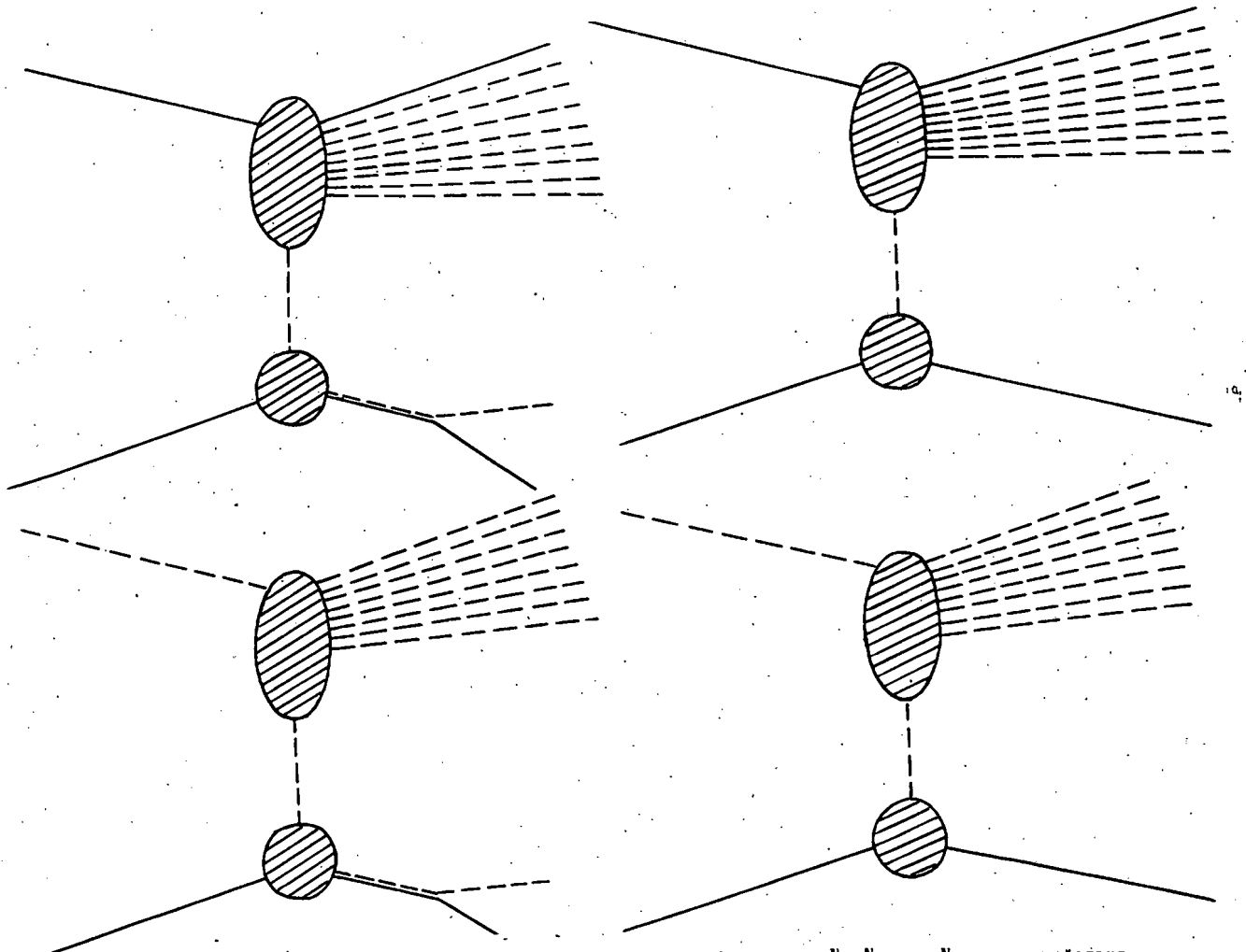


Рис. 1. Диаграммы, описывающие периферические $N-N$ и $\pi-N$ взаимодействия при сверхвысоких энергиях.

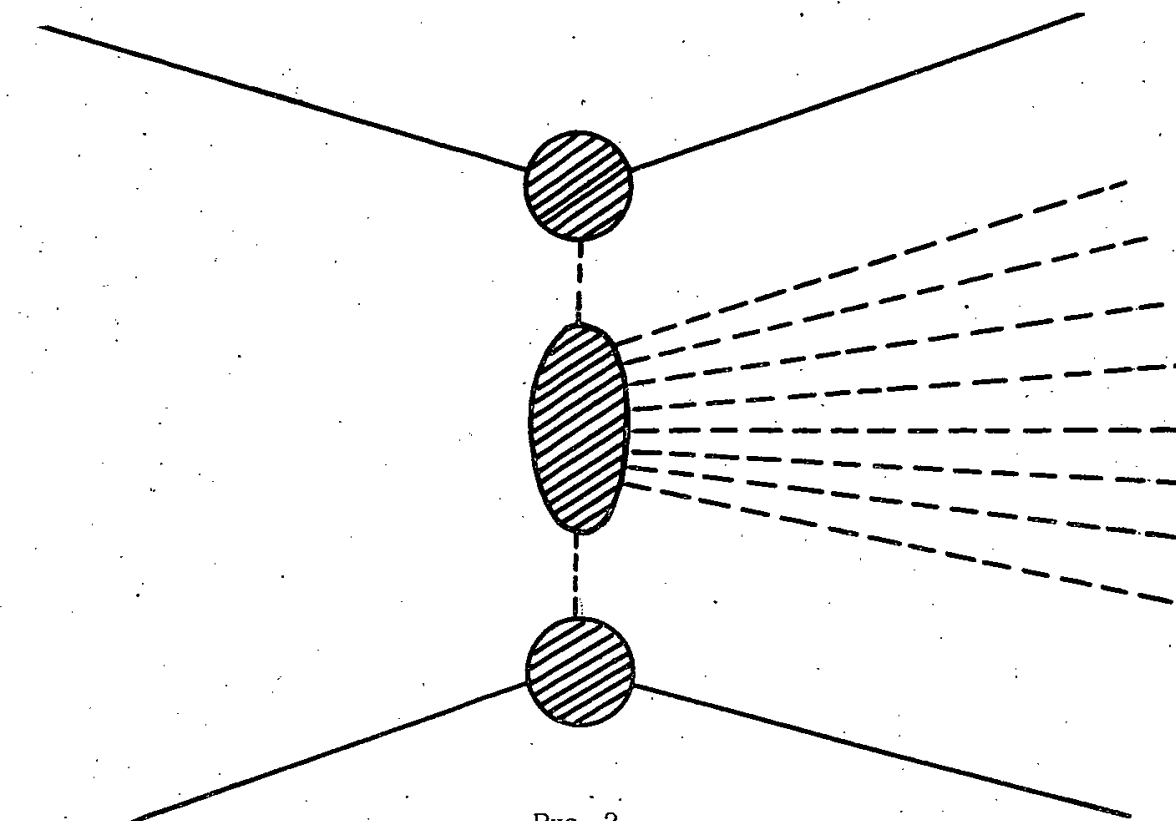


Рис. 2.

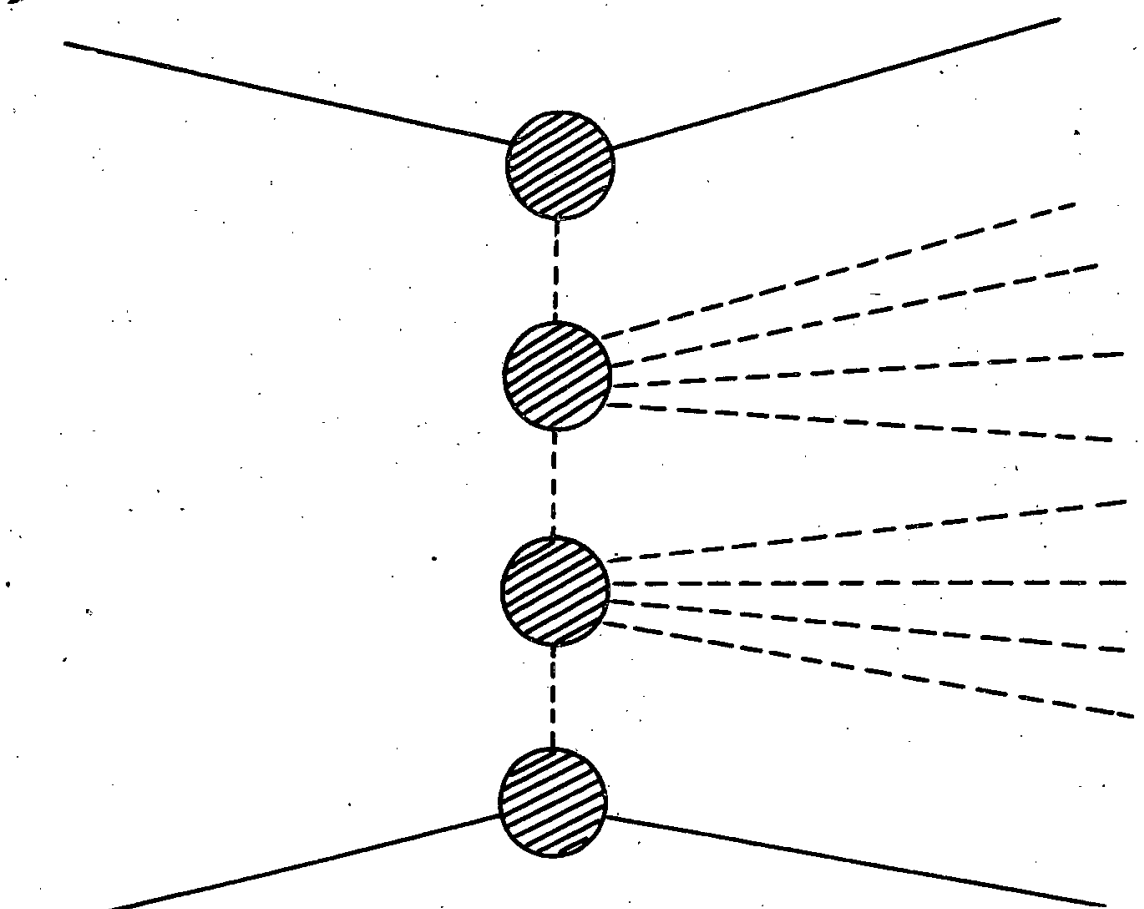


Рис. 3.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3567. Тираж 400. 0,5 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. Февраль 1984 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Ю.М. Казаринов, В.С. Киселев, В.И. Сатаров

P-1553

ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ
НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЙЯНИЯ
ПРИ ЭНЕРГИИ 23,1 МЭВ

Дубна 1964

Казаринов Ю.М., Киселев В.С., Сатаров В.И.

P-1553

Фазовый анализ нуклон-нуклонного рассеяния при энергии 23,1 Мэв

Выполнен фазовый анализ данных по $n-p$ и $p-p$ -рассеянию при энергии 23,1 Мэв. Найдено, что число решений с положительным 1S_0 -фазовым сдвигом, удовлетворительно описывающих экспериментальные данные, не превышает трех. Во всех найденных наборах фазовых сдвигов параметр смешивания ϵ_1 и фазовый сдвиг 3D_1 -волны определяются очень плохо. Для надежного определения указанных параметров, по-видимому, чрезвычайно интересно было бы проведение экспериментов по измерению коэффициентов корреляции поляризаций.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна . 1964 .

Kazarinov Yu.M., Kiselev V.S., Satarov V.I.

P-1553

A Phase Shift Analysis of Nucleon-Nucleon Scattering at 23.1 MeV

A phase shift analysis of $n-p$ and pp data at 23.1 MeV was performed. It was found that the number of solutions with a positive 1S_0 which give a good description of the experimental data does not exceed three. In all the found sets of the phase shifts the mixing parameter ϵ_1 and the phase shift of the 3D_1 -wave are determined very badly. For a reliable determination of the above parameters it would be extremely interesting to do experiments on measurement of spin correlations.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964 .

Ю.М. Казаринов, В.С. Киселев, В.И. Сатаров

P-1553

ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ
НУКЛОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ
ПРИ ЭНЕРГИИ 23,1 МЭВ

Дубна 1964

Ранее авторами была прослежена энергетическая зависимость фазовых сдвигов первого набора до энергии 23,1 Мэв. При этом предполагалось, что для этой энергии взаимодействие в 1D_2 , 3D_2 , 3D_3 - и более высоких состояниях удовлетворительно описывается одномезонным приближением^{/1/}. Появление новых данных о дифференциальных сечениях упругого $p-p$ -рассеяния^{/2/} дало возможность провести фазовый анализ при энергии 23,1 Мэв по более полной программе.

Обработанные экспериментальные данные приведены в таблице 1. Процедура поиска решений подробно описана ранее в работе^{/3/} и поэтому здесь не приводится. Результаты поиска решений со случайных начальных условий даны в таблице 2, найденные наборы фазовых сдвигов - в таблице 3.

Т а б л и ц а № 1

Эффективная энергия Мэв	Измеренная величина	Число точек	Энергия, при которой велась измерения Мэв	Литерат. источник
23,1	σ_{pp}	11	25,63 испр.	4
	R_{pp}	1	27,4	5
	σ_{pr}	23	22,5-27,5 интер.	6
	σ_{pr}	12	22,5 испр.	2
	R_{pr}	6	23,1	7
	σ_{pr}	1	20	8

Обозначения: интер.- использованы интерполированные значения сечений.

испр. - исправлено по отношению сечений на угле 90° на основании данных при $T = 25,63$ и $21,9$ Мэв для σ_{pp} и по полному сечению для σ_{pr}

Т а б л и ц а № 2

ℓ_{max}	χ^2	Число поисков со случ. точек	Номер решения	χ^2	Примечание
			1	35	Повторилось 2 раза
2	32	80	2	36	Повторилось 2 раза
			3	35	Повторилось 4 раза

Т а б л и ц а № 3

Фазовые сдвиги волны в градусах (параметризация Стаппа)

	Набор 1	Набор 2	Набор 3	/12/	/11/
f^2	0,019±0,05	0,017±0,04	0,016±0,04	0,08 (фиксировано)	
1S_0	52,71±0,40	49,83±1,55	52,56±0,46	51	47,5
3S_1	102,39±5,81	103,06±4,53	82,61±3,30	86,5	81,3
3P_0	2,18±2,46	-10,05±2,44	6,73±1,73	7,3	9,2
1P_1	2,30±1,06	-2,16±0,03	2,39±0,85	-4,6	4,5
3P_1	-1,01±1,47	5,68±1,85	0,13±1,02	-4,53	-5,7
3P_2	2,22±0,16	1,66±0,85	0,47±0,19	1,66	2,5
ϵ_1	4,30±7,66	-0,24±69,4	67,42±3,56	1,8	1,95
3D_1	4,82±6,51	-5,73±4,33	15,16±6,34	-2,12	2,6
1D_2	0,76±0,19	-0,42±0,39	0,81±0,12	0,57	0,3
3D_2	7,34±3,94	7,37±3,64	7,31±3,92	2,8	3,7
3D_3	+0,21±3,30	-0,39±1,24	-0,39±0,24	0	0,17
χ^2	35	36	35		

Все три найденные решения имеют практически равные значения χ^2 . Интересно заметить, что в интервале $\bar{\chi}^2 \leq \chi \leq 1,5 \bar{\chi}^2$ было найдено всего три решения с положительными значениями фазового сдвига 1S_0 -волны. При этом набор 3 (табл. 3) имеет слишком большую величину параметра смешивания ϵ_1 , а набор 2 отрицательное значение 3P_0 - фазового сдвига. Это заметно противоречит предположению о монотонности энергетической зависимости фазовых сдвигов для наиболее вероятного фазового набора, найденного при анализе нуклон-нуклонного рассеяния в области высоких энергий. Заметное отличие f^2 от известного значения константы связи $0,08 \pm 0,02$ ^{/9/}, возможно, есть результат того, что использованное при проведении анализа приближение $\sqrt{l_{max}} = 2$ недостаточно точно. Однако ошибки в определении f^2 еще слишком велики. Особенно большие ошибки имеют параметр смешивания ϵ_1 и фазовый сдвиг 3D_1 . Это обстоятельство является результатом сильной корреляции между ϵ_1 , δ^3S_1 и δ^3D_1 . Планирование эксперимента, выполненное методом Соколова^{/10/}, показывает, что с точки зрения наиболее точного измерения указанных параметров наилучшими экспериментами являются измерения коэффициентов корреляции поляризаций. Вследствие этого, именно эти параметры определяются с помощью найденных фазовых сдвигов наилучшим образом (см. рис. 1-4).

Сравнение результатов этой работы с фазовыми сдвигами, найденными в работах^{/11,12/}, сильно затруднено отсутствием в цитированных работах ошибок фазовых

сдвигов, однако, согласие можно считать, по-видимому, только качественным, так как в заметном числе случаев расхождения превышают три ошибки, указанные в данной работе.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Н.А. Власова за сделанные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Ю.М. Казаринов, В.С. Киселев, В.И. Сатаров. Препринт ОИЯИ Р-1376, Дубна, 1963.
2. E.R. Flynn, P.J. Bendt. Phys. Rev., 128, 1268 (1962).
3. Ю.М. Казаринов, И.Н. Силин. ЖЭТФ, 43, 692, 1962.
4. T.H. Jeong, L.H. Jonston, D.E. Young, C.N. Waddell. Phys. Rev., 118, 1080 (1960).
5. P. Christmas, A.E. Taylor. Nucl. Phys., 41, 388 (1963).
6. J.P. Scanlon, G.H. Stafford, J.J. Thresher, P.H. Bowen, A. Langsford. Nucl. Phys., 41, 401 (1963).
7. R.B. Perkins, J.E. Simmons. Phys. Rev., 130, 272 (1963).
8. A. Abragam, M. Borghim, P. Catillon, J. Constham, P. Roubeau, T. Thirion. Phys. Lett., 2, 310 (1962).
9. W.S. Woolcook. Proc. 1960 Ann. Intern. Conf. on HE Phys., p.302, 1960.
10. С.Н. Соколов. Препринт ОИЯИ Д-573, Дубна, 1960.
11. G. Breit, M.H. Hull, Ir. K.E. Lassila, K.D. Pyatt, H.M. Ruppel. Phys. Rev., 128, 826 (1962).
M.H. Hull, Ir. K.E. Lassila, H.M. Ruppel, F.A. McDonald G. Breit. Phys. Rev., 128, 830 (1962).
12. T. Hamada, J.D. Jonston. Nucl. Phys., 34, 382 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1964 г.

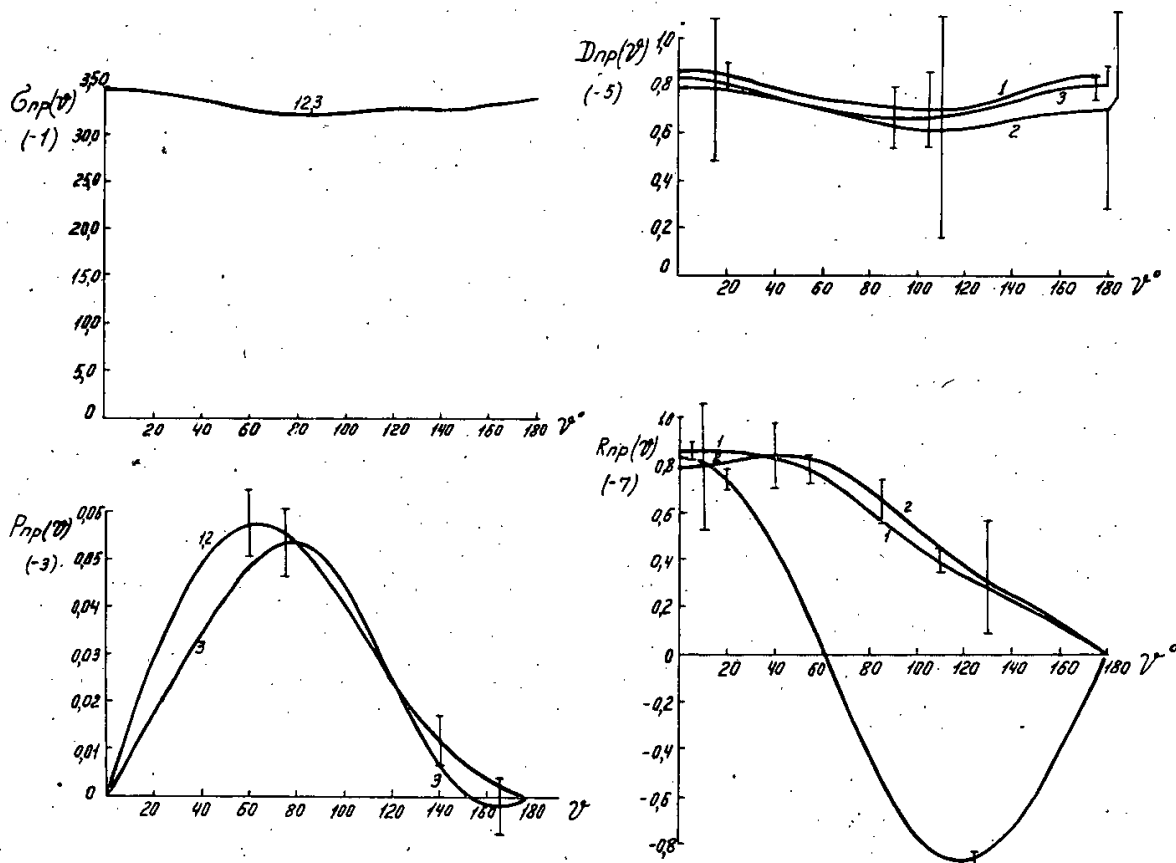


Рис. 1. Расчетные зависимости экспериментально измеряемых величин.
Вертикальными отрезками показаны коридоры ошибок.

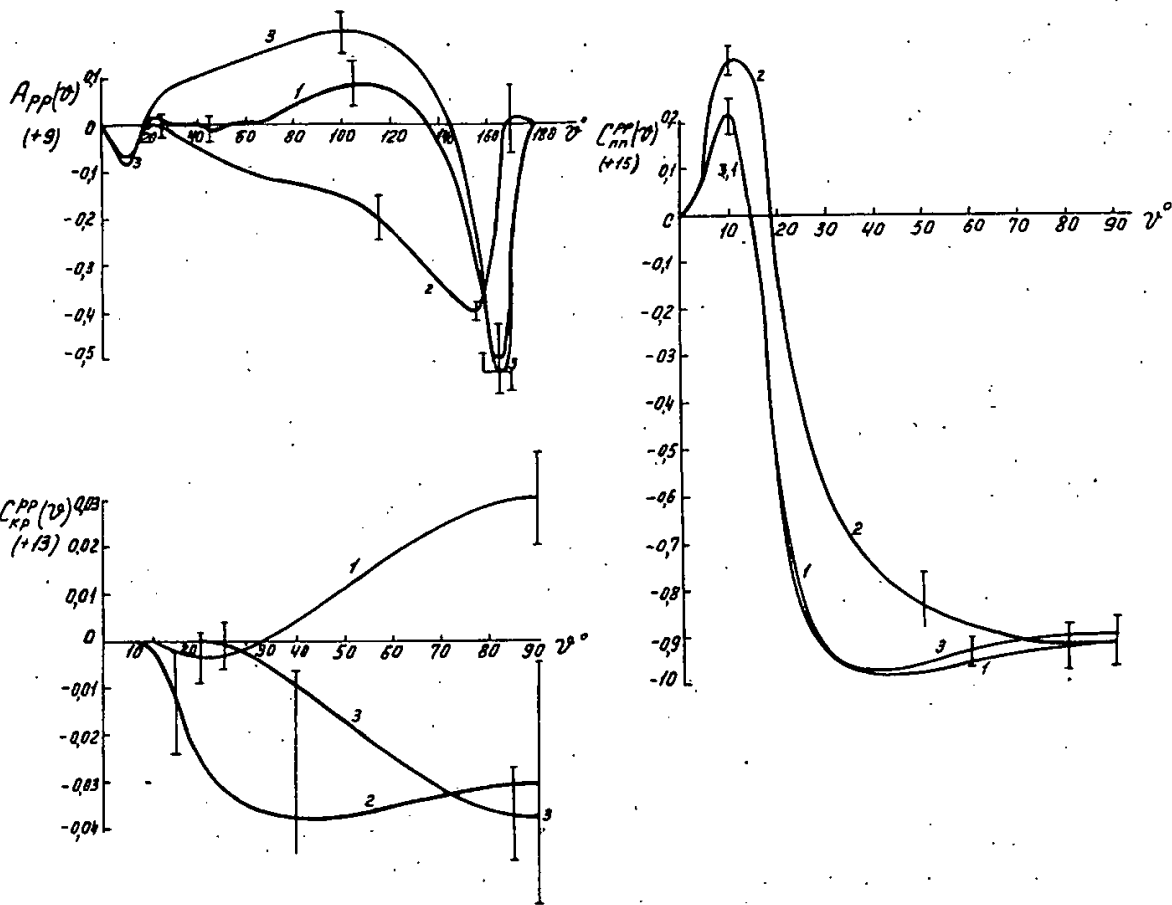


Рис. 2. Расчетные зависимости экспериментально измеряемых величин.
Вертикальными отрезками показаны коридоры ошибок.

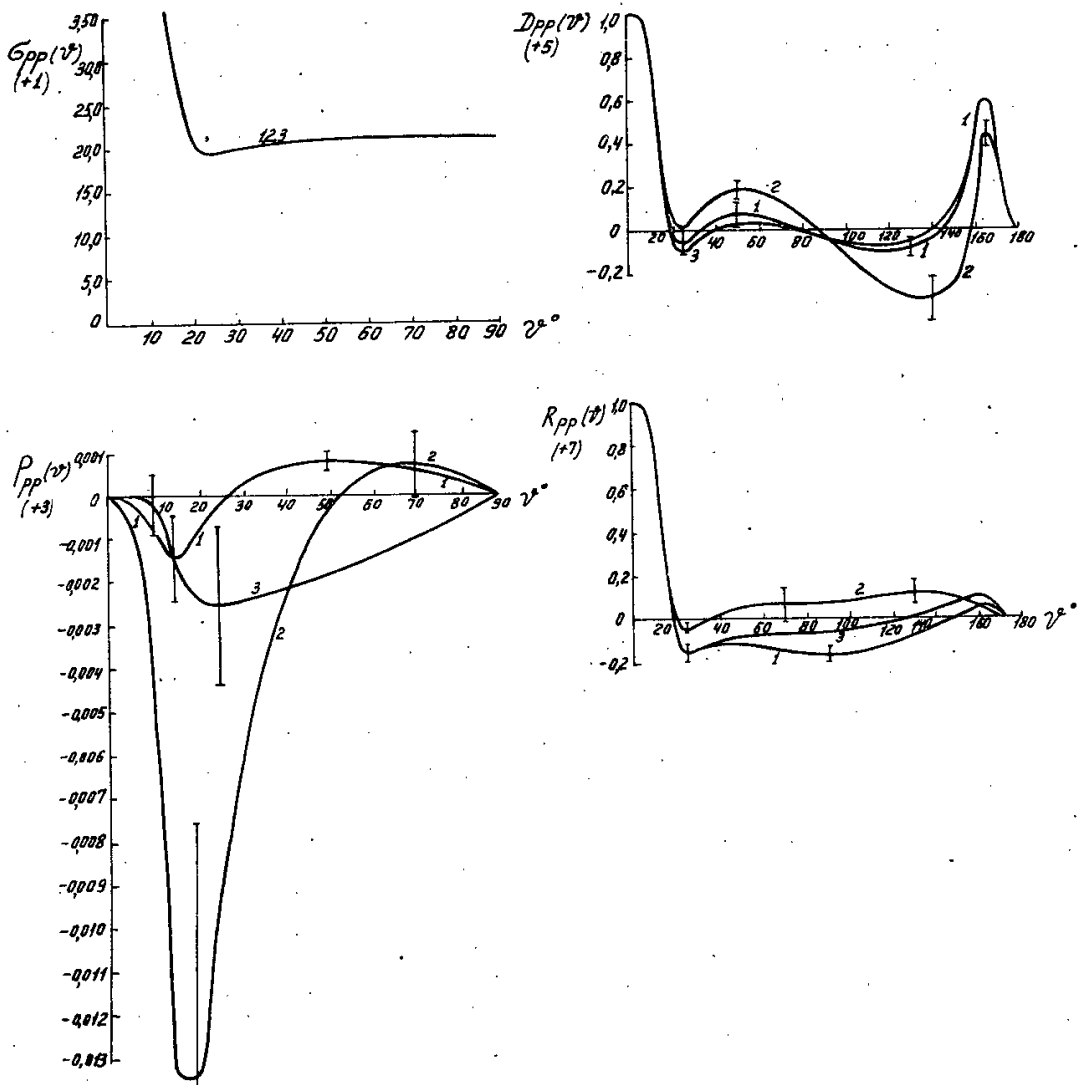


Рис. 3. Расчетные зависимости экспериментально измеряемых величин.
Вертикальными отрезками показаны коридоры ошибок.

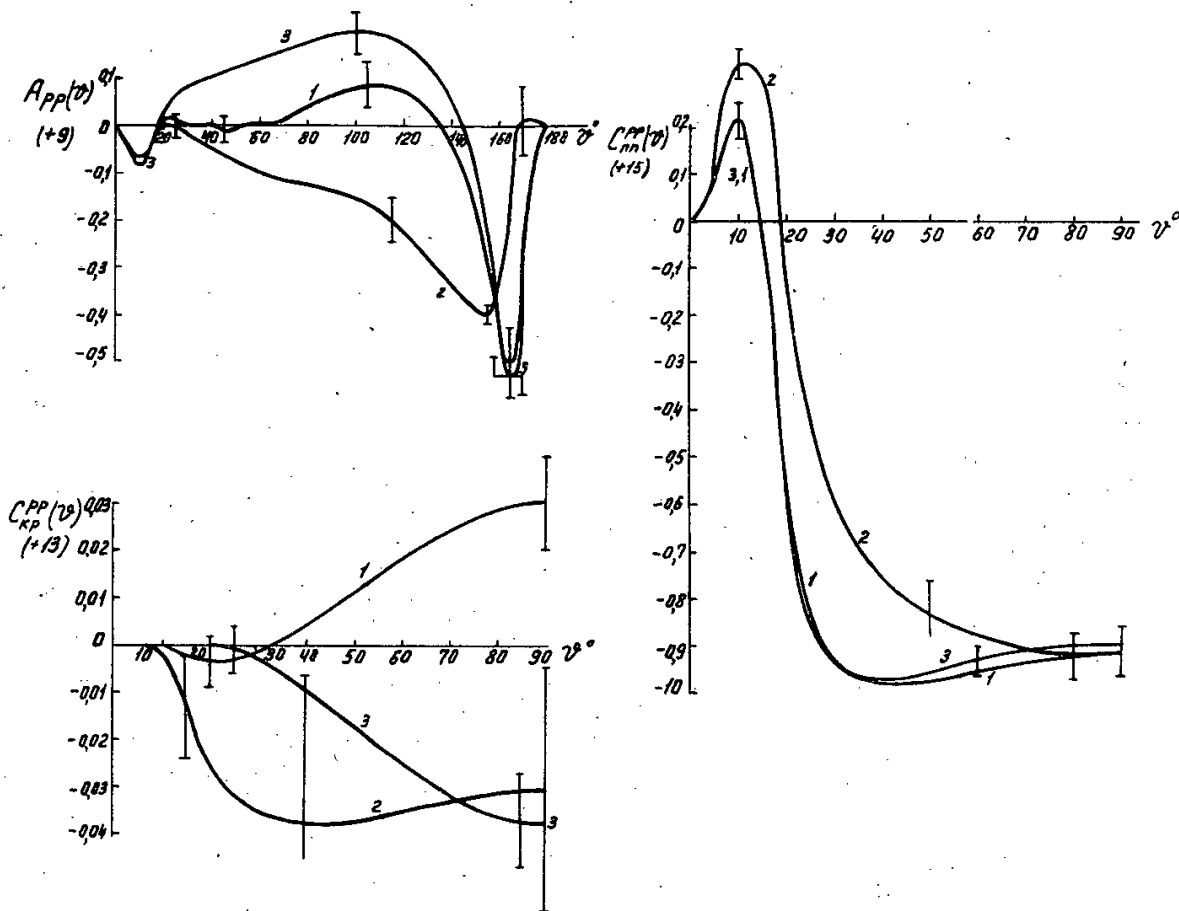


Рис. 4. Расчетные зависимости экспериментально измеряемых величин.
Вертикальными отрезками показаны коридоры ошибок.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3588 ••• Тираж 310 0,6 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р.Саранцева февраль 1964 г.

25 STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

В.А. Друин, Н.К. Скобелев, Б.В. Фефилов, Г.Н. Флеров

Р - 1580

О СПОНТАННОМ ДЕЛЕНИИ ИЗОТОПА
102-го ЭЛЕМЕНТА С МАССОВЫМ ЧИСЛОМ 256

Дубна 1964

P - 1580

Друин В.А., Скобелев Н.К., Фефилов Б.В., Флеров Г.Н.

О спонтанном делении изотопа 102-го элемента
с массовым числом 256

На внутреннем пучке 310 см циклотрона Объединенного института ядерных исследований проводилось облучение урана-238, нанесенного на наклонную мишень, интенсивным потоком ионов неона-22. При помощи полупроводниковых детекторов были зарегистрированы осколки спонтанного деления.

Наблюдаемый эффект объясняется радиоактивным распадом изотопа 102^{256} , образующегося в реакции $U^{238} (Ne^{22}, 4n) 102^{256}$. Значение периода спонтанного деления T_{sf} изотопа 102^{256} составляет 1500 сек.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна 1964.**

Druin V.A., Skobelev N.K., Fefilov B.V., Flerov G.N. P - 1580

On Spontaneous Fission of Element 102 Isotope with
Mass Number 256.

Uranium - 238 put on a sloping target was bombarded with an intensive flux of neon-22 ions in the internal beam of the 310 cm cyclotron of the Joint Institute for Nuclear Research. Using the semiconductor counters the spontaneous - fission fragments were recorded.

The effect observed is accounted for the radioactive decay of the 102^{256} isotope produced in the reaction $U^{238} (Ne^{22}, 4n) 102^{256}$. The spontaneous - fission half life T_{sf} of 102^{256} isotope was found to be 1500 s.

**Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.**

В.А. Друин, Н.К. Скобелев, Б.В. Фефилов, Г.Н. Флеров

Р - 1580

О СПОНТАННОМ ДЕЛЕНИИ ИЗОТОПА
102-го ЭЛЕМЕНТА С МАССОВЫМ ЧИСЛОМ 256

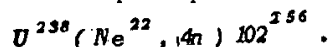
Дубна 1964

В в е д е н и е

Впервые о наблюдении спонтанного деления 102-го элемента стало известно в начале 1959 года, когда А. Гиорсо сообщил об опытах по изучению свойств распада изотопа 102^{254} , выполненных в Радиационной лаборатории (США) на линейном ускорителе тяжелых ионов^{/1/}. Проводя эксперименты по измерению энергии α -распада изотопа 102^{254} , авторы зарегистрировали спонтанно-делящийся продукт с периодом полураспада ~ 3 сек, что совпадало с $T_{1/2}$ для 102^{254} . Совпадение времени жизни 102^{254} по отношению к α -распаду и времени жизни спонтанно-делящегося продукта привело авторов к заключению, что 102^{254} , возможно, испытывает спонтанное деление. Поскольку частота появления осколочных импульсов была в 2 раза меньше скорости счета α -частиц с энергией 8,3 Мэв, испускаемых при распаде 102^{254} , можно было предположить, что T_{sf} для 102^{254} составляет примерно 7 сек. Это обстоятельство казалось крайне удивительным, так как измеренное значение T_{sf} 7 сек отличалось в 10^5 раз от ожидаемого из анализа различных систематик спонтанного деления. Однако недавние теоретические оценки Юханссона^{/2/} привели к значению периода спонтанного деления 102^{254} , согласующемуся с экспериментальными данными. Используя значение T_{sf} для 102^{254} в качестве отправной точки, Юханссон оценил также продолжительность жизни по отношению к спонтанному делению ряда других изотопов 102-го элемента, в частности, 102^{256} . На основании этих расчетов период спонтанного деления 102^{256} получился равным 0,02 сек.

В связи с этим получение и изучение свойств радиоактивного распада изотопа 102^{256} представляло значительный интерес.

В Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ в Дубне Е.Д. Донец и др.^{/3/} весной 1963 г. получили этот изотоп в ядерной реакции



Авторы доказали, что 102^{256} распадается с $T_{1/2} \sim 8$ сек. Из этих данных следует, что нижняя граница для периода спонтанного деления 102^{256} составляет 8 сек и не противоречит значению, полученному из графических экстраполяций. В то же время этот результат сильно расходится с теоретической оценкой Юханссона^{/2/}.

В настоящей работе приводятся данные опытов, поставленных с целью непосредственного измерения периода спонтанного деления изотопа 102^{256} .

Методика эксперимента

На основании систематики периодов спонтанного деления и экспериментальных данных по сечению реакции $U^{238} (Ne^{22}, n) U^{256/3}$ можно было ожидать, что эффект от спонтанного деления изотопа 102^{256} будет невелик. Поэтому требовалось создать высокочувствительную методику.

Мы пошли по пути использования наклонной мишени^{/4/} и полупроводниковых детекторов для регистрации осколков деления. Основным преимуществом наклонной мишени, изображенной на рис. 1, является возможность реализации больших токов, обусловленная хорошим водяным охлаждением мишени, а также высокая чувствительность, являющаяся результатом интегрирования эффекта по всей функции возбуждения. При толщине слоя урана на мишени $200-500 \frac{мг}{см^2}$ и наклоне мишени к направлению пучка ионов, равном 6° , эффективная толщина мишени составляет $2-5 \frac{мг}{см^2}$.

Обычно в ядерных реакциях с тяжелыми ионами полуширина функции возбуждения для реакции $(1,4 n)$ составляет 8-10 Мэв, что соответствует потерям энергии многозарядного иона в слое $U_3 O_8$ толщиной $3-4 \frac{мг}{см^2}$.

Другим важным обстоятельством является то, что ядра-продукты реакции, имеющие пробег $\sim 0,5-1 \frac{мг}{см^2}$ в уране и направленное вперед угловое распределение, тормозятся, в основном, в тонком поверхностном слое урана. Поэтому потери энергии осколков, возникающих при спонтанном делении ядер-продуктов, в слое невелики, и эффективность их регистрации детекторами оказывается достаточно высокой.

Урановая мишень изготовлялась путем нанесения на рабочую грань медного параллелепипеда спиртового раствора $U_3 O_8 (NO_3)_2 \cdot 6 H_2 O$ с добавкой раствора нитроцеллюлозы в амилацетате с последующей просушкой или прокаливанием до $U_3 O_8$. Количество вещества мишени определялось по удельной α -активности слоя.

Наклонная мишень монтировалась внутри головки специального пробника. Она была изолирована от корпуса пробника, что давало возможность измерять поток падающих на нее ионов с помощью интегратора тока. Для собирания вторичных электронов, движущихся вдоль силовых линий магнитного поля, над мишенью помещался экран, электрически связанный с нею.

Опыты проводились на внутренней пучке 310 см циклотрона тяжелых ионов ОИЯИ. Интенсивность пучка ионов неона, попадающего на мишень, составляла 20-25 мка (размер окна в кожухе $10 \times 15 \text{ мм}^2$).

В работе использовались изготовленные в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ^{/5/} поверхностно-барьерные детекторы из n -кремния с удельным сопротивлением 300 ом·см. Четыре детектора (два канала по два детектора с параллельным включением) с общей

чувствительной поверхностью около 12 см^2 были смонтированы на держателе, который мог находиться в двух положениях: в положении "облучение" - детекторы удалены от мишени (в это время она облучается пучком ускоренных ионов, измерительный тракт полностью заблокирован); в положении "измерение" - детекторы находятся над мишенью (пучок отсутствует, высокочастотный генератора заперт).

Управление положением детекторов и режимом работы ускорителя осуществлялось блоком автоматики (БА). На рис. 2 приводится блок-схема электронной аппаратуры, выполненной целиком на транзисторах. Были применены зарядово-чувствительные предусилители (ПУ) с входными транзисторами П403, включенными по схеме с общей базой. Смещение на детекторы (6 вольт) подавалось от источника питания предусилителей, при этом отношение сигнала к шуму на выходе усилительного тракта было не хуже 10 для α -частиц с энергией 4,5 Мэв и величине магнитного поля $\sim 18 \text{ кэ}$ (постоянная времени дифференцирования $\sim 2 \text{ мксек}$).

Усилители (У) были выполнены в виде "двоек" с глубокой отрицательной обратной связью, коэффициент усиления 200, время нарастания $\approx 0,2 \text{ мксек}$. Для визуального контроля за работой усилительных трактов предусмотрен специальный выход через буферный усилитель (V_0). Этот же выход можно было использовать для снятия энергетических спектров продуктов реакции на анализаторе АИ-100. В качестве дискриминирующих элементов применялись туннельные диоды в сочетании с транзисторными формирующими каскадами (ДФ). Уровень дискриминации регулировался в пределах от 8 до 30 Мэв. Сформированные импульсы поступали на схему антисовпадения с разрешающим временем 4 мксек. Далее сформированный сигнал проходил через первый клапан (Кл.1), одновибратор задержки (З) и второй клапан (Кл.2) на формирующий каскад (Ф) запуска механического регистратора для интегрального счета осколков. Момент появления каждого импульса отмечался с помощью телетайпа СТ-35 или самопишущего прибора ЭПП-09, управляемого блоком автоматики.

Основное внимание при разработке аппаратуры уделялось защите от электромагнитных наводок и помех. Входное окно пробника механически закрывалось на время измерений, так что пространство, где смонтированы детекторы и ПУ, оказывалось изолированным от объема ускорителя. Тем самым уменьшалась вероятность наводок от разрядов в камере ионного источника.

В электронной схеме этой же цели служит наличие двух каналов в сочетании со схемой антисовпадений. Благодаря такой комбинации одновременно возникающие внешние или внутренние помехи, превышающие порог дискриминации, не регистрировались аппаратурой.

Поскольку источник ионов работает в мощном импульсном режиме, в схеме была предусмотрена дополнительная блокировка на время импульсного разряда.

Питание предусилителей и усилителей осуществлялось от отдельных аккумуляторов, питание блока автоматики - от стабильной сети переменного тока. Это обеспечивало стабильную работу регистрирующей аппаратуры в течение длительного времени.

Измерения и результаты

При известном значении парциального периода α -распада задача определения T_{sf} сводится по существу к нахождению доли ядер, распадающихся путем спонтанного деления, из общего числа синтезированных ядер. В наших опытах измерялся выход изотопа $^{256}_{102}$ по его спонтанному делению. Выход ядер $^{256}_{102}$ по α -распаду известен из работы ^{/3/}. Отношение этих выходов характеризует отношение парциальных периодов полураспада.

При облучении U^{238} ускоренными ионами Ne^{22} в мишени накапливаются продукты ядерных реакций, среди которых имеются различные спонтанно-делящиеся ядра. Необходимо выделить излучатель, распадающийся с $T_{1/2} \sim 8$ сек.

Из данных работы ^{/3/}, для реакции $U^{238} (Ne^{22}, \alpha n) ^{256}_{102}$ максимум сечения находится при $E_{Ne^{22}} = 112$ Мэв. Большая часть наших опытов проводилась при энергии ионов Ne^{22} , равной 120 Мэв.

При этих условиях ожидался наибольший выход исследуемого изотопа.

На рис. 3 приведена кривая распада наведенной в мишени активности, полученная в одном из опытов в режиме работы аппаратуры $\frac{\Delta T_{обл.}}{\Delta T_{изм.}} = \frac{40 \text{ сек}}{50 \text{ сек}}$.

Видно, что экспонента характеризуется периодом полураспада, равным примерно 10 сек. Этот результат в пределах неточностей эксперимента согласуется с данными работы ^{/3/}.

Необходимо отметить, что помимо осколков спонтанного деления из мишени могут вылетать и регистрироваться детекторами осколки вынужденного деления ядер урана под действием запаздывающих нейтронов. Источниками запаздывающих нейтронов являются осколки деления и ядра N^{17} ($T_{1/2} = 4,15$ сек), образующиеся в реакциях передачи. Для уменьшения эффекта от вынужденного деления вещества мишени низкоэнергичными нейтронами в работе использовался обедненный U^{238} . Однако эта мера не исключила фон нацело. Для учета фона проводился опыт с закрыванием детекторов фольгой, на внутреннюю поверхность которой наносился точно такой же слой обедненного U^{238} , как и на мишени. В этом случае осколки из мишени не регистрировались детекторами, тогда как эффект вынужденного деления сохранялся. Было показано, что фон от запаздывающих нейтронов не превышает 25% (возрастает с ростом энергии ионов) от наблюдаемой в мишени активности.

Кроме того были поставлены дополнительные контрольные опыты, в которых в качестве бомбардирующих частиц использовались ионы Ne^{20} и O^{16} . Обнаруженные в этих опытах спонтанноделящиеся продукты распадались с более коротким периодом полураспада, равным $\sim 3,0$ сек.

К настоящему времени имеются лишь предварительные результаты по энергетической зависимости выхода продукта с $T_{1/2} = 10$ сек. Значения выходов, представленные в таблице 1, не противоречат характеру поведения функции возбуждения $U^{238} (Ne^{22}, \alpha n) 102^{256}$ /3/.

Совокупность всех данных позволяет сделать заключение о том, что при облучении U^{238} ядрами Ne^{22} наблюдалось спонтанное деление изотопа 102-го элемента с массовым числом 256.

Выход его, определенный по спонтанному делению, соответствует сечению $\sim 3 \cdot 10^{-34}$ см². Отсюда следует, что для 102^{256} $T_{sf} \sim 10$ сек $\frac{4,5 \cdot 10^{-32}}{3 \cdot 10^{-34}} = 1500$ сек.

Обсуждение результатов

Измеренное значение периода спонтанного деления изотопа 102^{256} не очень сильно отличается от предсказанного путем графической экстраполяции известных данных. И, наоборот, отклонение от значения, полученного из теоретических оценок /2/, очень велико (10^5).

На рис. 4. приведена зависимость периодов спонтанного деления от числа нейтронов в ядре для наиболее тяжелых элементов. Сплошные линии соединяют определенные экспериментально значения T_{sf} , пунктирная - проведена через теоретические значения. Очевидно, влияние подболочки $Z = 100$, которая обнаруживается на диаграмме Нильссона для протонов, на барьер деления не столь велико, как влияние подболочки $N = 152$ /2/. До сих пор нет экспериментальных указаний на существование аномалий в радиоактивных свойствах ядер, расположенных за фермием. Результат настоящей работы говорит скорее об отсутствии значительного промежутка между энергетическими уровнями протонов 50 и 51 и о том, что времена жизни четно-четных изотопов с $Z > 100$ и N вблизи 152 не будут так катастрофически малы, как это следует из теоретических оценок /2/.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Э.З.Рындиной и И.И.Чубурковой, изготовившим кремниевые детекторы, Э.Г.Имаеву за разработку отдельных блоков аппаратуры, а также сотрудникам группы эксплуатации циклотрона У-300, обеспечившим хорошую работу машины при проведении опытов.

Т а б л и ц а 1

$E_{Ne^{22}}$ Мэв	Интегральный поток ионов Ne^{22} мка-час	Выход (абс. число зарег.имп.)	Относит. выход	Относит. выход по данным работы /3/
102	14	0	0	0
110	28	8	0,5	0,33
120	28	17	1	0,99
124	14	9	1	1,00

Л и т е р а т у р а

1. А.Гиорсо. Атомная энергия, 7, 338 (1959).
2. S. Johansson. Report UCRL-10474, September 25, 1962.
3. Е.Д. Донец, В.А. Щеголев, В.А. Ермаков. Препринт ОИЯИ Р-1383, Дубна, 1963.
4. В.А. Друин, И.Брандштетер, Я.Малы. Препринт ОИЯИ, Р-875, Дубна, 1962.
5. Э.З. Герштейн, С.М. Соловьев, И.И. Чубуркова. Материалы совещания по полупроводниковым детекторам ядерных излучений. Препринт ОИЯИ, стр. 26, Дубна, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1964 г.

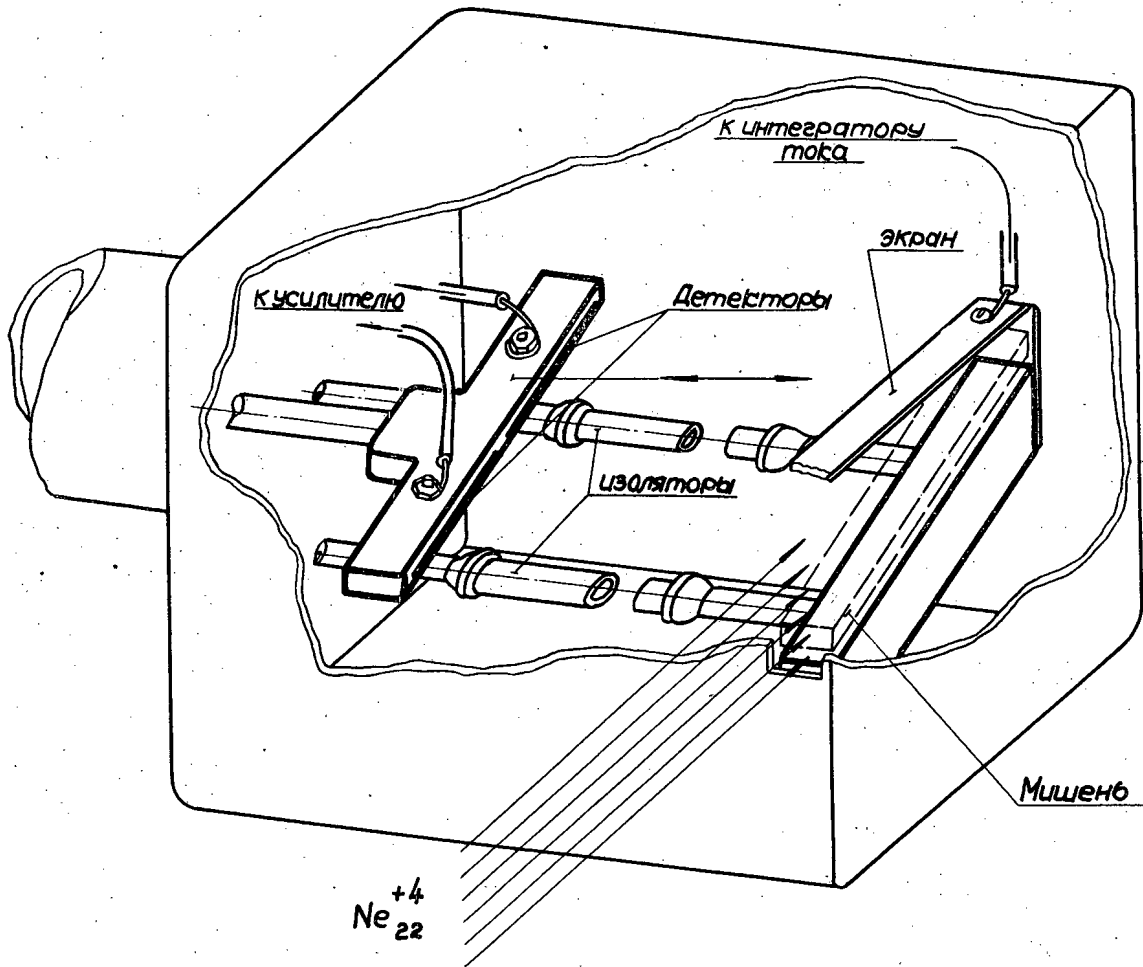


Рис. 1. Схематическое устройство пробника.

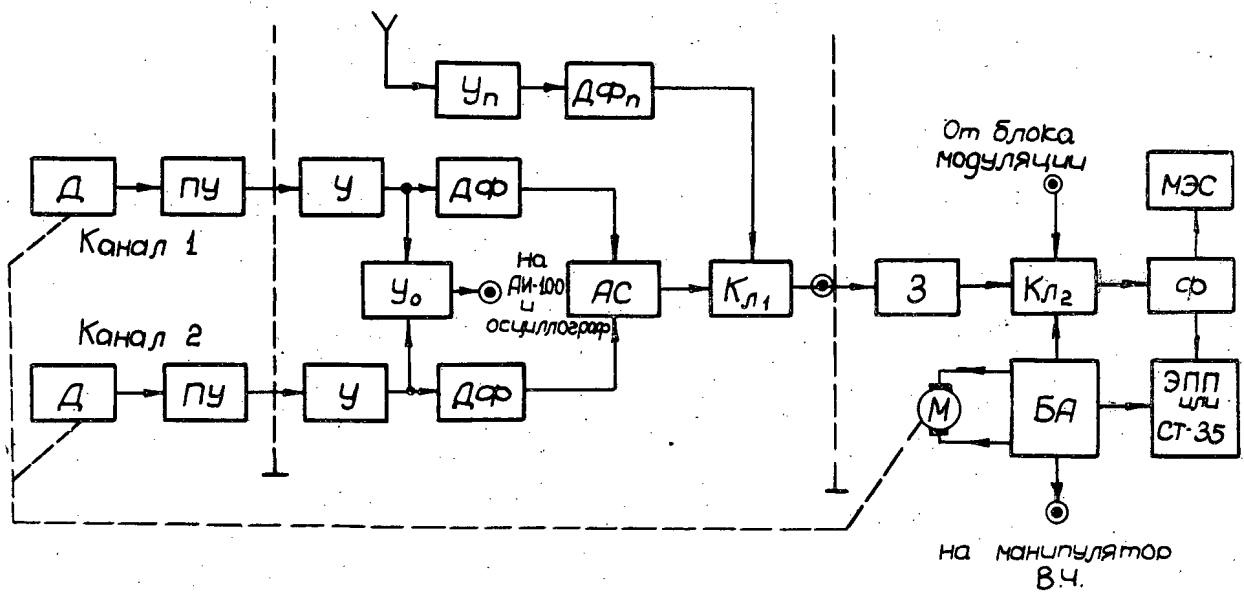


Рис. 2. Блок-схема электронной аппаратуры.
 Д - полупроводниковые детекторы; ПУ - зарядочувствительные предусилители;
 У, У₀ и У_п - усилительные секции; ДФ и ДФ_п - дискриминаторы и формирующие каскады; АС - схема антисовпадения; Кл₁ и Кл₂ - клапаны; З - одновибратор задержки; Ф - формирующий каскад запуска МЭС и ЭПП-09; БА - блок автоматики.

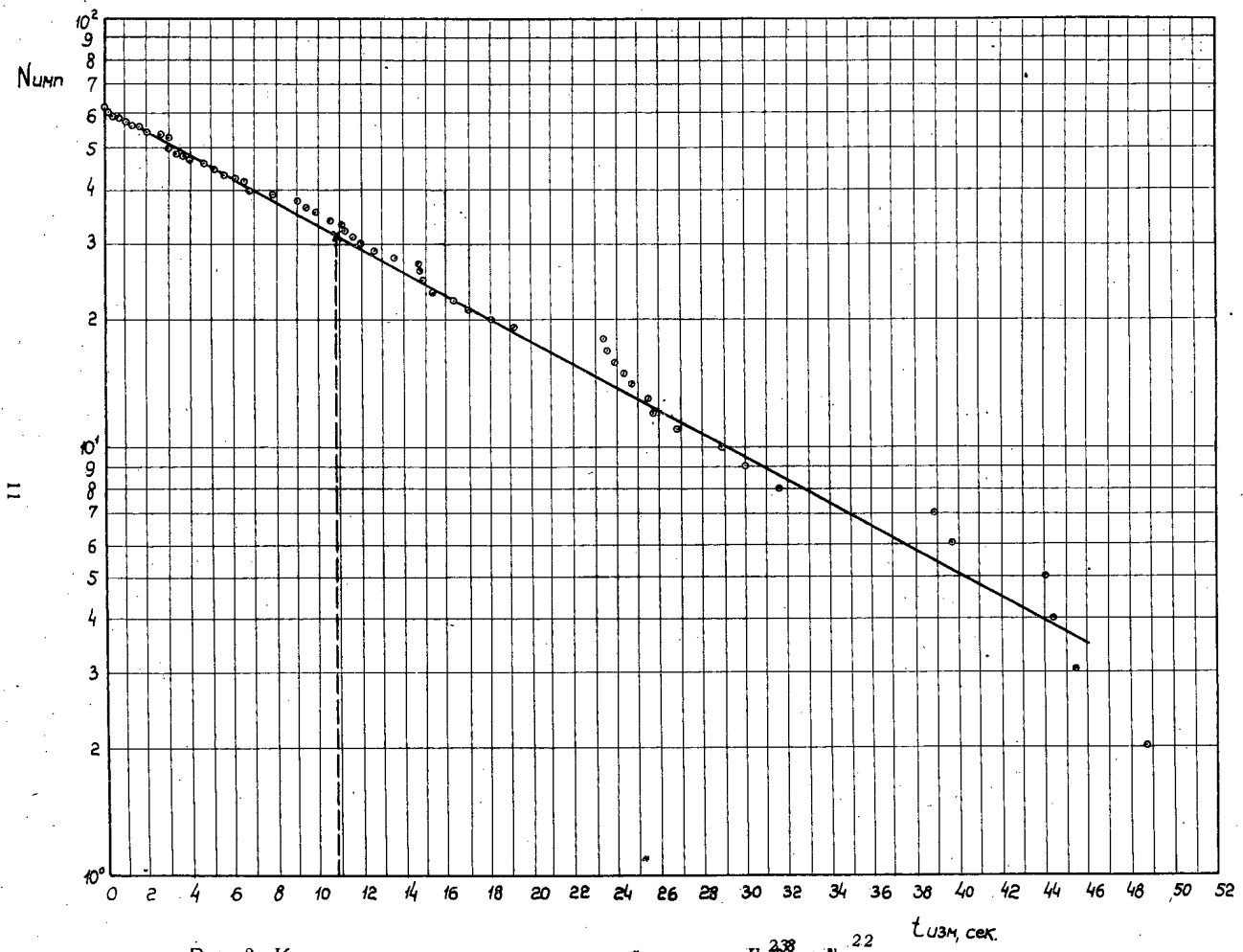


Рис. 3. Кривая распада продуктов ядерной реакции $U^{238} + He^{22}$

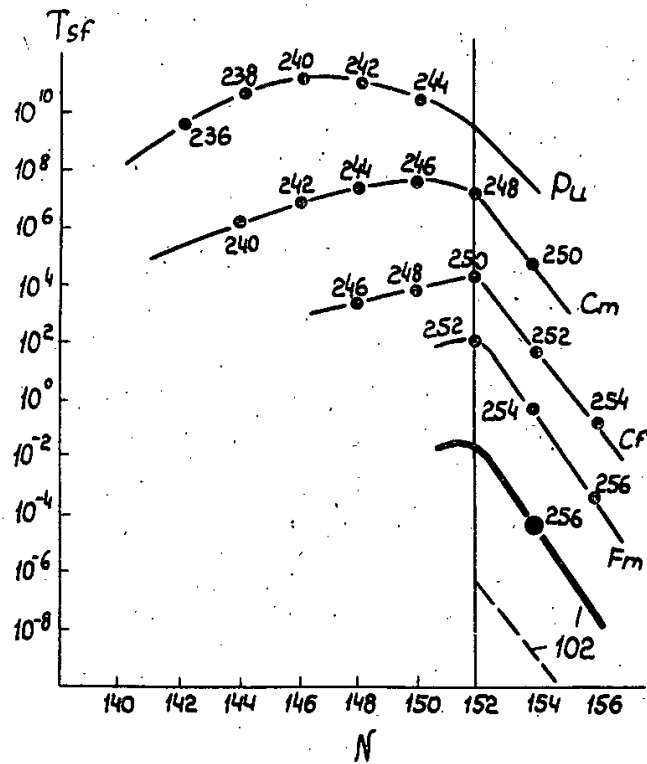


Рис. 4. Зависимость периодов спонтанного деления T_{sf} от числа нейтронов в ядре N .

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3623, ☉☉☉ Тираж 280. 0,81 уч.-изд. л.
Техн. ред. В.Р.Саранцева Март 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.К. Лукьянов, И.Ж. Петков

P-1495

О КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ ЯДЕР
ПРИ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Д у б н а 1964

Лукьянов В.К., Петков И.Ж.

P - 1495

О коллективных возбуждениях ядер при рассеянии электронов

В работе рассматривается возбуждение вращательных и колебательных состояний ядер при рассеянии электронов. Получены дифференциальные сечения рассеяния в случае возбуждения двух 2^+ уровней в Mg^{24} и O_{β}^+ колебательного уровня в Gd^{156} .

Обсуждаются используемые в работе приближения. Указывается на экспериментальную возможность изучения таких возбуждений.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

Luk'yanov V.K., Petkov I.Zh.

P - 1495

On Collective Excitations of Nuclei in Electron Scattering

The excitation of rotating and vibrational states of nuclei in electron scattering is treated. The differential scattering cross sections have been obtained for the case of two 2^+ levels in Mg^{24} and O_{β}^+ of the vibrational level in Gd^{156} . The approximations used in the paper are discussed. An experimental possibility of studying such excitations is indicated.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

В.К. Лукьянов, И.Ж. Петков

P-1495

О КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ ЯДЕР
ПРИ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Направлено в "Известия АН СССР"

Дубна 1984

1. В последнее время большое внимание уделяется исследованию вопроса о неупругом рассеянии электронов на ядрах, которое может дать такие сведения о ядре, как энергия и спин возбужденных состояний, вероятности переходов и др. Электроны по сравнению с другими частицами обладают тем преимуществом, что их взаимодействие с ядром хорошо известно и в области малых углов рассеяния включает лишь кулоновские члены электромагнитного потенциала взаимодействия. Действительно, в случае коллективных возбуждений ядра, если нет запретов из-за правил отбора для продольной части взаимодействия, вкладом от поперечных членов можно пренебречь для углов рассеяния θ , удовлетворяющих условию^{/1/}:

$$\frac{\hbar \omega_0}{2E} < \sin \frac{\theta}{2} < \frac{Mc^2}{E}, \quad /1/$$

где $\hbar \omega_0$ — энергия перехода в ядре, E — энергия падающих электронов, M — масса нуклона. Отсюда видно, что при возбуждении низколежащих уровней в ядрах ($\hbar \omega_0 \lesssim 5$ Мэв) электронами с энергией $E \approx 150$ Мэв это условие выполняется практически всегда ($\theta > 5^\circ$).

Возбуждение электронами коллективных состояний ядер обсуждалось в ряде работ /см., например, ^{/1,2/}, где в рамках борновского приближения рассматривалось обычно возбуждение колебательных состояний в легких ядрах. Полученные сечения неупругого рассеяния выражались через параметры Z_λ и C_λ , которые в рамках гидродинамической модели определяют кинетическую и потенциальную энергию малых поверхностных колебаний ядра. С другой стороны, известен ряд низколежащих уровней легких ядер с $A = 19 \pm 7$, которые можно интерпретировать как вращательные, а это позволяет применять известные модели вращения для расчета сечений неупругого рассеяния электронов. Следует заметить, однако, что применение обобщенной модели к легким ядрам, которые не имеют поверхности в "классическом" смысле, является весьма условным, поэтому желательно распространить расчеты на те тяжелые ядра, где эта модель имеет непосредственное применение и используется обычно для объяснения спектроскопических характеристик. В этом случае уже нельзя пользоваться борновским приближением, так как оно не учитывает "искажения" волновой функции электрона в поле ядра; необходимо проводить либо точное решение уравнения Дирака, что весьма трудно технически^{/3/}, либо использовать "исправленное" борновское приближение^{/4/}, которое сводится к замене в обычной борновской формуле сечения передаваемого ядру импульса q на эффективный импульс

$$q_{\text{эфф.}} = q \left(1 - \frac{V(0)}{E} \right),$$

где $\nu(0)$ - потенциал взаимодействия в нуле. Такая процедура позволяет учесть искажение электронной волновой функции при малых углах рассеяния.

Мы рассмотрим возбуждение с помощью электронов квадрупольных и монополярных переходов в ядрах, которые можно описать в рамках модели неаксиального ядра А.С. Давыдова^{5,6/}, при этом будем пользоваться приближением /1/ и /2/.
 Формула для сечения неупругого рассеяния в борновском приближении с учетом лишь кулоновских членов взаимодействия имеет вид^{/1/}:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(I_i \rightarrow I_f) = \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{4\pi\sigma_0}{2I_i+1} \cdot \sum_{L=0}^{\infty} |\langle I_f || \mathcal{M}_L(q) || I_i \rangle|^2 \quad /3/$$

Здесь

$$\sigma_0 = \left(\frac{2\alpha K}{q^2}\right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad q^2 = (\vec{K}_1 - \vec{K}_2)^2 = 4K^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad /4/$$

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, $\hbar K$ - импульс относительного движения электрона. Приведенный матричный элемент перехода

$$\langle I_f || \mathcal{M}_L(q) || I_i \rangle = (-1)^{-I_f+M_f} \frac{\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{LM}(q) | I_i M_i \rangle}{\begin{pmatrix} I_f & L & I_i \\ -M_f & M & M_i \end{pmatrix}}, \quad /5/$$

где оператор перехода мультипальности L равен

$$\mathcal{M}_{LM}(q) = \int \rho(\vec{r}) \cdot j_L(qr) Y_{LM}(\Omega_r) d\vec{r}, \quad /6/$$

а $|IM\rangle$ - ядерные волновые функции.

2. Рассмотрим сначала квадрупольные переходы с возбуждением вращательных состояний неаксиального ядра. Волновые функции этих состояний можно записать в виде^{/5/}:

$$|IM\rangle = \sqrt{\frac{2I+1}{16\pi}} \sum_{k \geq 0} A_k (1 + \delta_{k0})^{-1/2} [D_{Mk}^I + (-1)^I D_{M-k}^I], \quad /7/$$

где A_k - коэффициенты разложения вращательной функции по D - функциям Вигнера. Плотность заряда ядра с резкой границей радиуса R равна

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0^{(0)} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad \rho_0^{(0)} = \frac{3Z}{4\pi R^3} \quad /8/$$

Радиус ядра неаксиальной формы

$$R = R_0 + \Delta R,$$

$$\Delta R = R_0 \left[\sum_{n, \nu=0, \pm 2} a_n D_{\nu n}^{(2)} Y_{2\nu}(\Omega_r) - \frac{\beta}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{21} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta^3 \cos 3\gamma \right],$$

/8/

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_{\pm 2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma.$$

Подставляя /8/ в /6/ и ограничиваясь первым членом разложения по малости ΔR , получим следующее выражение для оператора квадрупольного перехода:

$$\mathbb{M}_{2M}^{(0)}(q) = \rho_0^{(0)} R_0^3 j_2(qR_0) \sum_n a_n D_{-M, n}^{*(2)}. \quad /10/$$

Используя полученное выражение и волновые функции /7/, можно получить окончательный результат для сечения /3/ с резким обрезанием плотности на границе ядра:

$$\frac{d\sigma^{(0)}(0^+ \rightarrow 2^+)}{d\Omega} = \frac{9Z^2}{4\pi} \frac{K_2}{K_1} \sigma_0 [A_0 a_0 + \sqrt{2} A_2 a_2]^2 j_2^2(qR_0). \quad /11/$$

Аналогичные расчеты можно выполнить для случая, когда плотность заряда ядра не является ступенчатой функцией /8/, а плавно убывает с ростом r . Для конкретных вычислений нами было выбрано гауссовское распределение плотности заряда

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r^2}{R^2}}, \quad /12/$$

где

$$\rho_0 = \left(\frac{5}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Z}{R_0^3} (1 - 1,12\beta^2), \quad a = \frac{5}{2} (1 - 0,507\beta^2)$$

находятся из условия сохранения заряда ядра и определения среднеквадратичного радиуса $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R_0^2$ с точностью до членов порядка β^2 . В этом случае оператор квадрупольного перехода /6/ можно легко вычислить, с точностью до членов $\approx \beta^2$ он равен:

$$\mathbb{M}_{2M}(q) = \frac{Z}{20\pi} (qR_0)^2 e^{-\frac{(qR_0)^2}{10}} \cdot \sum_n a_n D_{-M, n}^{*(2)}. \quad /13/$$

В результате получается следующая формула для сечения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(0^+ \rightarrow 2^+) = \frac{Z^2}{100\pi} \cdot \frac{K_2}{K_1} \sigma_0 [A_0 a_0 + \sqrt{2} A_2 a_2]^2 (qR_0)^4 \cdot e^{-\frac{(qR_0)^2}{5}} /14/$$

3. При рассмотрении рассеяния электронов с возбуждением монопольных переходов в ядре мы ограничимся только случаем $0^+ \rightarrow 0^+$ переходов. В предложенной А.С. Давыдовым модели /6/ возбужденные 0^+ уровни можно условно разделять на β - и γ -колебательные. В работе /6/ для этих состояний даны волновые функции, соответствующие предельным значениям используемых в модели параметров β_0 и γ_0 , при которых имеется минимум потенциальной энергии

по β - и γ -колебаниям, и параметра неадиабатичности μ . Далее было показано, что в случае $\gamma_0 = 0$ нулевые γ -колебания поверхности могут приводить к равновесной форме ядра с γ равнов. = Γ . При $\mu < \frac{1}{3}$ и $\Gamma < 15^\circ$ волновые функции имеют вид:

$$\Psi_{m\kappa} = \frac{H_m \left(\frac{\beta - \beta_0}{\mu \beta_0} \right) F(-\kappa, 1; \frac{\gamma^2}{2\Gamma^2})}{[2^m \frac{m!}{\mu \beta_0 \sqrt{\pi}}]^{1/2} \Gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\gamma^2}{2\Gamma^2} + \left(\frac{\beta - \beta_0}{\mu \beta_0} \right)^2 \right] \right\}. \quad /15/$$

Для основного 0^+ состояния $m = \kappa = 0$, для 0^+ - колебательного состояния $m = 1, \kappa = 0$ и для 0^+ γ -колебательного состояния $m = 0, \gamma = 1$.

Запишем теперь выражение для оператора монополюсного перехода с распределением плотности заряда /8/, ограничиваясь членами разложения $-\beta^3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{(0)}(q) = \text{const} + \frac{3Z}{2(4\pi)^{3/2}} \left[(\cos qR_0 - \frac{\sin qR_0}{qR_0}) \beta^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{21} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (2\cos qR_0 - qR_0 \sin qR_0 - 3 \frac{\sin qR_0}{qR_0}) \beta^3 \cos 3\gamma \right]. \end{aligned} \quad /16/$$

Подставляя /15/ и /16/ в формулу для матричного элемента /5/ и учитывая, что элемент объема теперь $d\tau = \gamma d\beta d\gamma$ ($0 \leq \beta, \gamma \leq \infty$), получаем следующие выражения для сечений:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (0^+ \rightarrow 0^+_{\beta}) = \frac{9Z^2}{(4\pi)^2} \sigma_0 \frac{K_2}{K_4} \mu^2 \beta_0^4 \left[-qR_0 j_1(qR_0) + \frac{\beta_0}{14} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} (2\cos qR_0 - \right. \\ \left. - qR_0 \sin qR_0 - 3 \sin qR_0 / (qR_0)) \right]^2, \quad /17/$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (0^+ \rightarrow 0^+_{\gamma}) = \frac{5}{4\pi} \left(\frac{9Z}{56\pi} \right)^2 \sigma_0 \frac{K_2}{K_4} \beta_0^6 \Gamma^4 (1 + 3\mu^2) \{ 1 + 6\sqrt{2\Gamma(1-2\Gamma^2)} \} \times \\ \times \left[2\cos qR_0 - qR_0 \sin qR_0 - 3 \sin qR_0 / (qR_0) \right]^2. \end{aligned} \quad /18/$$

Для оценки влияния "размазки" плотности заряда в ядре на угловое распределение неупругого рассеяния электронов в случае $0^+ \rightarrow 0^+$ переходов мы воспользовались гауссовским распределением плотности заряда /12/. Полученное выражение для сечения с точностью до членов $-\beta^2$ имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (0^+ \rightarrow 0^+_{\beta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{Z}{4\pi} \right)^2 \sigma_0 \frac{K_2}{K_4} \mu^2 \beta_0^4 (qR_0)^4 \left[1 - \left(\frac{qR_0}{5} \right)^2 \right]^2 e^{-\frac{(qR_0)^2}{5}}. \quad /19/$$

4. В качестве примера рассмотрим неупругое рассеяние электронов с энергией 150 Мэв на Mg^{24} , низколежащие уровни которого ($2^+ 4^+ 2^+$) можно интерпретировать как вращательные уровни неаксиального ядра с $\gamma = 22,5^\circ$. Для расчета было выбрано $R_0 = 1,2 A^{1/3} f$, $\beta = 0,3$, а коэффициенты A_K волновой функции /7/ были взяты из работы /5/. На рис. 1 построены кривые диффе-

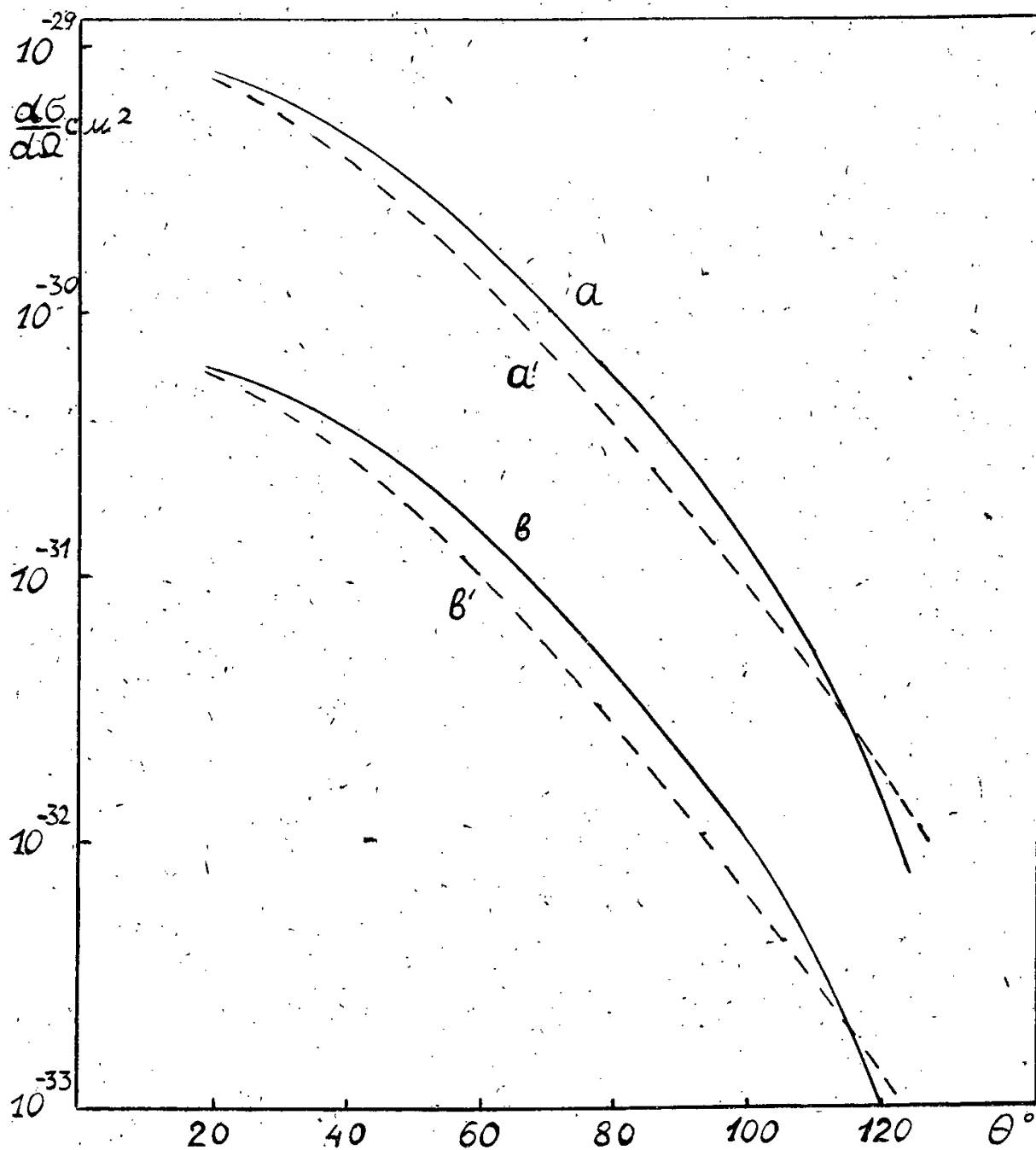
ренциальных сечений, из них a и b , рассчитанные по формуле /11/, соответ-
ствуют возбуждению первого 2^+ и второго 2^{+} уровней, а соответствующи-
е пунктирные кривые a' и b' рассчитаны по формуле /14/, учитывающей
"размазку" плотности заряда ядра. Из рисунка видно, что изменение распределе-
ния плотности заряда не сильно изменяет общий ход углового распределения, а
величина сечений с возбуждением первого и второго 2^+ - уровней отличаются
примерно на порядок ($\frac{d\sigma(0^+ \rightarrow 2^+)}{d\sigma(0^+ \rightarrow 2^{+})} = 12,55$), что в свою очередь при срав-
нении с экспериментом может служить указанием о справедливости выбранной для
расчета модели.

На рис. 2 даны кривые дифференциальных сечений с возбуждением $0^+ \rightarrow 0^+$
перехода в Gd^{156} ; соответствующие параметры $\mu = 0,25$, $\beta_0 = 0,33$
взяты из работы /7/. Поскольку борновское приближение здесь является неточным,
то при расчете в формулах /17/ и /19/ сделана замена $q \rightarrow q_{\text{эфф.}}$ согласно
/2/. Можно надеяться, что полученные таким образом сечения дают правильный
результат вплоть до углов $\approx 45^\circ$. Кривые a и b рассчитаны по формуле
/15/, причем кривая b соответствует случаю, когда в операторе перехода /16/
пренебрегалось вкладом от члена $\approx \beta^3 \cos 3\gamma$. Различие в дифференциальных сече-
ниях a и b указывает на примесь γ -колебаний в 0^+ -колебательном
состоянии из-за неадиабатичности колебаний ядра. Рис. 3 иллюстри-
рует влияние "размазки" плотности заряда /12/ на дифференциальное сечение с
возбуждением $0^+ \rightarrow 0^+$ - перехода в Gd^{156} /кривая c /, а также разницу
между "исправленным" борновским приближением с $q_{\text{эфф.}}$ /кривая b /
и сечением в первом борновском приближении /кривая a /.

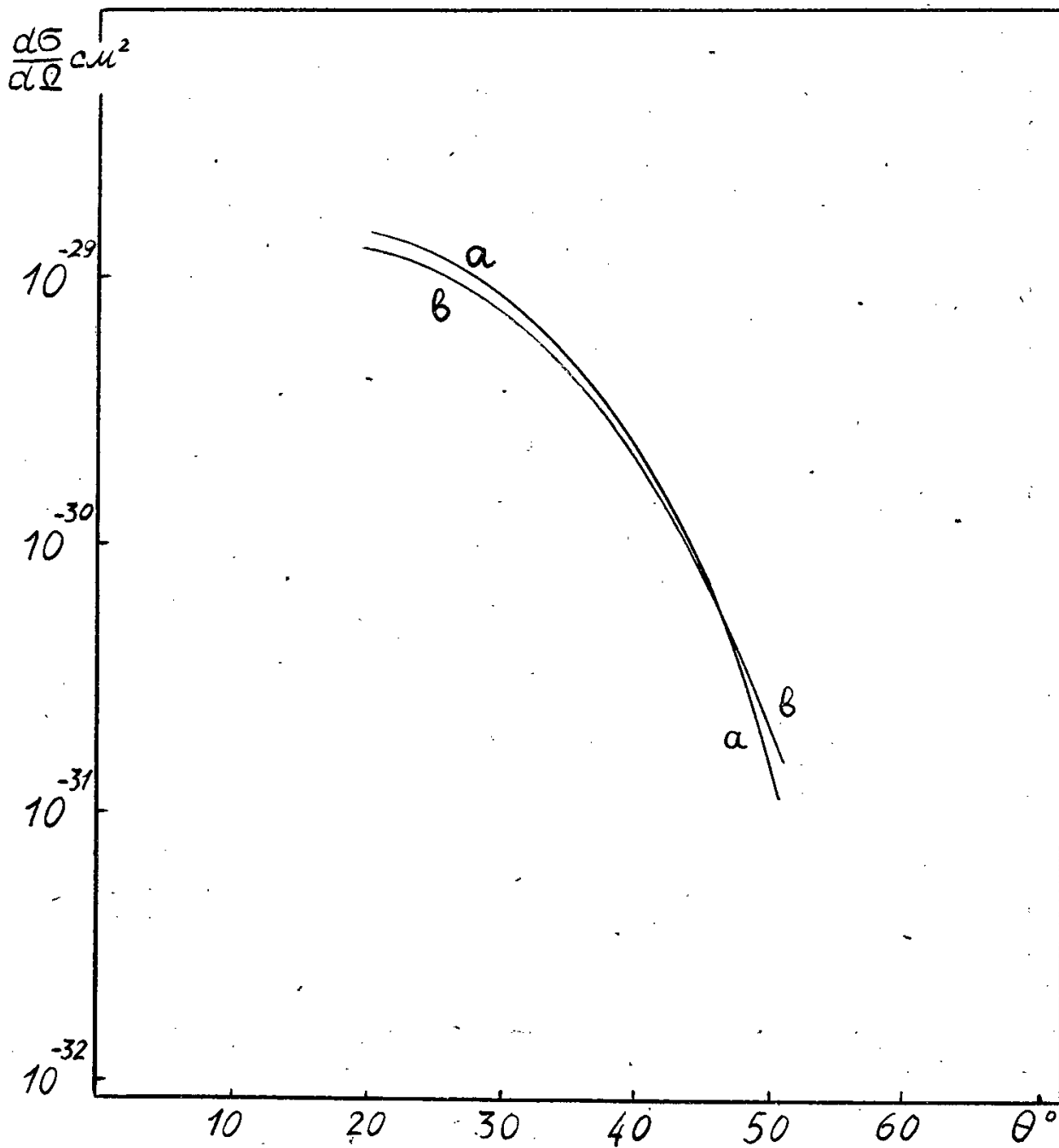
Л и т е р а т у р а

1. J.D.Walecka. Phys. Rev., 126, 653 (1962).
2. J.D.Walecka and R.S.Willey. Nucl. Phys., 40, 282 (1963).
3. K.Alder, T.H.Schucan. Nucl. Phys., 42, 498 (1963).
4. W.Czyz and K.Gottfried. Ann. Phys., 21, 47 (1963).
D.Saxon and L.I.Schiff. Nuovo Cim., 6, 614 (1957).
5. А.С. Давыдов. Г.Ф. Филиппов. ЖЭТФ, 35, 440 /1958/; Nucl. Phys., 12, 58 (1959).
А.С. Давыдов, В.С. Ростовский. ЖЭТФ, 36, 1788 /1958/;
6. А.С. Давыдов. Вестник МГУ, выпуск физ., 1, 56 /1961/; Nucl. Phys., 24, 682 (1961).
А.С. Давыдов, В.С. Ростовский, А.А. Чабан, Вестник МГУ, выпуск физ., 3,
66 /1961/;
7. Nucl. Phys., 27, 134 (1961) V.N.Lutsenko. Nucl. Phys., 47, 42 (1963).

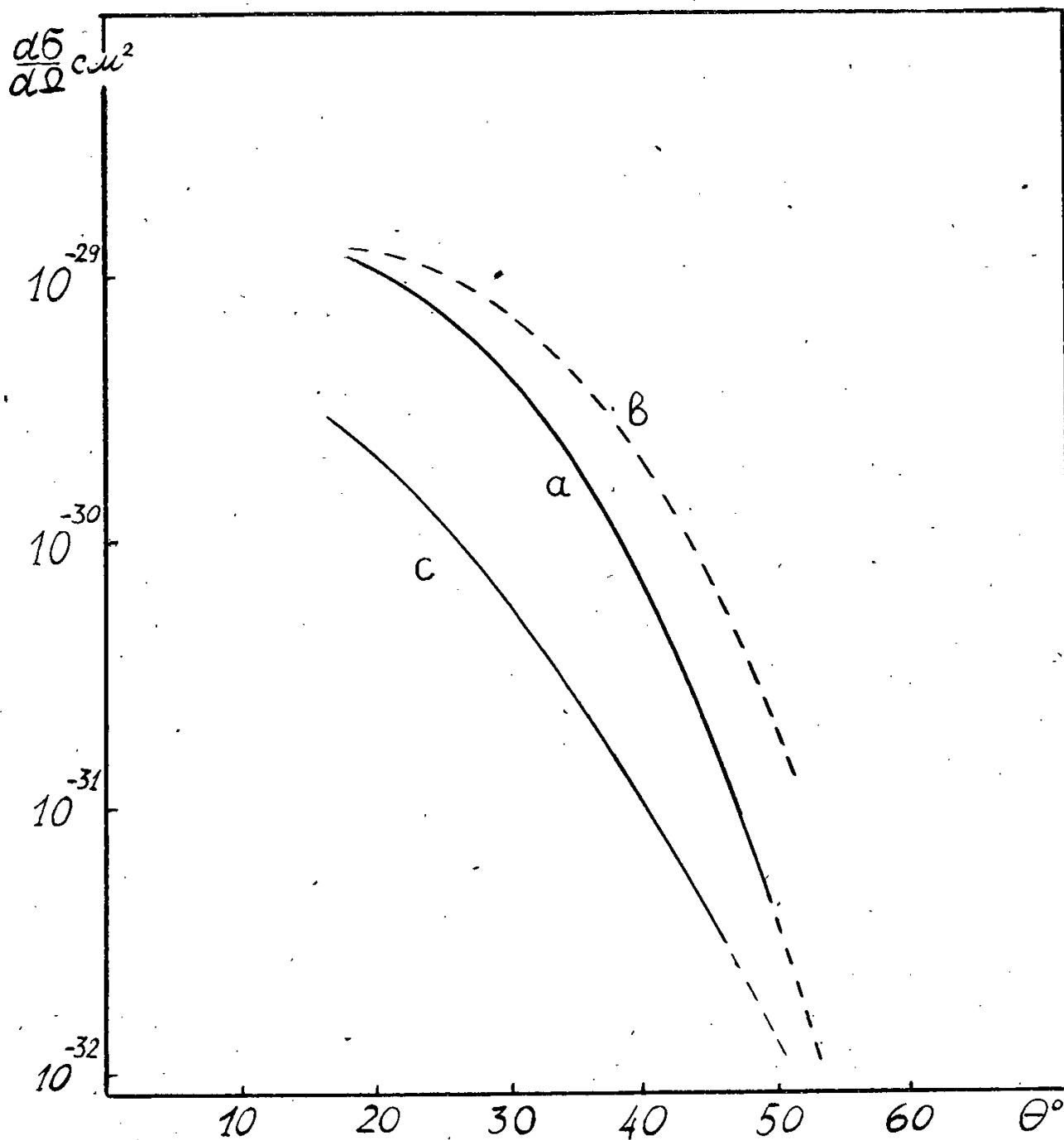
Рукопись поступила в издательский отдел
17 декабря 1963 г.



Р и с. 1. Дифференциальные сечения неупругого рассеяния электронов на Mg^{24} с возбуждением первого 2^+ уровня /кривая а / и второго 2^+ уровня /кривая б /. Кривые а' и б' соответствуют гауссовскому распределению плотности заряда.



Р и с. 2. Дифференциальное сечение неупругого рассеяния электронов с возбуждением $0^+ \rightarrow 0^+$ перехода в Gd^{156} .



Р и с. 3. Дифференциальное сечение неупругого рассеяния электронов с возбуждением монополярного перехода в Gd^{156} . Кривая а - борновское приближение; кривая б - борновское приближение с $q_{\text{эфф}}$. Кривая с учитывает "размазку" заряда.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3489. Тираж 410., 0,6 уч.-изд.л.
Январь 1964 г. Техн.ред. Н.Н. Зрелова.

77
STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

О.А. Колпаков, В.И. Котов, Ом Сан Ха

P-1565

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
В СТРУКТУРНОМ ВОЛНОВОДЕ
И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА,
ПРОЛЕТАЮЩЕГО ПО ЕГО ОСИ

Дубна 1964

P-1565

Колпаков О.А., Котов В.И., Ом Сан Ха

Распространение волн в структурном волноводе и излучение заряда, пролетающего по его оси

В работе исследуются условия распространения электромагнитных волн в некоторых специальных типах гофрированных волноводов. Получены дисперсионные уравнения и проведен их анализ. На основе данного анализа рассматривается вопрос об излучении заряда, пролетающего по оси таких волноводов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

P-1565

Kolpakov O.A., Kotov V.I., Om San Kha

Wave Propagation in a Structural Waveguide and Radiation of a Charge Flowing along its Axis

The conditions of propagating the electromagnetic waves in some special types of corrugated waveguides are investigated. The dispersion equations have been obtained and analysed. On this basis the question of the radiation of the charge flowing along the axis of such waveguides is considered.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

О.А. Колпаков, В.И. Котов, Ом Сан Ха

P-1585

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
В СТРУКТУРНОМ ВОЛНОВОДЕ
И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА,
ПРОЛЕТАЮЩЕГО ПО ЕГО ОСИ

Дубна 1984

§ 1. Постановка задачи

В настоящее время в связи с развитием микроволновой радиотехники много внимания уделяют исследованию волноводов с периодической структурой. При движении пучка заряженных частиц с большой плотностью в таком волноводе могут оказаться заметными эффекты, связанные с излучением. Поэтому представляет интерес более подробно исследовать поля, возбуждаемые заряженными сгустками в замедляющей системе.

Анализ волноводов подобного типа был проведен в работах ^{/1-5/}. Например, в ^{/2,3/} В.В. Владимирским рассмотрена задача о распространении волн в цепочке связанных резонаторов и получено выражение для ширины полосы пропускания основной частоты. В ^{/4/} дается решение задачи для некоторых видов гофрированных волноводов.

Общий метод решения таких задач заключается в том, что поля в волноводах как в пространстве распространения, так и в полостях рассматриваются в виде бесконечных рядов (см., например, ^{/1/}). Это дает возможность удовлетворить граничным условиям при самых общих предположениях, однако, приводит к необходимости исследования бесконечных детерминантов.

В некоторых частных случаях указанную трудность можно обойти. Так, например, для волновода, нагруженного дисками, можно учитывать только первые члены рядов, изображающих поле.

В случае волновода со щелями ^{/4/} поле в пространстве взаимодействия достаточно представить в виде ряда, а в резонаторных областях - квазистатическим.

В данной работе рассмотрены условия распространения электромагнитных волн и некоторые вопросы, связанные с излучением волн в периодическом волноводе со щелями.

Схематически исследуемая система изображена на рис. 1, на котором указаны также обозначения параметров системы.

В бесконечной сумме, описывающей поля в пространстве распространения, необходимо учитывать большое число членов, так как ввиду неравномерности структуры основной вклад составляют волны более высоких порядков. В то же время при рассмотрении волн, длина которых больше ширины щели, можно поля в щели предположить квазистатическими, т.е. в виде одной основной волны.

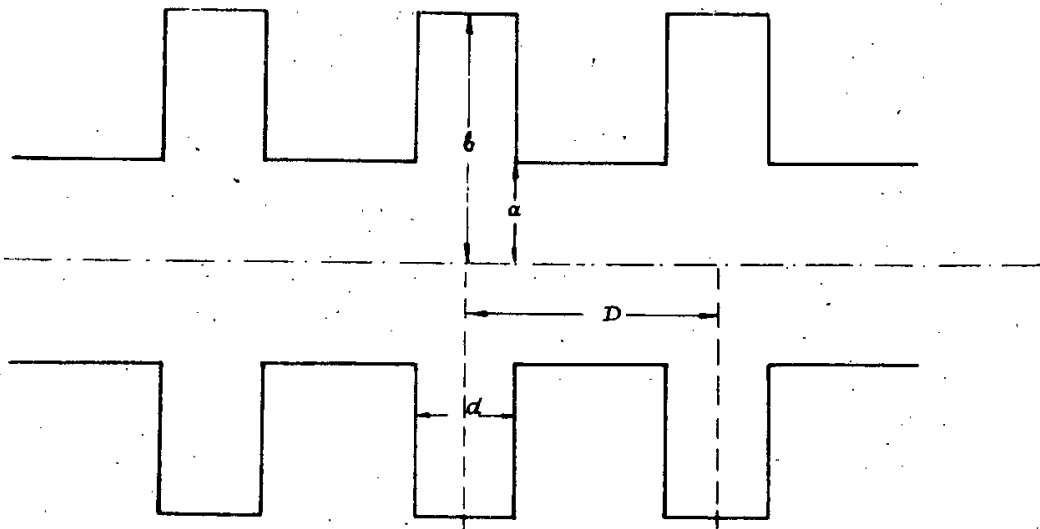


Рис. 1. Геометрия задачи и обозначение.

Как предельный ($D = d$) отсюда получается случай цепочки связанных резонаторов и случай волновода, нагруженного диафрагмами.

§ 2. Вывод дисперсионного уравнения и его анализ

Поле в пространстве распространения будем изображать в виде суммы бесконечного числа гармоник одного волнового вектора k . Для волн типа ТМ продольная составляющая электрического поля может быть представлена в виде

$$E_{\lambda}^{z1} = A_{0\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m I_0(\gamma_m r) e^{i(\omega t - k_m z)}, \quad (1)$$

где $\gamma_m = \sqrt{k_m^2 - k^2}$, $k_m = \frac{2\pi}{D}(x+m)$, x - непрерывный параметр ($-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$)
 m - целое число ($-\infty < m < \infty$).

$A_{0\lambda}$ - некоторый множитель, который можно определить из условий нормировки собственных функций системы, $\omega = kc$ - частота, где c - скорость света в пустоте.

Соответственно, азимутальная компонента магнитного и радиальная компонента электрического полей в пространстве распространения даются выражениями

$$\begin{aligned} H_{\lambda}^{\phi 1} &= ik A_{0\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m} A_m I_1(\gamma_m r) e^{i(\omega t - k_m z)}, \\ E_{\lambda}^{r1} &= i A_{0\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{k_m}{\gamma_m} A_m I_1(\gamma_m r) e^{i(\omega t - k_m z)} \end{aligned} \quad (2)$$

Поля в резонаторной полости при $kd \ll 1$ можно предположить независимыми от координаты z и записать в виде

$$E_{\lambda}^{z2} = A_{0\lambda} Z_0(kr), \quad (3)$$

$$H_{\lambda}^{\phi2} = i A_{0\lambda} Z_1(kr), \quad (4)$$

где

$$Z_0(kr) = \frac{J_0(kr) N_0(kb) - N_0(kr) J_0(kb)}{J_0(ka) N_0(kb) - N_0(ka) J_0(kb)}, \quad (5)$$

$$Z_1(kr) = \frac{J_1(kr) N_0(kb) - N_1(kr) J_0(kb)}{J_0(ka) N_0(kb) - N_0(ka) J_0(kb)}. \quad (6)$$

Вид функций $Z_0(kr)$, $Z_1(kr)$ выбран так, чтобы удовлетворялись граничные условия. Поле E_{λ}^{z1} на радиусе волновода $r=a$ равно нулю между щелями и постоянной величине на щели, т.е. $E_{\lambda}^{z1}(a)$ как бы представляет собой разложение прямоугольной функции $f(z)$ с периодом D в ряд Фурье:

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{-i \frac{2\pi m z}{D}}, \quad (7)$$

где

$$C_m = \frac{1}{D} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i \frac{2\pi m z}{D}} e^{-i \frac{2\pi m z}{D}} dz = \frac{d}{D} \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}}. \quad (8)$$

Сравнивая выражения (7) и (8) с (1), получим

$$A_m = \frac{d}{D} \frac{1}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (1) и (2) и опуская временной множитель, получим окончательные выражения для полей в пространстве распространения

$$E_{\lambda}^{z1} = A_{0\lambda} \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_0(\gamma_m r)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} e^{-ik_m z} \quad (10)$$

$$H_{\lambda}^{\phi 1} = i A_{0\lambda} (ka) \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m r)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \frac{\text{Sin } k \frac{d}{2}}{k \frac{d}{2}} e^{-ik_m z}$$

$$E_{\lambda}^{\phi 1} = i A_{0\lambda} \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{k_m}{\gamma_m} \frac{I_1(\gamma_m r)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\text{Sin } k \frac{d}{2}}{k \frac{d}{2}} e^{-ik_m z} \quad (11)$$

Дисперсионное уравнение находится из условия $H_{\lambda}^{\phi 1} = H_{\lambda}^{\phi 2}$ при $r = a$ на щели. Последнее равенство может быть выполнено только приближенно при $kd \ll 1$, если мы возьмем среднее значение $H_{\lambda}^{\phi 1}$ на промежутке d :

$$\overline{H_{\lambda}^{\phi 1}}(a) = i A_{0\lambda} (ka) \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \left[\frac{\text{Sin } k \frac{d}{2}}{k \frac{d}{2}} \right]^2 \quad (12)$$

Приравнявая $\overline{H_{\lambda}^{\phi 1}}(a)$ к $H_{\lambda}^{\phi 2}(a)$, получим

$$\frac{Z_1(ka)}{ka} = \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \left[\frac{\text{Sin } k \frac{d}{2}}{k \frac{d}{2}} \right]^2 \quad (13)$$

Уравнения (13) является дисперсионным уравнением, т.е. решения его определяют возможные частоты, с которыми могут распространяться волны в данной волноводной системе.

а) Исследование дисперсионного уравнения для волновода со щелями

Запишем (13) в виде

$$f_1(ka) = f_2(\gamma_m a, k \frac{d}{2}) \quad (14)$$

Как показывают расчеты, выполненные на электронно-вычислительной машине, функция f_2 слабо зависит от ka (при $ka < 1$), практически остается постоянной и по абсолютной величине не превосходит 1.

Результаты этих вычислений, выражающие зависимость функции f_2 от ka , приведены на графиках рис. 2.

Рассмотрим подробнее поведение функции $f_1(ka)$. Предположим, что выполнено условие $a \ll b$ и воспользуемся приближенным значением функций, входящих в $f_1(ka)$, при малых значениях аргументов и асимптотическим представлением при больших значениях аргументов.

В области очень малых значений k , когда $kb \ll 1$

$$f_1(ka) = \frac{Z_1(ka)}{ka} \approx \frac{1}{(ka)^2 \ln \frac{2}{\mu ka}} \gg 1, \quad (15)$$

где $\mu = 1,77$ - постоянная Эйлера.

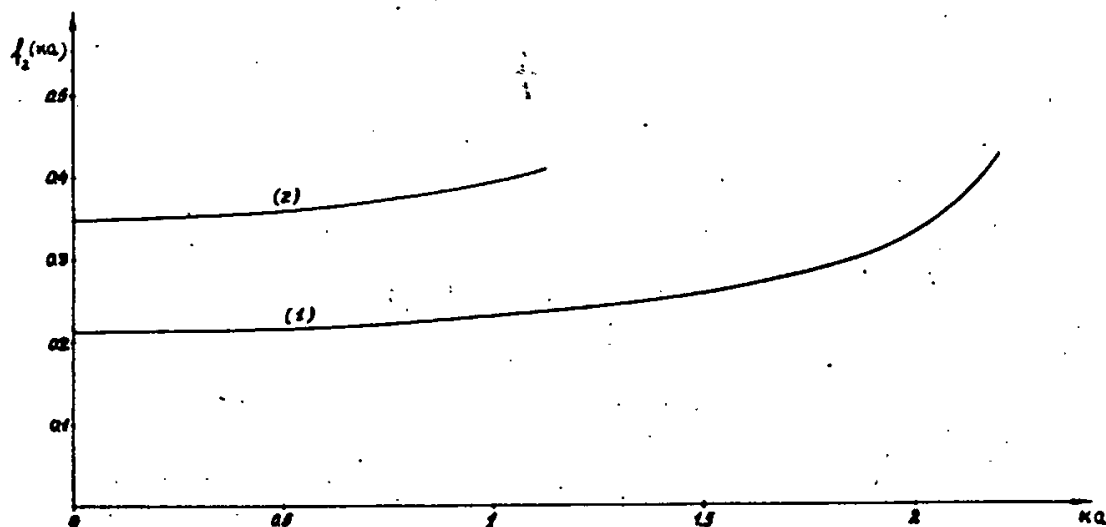


Рис. 2. Поведение правой части дисперсионного уравнения (13), в зависимости от ka .

Кривая (1) соответствует случаю $\frac{D}{d} = 100$ и $\frac{a}{d} = 3$, а кривая (2) - случаю $\frac{D}{d} = 3$ и $a = d$.

Так как $f_2 < 1$, то при $kb \ll 1$ (14) не может быть выполнено, т.е. не существует решений дисперсионного уравнения. С увеличением k величина kb достигает значения $kb = \nu_0$ (где $\nu_0 = 3/4 \pi$, $J_0(\nu_0) = 0$) и $f_1 = \frac{Z_1(ka)}{ka} = 1/2$. При дальнейшем увеличении k функция $f_1(ka)$ становится меньше $1/2$ и принимает значение при котором (14) выполняется. Таким образом, граница пропускания волновода со щелями приблизительно равна граничной частоте резонаторных полостей. С ростом k функция $f_1(ka)$ переходит через нуль и становится отрицательной. Поведение $f_1(ka)$ принимает характер тангенсоиды с периодом $\Delta(kb) = 2\pi$. Эта область соответствует $kb \gg 1$, но $ka < 1$. Функция $f_1(ka)$ в этой области может быть приближенно записана в виде

$$f_1(ka) = \frac{Z_1(ka)}{ka} = \frac{1/2 \operatorname{tg}(kb - \frac{\pi}{4}) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{(ka)^2}}{\operatorname{tg}(kb - \frac{\pi}{4}) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\mu ka}} \quad (16)$$

Качественный анализ функции подтверждается расчетом на электронно-вычислительной машине (см. рис. 3). Решения уравнения (13) соответствуют точкам пересечения кривых $f_1(ka)$ и $f_2(\gamma_m a, k_m d)$. Как показывают расчеты на электронно-вычислительной машине, при $D \gg d$ функция $f_2(\gamma_m a, k_m d)$ не зависит (по крайней мере, в пределах точности вычислений) от параметра x , характеризующего фазовую скорость волны. Однако при уменьшении D/d эта зависимость обнаруживается заметным образом (см. табл. 1).

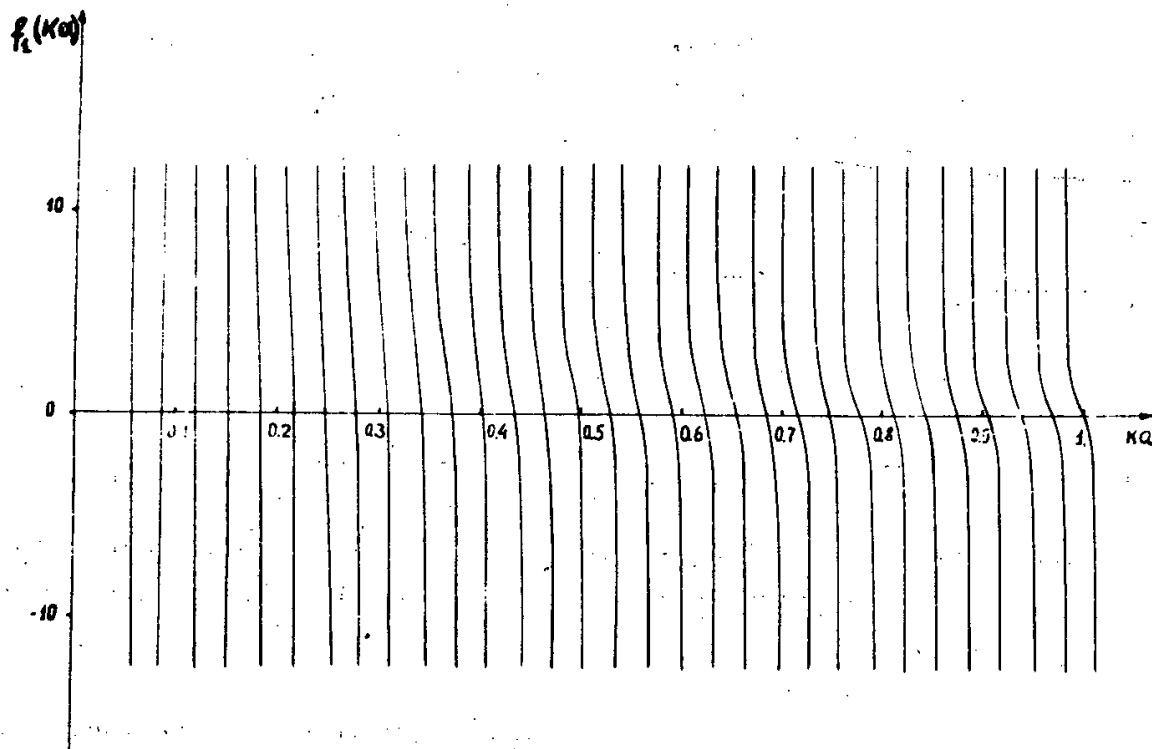


Рис. 3. Поведение левой части дисперсионного уравнения (13) в зависимости от ka

Т а б л и ц а 1

Значения функции f_2 при $\frac{D}{d} = 100$ и $\frac{D}{d} = 3$

D/d	ka	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
100	0	0,214	0,215	0,216	0,216	0,217	0,219	0,221	0,223	0,225	0,229
	0,5	0,214	0,215	0,216	0,216	0,217	0,219	0,221	0,223	0,225	0,229
3	0	0,352	0,353	0,355	0,357	0,360	0,363	0,368	0,374	0,380	0,388
	0,5	0,350	0,351	0,353	0,355	0,358	0,361	0,366	0,371	0,377	0,385

Следовательно, в общем случае мы должны сделать вывод о существовании зависимости от x функции $f_2(\gamma_m a, k_m d)$ и решения (13) представляют собой так называемые полосы пропускания возможных частот. Но для практического применения при $D \gg d$ можно считать, что ширина таких полос равна нулю и существует ряд дискретных частот, удовлетворяющих дисперсионному уравнению.

б) Диафрагмированный волновод

В работе /1/ получено дисперсионное уравнение для волновода, нагруженного дисками, т.е. для случая $D = d$ $a > d$. Покажем, что оно получается как частный случай из равенства (13). Действительно, при $d = D$ и $a > d$ можно положить

$$\gamma_m a = \frac{2\pi m a}{d}, \quad k_m \frac{d}{2} \approx \pi m, \quad \frac{I_1(\gamma_m a)}{I_0(\gamma_m a)} \approx 1.$$

Вводя обозначение $k_1 = \sqrt{k^2 - (\frac{2\pi x}{d})^2}$, перепишем (13) в виде

$$\begin{aligned} \frac{Z_1(ka)}{ka} &= \sin^2 \pi x \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \frac{1}{(k_m \frac{d}{2})^2} = \\ &= \frac{J_1(k_1 a)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)} + \frac{d}{a \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое много меньше единицы, так как $\frac{d}{a} < 1$, а $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \approx 1$, и им можно пренебречь. Таким образом, для диафрагмированного волновода имеем следующее дисперсионное уравнение

$$\frac{Z_1(ka)}{ka} = \frac{J_1(k_1 a)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)}, \quad (17)$$

которое совпадает с полученным при $\frac{d}{a} < 1$, $kd \ll 1$ в работе /1/. Левая часть (17) нами уже исследована, проследим поведение правой части. Так как $k_1 = \sqrt{k^2 - (\frac{2\pi x}{d})^2}$

и $ka \ll 1$, то при $|\frac{2\pi x}{d}| < k$ величина $\frac{J_1(k_1 a)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)} \approx \frac{1}{2}$ при изменении параметра x в пределах от 0 до $\frac{kd}{2\pi}$. При дальнейшем увеличении x величина k_1 становится мнимой, причем $|k_1 a| \approx |x| \frac{2\pi a}{d} \gg 1$ и

$$\frac{J_1(k_1 a)}{(k_1 a) J_0(k_1 a)} = \frac{I_1(|k_1| a)}{I_0(|k_1| a) (|k_1| a)} \rightarrow 0.$$

Следовательно, правая часть равенства (17) может иметь значения в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$, а левая часть представляет ряд тангенсоид.

Более подробный анализ подобного соотношения был проведен в /5/

Случай $D = d$, $a \ll d$ можно рассматривать как цепочку связанных резонаторов. Как было отмечено в § 1, в этом случае необходимо учитывать большое число членов в ряду правой части равенства (13).

Рассмотрим сначала левую часть (13) при $a \ll d$. При $a \rightarrow 0$, $(ka) \rightarrow 0$ спектр частот пропускания мало отличается от собственных частот резонатора, которые определяются из условия $J_0(kb) = 0$, т.е. $kb \approx \pi(\frac{1}{4} + n)$, где n - целые числа. При этом левая часть (13) мало отличается от $\frac{1}{2}$ и может быть представлена, согласно (16), в виде

$$\frac{Z_1(ka)}{ka} \approx \frac{1}{2} + \Delta kb \frac{2}{\pi} \frac{1}{(ka)^2}, \quad (18)$$

где Δkb - малое отклонение величины kb от значения $\pi(\frac{1}{4} + n)$. Вторым членом справа в (18) мал по сравнению с $\frac{1}{2}$. Используя известное равенство^{16/}

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2(m+x)^2} = 1, \quad (19)$$

преобразуем правую часть (13) к виду

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2(m+x)^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_m^2}{(m+x)^2}, \quad (20)$$

где

$$\delta_m^2 = \frac{1}{2} - \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)}. \quad (21)$$

Вследствие того, что $a \ll d$, величина $\gamma_m a \approx \frac{2\pi am}{d} \ll 1$ для большого числа первых членов, равного m_0 . В то же время остаточная сумма, благодаря множителю $\frac{1}{(m+x)^2}$ мала по сравнению с суммой первых m_0 членов. Поэтому, выделяя сумму первых членов, мы учитываем главную часть суммы, отбрасывая величину меньшего порядка. Для членов, когда выполняется $\gamma_m a \ll 1$, с точностью до второго порядка величины $\gamma_m a$,

$$\frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \approx \frac{1}{2} [1 - \frac{1}{8}(\gamma_m a)^2] \quad (22)$$

и, следовательно, для (21) будем иметь

$$\delta_m^2 = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 a^2}{d^2} (m+x)^2. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (20), получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 (m+x)^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2} \frac{\pi^2 a^2}{2 d^2} m_0 \quad (24)$$

Величину m_0 можно оценить, принимая во внимание, что при $m \rightarrow \infty$ выражение

$$\frac{I_1(\gamma_m a)}{(\gamma_m a) I_0(\gamma_m a)} \rightarrow 0 \quad . \quad \text{Приравнявая нулю правую часть (22), получим}$$

$$m_0 = \sqrt{2} \frac{d}{\pi a} \quad (25)$$

Подставляя (25) в формулу (24) и используя (18), будем иметь

$$\frac{1}{2} + \Delta k b \frac{2}{\pi (ka)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{\pi d} \sin^2 \pi x \quad (26)$$

Вводя обозначение $\frac{2 \pi x}{d} = \sigma$, получим для относительной ширины полосы

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{a}{d}\right) \left(\frac{a}{b}\right) (ka) (1 - \cos \sigma d) \quad (27)$$

В работе ^{13/} для этого случая выведена формула

$$\frac{\Delta k}{k} = 1/3 \left(\frac{a}{d}\right) \left(\frac{a}{b}\right) (ka) (1 - \cos \sigma d) \quad (28)$$

Различие в численном коэффициенте обусловлено приблизительной оценкой суммы в (20). Неточность заключается в том, что учтена только часть суммы от $m=0$ до $m=m_0$ и в какой-то степени произволен выбор числа m_0 .

Произведем более точное вычисление суммы в (20):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{I_1(\gamma_m a)}{\gamma_m a I_0(\gamma_m a)} \right] \frac{1}{(m+x)^2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \pi x \frac{a^2}{d^2} m_0 - \\ &- \frac{2 \sin^2 \pi x}{\pi^2} \left\{ \sum_{m_0}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^2} - \sum_{m_0}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{\gamma_m a I_0(\gamma_m a)} \frac{1}{(m+x)^2} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

Для $m > m_0$ сумму можно заменить интегралом. Считая, что при $m > m_0$ величина $(m+x) = m$ и вводя обозначения $\gamma_m a = \frac{2 \pi a m}{d} = y$, $\frac{2 \pi a}{d} = dy$, $\frac{2 \pi a m_0}{d} = y_0$, преобразуем (29) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{a}{4 \pi d} \frac{\sin^2 \pi x}{y_0} - \frac{4a}{\pi d} \sin^2 \pi x \left[\frac{1}{2} \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y^2} - \int_{y_0}^{\infty} \frac{I_1(y)}{y I_0(y)} \frac{dy}{y^3} \right] &= \\ = \frac{1}{2} - \frac{4a}{\pi d} \sin^2 \pi x \left[\frac{y_0}{16} + \frac{1}{2 y_0} - R \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$R = \int_{y_0}^{\infty} \frac{I_1(y)}{I_0(y)} \frac{dy}{y^3}$$

Вводя обозначение

$$\epsilon_0 = 16 \left[\frac{y_0}{16} + \frac{1}{2y_0} - R \right], \quad (31)$$

получим выражение для ширины полосы, аналогичное (27)

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\epsilon_0}{16} \left(\frac{a}{d} \right) \left(\frac{-a}{b} \right) (ka) (1 - \cos \sigma d). \quad (32)$$

Принимая во внимание, что при $m \rightarrow \infty$ величина $\frac{I_1(y)}{I_0(y)} \rightarrow 1$, получим $R \approx \frac{1}{2y_0^2}$

и, следовательно,

$$\epsilon_0 = 16 \left[\frac{y_0}{16} + \frac{1}{2y_0} - \frac{1}{2y_0^2} \right]$$

Заменяя y_0 через m_0 и используя оценку m_0 по (25), для ϵ_0 найдем следующее численное значение

$$\frac{\epsilon_0}{16} = \frac{1}{3,4}$$

Как можно видеть, получилась величина уже более близкая к $1/3$. Нами была произведена также оценка величины R , непосредственно путем численного интегрирования при различных значениях y_0 . Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

Расчетные значения величины R и ϵ_0 в зависимости от y_0

y_0	R	ϵ_0
0,095	4,9934	4,4138
0,1	4,7435	4,2040
0,2	2,2453	4,2752
0,3	1,4244	4,1768
0,4	1,0144	4,1696
0,5	0,7707	4,1688
0,6	0,6100	4,1728
0,7	0,5008	4,1160
0,8	0,4165	4,1360
0,9	0,3008	4,1528
1,0	0,0968	4,1872
2,0		4,4212

Из таблицы 2 видно, что ϵ_0 мало зависит от y_0 и дает для $\frac{\epsilon_0}{16}$ величину, близкую к $1/3$.

Согласно равенству (30), значение суммы в правой части дисперсионного уравнения (13) при $D = d$, $\frac{a}{d} \ll 1$ и $|x|=0,5$ равно $\frac{1}{2} - \frac{a \epsilon_0}{4\pi d}$. Подставляя среднее значение для ϵ_0 из таблицы 2, равное $\epsilon_0 = 4,2$, получим

$$\frac{a}{4\pi d} \epsilon_0 = \frac{4,2}{4\pi} \left(\frac{a}{d}\right) \approx 3,6 \cdot 10^{-1} \left(\frac{a}{d}\right).$$

Было подсчитано значение этой величины в зависимости от (ka) при $\frac{a}{d} = 10^{-2}$. Результаты вычислений приведены в таблице (3).

Т а б л и ц а 3

Максимальное (в пределах полосы $0 \leq |x| \leq 0,5$) изменение суммы в (13) от (ka) при $D = d$, $\frac{a}{d} \ll 1$.

ka	Величина суммы в (13) при $x = 0$	Величина суммы в (13) при $x = 0,5$	Величина $\frac{a}{4\pi d} \epsilon_0$
0,001	0,5000	0,4963	0,0036
0,002	0,5000	0,4963	0,0036
0,003	0,5000	0,4963	0,0036
0,004	0,5000	0,4963	0,0036
0,005	0,5000	0,4963	0,0036
0,006	0,5000	0,4963	0,0036
0,007	0,5000	0,4963	0,0036
0,008	0,5000	0,4963	0,0036
0,009	0,5000	0,4963	0,0036
0,010	0,5000	0,4963	0,0036
0,011	0,5000	0,4963	0,0036
0,500	0,5163	0,5124	0,0038
1,000	0,5751	0,5704	0,0046
1,500	0,7261	0,7196	0,0070

Как следует из таблицы 3, эта величина сохраняется постоянной в области изменения (ka) вплоть до $ka \approx 1$. Мы рассмотрели цепочку связанных резонаторов при $D = d$. Рассмотрим теперь случай, когда $D \gg d$, а отношение $\frac{D}{d}$ равно целому числу p (очевидно, что при $D \gg d$ это условие не носит принципиального характера). Тогда, учитывая (22), сумму в правой части (13) можно записать в виде:

$$\frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_1(\gamma_m a)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (m+x)}{[\frac{\pi d}{D} (m+x)]^2} = \frac{d}{2D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [1 - (\gamma_m a)^2] \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (m+x)}{[\frac{\pi d}{D} (m+x)]^2} \quad (33)$$

Положим $\gamma_m a = \frac{2\pi a}{D} (m+x)$ и введем обозначения

$$m = q \frac{D}{d} + n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{D}{d} - 1; \quad -\infty < q < \infty,$$

причем при $q = 0, 1, 2 \dots$ будут учтены все значения $m = 0, 1, 2 \dots$, а при $q = -1, -2, \dots$ будут учтены все значения $m = -1, -2, -3 \dots$. В новых обозначениях (33) преобразуется к виду

$$\frac{d}{2D} \sum [1 - \frac{\pi^2 a^2}{2D^2} (q \frac{D}{d} + n + x)^2] \frac{\sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x)}{[\frac{\pi d}{D} (q \frac{D}{d} + n+x)]^2} =$$

$$\frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \frac{\pi^2 a^2}{2D^2} (q \frac{D}{d} + n + x)^2}{\pi^2 [q + \frac{d}{D} (n+x)]^2} = \quad (34)$$

$$\approx \frac{d}{2D} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} [1 - 2 \frac{a^2}{d^2} \sum_{q=1}^{q_0} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x)] = \frac{1}{2} - \frac{d}{2D} \frac{a^2}{d^2} \sum_{n=0}^{\frac{D}{d}-1} \sin^2 \frac{\pi d}{D} (n+x) =$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{d^2} q_0] = \delta S.$$

Число q_0 можно оценить таким же образом, как это было сделано в случае $d=D$; например, полагая $1 - \frac{(\gamma_m a)^2}{8} = 0$, получим $\frac{\pi a m}{D} = \sqrt{2}$ или $\frac{\pi a q_0}{D} = \frac{d}{D} \sqrt{2}$, $q_0 = \frac{d}{a} \frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

Подставляя в (34) это значение q_0 , найдем

$$\delta S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \frac{a}{d} \sqrt{2}. \quad (35)$$

Соотношение (35) позволяет сделать два вывода:

- 1) при $\frac{D}{d} > 1$, $\frac{a}{d} \ll 1$, сумма в правой части (13) не зависит от параметра x ;
- 2) частота пропускания уже не равна точно резонаторной частоте и характеризуется постоянным сдвигом

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{a}{d} \right) (ka). \quad (36)$$

Используя результаты численных расчетов, проиллюстрируем равенство (36) в таблице 4.

По формуле (35) мы несколько занизили оценку величины q_0 , но, очевидно, что соблюдается пропорциональность отношению $\frac{a}{d}$ и независимость от (ka) .

Т а б л и ц а 4

Точные значения суммы (33) и величина δS при $\frac{D}{d} = 100$

ka		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\frac{a}{d} = \frac{1}{10}$	δS по (35)	0,4887	0,4887	0,4887	0,4887	0,4887
	Числен- ный ре- зультат	0,4836	0,4836	0,4836	0,4837	0,4837
$\frac{a}{d} = \frac{1}{20}$	δS по (35)	0,4943	0,4943	0,4943	0,4943	0,4943
	Числен- ный ре- зультат	0,4917	0,4917	0,4917	0,4917	0,4918

§ 3. Излучение заряда, пролетающего по оси волновода со щелями

В работе ^{17/} изложен метод определения излучения заряда, пролетающего по оси структурного волновода.

Излучение можно подсчитать, решая неоднородное уравнение, когда известны собственные функции волновода.

Построим выражение для функции вектор-потенциала волновода со щелями

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}, t) = \vec{A}_\lambda(\vec{r}) q_\lambda(t). \quad (37)$$

Как известно, функция $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$, зависящая только от координат, пропорциональна координатной функции электрического поля (см. (10)).

Следовательно, для z-компоненты функции $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ мы сразу можем написать выражение

$$A_\lambda^z = a_\lambda \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_0(\gamma_m r)}{I_0(\gamma_m a)} \frac{\sin \frac{k_m d}{2}}{k_m \frac{d}{2}} e^{-ik_m z}, \quad (38)$$

где a_λ определяется из условия нормировки

$$\int_V |A_\lambda^z|^2 dV = 4\pi c^2,$$

V_0 - объем отрезка волновода, длина которого равна периоду структуры D .

Функция вектор-потенциала, зависящая от времени, определяется из уравнения

$$\ddot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2 q_\lambda = \frac{1}{c} \int_{V_0} j(z) A_\lambda^* dV, \quad (39)$$

где ω_λ - собственные частоты системы, $j(z)$ - плотность тока в направлении z .
 Согласно (38), при $r=0$ имеем

$$A_\lambda^*(z) = a_\lambda \frac{d}{D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\lambda m} e^{-ik_m z}, \quad (40)$$

$$B_{\lambda m} = \frac{\sin k_m \frac{d}{2}}{I_0 (\gamma_m a) k_m \frac{d}{2}}. \quad (41)$$

В соответствии с [7] интенсивность излучения определяется через коэффициенты гармоник $B_{\lambda m}$ (см. (41)):

$$P_\lambda = \frac{Q^2 v^2 a_\lambda^2 d}{4c^2} \left(\frac{d}{D}\right)^2 \left\{ \sum_{m=m'} \frac{B_{\lambda m}^2}{\left|\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} - v\right|} + \sum_{m=m''} \frac{B_{\lambda m}^2}{\left|\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} + v\right|} \right\}. \quad (42)$$

Суммирование в (42) проводится при значениях $m=m'$ и $m=m''$, которые определяются условиями излучения

$$(m' + x) \frac{2\pi}{D} v = \omega_\lambda, \quad (m'' + x) \frac{2\pi}{D} v = -\omega_\lambda, \quad (43)$$

v - скорость частицы в z - направлении, Q - ее заряд.

Как было показано в § 2, ω_λ представляет набор дискретных частот

$$\omega_\lambda = (\gamma + n) \frac{\pi c}{b}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Величина $\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma}$ в случае $D \gg d$ очень мала, так что при подсчете интенсивности излучения для данной структуры можно положить $\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} \approx 0$.

Вследствие этого частота ω_λ мало изменяется в пределах полосы пропускания и может считаться постоянной. Из постоянства ω_λ в пределах полосы следует, что для данного ω_λ могут существовать только два числа m , при которых удовлетворяются равенства (43) соответственно:

$$(m + x) = \pm \frac{D}{2b\beta} (\gamma + n), \quad (44)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$ - относительная скорость заряда.

В соответствии с (44)

$$k_m \frac{d}{2} = \frac{\pi d}{2\beta b} \eta, \quad (45)$$

$$\gamma_m a = \frac{\pi a}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2} \eta,$$

$$\eta = \frac{3}{4} + n.$$

Подставляя (45) в (42) и учитывая, что из каждой суммы в (42) необходимо взять по одному члену и полагая $\frac{d\omega_\lambda}{d\sigma} \approx 0$, получим

$$P_\lambda = \frac{Q^2 v d}{2c^2} \left(\frac{d}{D}\right)^2 a_\lambda^2 \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)}{I_0^2\left(\frac{\pi a \eta}{\beta b \sqrt{1-\beta^2}}\right) \left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)^2} \quad (46)$$

Нормировочный множитель a_λ можно определить, пользуясь следующими соображениями. Собственные функции вектор-потенциала $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ в резонаторных полостях, согласно (3), должны иметь вид

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = a_\lambda Z_0(kz) \dots \quad (47)$$

При $b \gg a$ и $ka \ll 1$ функции $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ в резонаторных полостях будут мало отличаться от собственных функций замкнутого резонатора.

Последние известны и определяются выражениями

$$\xi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{2c}{b J_1(kb)} J_1(kr), \quad (48)$$

где λ соответствует собственным частотам ω_λ резонатора, или, поскольку

$$J_1(kb) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kb}}, \text{ то}$$

$$\xi_\lambda = \sqrt{\frac{2\pi k}{bd}} c J_0(kr).$$

Так как $Z_0(ka) a_\lambda = \xi_\lambda(ka)$ $J_0(ka) \approx 1$, $Z_0(ka) \approx 1$,

то

$$a_\lambda = c \sqrt{\frac{2\pi k}{bd}} = \frac{c\pi}{b} \sqrt{\frac{2\eta}{d}}. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (46), будем иметь

$$P_\lambda = \frac{Q^2 \pi^2 v \eta}{b^2} \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)}{I_0^2\left(\frac{\pi a \eta}{\beta b \sqrt{1-\beta^2}}\right) \left(\frac{\pi d \eta}{2\beta b}\right)^2} \quad (50)$$

Полное излучение можно оценить, считая, что возмущение испытывают все волны, для которых $ka < 1$. Это согласуется и с тем фактом, что в гладком волноводе волны с $ka < 1$ вообще не могут распространяться. Выражение для полных потерь на излучение будет представлять собой сумму P_λ по η вплоть до максимального значения η , определяемого, например, из условия:

$$ka = 1 \quad kb \frac{a}{b} = \pi \eta_{\text{макс}} \frac{a}{b} \approx 1, \quad \eta_{\text{макс}} = \frac{b}{\pi a}. \quad (51)$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках в формуле (50). Максимальное значение аргументов в функциях

$$I \left(\frac{\pi a \eta}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2} \right) \quad \text{и} \quad \text{Sin}^2 \left(\frac{\pi d \eta}{2 \beta b} \right) / \left(\frac{\pi d \eta}{2 \beta b} \right)^2,$$

согласно условия (51), равны

$$x_{1\text{макс}} = \frac{\pi a \eta_{\text{макс}}}{\beta b} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta}, \quad x_{2\text{макс}} = \frac{\pi d \eta_{\text{макс}}}{2 \beta b} = \frac{1}{2 \beta} \left(\frac{d}{a} \right). \quad (52)$$

Следовательно, при $\beta \approx 1$ и $d \leq a$ имеем

$$x_{1\text{макс}} \ll 1, \quad x_{2\text{макс}} < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad I_0(x_{1\text{макс}}) \approx 1, \quad \left[\frac{\text{Sin } x_{2\text{макс}}}{x_{2\text{макс}}} \right]^2 \approx 1.$$

Учитывая данное обстоятельство, формулу (50) можно заменить соответствующим приближенным равенством

$$P_{\lambda} = \frac{Q^2 \pi^2 v \eta}{b^2}. \quad (53)$$

Выражение для полного излучения будет содержать сумму по η до $\eta = \eta_{\text{макс}}$; при $\eta_{\text{макс}} \gg 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{макс}}} n \approx \frac{n_{\text{макс}}^2}{2} \approx \frac{\eta_{\text{макс}}^2}{2} = \frac{b^2}{2 \pi^2 a^2}. \quad (54)$$

Следовательно, для полного излучения получим

$$P = \frac{Q^2}{2 a^2} v \left(\frac{d}{D} \right)^2 \quad (55)$$

или для работы, приходящейся на один резонатор

$$A = \frac{Q^2}{2 a} \left(\frac{d}{a} \right) \left(\frac{d}{D} \right). \quad (56)$$

В работе^{/8/} было получено выражение для потерянной энергии при пролетании заряда через отдельный резонатор.

Формула (56) отличается от этого выражения множителем $\frac{d}{D}$, характеризующим скважность. Наличие этого множителя можно объяснить тем, что в периодической структуре мы подсчитываем резонансное излучение, которое исчезает при стремлении скважности к нулю. Для отдельного резонатора подсчитывается переходное излучение при единичном пролете заряда через него.

Аналогичным образом можно получить выражение для интенсивности излучения в случае $D = d$, $a \ll d$ для отдельной полосы пропускания частот, которое будет совпадать с приведенным в работах /7/ и /9/.

В заключение авторы выражают свою признательность Б.М. Болотовскому, сделавшему ряд ценных замечаний при обсуждении работы.

Л и т е р а т у р а

1. А.И. Ахиезер, Я.Б. Файнберг. УФН, 44, 321 (1951).
2. В.В. Владимирский. ЖТФ, 17, 1277 (1947).
3. В.В. Владимирский. ЖТФ, 17, 1269 (1947).
4. М.Ф. Стельмах, И.Б. Ольдерогге, Радиотехника и электроника 6, 980 (1959).
5. E.L.Chu, W.W.Hansen, J. Appl. Phys., 18, 996 (1947).
6. И.С. Грандштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ФМ (1962).
7. А.И. Ахиезер, Г.Я. Любарский, Я.Б. Файнберг. ЖЭТФ, 25, 2526 (1955).
8. О.А. Колпаков, В.И. Котов. Препринт ОИЯИ - 1366, Дубна (1963); ЖТФ (в печати).
9. Б.М. Болотовский. УФН, 75, 285 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 февраля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3806. Тираж 300. 1,3 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р.Саранцева Февраль 1964 г.

♦ ♦

28



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

LABORATORY OF THEORETICAL PHYSICS

G. Domokos, P. Suranyi and A. Vancura

E- 1512

In English

FERMI INTERACTIONS
AT HIGH ENERGIES

Дубна 1964

E - 1512

Ванчура А., Домокош Г., Шурани П.

**ФЕРМИ-ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ ВЫСОКИХ
ЭНЕРГИЯХ**

Работа издается только на английском языке.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.**

E - 1512

Domokos G., Suranyi P., Vancura A.

Fermi Interactions at High Energies

**Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.**

G. Domokos, P. Suranyi and A. Vancura

E- 1512

FERMI INTERACTIONS
AT HIGH ENERGIES

Submitted to Nuovo Cimento

Дубна 1964

А н н о т а ц и я

Исследована 4-фермионная лептонная вершина в лестничном приближении. Вершинная функция или амплитуда рассеяния лептонов определена однозначно: произвольные константы перенормировки не появляются в конечных выражениях. Фермиевская константа связи перенормируется конечным множителем $(\frac{2}{\pi})^{1/2}$. Амплитуда рассеяния является чисто мнимой при больших энергиях. Дифференциальное сечение убывает с энергией. Упругое сечение убывает как $s^{-1} \log s$. Полу-ширина пика вперед постоянна.

A b s t r a c t

The four lepton vertex function is investigated in the ladder approximation. The vertex function of lepton-lepton scattering amplitude is determined uniquely: Arbitrary renormalization constants do not appear in the final expressions. The partial wave amplitude is a meromorphic function of the four dimensional angular momentum in the whole complex plane. The Fermi coupling constant is renormalized by the finite factor $(\frac{2}{\pi})^{1/2}$. The scattering amplitude is purely imaginary at high energies. The correction factor to the angular distribution is a universal function of the variable $x = -\log s (\log(-t))^{-1}$. The differential cross section decreases with energy as $s^{-1} (\log s)^{-2}$. The elastic cross section decreases as $s^{-1} \log s$. The half-width of the forward peak is constant. The contribution of the direct channel to the cross section decreases as $s^{-1/5}$.

1. Introduction

Ever since Heisenberg divided the local interactions in field theory into two kinds^[1-4], the theory of interactions of the second kind have been the "enfant terrible" of quantum field theory. It seems on the one hand that they do exist in nature (in particular weak interactions belong to this kind), on the other hand with the development of renormalization theory it turned out that interactions of the second kind* are "nonrenormalizable" in the sense that the infinities (more correctly, the arbitrariness) arising in a perturbation expansion cannot be removed by renormalizing the constants of the theory (i.e. masses and coupling constants).

* i.e. those where the coupling constant has the dimensions of a positive power of length. (Throughout we work in a system of units where $\hbar = c = 1$).

Actually, in a perturbative expansion of S matrix elements or Green functions, there arises an infinite number of arbitrary subtraction constants (See e.g.^[5]). A more physical aspect of the problem is that interactions of the second kind are expected to "become strong" at high energies. In fact, the dimensionless expansion parameter in a perturbative expansion is not the coupling constant itself, but the coupling constant times some power of a characteristic momentum of the system (total C.M. momentum, momentum transfer, etc.). Focussing our attention to Fermi interactions, the coupling constant G has a dimension (length)^[2], so one expects a dimensionless expansion parameter to be $(E^2 G^2)$ where E is the total C.M. momentum. This shows that $(E^2 G^2 = 1)$ (i.e. "the weak interaction becomes strong") at $|E| = 300$ GeV. This circumstance has given rise to many speculations about high energy lepton physics and higher order corrections to weak interactions; a survey of them with a practically complete bibliography can be found in the recent work of Markov^[6].

This situation is to be confronted with the following observation of Pais^[7]. If - as follows from the previous considerations - higher order corrections to weak interactions were large, we should get a large $K_1^0 - K^0$ mass difference in striking contradiction with experimental results.

In the framework of the π -meson theory, Feinberg and Pais^[8-9], by applying a special procedure to remove the dangerous divergences, succeeded in summing ladder diagrams their result is that higher order corrections do play a non-negligible role; in particu-

lar, they obtained that the coupling constant is renormalized by a factor of $3/4$.

The aim of the present work is to investigate the behaviour of the four-lepton vertex (or equivalently, the two-lepton propagator) at high energies. Instead of assuming an intermediate boson theory, we assume the existence of an elementary Fermi interaction of the V-A type. To calculate the vertex, we apply the ladder approximation: we consider two fermions propagating with the successive exchange of a fermion loop. The Bethe-Salpeter equation with singular interaction kernel arising thereby is treated by a method, proposed in ref.^[10]. The essence of that method consisted in transforming the BS equation into a non-Fuchsian differential equation, which can be investigated by known methods^[11].

In Sec. 2 after a brief general discussion of the properties of the four-fermion vertex, we derive the differential equation mentioned above. Sec. 3 is devoted to the description of the approximation method used to solve the equation. Sec. 4 contains the main result of the paper: We show that subtraction terms do not contribute to the amplitude and we obtain an asymptotic expression for the scattering amplitude of two leptons; we find that the leading term is purely imaginary and decreases with energy. The fifth section deals with the calculation of the asymptotic behaviour of the scattering amplitude in the direct channel by the application of the WKB method. In the last sixth section we discuss some physical consequences of the results obtained; further we point out the probable limitations of our approximation and possible improvements.

2. Derivation of the differential equation

Consider a four-fermion interaction of the V-A type with charged currents only. As an interaction kernel for the BS equation, we choose the diagram drawn on Fig. 1. If the diagram on Fig. 1 is to describe the interaction between two charged leptons (μ, e), the loop in the intermediate state contains two neutrinos while if we consider the scattering of a charged lepton on a neutrino, there is a charged lepton and a neutrino exchanged. However, in what follows, we neglect all the lepton masses, thus, obtaining an "asymptotic equation" in the sense, explained in ref.^[10]; in this approximation all the lepton-lepton (ll) and antilepton-antilepton ($\bar{a}\bar{a}$) amplitudes equal each other, while the lepton-antilepton ($l\bar{a}$) amplitudes differ from them by sign. Instead of going through the usual formal argument to show this, we prefer the following elementary argument. The two-fermion propagator can be conceived as the infinite iteration of the interaction kernel of Fig. 1. A glance at Fig. 2 shows that if we change the orientation of an internal fermion loop, we obtain the same expression*; going from ll to $l\bar{a}$ amplitude means reversing the orientation of the "last", open fermion line, which obviously results in a change of

the sign of the amplitude; for an () amplitude we have to change the orientation of two open lines.

* Like in quantum electrodynamics for a loop with four external photon lines.

By the same argument we see that instead of treating a multichannel problem, it is sufficient to calculate the ladder diagram with one definite orientation of the lines only.

Denoting the two-lepton propagator by G , the free one by G_0 , the interaction kernel by K , the B.S. equation in operator form reads:

$$G = G_0 + G_0 K G \quad (2.1)$$

where the quantities involved have the following expressions in momentum representation:

$$G_0(p, q; E) = \delta(p - q) \left[\frac{1}{2} E^{(1)} - \hat{p}^{(1)} \right]^{-1} \left[\frac{1}{2} E^{(2)} - \hat{p}^{(2)} \right]^{-1}, \quad (2.2)$$

$$K(p, q) = \gamma_p^{(1)} (1 + i\gamma_5^{(1)}) \cdot \gamma_p^{(2)} (1 + i\gamma_5^{(2)}) \cdot K,$$

$$G(p, q; E) = \gamma_p^{(1)} (1 - i\gamma_5^{(1)}) \gamma_p^{(2)} (1 - i\gamma_5^{(2)}) G.$$

In eq. (2.2) E is the total $C\#$ four momentum of the leptons, p, q are their relative momenta; the superscripts (1) and (2) refer to the "first" and "second" lepton, respectively. The scalar function K is given by the following expressions:

$$K = K_1(t) + K_2(t) = \frac{f^2 t^2}{(2\pi)^4 i} (2\pi)^3 \int_0^\infty \frac{dt'}{t'(t' - t)} + \xi_1 + \xi_2 t. \quad (2.3)$$

Here $t = (p - q)^2$, f stands for the Fermi coupling constant, ξ_1 and ξ_2 are subtraction constants. The symbols $K_1(t)$ and $K_2(t)$ stand for the spectral integral and the subtraction polynomial, respectively. (Notice that we have only one invariant function in the expression of G ; this is the consequence of the $V-A$ character of the four-lepton interaction and the vanishing of the lepton masses). The B.S. equation for the invariant function G can be derived in a straightforward way. The result is:

$$(p^2 - \frac{1}{2} E^2) G(p, q; E) = \delta(p - q) + \frac{16 f^2}{(2\pi)^4 i} \int dk K(p, k) G(k, q; E). \quad (2.4)$$

Following the procedure described in ref. [10] we now separate the "analytic part" of G , called G_1 (i.e. that obeying eq. (2.4) with K_1 only), go over to Euclidean metric and expand G_1 according to four-dimensional spherical harmonics. (See, however, Sec.6). Finally we perform a Hankel transformation on the resulting radial equation. After these operations we are left with the following differential equation for the radial Green function $G_1(s, r')$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2 - 1}{r^2} + k^2 \right] G_1(r, r') = \lambda^2 r^{-6} G_1(r, r') + (rr')^{-3/2} \delta(r-r'), \quad (2.5)$$

where $k^2 = \frac{1}{2} E^2$, $\lambda^2 = 32 \pi^{-1} t^2$; n^2 is the square of the four dimensional orbital momentum, defined as in ref. 10 (i.e. its physical values being 1, 2, 3 ...). Alternatively, we can write the equation for the wave function, $\psi(r) = r^{-3/2} u(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{n^2 - 1/4}{r^2} - \frac{\lambda^2}{r^6} \right] u(r) = 0 \quad (2.6)$$

Eq. (2.6) has exactly the form of a radial Schrödinger equation with a repulsive potential $\lambda^2 r^{-6}$. Therefore, in order to find the scattering amplitude, we can apply the procedure, familiar in non relativistic quantum mechanics. Eq. (2.6) cannot be integrated in terms of known transcendental functions, so we are going to develop an approximation procedure, valid for small values of k^2 and potentials more singular than $O(r^{-2})$ at the origin (A usual effective range expansion would diverge, cf. Landau-Lifschitz^{12/}).

3. Approximate Solution of the Differential Equation

We start from the observation that if we drop either the kinetic energy term or the potential from eq. (2.6), it can be integrated exactly in terms of Bessel functions.

In fact, the equation:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{n^2 - 1/4}{r^2} \right) v_0(r) = 0 \quad (3.1)$$

has the following two independent solutions:

$$\begin{aligned} v_0^1(r) &= r^{1/2} H_n^{(1)}(kr), \\ v_0^2(r) &= r^{1/2} H_n^{(2)}(kr), \end{aligned} \quad (3.2)$$

with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} v_0^1(r) &= \exp \left[i \left[kr - \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4} \right] \right], \\ v_0^2(r) &= \exp \left[-i \left[kr - \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{4} \right] \right], \end{aligned} \quad r \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Putting $k^2 = 0$ we arrive at the equation:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2 - 1/4}{r^2} - \frac{\lambda^2}{r^6} \right] v_1(r) = 0, \quad (3.4)$$

with the independent solutions:

$$v_1^1(r) = r^H K_n^{(1)} \left(\frac{\lambda}{2r^2} \right), \quad (3.5)$$

$$v_1^2(r) = r^H I_n \left(\frac{\lambda}{2r^2} \right),$$

and the boundary conditions:

$$\begin{aligned} v_1^1(r) &= O \left(r^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2r^2} \right\} \right), \\ v_1^2(r) &= O \left(r^{3/2} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2r^2} \right\} \right), \end{aligned} \quad r \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

We construct the approximate solution of eq. (2.6) from the functions (3.2) and (3.5), by neglecting the kinetic energy term if r is less than some conveniently chosen value, r_0 and neglecting the potential for $r > r_0$. It is intuitively clear that such an approximation procedure should work well if the potential is very large at small distances while decreases sufficiently rapidly as $r \rightarrow \infty$.

We choose for r_0 the distance at which the kinetic and potential energy terms are equal in magnitude, i.e. $r_0 = (\lambda/k)^{1/3}$. (If $k^2 < 0$, which is the domain we are interested in, when going over to the crossed channel, the coefficients of eq. (2.6) are even continuous at $r = r_0$ with $r_0 = (i\lambda/k)^{1/3}$.)

We look for a solution of eq. (2.6), vanishing at $r=0$ and being a combination of ingoing and outgoing waves at infinity.

therefore we choose

$$u(r) = \begin{cases} v_1^1(r) & (r < r_0) \\ F_1 v_1^1(r) + F_2 v_1^2(r) & (r > r_0) \end{cases} \quad (3.7)$$

Matching the logarithmic derivatives at $r = r_0$, we obtain for the scattering matrix element:

$$S(n, k^2) = e^{2i\delta_n} = \frac{F_1}{F_2} = - \frac{H_n^{(2)'}(\epsilon) K_{n/2}'(-\frac{\epsilon}{2}) + H_n^{(2)'}(\epsilon) K_{n/2}'(-\frac{\epsilon}{2})}{H_n^{(1)'}(\epsilon) K_{n/2}'(-\frac{\epsilon}{2}) + H_n^{(2)'}(\epsilon) K_{n/2}'(-\frac{\epsilon}{2})} \quad (3.8)$$

In eq. (3.8) primes mean derivatives with respect to the arguments of the cylindrical functions, and $\epsilon = (k^2 \lambda)^{1/3}$.

The approximation procedure described above can be considered as a zeroth order term of a perturbation series to the differential equation:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-r_0) k^2 - \theta(r_0-r) \frac{\lambda^2}{r^4} - \frac{n^2 - 1/4}{r^2} \right] u(r) = -W(r)u(r), \quad (3.9)$$

$\theta(x)$ being the unit step function and the perturbation operator $W(r)$ has the following expression:

$$W(r) = -k^2 \theta(r_0 - r) + \frac{\lambda^2}{r^2} \theta(r - r_0) \quad (3.10)$$

Let us sketch the proof of the convergence of the perturbation expansion for $k^2 < 0$. In order to simplify matters, let us split off the factor $r^{\frac{1}{2}}$ from v in eqs. (3.2) and (3.6): $v(r) = r^{\frac{1}{2}} w(r)$ and multiply the equation for $w(r)$ by r^2 . Thus we obtain with $k^2 = -\kappa^2$ ($\kappa^2 > 0$):

$$\left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r \frac{d}{dr} - \theta(r - r_0) \kappa^2 r^2 - \frac{\lambda^2}{r^2} \theta(r_0 - r) - n^2 \right] w(r) = v(r) w(r), \quad (3.11)$$

with

$$v(r) = \kappa r \theta(r - r_0) + \frac{\lambda}{r} \theta(r_0 - r)$$

Considering eq. (3.11) as an eigenvalue problem for n with the boundary condition $w(0) = w(\infty) = 0$, the unperturbed solution is:

$$w_{\nu}^{(0)}(r) = \theta(r - r_0) K_{\nu} \left(\frac{\lambda}{2r_0} \right) K_{\nu}(\kappa r) + \theta(r_0 - r) K_{\nu} \left(\frac{\lambda}{2r} \right) K_{\nu}(\kappa r), \quad (3.12)$$

while the unperturbed eigenvalue ν satisfies the usual determinantal equation

$$f(\nu) = K_{\nu}(\kappa r_0) \frac{d}{dr_0} K_{\nu} \left(\frac{\lambda}{2r_0} \right) - K_{\nu} \left(\frac{\lambda}{2r_0} \right) \frac{d}{dr_0} K_{\nu}(\kappa r_0) = 0. \quad (3.13)$$

In the standard way [13] we find that the solutions of eq. (3.13) are pure imaginary so that the functions $w_{\nu}^{(0)}$ are real. The functions $w_{\nu}^{(0)}$ are orthogonal:

$$\int_0^{\infty} \frac{dr}{r} w_{\nu}^{(0)}(r) w_{\nu'}^{(0)}(r) = N_{\nu} \delta_{\nu\nu'}$$

(N_{ν} being a normalization coefficient). The perturbed eigenvalue, n , is of course given by:

$$n = \nu + \sum_{\nu'} \frac{V_{\nu\nu'} V_{\nu'\nu}}{\nu^2 - \nu'^2} + \dots, \quad (3.14)$$

where $V_{\nu\nu'}$ are the matrix elements of V taken between the normalized functions (3.12).

It is easy to see that

$$|V_{\nu\nu'}| < (\kappa r_0)^2 = (\kappa^2 \lambda)^{2/3}$$

(which is really small for small values of κ^2 , as we have expected).

Making use of the familiar expression for the number of roots $N(R)$ inside a circle with radius $|x| = R$

$$\int_0^R \frac{N(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\phi})| d\phi - \log |f(0)|,$$

we obtain

$$N(R) < C R \log R$$

where C is some constant.

Hence, for the l eigenvalue ν_l we have the lower bound:

$$\nu_l^2 > C' \frac{l^2}{(\log l)^2}$$

where C' is again some constant. So we obtain that the series (3.14) converges. In a similar way one can demonstrate the convergence of the series for the perturbed eigenfunctions as well.

We can check by inspection that our S -matrix element is a meromorphic function of n in the whole complex n -plane; it satisfies the symmetry relation, characteristic of potentials with a hard core^[14]:

$$S(-n, k^2) = e^{-2\pi i n} S(n, k^2). \quad (3.15)$$

Finally we quote the expression for the transition matrix element, defined by the relation:

$$T(n, k^2) = \frac{1}{i \pi k^2} [S(n, k^2) - 1],$$

$$T(n, k^2) = \frac{-1}{\pi k^2} \frac{J_n(\epsilon) K_{\frac{n}{2}}(\frac{\epsilon}{2}) + J_n'(\epsilon) K_{\frac{n}{2}}(\frac{\epsilon}{2})}{H_n^{(1)}(\epsilon) K_{\frac{n}{2}}(\epsilon) + H_n^{(1)'}(\epsilon) K_{\frac{n}{2}}(\frac{\epsilon}{2})} \quad (3.16)$$

One can check by direct calculation that the expression (3.16) gives the correct continuation of the transition matrix element for $k^2 < 0$, $|k^2 \lambda| \ll 1$.

4. Subtraction Terms and Asymptotic Behaviour of the Scattering

Amplitude

All the expressions derived up to now are originally valid for $\text{Re} n > 2$ (as we had two subtractions in the kernel (2.3)). However, as explained in ref.^[10], we can continue them even for $\text{Re} n < 2$, if only we take into account that at the subtraction points, $n = 1, 2$, the expression for the transition amplitude is not given by (3.16) but by a suitably modified expression, derivable from eq. (2.5) of ref.^[10]. To formulate the content of that equation in an intuitive way, the subtraction polynomial of the kernel can be conceived as a set of new local interaction Lagrangians. The transition amplitude at the subtraction points is given by the infinite chain diagrams formed with these additional interactions, taking into account the vertex - and propagator corrections caused by the analytic part of the transition amplitude, γ .

In fact, at the subtraction points, according to eq. (2.5) of ref.^[10] the Green function G is given by:

$$G = G_1 + G_1 K_2 G \quad (4.1)$$

Taking into account the relation between the Green function and the transition amplitude off the mass shell:

$$G_1 = G_0 + G_0 T G_0 \quad (4.2)$$

and defining at the subtraction points

$$G = G_0 + G_0 U G_0$$

with the help of eq. (4.1) we obtain the correction to the analytic part of the amplitude:

$$W(n, k^2) = [1 - (1 + T G_0) K_2(n) G_0]^{-1} \times \quad (4.3)$$

$$\times (1 + T G_0) K_2(n) (1 + G_0 T)$$

where $W(n, k^2) = T(n, k^2) - U(n, k^2)$

It is clear that $W(n, k^2)$ can differ from zero for $K_2(n)$ only, because of the properties of $n = 1$ (cf. eq. (2.3)). If we write out the operator equation (4.3) in momentum representation, we arrive at an integral equation with degenerate kernel; its solution reads e.g. for

$$\langle p | W(1, k^2) | p' \rangle = \xi_1 \frac{F(k^2, p) \bar{F}(k^2, p')}{1 - \xi_1 \phi(k)} \quad (4.4)$$

where

$$F(k^2, p) = 1 + \int_0^\infty \frac{q'^2 dq' \langle p | T(1, k^2) | q' \rangle}{q'^2 - k^2}$$

$$\bar{F}(k^2, p) = 1 + \int_0^\infty \frac{q'^2 dq' \langle q' | T(1, k^2) | p \rangle}{q'^2 - k^2} \quad (4.5)$$

$$\phi(k) = \int_0^\infty \frac{q'^2 dq'}{q'^2 - k^2} + \int_0^\infty q'^2 dq' \int_0^\infty q''^2 dq'' \frac{\langle q' | T(1, k^2) | q'' \rangle}{(q'^2 - k^2)(q''^2 - k^2)}$$

(The first integral in the expression of $\phi(k)$ is divergent as it stands; it could be defined in the usual way by means of subtractions; however, we shall see in what follows that we can operate formally with such divergent integrals).

Let us now observe that the expressions (4.5) can be expressed with the help of the Green functions in coordinate space. In fact, remembering that

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_1(pr)}{pr} = \frac{1}{2}$$

one immediately recognizes (cf. eq. (4.2)) that

$$\phi(k) = \lim_{r_1, r_2 \rightarrow 0} G_1(r_1, r_2) = G_1(0,0)$$

For small values of r one can immediately write down the expression of the Green function of eq. (2.5).

$$G_1(z, r') = \frac{1}{2} (rr')^{-1/2} \left[\theta(r-r') I_{1/2}\left(\frac{\lambda}{2r^2}\right) K_{1/2}\left(\frac{\lambda}{2r'^2}\right) + \theta(r'-r) I_{1/2}\left(\frac{\lambda}{2r'^2}\right) K_{1/2}\left(\frac{\lambda}{2r^2}\right) \right]$$

Now, the value of $G_1(0,0)$ depends on the order of the limits: if $r' > r$ or $r > r'$ then $G_1(0,0) = 0$ if the limit is taken along the line $r' = r$, $G_1(0,0)$ is a finite constant. However, as one can easily check, $F(k^2, \rho) = \bar{F}(k^2, \rho) = 0$. Thus we see that $W(k^2) = 0$ and the same result is obtained for $W(2k^2)$. Hence, the transition amplitude is determined by its analytic part everywhere. Let us immediately remark that this remarkable property is a consequence of the strong singularity of the Green function at the origin. Had we to do with a "regular" theory (the interaction at small distances is weaker than the centrifugal term), the Green function at small distances would behave as r^{-n} , thus allowing a nonvanishing contribution from the subtraction terms at $n = 1$. We can now turn to the determination of the total scattering amplitude from the partial amplitudes (3.16). Remembering the addition theorem for four dimensional spherical harmonics (ref. [10], Appendix) and the well-known identity:

$C_{n-1}^1(\cos \theta) = \frac{\sin n \theta}{\sin \theta}$
 (C_{ν}^{λ} being a Gegenbauer function), we obtain the scattering amplitude in the form of a Fourier series:

$$T(z, k^2) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} (\sin \theta)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \theta T(n, \kappa^2) \quad (4.5)$$

Here $z = \cos \theta$ or expressed in Mandelstam's variables, $z = 1 + \frac{2s}{t}$, $t = 4^{-1} \kappa^2$.

It is convenient to transform the series (4.6) into a contour integral:

$$T(z, \kappa^2) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (\sin \theta)^{-1/2} \int_C dn \operatorname{ctg} \pi n \times \sin n \theta T(n, \kappa^2) \quad (4.6)$$

the contour C being shown on Fig. 3a. We have already remarked that $T(n, \kappa^2)$ is a meromorphic function of n in the whole complex n -plane, its poles lying for $\kappa^2 < 0$ on the imaginary axis.

A simple investigation shows that if we put $n = R \exp \{i\phi\}$ then for $R \rightarrow \infty$

$$T(n, ik^2) = O(\exp(-R \log R \cos \phi))$$

Thus for $k^2 < 0$ the contour C can be deformed almost to the imaginary axis (C') (an infinitesimal sector being excluded) as shown on Fig. 3b.

Let us now obtain an approximate expression for small values of k^2 and nonintegral values of n . Making use of the familiar expansions of the cylindrical function, after some rearrangements we arrive at the expression:

$$T(n, t) = \frac{e^{in\pi} \sin n\pi}{Y - 1} \quad (4.7)$$

where

$$Y = \frac{\Gamma(1+n) \Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(1-n) \Gamma(1-\frac{n}{2})} \left(\frac{te^{-i\pi}}{64}\right)^{-n} \quad (4.8)$$

To find the poles of the amplitude we put $n = ir$ then

$$\frac{\Gamma(1+n) \Gamma(1+\frac{n}{2})}{\Gamma(1-n) \Gamma(1-\frac{n}{2})} = \exp i\psi$$

$$\psi = -3cr + O(r^2)$$

where C is the Euler-Mascheroni constant.

$T(n, t)$ obviously has poles in the n -plane determined by the equation:

$$\psi - r \log \frac{te^{-i\pi}}{64} = 2\pi N \quad (4.9)$$

$$N = 0, +1, +2, \dots$$

or, approximately,

$$n = \frac{2\pi i N}{3C + \log \frac{te^{-i\pi}}{64}} \quad (4.10)$$

Thus, we have an infinite number of poles; all of them have a common trajectory in the n -plane, as sketched on Fig. 4. For $t=0$ the poles fill the whole imaginary axis, giving a continuous spectrum, as can be directly checked e.g. from eq. (2.6).

These considerations show that the concept of Regge poles to determine the behaviour of the amplitude in the crossed channel is not a useful one in our case, because we have no "leading pole".

Nevertheless, the contour integral representation of the scattering amplitude (4.6) can be used to determine the asymptotic behaviour for large positive values of s and small negative values of t . The integral in (4.6) can be evaluated by means of the method of steepest descents.

The calculation is a bit tedious but quite elementary; we simply quote the resulting asymptotic expression of the scattering amplitude, as a function of s and t :

$$T(s, t) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i \cdot 16 t}{s \log s} M(x) \quad (4.11)$$

where

$$x = \frac{-\log s}{\log(-t)}, \quad M(x) = x^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{x} \log x\right)$$

The function $(M(x))^2$ is plotted on Fig. 5. The quantities s and t are measured in units of t^{-1} . The formula (4.11) is valid for $s \gg 1$ and $|t| \ll 1$.

We can immediately indicate the "rule of thumb" 2 for the use of the expression $T(s, t)$. As the infinite iteration of our massless $V-A$ bubble gave again an expression with a $V-A$ kinematic structure, the expression for any transition amplitude, corrected with the higher order contributions is obtained, if in the lowest order expression for the amplitude in question, the coupling constant f is replaced by our $T(s, t)$.

Closing this section, we mention a low energy theorem for our amplitude T .

One expects that for $k^2 \rightarrow +0$, the partial amplitude $T(L, k^2)$ tends to a multiple of the Fermi coupling constant, f , while $T(n, k^2)$, $n > 1$, tends to zero; thus at the physical threshold the original $V-A$ interaction would be reproduced (perhaps with a renormalized coupling constant).

In fact, a glance at eq. (3.16) shows that

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} T(L, k^2) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} f, \quad (4.12)$$

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} T(n, k^2) = 0, \quad (n > 1).$$

Thus the original Fermi constant is renormalized by a factor $(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$. It is perhaps amusing to remark that the numerical value of our renormalization factor $((2/\pi)^{\frac{1}{2}} = 0.8)$ is rather close to that obtained by Feinberg and Pais (loc. cit.) for the renormalization factor of the W -meson coupling constant g .

5. Scattering Amplitude in Direct Channel

In the preceding chapters we described the "weak diffraction scattering" of two leptons in the region of $s > 0$, $t < 0$.

Nevertheless, the same diagram, considered in the physical domain in another channel, namely $s < 0$, $t > 0$, gives a non diffractive contribution to the scattering amplitude,

which decreases slower than the expression (4.11). To calculate the transition matrix element for large positive values of k^2 , we apply a WKB approximation to eq. (2.6).

Thus the leading term in k^{-1} for the phase shift reads:

$$\delta(b, k) = -\frac{\lambda^2}{2k} \int_0^\infty dr r^2 (r^2 - b^2)^{-1/2} + O(k^{-2}) \quad (5.1)$$

where we have introduced the "relativistic impact parameter" $b = n k^{-1}$. After an elementary calculation we find from (5.1) with an accuracy up to $O(k^{-2})$:

$$\delta(b, k) = -3f^2 b^{-5} k^{-1} \quad (5.2)$$

The partial wave amplitude can be easily found if we remark¹⁵ that to the same order in k^{-1} , $\delta(b, k) = \frac{1}{2} \delta(b, k)$ so that the partial wave amplitude is

$$t(b, k) = \frac{\pi}{k^2} \frac{-3f^2 k^{-1} b^{-5}}{1 + 3if k^{-1} b^{-5}} \quad (5.3)$$

The scattering amplitude is given in terms of the partial wave amplitudes by eq. (4.6). Going over to integrating over b instead of summation over n we arrive at the following quasiclassical approximation to eq. (4.6):

$$T(x, k) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k^2 x^{-1} \int_0^\infty db \sin bx t(b, k) \quad (5.4)$$

where $x = (-s)^{1/2} = k \theta$. Let us insert eq. (5.3) into (5.4) and introduce the variable $bx = y$; then we get:

$$T(x, k) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} 3\pi f^2 x^3 k^{-1} \int_0^\infty dy \frac{\sin y}{y^5 + i y x^5} \quad (5.5)$$

where the notation $3f^2 k^{-1} = \gamma$ has been introduced. To evaluate (5.5) we split the integration interval into two parts: $0 \leq y \leq 1$ and $1 \leq y < \infty$. In the integral taken from 0 to 1, $\sin y$ can be expanded into a Taylor series, the leading contribution for small values of x being obtained from the linear term. In the second integral the denominator can be expanded in powers of $\gamma x^5 y^{-5}$ the leading contribution being again given by the zero order term. The integrals arising after this can be evaluated in a familiar way. We quote the resulting expression for the invariant amplitude, inserting numerical values for the coefficients:

$$T(x, t) = \frac{1.05 f}{t^{1/5}} \left[(0.65 - 4.97 \frac{x^3}{t^{3/10}}) + \right. \\ \left. + i (0.62 - 4.97 \frac{x^3}{t^{3/10}}) \right] + O(x^5), \\ x = (-s)^{1/2}. \quad (5.6)$$

In eq. (5.6) the quantities s, t are measured in units of t^{-1} .

By using our recipe, formulated at the end of chapter IV and of the optical theorem, we see that eq. (5.6) gives a total cross section, decreasing as $t^{-1/2}$. The cross section as calculated from eq. (5.6) is equal to the total cross section, calculated from the low energy approximation of the preceding chapter (which is almost equal to the lowest order contribution in t) at approximately the "critical energy" $t = 1$.

Thus, assuming that this approximation is at least qualitatively correct, we find that the elastic scattering cross section of leptons rises practically as t till $t = 1$ afterwards decreases roughly as $t^{-1/2}$. The total cross section contains inelastic contributions as well; however, they seem to lie out rapidly at high energies.

6. Discussion

In our opinion, the foregoing calculations yielded two results which are in a rather striking contrast with common belief. The first one is that we got a completely well-determined expression for the four-lepton vertex, without any arbitrary renormalization constants. As we have already pointed out, this is a consequence of the singular nature of the Fermi interaction. If the present result would hold generally (independently of our approximation scheme) this would mean that "unrenormalizable" interactions are even "better" than renormalizable ones.

In this respect the low-energy theorem (4.12) is far from being trivial, because, as one can see, the expression for the four fermion vertex is in general singular in the coupling constant t at $t=0$.

The second surprise is that weak interactions do not "become strong" at high energies. In fact, the scattering amplitude becomes imaginary at high energies and decreases with energy. As to the correction to the angular distribution, given by the function $(M(x))^2$ one sees that the forward peak does not become narrower with energy. (In order to avoid the "infrared" infinity at $t=0$, one should put $-t+m^2$ in the final formulas instead of $-t$ where m is some lepton mass). According to our "rule of thumb" the differential cross section would be roughly given by

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(M(x))^2}{S \log^2 s}$$

for unpolarized leptons, near forward direction $|\frac{t}{s}| \ll 1$. If we tentatively define the elastic cross section to be proportional to the differential cross section, integrated over the width of the forward peak, this quantity would show an energy dependence

$\sigma \sim s^{-1} \log s$, for $s \rightarrow \infty$. The contribution from the non-diffractive scattering is also decreasing with energy, namely, like $s^{-1/2}$ as shown in section Y. At a first glance the experimental verification of the above statements seems rather hopeless in the near future, as most of our formulas are asymptotic expressions. Nevertheless, there are two circumstances which allow one to be more optimistic in this respect. First of all, apart from neglecting an infinite number of diagrams usually believed to be unimportant at high energies and or low momentum transfers, there is actually only one asymptotic approximation in our calculation. We took namely the leading term of the saddle-point expression for the scattering amplitude. However, for a great number of functions the leading term of the saddle-point expression is known to give very reasonable estimates even for moderate values of the argument.

Secondly, one can be encouraged by the - at least partial - success of the one-Regge-pole expressions in interpreting the results of scattering experiments in strong interaction physics. The one-pole formulae are just as asymptotic expressions, as our ones.

In view of this it would be perhaps not quite unreasonable to test the predictions of the present theory at lepton energies of the order of some tens of GeV-s (In this respect one thinks of course in the first line of νe -s scattering, because of the absence of Coulomb scattering).

We want to make a remark which may be of some interest. Put in a Lagrangian language, we investigate here the two-body Green function starting from the following Lagrangian:

$$L = \bar{\psi} \partial \psi + i (\bar{\psi} \gamma_{\mu} (1 + i \gamma_5) \psi)^2 + h.c.$$

This Lagrangian is identical in its appearance to Heisenberg's one in his unified field theory. However, we quantized the theory in a completely "conservative" way and still arrived at finite and uniquely determined results. One could speculate whether it would be really impossible to construct a finite theory without introducing indefinite metric in Hilbert space, non-canonical quantization etc.

One has to make an important remark at this place concerning the transition to Euclidean metric.

One can prove that in the case of a renormalizable theory, the BS equations written either in Euclidean or Minkowskian metric are completely equivalent to each other in the sense that in eq. (2.4) the integration over k can be performed both along the imaginary or real axes. In our case, however, the situation is completely different. The Green function has an essential singularity in k^0 at $|k^0| \rightarrow \infty$ (This can be immediately seen from the behaviour of the solution in coordinate representation at $r \rightarrow 0$).

Thus the solution constructed by means of our procedure does not satisfy eq. (2.4) in Minkowskian metric. (It is even possible that the Minkowskian equation has no physically reasonable solutions at all).

Nevertheless we believe that our procedure may serve as a reasonable definition of nonrenormalizable Green functions.

First, as it is well known^[15] the existence of a Euclidean theory is a necessary condition for the existence of a Minkowskian one. Second, all the physically interesting quantities (scattering amplitudes etc.) constructed in the framework of the Euclidean theory, when continued in the kinematic invariants to the domain, corresponding to Minkowskian theory, give functions possessing familiar analytic properties.

One could, of course, object that the ladder approximation is not a justified one, one must not neglect masses etc. As to the first objection, at the moment we can give a practical answer only: although the ladder approximation has been blamed several times - and with good reason - it is at present practically the only approximation for Green functions of field theory, where one can push the calculations till numerical estimations. Still more, we feel that the vanishing of the renormalization terms is a consequence of the singular nature of the interaction and not of the ladder approximation and thus is more general than it would be seen from the present calculation. Concerning the second objection, we can say a bit more. According to our preliminary calculations, the inclusion of lepton masses induced other invariant functions (S, T, P) but the latter are probably small (they are proportional to the product of the masses of propagating leptons).

The resulting equations for the invariant functions are somewhat less singular than that we dealt with in the present paper, but still with an essential singularity at $r = 0$. The results of the calculations concerning the role of lepton masses and other physical consequences of the present approach to the theory of Fermi interactions will be published in subsequent papers.

References

1. W. Heisenberg. Z. Phys., 101 (1936), 533.
2. W. Heisenberg. Z. Phys., 110 (1938), 251.
3. W. Heisenberg. Z. Phys., 113 (1939), 61.
4. J.R. Oppenheimer, H. Snyder and R. Serber. Phys. Rev., 57 (1949), 75.
5. N.N. Bogolyubov, D.V. Shirkov. Introduction to the Theory of Quantized Fields. New York, 1959. Interscience Publishers.
6. M.A. Markov. Neutrino. Preprint D-1269, Dubna, 1963.

7. A. Pais. Weak Interactions at High Energies- in "Theoretical Physics", IAEA, Vienna, 1962.
8. G. Feinberg, A. Pais. Phys. Rev., 131 (1963), 2724.
9. G. Feinberg, A. Pais. Preprint "Field Theory of Weak Interactions, II", 1963.
10. G. Domokos, P. Suranyi. Preprint E-1400, Dubna, 1963.
11. See e.g. F.G. Tricomi, Differential Equations, Blachie and Son, London, 1961.
12. L. Landau, E. Lifshitz. Quantum Mechanics, Fizmatgiz, Moscow, 1948.
13. A. Kratzer, F. Franz. Transzendente Function, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960.
14. E. Predazzi, T. Regge. Nuovo Cim., 24 (1963), 518.
15. R. Blankenbecler, M.L. Goldberger. Phys.Rev., 126 (1962), 766.
16. K. Symanzik. Lecture at the Conference on Function Spaces, M.I.T. (1963).

Received by Publishing Department
on December, 27.

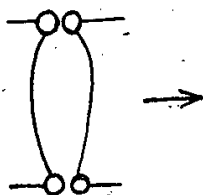


Fig. 1. Diagram of the interactions kernel. Particles meeting in one small circle belong to the same current. The arrow indicates the direction of summation.

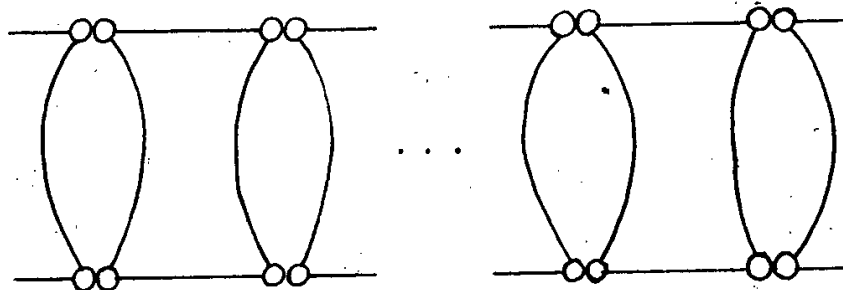
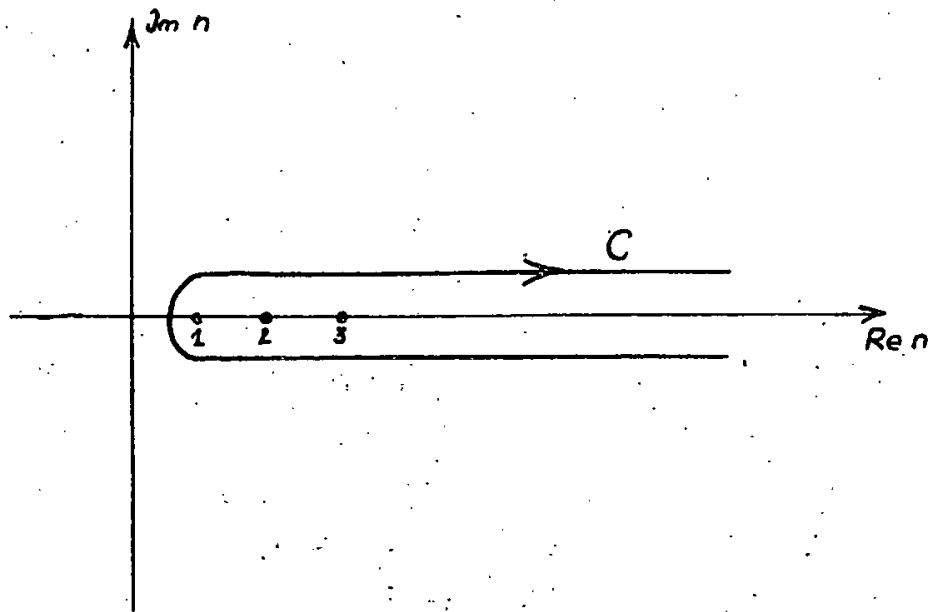
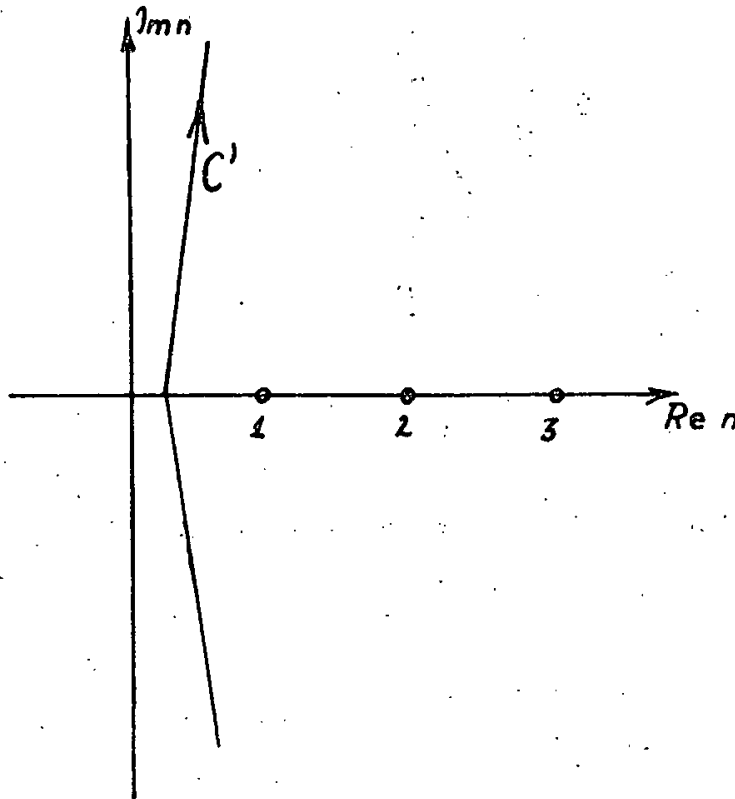


Fig. 2. Scheme of iterated diagrams.



a.



b.

Fig. 3. a. Contour of integration in the n -plane
b. Deformed contour of integration in the n -plane.

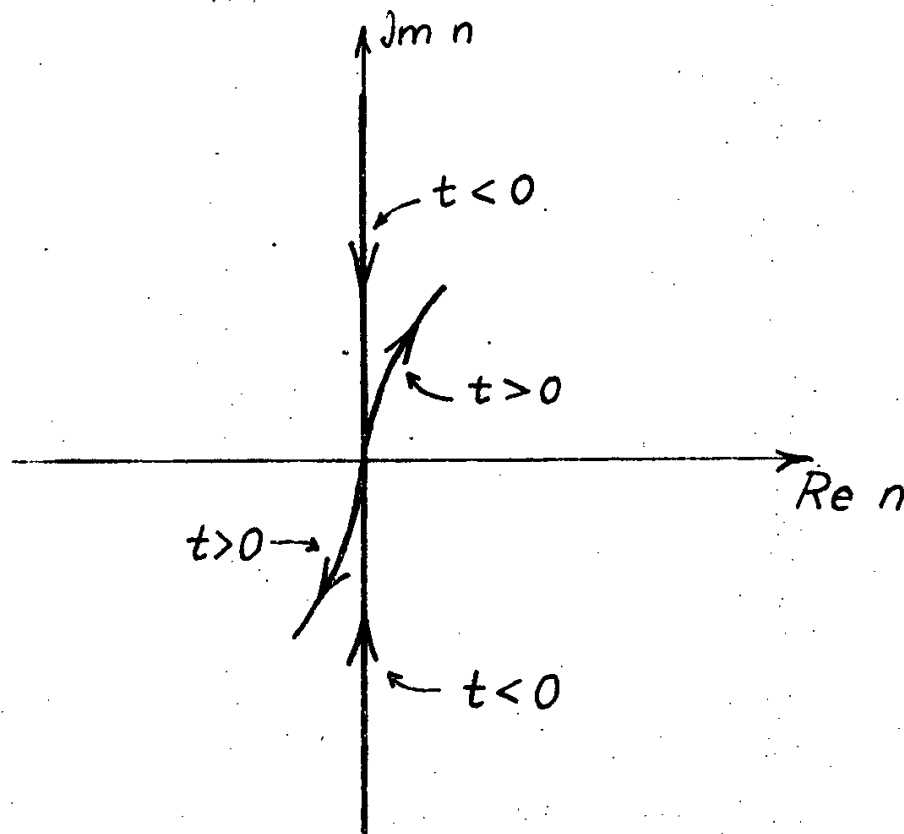


Fig. 4. Sketch of the trajectory of poles in the n -plane.

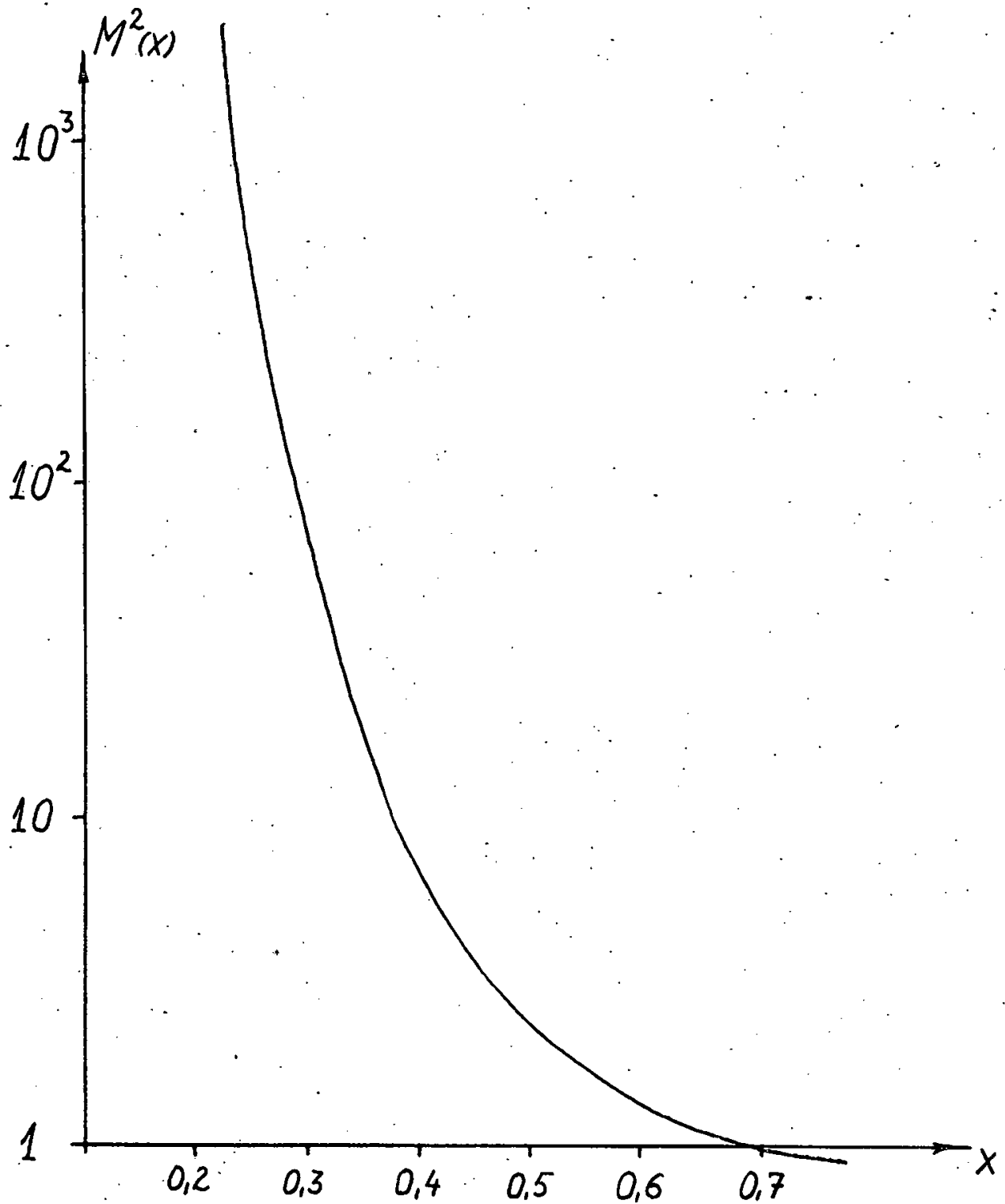


Fig. 5. Plot of the correction factor to angular distribution in lepton-lepton scattering.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3558. Тираж 430. 1,4 уч.-изд. л.
Февраль 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.И. Огиевецкий, Сян Дин-чан

P-1583

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ МИР
ОЧЕНЬ СТРАННЫХ ЯДЕР?

Дубна 1964

Огиевецкий В.И., Сянь Дин-чан

P-1583

Существует ли мир очень странных ядер?

Поставлен вопрос о существовании и свойствах ядер с очень большой странностью. Распространение унитарной симметрии на ядра приводит к выводу о том, что очень странные ядра могут обладать колоссальными энергиями связи, и их свойства поэтому, действительно, очень странны. В частности, не исключено, что они будут жить существенно дольше, чем гипероны.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна 1964**

Ogievetski V.I., Hsien Ding-chang

P-1583

Does There Exist a World of Very Strange Nuclei?

The question concerning the existence and properties of nuclei with a very large strangeness is raised. The extension of unitary symmetry to nuclei leads us to a conclusion that very strange nuclei may possess colossal binding energies and their properties are therefore very strange indeed. In particular, it is not ruled out that their lifetime is longer than that of hyperons.

**Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.**

В.И. Огиевецкий, Сян Дин-чан

P-1583

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ МИР
ОЧЕНЬ СТРАННЫХ ЯДЕР?

Направлено в Physics Letters

Дубна 1964

1. Хорошо известно, что наряду с обычными ядрами, которые состоят из нуклонов и имеют странность 0 , существуют также Λ -гиперядра со странностью -1 . Недавно Даныш и др.^{/1/} открыли двойные Λ -гиперядра со странностью -2 .

Можно поставить вопрос:

Существуют ли гиперядра с большей странностью ("очень странные ядра") и что можно о них сказать?

Никакой экспериментальной информации о таких ядрах пока нет.

В настоящей заметке будут приведены аргументы, указывающие, что "очень странные ядра" может быть действительно существуют и действительно очень странны: можно ожидать, что их полная энергия связи будет необычайно большой, значительно больше, чем у обычных ядер, многие виды распадов будут заморожены, и поэтому время жизни будет существенно больше, чем время жизни гиперонов и Λ -гиперядер.

2. Эти аргументы основаны на распространении на связанные состояния барионов октуплетной модели $SU(3)$, в рамках которой более или менее удовлетворительно описываются существующие элементарные частицы и резонансные состояния. Авторы полностью отдают себе отчет в недостаточной доказательности такого распространения, но они верят в то, что, несмотря на необычность полученных выводов, общая тенденция угадана верно.

3. Как известно, унитарная симметрия не является точной, так как массы барионов (или мезонов) внутри одного мультиплета не совпадают. Однако минимальное нарушение унитарной симметрии (гипотеза, согласно которой эффективный гамильтониан есть смесь унитарного синглета и три-три компоненты октуплета) приводит к массовой формуле^{/2-4/}, которая удивительно хорошо согласуется с истинными массами практически всех известных элементарных частиц и резонансов (с точностью до долей процента, в худших случаях до нескольких процентов). Эта массовая формула для систем с целым спином имеет вид:

$$M^2 = a + bY + c [T(T+1) - Y^2/4], \quad (1)$$

где a , b и c - параметры, Y - гиперзаряд (т.е. сумма барионного числа и странности системы, $Y = B + S$), T - значение полного изоспина. Для мультиплетов вида $D(0, 3n)$ и $D(3n, 0)$ (n - целое) массовая формула редуцируется и становится двух-параметрической

$$M^2 = c + fY. \quad (2)$$

Для систем с полупелым спином в левых частях (1) и (2) квадрат массы M^2 следует заменить на M .

В рамках октуплетной модели, зная гиперзаряд и изоспин какого-либо состояния, можно указать мультиплет наименьшей размерности, к которому принадлежит обсуждаемое состояние. Так, можно указать минимальные мультиплеты для всех ядер. Отметим, что Оакс^{15/} обсуждал семейство дейтона ($Y=2, T=0$). Оно есть декуплет $D(0,3)$ и содержит кроме дейтона резонансные состояния с $Y=1, T=1/2$, $Y=0, T=1$ $Y=-1, T=3/2$

Далее, можно показать, что тритий H^3 есть член 35-плета $D(1,4)$, в который входит, в частности, и гиперядро ΛH^3 . Знание масс трития и ΛH^3 недостаточно для предсказания масс остальных членов этого семейства, поскольку в данном случае (как и для всех нечетных ядер) массовая формула содержит 3 параметра.

4. Минимальное семейство, содержащее α -частицу ($Y=4, T=0$), есть 28-плет $D(0,6)$. На рис. 1 графически представлен состав обсуждаемого 28-плета.

Для классификации состава мультиплета удобно ввести обозначение V_{YT}^Q (V - барионное число в римских цифрах, Q - заряд). Тогда α -частице соответствует символ $IV_{4,0}^2$, изодублету ΛH^4 и $\Lambda He^4 - IV_{3,1/2}^1$ и $IV_{3,1/2}^2$, соответственно, и т.д. Так как этот мультиплет имеет вид $D(0,6)$, то для него имеет место двухпараметрическая массовая формула (2). Поэтому, зная массы 2-х первых членов - α -частицы и гиперядра ΛH^4 (или ΛHe^4), можно указать массы остальных членов мультиплета, которые представляют собой определенные суперпозиции из 4-х барионов. В таблице 1 приведены характеристики обсуждаемого мультиплета: предсказываемые массы состояний с $S < -1$, состав барионов с наименьшей суммарной массой, входящий в суперпозицию, и полные энергии связи.

Например, ядра $IV_{1,3/2}^3$ суть суперпозиции, состоящие из $\Sigma\Lambda\Lambda\Lambda$, $\Sigma\Sigma\Lambda\Lambda$, $\Sigma\Sigma\Sigma\Lambda$, $\Xi\Sigma\Lambda\Lambda$ и $\Xi\Lambda\Lambda\Lambda$. В таблице указывается $\Xi\Lambda\Lambda\Lambda$, так как именно при таком составе суммарная масса барионов минимальна.

5. Как видно из таблицы, полная энергия связи ядер резко возрастает с увеличением странности при больших значениях странности. Это, по-видимому, связано с необходимостью включения в ядра с большой странностью тяжелых гиперонов^{х)}. Получаемые энергии связи значительно превышают энергии связи обычных ядер и

х) Сделаем одно замечание, не относящееся непосредственно к октуплетной модели. В ядрах с большой странностью связаны барионы с разными гиперзарядами (1,0,-1) в отличие от обычных ядер, в которые входят только нуклоны с одним и тем же гиперзарядом +1. Поэтому, если считать вслед за Сакураи^{17/}, что одноименные гиперзаряды увеличивают отталкивание на сверхмалых расстояниях, а разноименные гиперзаряды или отсутствие таковых уменьшают это отталкивание для пар барион-барион, то этот эффект может, в какой-то мере, с другой стороны, объяснить увеличение полной энергии связи в ядрах с большой странностью.

ядра с большой странностью необычайно компактны (ср. 245 Мэв для $IV_{-2,3}$ с 28 Мэв для α -частицы!), что побудило нас назвать их очень странными ядрами.

Многие слабые распады с $\Delta S = 1$ очень странных ядер оказываются замороженными и не происходят из-за сохранения энергии-импульса. К числу разрешенных распадов могут относиться безмезонный распад



с освобождением близкой к нулю энергии (может быть этот распад и вообще запрещен, к цифрам следует относиться осторожно, продуктами распада не могут быть $\Xi \Xi \Lambda N$ или $\Xi \Lambda \Lambda \Lambda$ из-за правила $\Delta T = \frac{1}{2}$), а также



с выделением малой энергии (по таблице 20 Мэв), и



подавленный необходимым в этом случае электромагнитным взаимодействием. Распады с $\Delta S = 2$ не запрещены законом сохранения энергии-импульса.

Не исключена также возможность распадов на очень странные ядра из семейства трития, относительно которых, как указывалось выше, мы не имеем какой-либо информации. Возможность существования такого семейства и таких переходов интересна сама по себе.

Отметим, что тогда как время жизни обычных гиперядер практически совпадает со временем жизни Λ -гиперона, очень странные ядра могут жить значительно дольше в силу их колоссальной компактности.

6. Из общих замечаний, связанных с распространением унитарной симметрии на ядра, сделаем следующие:

а) Все члены одного и того же семейства должны обладать одинаковым спином и четностью, что, в принципе, может служить проверкой унитарной симметрии. В частности, может быть не случайно, что спин гиперядер ${}_{\Lambda}^4\text{H}$ и ${}_{\Lambda}^4\text{He}$ равен, по-видимому, нулю^{/8/}, как и спин α -частицы.

б) В семействе α -частицы двойное Λ -гиперядро очень слабо или совсем не связано. В семействах, начинающихся с более тяжелого обычного четного ядра с изоспином 0, двойные гиперядра, по-видимому, существуют^{/1/x)} и, что важно, их изоспин должен быть равен 1.

х) По нашим оценкам, аналогичным приведенным выше, полная энергия связи двойного Λ -гиперядра ${}_{\Lambda}^6\text{Li}$ оказывается порядка 50 Мэв.

Для семейств с нечетным барионным числом унитарная симметрия не приводит ни к каким предсказаниям относительно Λ -ядер, но если бы они были найдены, то можно указать массы остальных ядер таких семейств.

в) В семейство с нечетным барионным числом, начинающиеся с обычного ядра с изоспином $1/2$, входят ординарные Λ -гиперядра как с изоспином 0 , так и изоспином 1 .

г) В каждом данном семействе с увеличением странности растет значение изоспина. Очень странные ядра в отличие от обычных имеют очень большой изоспин. Заряды очень странных ядер могут быть отрицательными!

д) Не исключено, что гипотеза о существовании очень странных ядер окажется полезной при обсуждении астрономических вопросов (ср. гиперонную модель звезд Амбарцумяна и Саакяна^{19/}).

е) Отметим, кстати, любопытную аналогию: мезоны π , K , η иногда рассматривают, как связанные состояния - "ядра" с барионным зарядом равным нулю, которые имеют колоссальные энергии связи. Очень странные ядра имеют нулевые или близкие к нулю гиперонные заряды, и их энергия связи также оказывается большой.

7. Мы проводили аналогичные расчеты и для семейства другого четного ядра (мультиплет $D(0,12)$), очень странные ядра которого обладают еще большими полными энергиями связи порядка 660 Мэв, т.е. тенденция в этом случае еще сильнее выражена. Соответствующей таблицы мы не приводим, так как верим только в тенденцию, а не в конкретные числа. Еще раз подчеркнем, что к численным данным таблицы 1 надо относиться очень осторожно. Распространение унитарной симметрии на ядра в достаточной мере спекулятивно, существование очень странных ядер есть, в основном, надежда, и авторам очень хотелось бы, чтобы она осуществилась, уж очень она необычна.

Авторы искренне благодарны Б.Н.Валуеву, М.А.Маркову, Нгуен Вай Хьеу, Л.Б.Окуню, М.И.Подгорецкому, И.В.Полубаринову, Б.М.Понтекорво и Чжан Вень-юй за полезные критические обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Danysz M. et al. *Phys. Rev. Lett.* **11**, 525 (1963).
2. M.Gell-Mann. *Phys. Rev.*, **125**, 1067 (1962).
3. Y. Ne'eman. *Nucl. Phys.*, **26**, 222 (1961).
4. S.Okubo. *Progr. Theor. Phys.*, **27**, 949 (1962).
5. R.L.Oakes. *Phys. Rev.*, **131**, 2239 (1969).

6. R.G.Ammar et al. Nuovo Cim., 19, 20 (1961).
7. Sakurai. Ann. Phys., 11, 1 (1960).
8. R.H.Dalitz. The Nuclear Interactions of the Hyperons, Lecture Note University of Chicago, EFINS-62-9.
9. Г.С.Саакян. Природа, № 11, 14 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
 3 марта 1964 г.

Таблица I
 Характеристики 28-плета, содержащего α -частицу

Ядро	S	$M_{\text{теор}} (10^3 \text{ МэВ})$	Состав барионов с минимальной суммой масс	Суммарная масса барионов $\sum M_B (10^3 \text{ МэВ})$	Полная энергия связи $\epsilon = \sum M_B - M_{\text{теор}} (\text{МэВ})$
$\bar{Y}_{4,0}$	0	3,727 [*]	$NNNN$	3,755	28
$\bar{Y}_{3,1/2}$	-1	3,922 ^{**}	ΛNNN	3,932	10
$\bar{Y}_{2,1}$	-2	4,108	$\Lambda \Lambda NN$	4,108	0
$\bar{Y}_{1,3/2}$	-3	4,285	$\Xi \Lambda NN$	4,314	29
$\bar{Y}_{0,2}$	-4	4,456	$\Xi \Xi NN$	4,522	66
$\bar{Y}_{-1,5/2}$	-5	4,620	$\Xi \Xi \Sigma N$	4,773	153
$\bar{Y}_{-2,3}$	-6	4,779	$\Xi \Xi \Sigma \Sigma$	5,024	245

^{*}) масса α -частицы.

^{**}) масса гиперядра Λ^4 согласно [6].

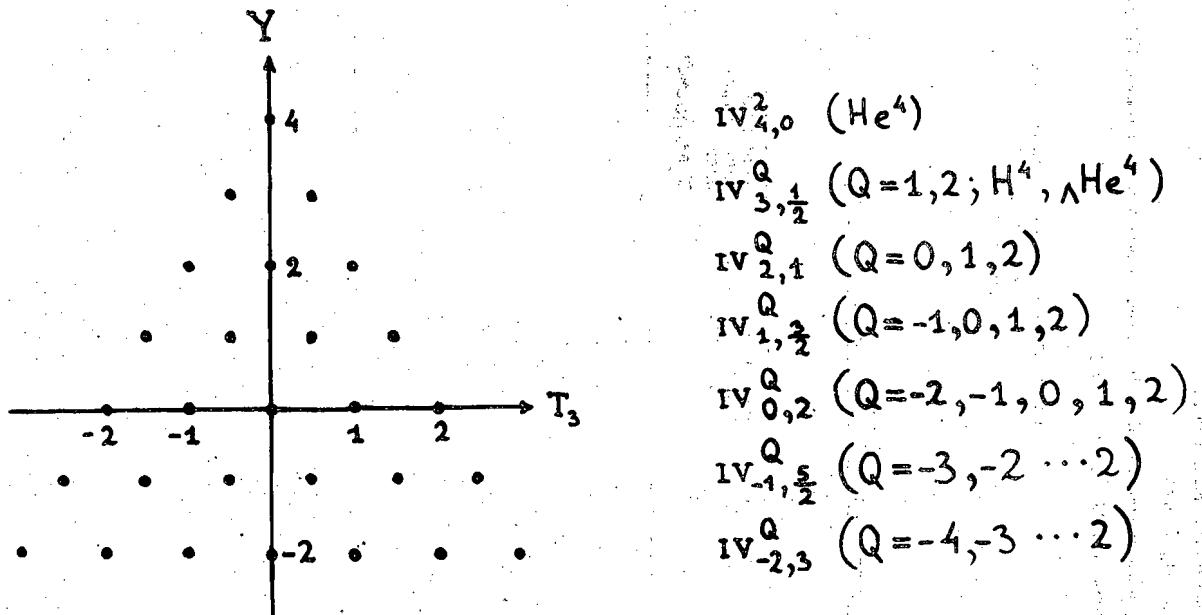


Рис. 1. Квантовые числа мультиплета наименьшей размерности, содержащего α -частицу. T_3 - третья компонента изоспина, Y - гиперзаряд.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3633. Тираж 400. 0,5 уч.-изд. л.
Техн. ред. В.Р.Саранцева Март 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Ю.Н. Денисов, В.В. Калининко

P-1554

РЕЗОНАТОР ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ ЭПР
В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Дубна 1964

P- 1554

Денисов Ю.Н., Калининченко В.В.

Резонатор для наблюдения ЭПР в дециметровом диапазоне

Для наблюдения ЭПР в дециметровом диапазоне длин волн предлагается использовать четвертьволновый коаксиальный резонатор со спиральным внутренним проводником. Показывается, что интенсивность сигнала ЭПР для такого типа резонатора в десятки раз больше, чем при использовании обычного коаксиального резонатора.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

P-1554

Denisov Ju.N., Kalinichenko V.V.

**A Resonator for Observing Electronic Paramagnetic Resonance
in a Decimetric Range**

It is suggested to use a quarter-wave coaxial resonator with a spiral internal conductor to observe electric paramagnetic resonance in a decimetric wave length range. It is shown that the intensity of the electronic paramagnetic resonance signal for a resonator of such a type is ten times more than for the usual coaxial resonator.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

Ю.Н. Денисов, В.В. Калинин

P-1554

РЕЗОНАТОР ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ ЭПР
В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Направлено в ПТЭ

Дубна 1964

Поглощение электромагнитной энергии исследуемым веществом, помещенным в резонатор спектрографа, регистрируется по изменению уровня высокочастотной мощности, поступающей к детектору при ЭПР.

Это изменение равно ^{/1/}:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = k \eta Q_0,$$

где ΔP - мощность, поглощаемая веществом при резонансе;

P_0 - мощность, поступающая в резонатор от СВЧ генератора;

k - коэффициент, определяющийся характеристиками вещества, из которого изготовлен образец и условиями наблюдения ЭПР;

η - коэффициент заполнения, зависящий от объема образца и распределения электромагнитного поля в резонаторе;

Q_0 - добротность резонатора.

Следовательно, величина детектируемого сигнала ЭПР, пропорциональная $\Delta P/P_0$, при заданном веществе образца обуславливается добротностью резонатора Q_0 и коэффициентом заполнения η . Увеличение $\Delta P/P_0$ за счет повышения добротности резонатора больше некоторого среднего значения, равного обычно 500-5000, не рационально, так как с увеличением Q_0 резко растут габариты резонатора и технологические трудности его изготовления. Кроме того, в этом случае для устойчивой работы прибора необходима система автоматической подстройки частоты СВЧ генератора к частоте резонатора с образцом, что сильно усложняет схему установки. Значительно целесообразнее увеличивать $\Delta P/P_0$ за счет повышения коэффициента заполнения η , равного ^{/1/}

$$\eta = \frac{\int_{V_0} H_1^2 dV_0}{\int_V H^2 dV_P},$$

где H_1 - напряженность высокочастотного магнитного поля,

V_0 - объем образца,

V_P - объем резонатора.

При наблюдении ЭПР в малых образцах (а этот случай представляет наибольший интерес) можно пренебречь изменением поля H_1 в объеме исследуемого вещества. Тогда

$$\eta = \frac{V_0}{V_P \text{ эфф.}}$$

где $V_P \text{ эфф.} = \frac{1}{H_1^2} \int_V H_1^2 dV_P$.

Очевидно, что для всех типов резонаторов $V_p \text{ эфф.} < V_p$. В диапазоне 500 - 10 000 МГц применяются резонаторы с объемом от единиц до нескольких десятков см³. Следовательно, для образцов объемом - 0,001 см³ коэффициент заполнения η очень мал (меньше 0,001). Для наблюдения ЭПР в дециметровом диапазоне длин волн предлагается использовать четвертьволновый коаксиальный резонатор со спиральным внутренним проводником, показанный на рис. 1. Характерной особенностью этого резонатора является высокая концентрация высокочастотного магнитного поля в объеме, охваченном внутренним спиральным проводником, позволяющая и при малых объемах образцов получать большие η .

Резонансная частота резонатора равна

$$f_0 = \frac{c}{4\pi n \ell D} \left(\frac{D}{D_{\text{э}}} \right)^{1/2},$$

где c - скорость света в см/сек,

n - число витков на см длины внутреннего спирального проводника.

В этом выражении не учитывается электрическое укорочение линии (обычно на 5-10%) за счет емкости между разомкнутым концом внутреннего проводника и торцом экрана или специального подвижного плунжера, показанного на рис. 1.

При помощи плунжера производится плавная настройка резонатора на заданную частоту.

Добротность резонатора, изготовленного из меди, вычисляется по формуле^{/3/}

$$Q_0 = \frac{0,024 \pi D \left[1 - \left(\frac{D}{D_{\text{э}}} \right)^2 \right] f_0^{3/2}}{\left[\frac{1}{\pi n d} + \left(\frac{D}{D_{\text{э}}} \right)^2 \right]}$$

где d - диаметр провода внутреннего спирального проводника в см.

Высокочастотное магнитное поле H_1 параллельно продольной оси резонатора, следовательно, в зазоре магнита его необходимо располагать таким образом, чтобы силовые линии постоянного поля H_0 были направлены перпендикулярно этой оси. Возбуждение резонатора и связь с диодной детекторной головкой осуществляется при помощи зондов и петель, вводимых внутрь полости резонатора, или щелей вдоль образующей цилиндрического корпуса резонатора. Конструкция одного из резонаторов рассматриваемого типа показана на рис. 2. Этот резонатор имел следующие параметры: $Q_0 = 400$; длина внутреннего спирального проводника $\ell = 0,5$ см; $D = 0,28$ см; $D_{\text{э}} = 0,8$ см; $d = 0,08$ см. Для образца объемом 0,0064 см³ коэффициент заполнения

$\eta = 0,4$. Соответственно $\eta Q_0 = 160$. Для образца из дифенилпикрилгидразила при резонансе ток в цепи диодного детектора изменяется более чем в два раза.

Для обычного четвертьволнового коаксиального резонатора на такую же частоту с диаметром внутреннего проводника $D_{\text{н}} = 0,6$ см и наружного $D_{\text{вн}} = 2$ см эффективный объем высокочастотного магнитного поля равен ^{/2/}

$$V_{\text{эфф.}} = \frac{c \cdot \pi}{16 f_0} D_{\text{вн}}^2 \ln \frac{D_{\text{н}}}{D_{\text{вн}}} = 1,3 \text{ см}^3$$

Если объем образца такой же, как и в предыдущем примере, то коэффициент заполнения $\eta = 0,005$. Добротность этого резонатора $Q_0 = 2000$ и, следовательно, $\eta Q_0 = 10$.

Сравнение полученных результатов показывает, что интенсивность сигнала ЭПР для четвертьволнового резонатора со спиральным внутренним проводником в десятки раз больше, чем для объемного коаксиального резонатора. Этот вывод подтверждается и экспериментально.

Л и т е р а т у р а

1. Д. Инграм. Электронный парамагнитный резонанс в свободных радикалах. ИЛ. Москва, 1961.
2. В.В. Никольский. Теория электромагнитного поля. В.Ш. Москва, 1961.
3. W.Sichak. Proc. IRE 42, 1315 (1954).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1964 г.

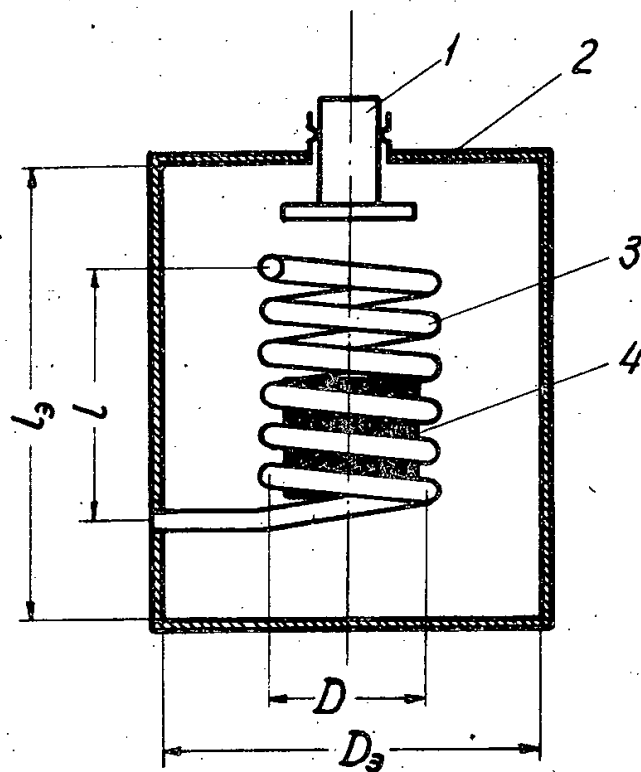


Рис. 1. Схематическое изображение резонатора.

- 1 - элемент настройки; 2 - корпус резонатора;
- 3 - внутренний спиральный проводник; 4 - образец.

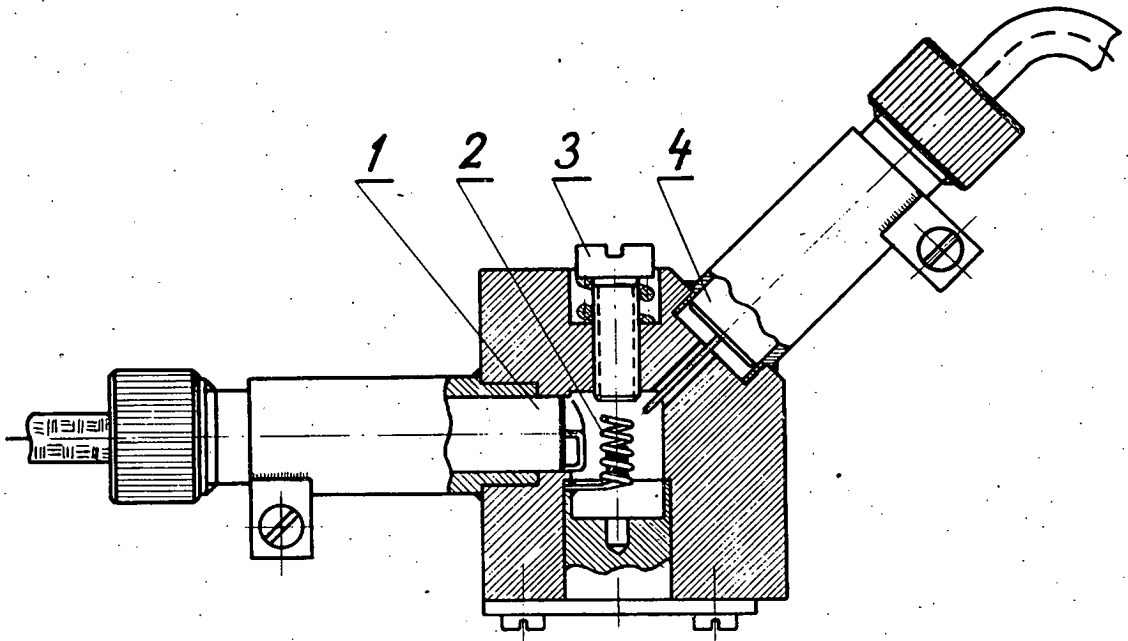


Рис. 2. Конструкция резонатора.

- 1 - диодная детекторная головка (петля связи условно повернута на 90°);
- 2 - внутренний спиральный проводник; 3 - винт настройки;
- 4 - штырь связи с генератором СВЧ.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3581. Тираж 310. Техн. редактор В. Р. Саранцева
0,4 уч.-изд. л. Февраль 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

LABORATORY OF THEORETICAL PHYSICS

A.A. Logunov, Nguyen van Hieu, I.T. Todorov

E - 1520

ASYMPTOTIC RELATIONS BETWEEN
SCATTERING AMPLITUDES
IN LOCAL FIELD THEORY

Дубна 1964

Logunov A.A., Nguyen/van Hieu, Todorov I.T.

E - 1520

Asymptotic Relations between Scattering Amplitudes in
Local Field Theory.

A number of asymptotic relations between the amplitudes (and cross sections) of different scattering processes at high energy has been obtained on the basis of general postulates of the local relativistic quantum field theory. All the conclusions are drawn according to Phragmén-Lindelöf's theorem in the theory of analytical functions and under the assumption that at high energies the amplitudes do not oscillate.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна 1964.

Логунов А.А., Нгуен Ван-хьеу, Тодоров И.Т.

E - 1520

Асимптотические соотношения между амплитудами рассеяния в локальной теории поля.

На основе общих принципов релятивистской локальной теории поля получен ряд асимптотических соотношений между амплитудами /и сечениями/ различных процессов рассеяния и форм-факторов при больших энергиях. Все выводы основаны на предположении, что амплитуды не осциллируют при высоких энергиях и на теореме Фрагмена и Линделефа в теории аналитических функций.

Работа издается только на английском языке.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

A.A. Logunov, Nguyen van Hieu, I.T. Todorov

E - 1520

ASYMPTOTIC RELATIONS BETWEEN
SCATTERING AMPLITUDES
IN LOCAL FIELD THEORY

Submitted to "Annals of Physics"
and to "Uspekhi fiz nauk".

Дубна 1964

I n t r o d u c t i o n

Most of the papers concerned with the investigation of the asymptotic properties of the matrix elements at high energies start either from some semiphenomenological assumptions, or rest on some particular hypotheses. So, for instance, in papers of Pomeranchuk et al^{1,2/} it is assumed (from the analysis of the experimental data) that the differential cross sections for the charge exchange scattering processes vanish at high energies. In some papers the hypothesis about the diffractive character of elastic scattering at high energies is suggested (see e.g.,^{3/}). In other papers^{4/} an assumption is made about the existence of new properties of symmetry in strong interactions which must be demonstrated only at energies much higher than particle masses. Finally, one should mention in this connection the papers in which it is postulated that the asymptotic behaviour of the scattering amplitude at high energies is determined by one Regge pole^{5-7/}. The validity of each of these papers depends on the results of its experimental verification. If experiment confirmed the predictions contained in such papers, this would mean a discovery of some new laws in strong interactions and therefore would be of great importance. On the other hand, the experimental refutation of the assumptions of any of these papers would not be of great interest, since this would mean the rejection of some particular hypotheses or theoretical speculations, but would not break the basic principles of quantum theory. Recently the second tendency—the tendency to a refutation is rather to be observed, (particularly, this concerns the hypothesis of only one Regge pole). It is natural that there appears an increasing interest to such assertions which are deduced only from the general principles of local field theory^{8,9/}.

The purpose of this paper is to obtain some rigorous asymptotic relations between the observed quantities at high energies.

It should be remembered that among the basic postulates of relativistic quantum field theory such as: invariance under the inhomogeneous Lorentz group, existence of a complete system of physical states with positive energy and micro-causality, there is an assumption of a mathematical nature: it is required that the elements of the scattering matrix should be tempered distributions (see, e.g.,^{10,11/}). The importance of this requirement which seems purely formal at the first glance is understood in studying the growth of the analytical continuation of the matrix

elements in the momentum space. It turns out to ensure, e.g., the polynomial boundedness of the Fourier transform of the retarded amplitude throughout the region of analyticity of this function (see^{/11/}, theorem 1). The weakening of this requirement leads to the fact that the analytical continuation of the matrix elements in the momentum space may have any growth (for instance, exponential) what would correspond to a non-renormalizable theory in the Lagrangian formalism^{x/}. At the same time it is not at all obligatory that such an increase would be observed for the cross sections along the real axis as it might seem in studying the n -th term of the perturbation theory series which is growing polynomially along any direction in the complex energy plane. Since the infinity in this case is an essential singularity the amplitude may grow exponentially along some directions, remaining bounded along other ones.

The assumption that the matrix elements are tempered distributions is included into the basic postulates of local field theory because one cannot obtain, without using this assumption, the dispersion relations - practically the only consequence from the general principles of relativistic quantum theory which can be experimentally checked. Besides, as is pointed out in^{/8/}, in order to compensate the exponential growth of the amplitude in the upper half-plane of the energy E it is necessary to introduce a factor of the type e^{aE} , where the positive constant a has dimension of length and may be interpreted as a certain measure of the non-locality of the theory ("elementary length").

If the general principles of the local theory are supplemented by the physical assumption that the scattering amplitude does not oscillate, but has a definite growth (e.g., polynomial or logarithmic), when the energy tends to infinity at fixed momentum transfer, then it is possible to get a number of asymptotic relations between the matrix elements for different processes which can be verified experimentally. The first relation of such a kind - the equality of the total cross sections for particle and antiparticle interaction at high energies - was obtained by Pomerenchuk^{/12/}. Various generalizations and justification of Pomerenchuk's statement may be found in^{/13-16/}. A simple and rigorous proof of this statement under more general assumptions than in^{/12/} was given by Meiman^{/17/} on the basis of Phragmén-Lindelöf's theorem in the theory of analytical functions^{/18,19/}.

In the present paper^{xx/}, Phragmén-Lindelöf's theorem is used to establish a number of asymptotic relations not only between the total but also between the

x/ See discussion of this problem in^{/9/}.

xx/ See also^{/20-22/}, where a part of the results discussed here was obtained. We review here some earlier results in order to make the present paper independent of the previous publications of the authors.

differential cross sections for different processes, as well as between different polarization effects. In Sec. 1, the scalar particle scattering is taken as an example to illustrate in detail the method of proof. In particular, the equality of the differential cross sections for particles and antiparticles is established.^{x/} In the following sections the method described in Sec.1 is applied to the study of more interesting cases from the physical point of view: scattering of particles with spin and form-factors. The main physical results are summarized in Sec. 7.

1. Asymptotic Properties of the Scattering Amplitude of Scalar Particles

1. Phragmén-Lindelöf's Theorem and Asymptotic Equality of Differential Cross Section

Consider the related processes of scalar particle scattering

$$a_1 + b_1 \rightarrow a_2 + b_2 \quad (I)$$

$$\text{and } \bar{a}_2 + b_1 \rightarrow \bar{a}_1 + b_2, \quad (II)$$

where the bar stands for the transition to the antiparticle. Let q_1 and p_1 be the momenta of particles a_1 and b_1 at the beginning of each process while q_2 and p_2 be their momenta at the end of the reaction; the masses of the particles a_1 and b_1 are denoted by m_1 and M_1 ($q_1^2 = m_1^2$, $p_1^2 = M_1^2$ in the process (I), $q_1^2 = m_2^2$, $p_1^2 = M_1^2$ in the process (II)). The differential cross section for process (I) is expressed in terms of the invariant amplitude of this process as

$$\frac{d\sigma^I(s,t)}{dt} = \frac{\pi}{k_1 k_2} \frac{d\sigma^I}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi s k_1^2} |T^I(s,t)|^2. \quad (1.1)$$

Here $s = (p_1 + q_1)^2$, $t = (p_1 - p_2)^2$; k_1 are the magnitudes of the three-dimensional momenta in the c.m.s.

$$k_1^2 = \frac{1}{4s} [s^2 - 2s(M_1^2 + m_1^2) + (M_1^2 - m_1^2)^2]. \quad (1.2)$$

A similar formula holds for the cross section of process (II) either.

The amplitude of process (II) is connected with the amplitude $T^I(s,t)$ for real s and t by the crossing symmetry relation

^{x/} A part of the results of this section was obtained in another way (namely by a generalization of Pomeranchuk's method^{/12/}) in a recent paper by Van Hove^{/23/}. In^{/23/}, only scalar particle scattering is considered and it is assumed that the scattering amplitude behaves as s at $s \rightarrow \infty$ for all fixed momentum transfers t .

$$T^{II}(s, t; M_1^2, m_2^2; M_2^2, m_1^2) = T^I(u, t; M_1^2, m_1^2; M_2^2, m_2^2)^* \quad (1.3)$$

(the star designates complex conjugation). Relation (1.3) is readily obtained from the equality

$$T^{II}(s', t; M_1^2, m_2^2; M_2^2, m_1^2) = T^I(u', t; M_1^2, m_1^2; M_2^2, m_2^2) \quad (1.4)$$

valid for complex s' and u'

Let us assume the masses m_i and M_i and the interactions of particles be such that one would be able to deduce, from the principles of the local theory, the analyticity of the amplitude $T^J(s, t)$ for fixed t in the complex s plane with cuts along the real axis. Besides these cuts, the amplitude has, as a rule, a finite number of poles along the real axis s . When one investigates the asymptotic behaviour at $s \rightarrow \infty$ it is convenient beforehand to subtract the pole terms from the amplitude; these terms have the well-known asymptotic behaviour $1/s$. In what follows we shall denote by $T^J(s, t)$ the amplitude with subtracted pole terms.

In order to cover a sufficiently large class of amplitudes which have a "regular" behaviour, we introduce an auxiliary notion. We call the function $\phi(s, t)$ admissible if at fixed t (from a certain interval) the function $1/\phi(s, t)$ 1) is analytical and less than any exponent $e^{\epsilon|s|}$, $\epsilon > 0$, at $s \rightarrow \infty$ in the upper half-plane, 2) is continuous along the real axis and, 3) if

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi(s, t)}{\phi(-s, t)} = e^{-i\pi a(t)}, \quad (1.5)$$

where $a(t)$ is an arbitrary real function. An example of admissible function may be given by

$$\phi(s, t) = (s+i)^{a(t)} [\ln(s+i)]^{\beta(t)} [\ln \ln(s+i)]^{\gamma(t)} \dots,$$

where $a(t)$, $\beta(t)$ and $\gamma(t)$ are real.

The following theorem holds:

Theorem 1. Let for fixed t and for some choice of the admissible function $\phi(s, t)$ there exist the finite limits

$$V^I(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T^I(s, t)}{\phi(s, t)}, \quad V^{II}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T^I(s, t)^*}{\phi(-s, t)}. \quad (1.6)$$

Then in local field theory, these limits coincide

$$V^I(t) = V^{II}(t) \quad (1.7)$$

Hence the differential cross sections for processes (I) and (II) at high energy are equal

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{d\sigma^I(s,t)}{dt} \left[\frac{d\sigma^{II}(s,t)}{dt} \right]^{-1} = 1 \quad \text{or} \quad \frac{d\sigma^I(s,t)}{dt} \sim \frac{d\sigma^{II}(s,t)}{dt} \quad (1.8)$$

Proof. In virtue of the assumptions concerning the amplitude $T^I(s,t)$, the function

$$V(s,t) = \frac{T^I(s,t)}{\phi(s,t)} \quad (1.9)$$

is analytical and does not exceed any exponent $e^{|s|}$ in the upper half-plane s and is bounded along the real axis. Besides, it follows from (1.3), (1.6) that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} V(s,t) = V^I(t), \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} V(s,t) = V^{II}(t) \quad (1.10)$$

Therefore, one may apply Phragmén-Lindelöf's theorem¹⁷⁻¹⁹, which may be stated as follows:

Theorem 2. I. Let $f(z)$ be an analytical function of $z = r e^{i\theta}$, which is regular in the domain D confined between the two rays Γ_1 and Γ_2 which form the angle π/r with a vertex at the origin. Let further $f(z)$ be bounded on these rays ($|f(z)| \leq C$ along Γ_1 and Γ_2). Then the following alternative takes place: either $|f(z)| \leq C$ at all the points of the domain D , or there exists a sequence r_n tending to infinity so that

$$M(r) = \max_{\substack{|z|=r \\ z \in D}} |f(z)| \geq \exp(\nu r^\nu), \quad \nu > 0 \quad (1.11)$$

If, on the other hand, the magnitude $|f(z)|$ is less than any exponent in the angle D , then the first possibility must be realized, i.e. $f(z)$ is bounded throughout the domain D by a constant.

II. Let the function $w = f(z)$ be regular and bounded in the angle D . We denote by E_i , $i=1,2$ the set of the limit points of w when $z \rightarrow \infty$ along the ray Γ_i . Then, either the sets E_1 and E_2 have a common point,

or one of them is around the other, separating it thereby from the circumference $|w| = C$

In particular, if there exist finite limits a_1 and a_2 when $z \rightarrow \infty$ along Γ_1 and Γ_2 , then $a_1 = a_2 = a$, and $f(z) \rightarrow a$ uniformly in D when $z \rightarrow \infty$.

The function $V(s, t)$ (1.9) satisfies all the conditions of theorem 2 (in our case D is the upper half-plane $s, r=1$). As far as this function is bounded by some power of s , the limits (1.10) have to coincide. Thus, equality (1.7) is proved.

If the rejected pole terms decrease at $s \rightarrow \infty$ quicker than the function $T^J(s, t)$ itself, then at $s \rightarrow \infty$ the formula (1.1) remains valid for this part of the amplitude as well. So, we obtain the asymptotic equality (1.8) between the differential cross sections. If the amplitude behaves at infinity as $1/s$ then a direct account of the pole terms shows that equality (1.8) holds true also for this case. Theorem 1 is proved.

2. The Case of Elastic Scattering

In the particular case of elastic scattering (in this case, $m_1 = m_2 = m$, $M_1 = M_2 = M$) the corollary of theorem 1 about the asymptotic equality of the differential cross sections may be obtained if weaker requirements are imposed. Let us assume that there exist only the limits

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{64 \pi s k^2}{|\phi(s, t)|^2} \frac{d\sigma^J(s, t)}{dt} = [a^J(t)]^2, \quad J = I, II, \quad (1.12)$$

and that the imaginary part of the amplitude is non-negative for small t and $s \rightarrow \infty$. This second assumption seems quite natural in view of the following heuristic argument. Owing to the unitary condition and the positive definiteness of the metric in the Hilbert space, all the coefficients $\text{Im } f_\ell^J(s)$ in the expansion

$$\frac{1}{8 \pi \sqrt{s}} \text{Im } T^J(s, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \text{Im } f_\ell^J(s) P_\ell \left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) \quad (1.13)$$

are non-negative. On the other hand $\frac{t}{2k^2} \rightarrow 0$ at $s \rightarrow \infty$ and since $P_\ell(1) = 1$ each term of the series (1.13) becomes non-negative at s large enough.

In the case of physical interest the series (1.13) converge non uniformly with respect to $s^{x/2}$, so that we cannot derive from here that the imaginary part

^{x/2} If the series (1.13) were uniformly convergent, then the asymptotic behaviour of the absorptive part at $s \rightarrow \infty$ would not depend on t (and the imaginary part would coincide with that at $t=0$).

$\text{Im } T^J(s, t) \geq 0$ for large s . But if we assume that the main contribution in the series (1.13) is given by the terms with $l \sim k$, then for large k (and l)

$$P_l \left(1 + \frac{t}{2k^2}\right) = J_0 \left(\frac{l}{k} \sqrt{-t}\right).$$

The Bessel function is non-negative for $\frac{l}{k} \sqrt{-t} < j_{1,1} = 2,4048$. Hence, under our assumptions $\text{Im } T^J(s, t) > 0$ for sufficiently small t and large s . We also mention that the imaginary part of the amplitude is non-negative in the part of the non-physical region $t \geq 0$, in which the series (1.13) converge (because $P_l(x) \geq 1$ for $x \geq 1$).

We will show that under the assumptions made the limits $a^I(t)$ and $a^{II}(t)$ coincide. Indeed, the assumption about the existence of the limits (1.12) means that the absolute value of the function (1.9) tends to definite limits at $s \rightarrow \pm\infty$. The limit sets E_I and E_{II} for the function $V(s, t)$ itself lie on the two concentric circumferences: $|V(s, t)| = a^I(t)$ and $|V(s, t)| = a^{II}(t)$. In virtue of the second part of theorem 2 either the manifolds E_I and E_{II} intersect, what is possible only if $a^I(t) = a^{II}(t)$, or one of them surrounds the other, i.e. consists of all the points of the circumference $|V(s, t)| = \max[a^I(t), a^{II}(t)]$. However, in the case under consideration the second possibility is not realized, since $\text{Im } T^J(s, t)$ is non-negative at $s \rightarrow \infty$, each of the sets E_I may occupy not more than half a circumference, and, therefore, cannot surround the second one. It follows that $a^I(t) = a^{II}(t)$. Therefore the asymptotic equality of the differential cross sections (1.8) is valid.

Other conditions for which the asymptotic equalities between the differential cross sections hold are given in a recent paper by Meiman^[24]. The results of this paper may be stated in the following way. Let the elastic scattering amplitudes $T^J(s, t)$ have no real zeros and let the following integrals be convergent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ \ln |T^J(s, t)| \} \frac{ds}{1+s^2} < \infty, \quad J = I, II.$$

It follows from here that the products $\pi(s, t) = \prod \frac{1 - s/s_k^J}{1 - s/s_k^J}$ are convergent, where s_k^J are zeros of the amplitude $T^J(s, t)$ in the upper half-plane s . Further, let there exists the limit of the ratio of the absolute values of the amplitudes for processes (I) and (II) at $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{T^I(s, t)}{T^{II}(s, t)} \right| = \gamma.$$

It is assumed that this ratio is limited from above and from below along the whole real axis s by some positive function of t . Then $\gamma = 1$, if the argument (the phase) of the ratio

$$\frac{T^I(s, t)}{T^{II}(s, t)} = \frac{\pi^{II}(s, t)^*}{\pi^I(s, t)}$$

increases (or decreases) slower than $\ln s$ (respectively, $1/\ln s$) at $s \rightarrow \infty$; γ has a finite positive value not equal to unity, if the phase of this ratio grows (decreases) as $\ln s$ ($1/\ln s$); $\gamma = 0$ or 1 , if the phase of the above ratio increases (decreases) quicker than $\ln s$ ($1/\ln s$).

If it is additionally assumed 1) that the function in (1.5) satisfies the condition

$$a(0) = 1 \quad (1.14)$$

(this is so, if the forward elastic scattering amplitude behaves as $s(\ln s)^{\beta(0)}$ at $s \rightarrow \infty$) and 2) that the real part of the amplitude increases not faster than its imaginary part, then from theorem I follows Pomeranchuk's theorem about the asymptotic equality of the total cross sections for particle and antiparticle interaction. It suffices to note that in virtue of the optical theorem, the total cross sections $\sigma_{tot}^J(s)$ corresponding to processes (I) and (II) are expressed in terms of the imaginary parts of the amplitudes of these processes by the following formula

$$\sigma_{tot}^J(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \text{Im } T^J(s, 0), \quad J = I, II. \quad (1.15)$$

If a is a neutral, scalar (or pseudoscalar) particle coinciding with its antiparticle, then the amplitudes of processes (I) and (II) coincide

$$T^I(s, t) = T^{II}(s, t) = T(s, t), \quad (1.16)$$

while in the case of forward scattering (with $a(0) = 1$) theorem I leads to

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T(s, 0)}{T(s, 0)} = -1. \quad (1.17)$$

Using (1.17) we conclude that the amplitude is purely imaginary at $s \rightarrow \infty$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Re } T(s, 0)}{\text{Im } T(s, 0)} = 0. \quad (1.18)$$

The following asymptotic relation between the differential and the total cross section of the process under consideration may be drawn from (1.1), (1.15) and (1.18):

$$\left. \frac{d\sigma(s,t)}{dt} \right|_{t=0} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(s)]^2 \quad (1.19)$$

3. The Upper Bounds for Cross Sections at High Energies

All the results obtained so far are correct for arbitrary high power (and logarithmic) growth of the amplitude. However, our assumptions together with the unitarity condition for the partial amplitudes in (1.13)

$$|f_\ell^j(s)|^2 \leq \text{Im } f_\ell^j(s) \leq 1 \quad (1.20)$$

enable us to prove that the growth of the elastic scattering amplitudes is bounded.

Using the analyticity of the absorptive part in the Lehmann ellipse with semi-major axis $\cos \theta_0 = 1 + \frac{c}{k^2 s}$, $c > 0$ and foci at ± 1 , Greenberg and Low²⁵⁾ have found the following upper bounds for the scattering amplitude^{x)}

$$\begin{aligned} |T(s,0)| &< A s^2 (\ln s)^2, \\ |T(s,t)| &< B \frac{s^{7/4} (\ln s)^{3/2}}{|t|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

These inequalities give the following limitations on the growth of the cross sections

$$\begin{aligned} \sigma_{tot}(s) &< A_1 s (\ln s)^2, \\ \frac{d\sigma(s,t)}{dt} &< B_1 \frac{s^{3/2} (\ln s)^3}{|t|^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

In proving Pomeranchuk's theorem about the equality of the total scattering cross sections for particles and antiparticles we supposed that the forward elastic scattering amplitude behaves as s (multiplied by a certain power of $\ln s$). Such a behaviour corresponds to the upper bound for the scattering amplitude ob-

^{x)} In fact, in^{25,27)} an estimate of the amplitude growth is given for fixed angle θ . Formulae (1.21) and (1.23) valid for fixed $t \neq 0$ are obtained in a similar way.

tained by Froissart on the basis of Mandelstam representation. Froissart's results were obtained under a weaker assumption by Martin^[27] who showed that if the amplitude is analytical with respect to $\cos \theta$ in a certain ellipse with semi-major axis $\cos \theta_0 = 1 + \frac{t_0}{2k^2}$, $t_0 > 0$ then

$$|T(s, 0)| < A s (\ln s)^2, \quad (1.23)$$

$$|T(s, t)| < B \frac{s (\ln s)^{3/2}}{|t|^{1/2}},$$

and therefore

$$\sigma_{\text{tot}}(s) < A_1 (\ln s)^2, \quad (1.24)$$

$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} < B_1 \frac{(\ln s)^3}{|t|^{1/2}}.$$

Note that it is not possible to improve the upper bound (1.23) for the forward scattering amplitude even if the validity of the Mandelstam representation is assumed. On the contrary, the upper bound on the amplitude at fixed non-zero angle may be improved if the analyticity of the amplitude in a wider domain^[27] is assumed.

II. Asymptotic Properties of the Meson-Baryon Scattering Amplitudes

1. Symmetry Properties of the Amplitude

Consider processes (I) and (II) for the case when the particles a_i have spin 0, whereas the particles b_i - spin 1/2. Then the amplitudes of these processes may be put as^{x/}

$$T^J = \bar{u}(p_2) \left[A^J(s, t) + \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} B^J(s, t) \right] u(p_1), \quad J = I, II, \quad (2.1)$$

if the relative parity of particles in the initial state I_1 coincides with the relative parity of particles in the final state I_2 , or in the form

$$T^J = \bar{u}(p_2) \left[A^J(s, t) + \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} B^J(s, t) \right] \gamma_5 u(p_1), \quad J = I, II, \quad (2.2)$$

if $I_2 = -I_1$. In (2.1) and (2.2) p_i and q_i are the 4-momenta of the

^{x/} We use the representation of the γ -matrices, in which γ_0 is Hermitian, and $\gamma_i, i = 1, 2, 3$, are antithermitian, $\gamma_0^2 = 1, \gamma_i^2 = -1$. As usual

$$\hat{q} = \gamma_0 q_0 - \sum_i \gamma_i q_i.$$

fermion and boson in the initial state (b_1 and a_1 for process (I) and b_1 and \bar{a}_2 for process (II)), whereas p_2 and q_2 are the 4-momenta in the final state.

The invariant amplitudes $A^J(s, t)$ and $B^J(s, t)$ of processes (I) and (II) are connected by the crossing symmetry relations. Now we proceed to the derivation of these relations^{x/}.

The amplitudes T^J are expressed in terms of the variational derivatives of the S -matrix by

$$T^I(p_1, q_1; p_2, q_2) = -2^4 i \int d^4 x e^{-i(q_1 + q_2)x} \langle b_2(p_2) | \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{a_2}^*(x) \delta \phi_{a_1}(x)} | b_1(p_1) \rangle \quad (2.3)$$

$$q_1^2 = m_1^2, \quad q_2^2 = m_2^2,$$

$$T^{II}(p_1, q_1; p_2, q_2) = -2^4 i \int d^4 x e^{i(q_1 + q_2)x} \langle b_2(p_2) | \frac{\delta^2 S}{\delta \phi_{a_2}^*(x) \delta \phi_{a_1}(x)} | b_1(p_1) \rangle, \quad (2.4)$$

$$q_1^2 = m_1^2, \quad q_2^2 = m_2^2.$$

In the physical region each of the integrals (2.3) and (2.4) should be understood as a limit when the vector $q_1 + q_2$ has a small imaginary part which lies on the future light cone. Therefore, when the vectors p_1 and q_1 are in the physical region of any of processes (I) and (II) expressions (2.3) and (2.4) are Hermitian conjugate i.e.,

$$T^{II}(p_1, q_1; p_2, q_2) = T^{I*}(p_2, -q_1; p_1, -q_2), \quad (2.5)$$

where (Γ) is the process inverse to (I)

$$a_2 + b_2 \rightarrow a_1 + b_1. \quad (I')$$

Processes (I) and (Γ) are related by the space-time inversion: if

$$T^I(p_1, q_1; p_2, q_2) = \bar{u}(p_2) M^I(p_1, q_1; p_2, q_2) u(p_1), \quad (2.6)$$

^{x/} It is customary to write the crossing symmetry relations for the case of elastic π -meson scattering on the nucleon (see e.g.,^{28/}). The general case when all the four particles a_i and b_i may be different is treated here by the method used in^{29/} in studying the symmetry properties of the nucleon-nucleon scattering amplitudes.

then

$$T^I(p_2, q_2; p_1, q_1) = \eta u(p_2) [B M^I(p_1, q_1; p_2, q_2) B^{-1}]^T u(p_2), \quad (2.7)$$

where the matrix B has the properties

$$B \gamma_\mu B^{-1} = \gamma_\mu^T, \quad B^T = -B, \quad (2.8)$$

the upper index T denotes transposition of the matrices, and η is a phase factor, $|\eta| = 1$. In the case of elastic scattering $\eta = 1$. From (2.5) and (2.7), we get

$$M^I(p_1, q_1; p_2, q_2) = \eta \gamma_4 [B M^I(p_1, -q_2; p_2, -q_1) B^{-1}]^* \gamma_4 \quad (2.9)$$

Relation (2.9) may be written down in a more customary form if we express B through the charge conjugation matrix C

$$B = C^{-1} \gamma_5, \quad C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \quad C^T = -C. \quad (2.10)$$

According to the CPT-theorem^{/30/}

$$\gamma_5 M^I(p_1, -q_2; p_2, -q_1) \gamma_5 = M^I(-p_1, q_2; -p_2, q_1). \quad (2.11)$$

From (2.9)-(2.11) follows the crossing symmetry relation.

$$M^{II}(p_1, q_1; p_2, q_2) = \eta \gamma_4 [C^{-1} M^I(-p_1, q_2; -p_2, q_1) C]^* \gamma_4. \quad (2.12)$$

One can easily get the crossing relations between the invariant amplitudes $A^I(s, t)$ and $B^I(s, t)$ processes (I) and (II). Whether the relative parities of particles in the initial and final states coincide or are opposite in sign, we find

$$\begin{aligned} A^{II}(s, t) &= \eta^* A^I(u, t)^*, & B^{II}(s, t) &= -\eta^* B^I(u, t)^* & l_i &= l_f, \\ A^{II}(s, t) &= -\eta^* A^I(u, t)^*, & B^{II}(s, t) &= \eta^* B^I(u, t)^* & l_i &= -l_f. \end{aligned} \quad (2.13)$$

In the following we shall put $\eta = 1$. This will not lead to a change in the final results since only the product $\eta \eta^* = 1$ enters into the expressions for the differential cross sections and polarizations.

Together with processes (I) and (II) in the case when b_i are particles with spin we shall consider also the process

$$a_1 + \bar{b}_2 \rightarrow a_2 + \bar{b}_1. \quad (III)$$

The amplitude of this process can be written down as

$$T^{III}(p_1, q_1; p_2, q_2) = \bar{u}(p_2) M^{III}(p_1, q_1; p_2, q_2) u(p_1). \quad (2.14)$$

Similarly to what has been said it is possible to obtain the following crossing symmetry relation between the amplitudes M^{III} and M^I

$$M^{III}(p_1, q_1; p_2, q_2) = \gamma M^I(p_2, -q_1; p_1, -q_2)^\dagger \gamma_4, \quad (2.15)$$

or in terms of the invariant amplitudes

$$A^{III}(s, t) = A^I(u, t)^*, \quad B^{III}(s, t) = -B^I(u, t) \quad I_i = I_f, \quad (2.16)$$

$$A^{III}(s, t) = -A^I(u, t)^*, \quad B^{III}(s, t) = -B^I(u, t)^* \quad I_i = -I_f.$$

2. Asymptotic Equalities between the Differential Cross Sections

The differential cross section for process (I) is equal to

$$\frac{d\sigma^I(s, t)}{dt} = \frac{1}{64 \pi s k_1^2} F^I(s, t) \quad (2.17)$$

where

$$F^I(s, t) = [(M_2 \pm M_1)^2 - t] |A^I(s, t)|^2 + \frac{(u-s)^2 - (m_2^2 - m_1^2) - [t - 2(m_1^2 + m_2^2)] [t - (M_2 \mp M_1)^2]}{4} |B^I(s, t)|^2 + [(M_2 \pm M_1)(s-u) + (M_2 \mp M_1)(m_2^2 - m_1^2)] \cdot \text{Re } A^I(s, t) B^I(s, t)^*, \quad (2.18)$$

the upper sign corresponds to the case of identical relative parities $I_i = I_f$, while the lower one - to the case of opposite parities, $I_i = -I_f$.

For the fixed t and $s \rightarrow \infty$ (2.18) assumes the form

$$F^I(s, t) \approx [(M_2 \pm M_1) A^I(s, t) + s B^I(s, t)]^2 - t |A^I(s, t)|^2. \quad (2.19)$$

The differential cross section for process (II) is readily obtained from (2.17) and (2.18) by the substitution $A^{II}(s, t)$ and $B^{II}(s, t)$ for $A^I(s, t)$ and $B^I(s, t)$ and $m_1 \leftrightarrow m_2$, while the differential cross section for process (III) - by the substitution $A^{III}(s, t)$ and $B^{III}(s, t)$ for $A^I(s, t)$ and $B^I(s, t)$ and $M_1 \leftrightarrow M_2$.

Let us prove the asymptotic equality between the cross sections for processes (I), (II) and (III) for fixed $t \leq 0$ and $s \rightarrow \infty$. If only one of the two

amplitudes $A^J(s, t)$ and $B^J(s, t)$ gives the main contribution to the cross sections for large s then it suffices to consider this amplitude, and the asymptotic equality between the cross sections follows immediately from theorem 1. Therefore, we have to treat the general case when both amplitudes $A^J(s, t)$ and $B^J(s, t)$ give contributions of the same order to the asymptotic behaviour of the cross sections. In this case, for some choice of the admissible function $\phi(s, t)$ there exist (by assumption) the finite limits

$$U_{\pm}(t) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{A^I(s, t)}{\phi(s, t)}, \quad V_{\pm}(t) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{s B^I(s, t)}{\phi(s, t)}. \quad (2.20)$$

In virtue of theorem 2 the limiting values (2.20) are equal

$$U_+(t) = U_-(t), \quad V_+(t) = V_-(t) \quad (2.21)$$

and, therefore, if we take into account the crossing symmetry relations (2.13) and (2.16), we get

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A^I(s, t)}{A^{II}(s, t)^*} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B^I(s, t)}{B^{II}(s, t)^*} = \pm e^{-i\pi\alpha(t)}, \quad (2.22)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A^I(s, t)}{A^{III}(s, t)} = \pm \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B^I(s, t)}{B^{III}(s, t)} = \pm e^{-i\pi\alpha(t)},$$

where again the upper sign corresponds to the case $l_i = l_f$, whereas the lower one to the case $l_i = -l_f$.

From these asymptotic relations between the amplitudes of processes (I), (II) and (III) follows the asymptotic equality between the cross sections of these processes for fixed t and $s \rightarrow \infty$. For instance, in such a way we obtain the asymptotic equalities between the differential cross sections for the processes

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p & \text{and} & & \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p, \\ K^+ + p &\rightarrow K^+ + p & \text{and} & & K^- + p &\rightarrow K^- + p, \\ \pi^+ + p &\rightarrow K^+ + \Sigma^+ & \text{and} & & K^- + p &\rightarrow \pi^- + \Sigma^+, \\ K^- + p &\rightarrow K^0 + \Xi^0 & \text{and} & & \bar{K}^0 + p &\rightarrow K^+ + \Xi^0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

(if the Ξ -hyperon has spin 1/2),

$$\Sigma^+ + He \rightarrow p + He_{\lambda} \quad \text{and} \quad \bar{p} + He \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + He_{\lambda}.$$

3. Asymptotic Relations between Fermion Polarizations in Final State

Suppose that fermions in the initial state are unpolarized. Denote by n_μ the unit space-like four-vector proportional to $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_{1\alpha} q_{1\beta} p_{2\gamma}$, where $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ is the totally antisymmetrical tensor. In the centre-of-mass system $n = 0$, $\vec{n} = [\vec{p}_1 \times \vec{p}_2] / |[\vec{p}_1 \times \vec{p}_2]|$. The polarization state of the fermions in the final state is characterized by the four-dimensional polarization vector ξ_μ^J proportional to the unit vector n_μ .

$$\xi_\mu^J = P^J(s, t) n_\mu. \quad (2.24)$$

Calculating $P^J(s, t)$, we get

$$P^J(s, t) = 2s \sqrt{-t} C(s, t) \frac{\text{Im} A^J(s, t)^* B^J(s, t)}{F^J(s, t)}, \quad (2.25)$$

where the function $C(s, t)$ tends to unity as $s \rightarrow \infty$ at fixed t (sec^{22/} and the expression (2.35) for the case of equal masses). For process (I) the function $F^I(s, t)$ is determined by (2.18), and at large s - by (2.19), as for processes (II) and (III) the functions $F^J(s, t)$ are obtained from (2.18) with modifications indicated after formula (2.19).

As was shown for fixed t and $s \rightarrow \infty$ the functions $F^J(s, t)$ are equal for all processes (I), (II) and (III). Therefore, in studying the polarization it is sufficient to consider the quantity $\text{Im} A^J(s, t)^* B^J(s, t)$. It follows from the asymptotic relations (2.22) that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Im} A^I(s, t)^* B^I(s, t)}{\text{Im} A^{II}(s, t) B^{II}(s, t)} = \pm \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\text{Im} A^I(s, t)^* B^I(s, t)}{\text{Im} A^{III}(s, t) B^{III}(s, t)} = -1, \quad (2.26)$$

where like in (2.22) the sign "+" corresponds to the case $I_i = -I_f$, while the sign "-" to the case $I_i = -I_f$.

Thus it was shown that for fixed t and $s \rightarrow \infty$ the polarizations of fermions in the final states of processes (I), (II) and (III) are connected by

$$\begin{aligned} P^I(s, t) &= -P^{II}(s, t) = -P^{III}(s, t) & \text{if } I_i = I_f \\ P^I(s, t) &= -P^{II}(s, t) = P^{III}(s, t) & \text{if } I_i = -I_f. \end{aligned} \quad (2.27)$$

The results obtained are applicable, in particular, to processes (2.23)

For instance, the polarizations of the recoil protons in the processes

$$\begin{aligned} \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p & \quad \text{and} \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \\ K^+ + p \rightarrow K^+ + p & \quad \text{and} \quad K^- + p \rightarrow K^- + p \end{aligned}$$

for the same values of energy s and momentum transfer t are equal by absolute value and opposite in sign. For the polarizations of Σ^+ - hyperons in the processes

$$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+ \quad \text{and} \quad K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$

or for the polarization of Ξ^0 - hyperon in the processes

$$K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^0 \quad \text{and} \quad K^0 + p \rightarrow K^+ + \Xi^0$$

there holds the same asymptotic relations irrespective of the relative parities of particles. However, the asymptotic relation between the nucleon and antihyperon polarizations in the last pair of processes (2.23) depends on the relative parity

$I_{\Sigma\Lambda}$: the polarizations of p and $\bar{\Sigma}^+$ are equal by absolute value and opposite in sign, if this parity is $+1$, and they are equal both by absolute value and in sign if the parity $I_{\Sigma\Lambda}$ is -1 .

We considered the general case when both the invariant amplitudes contribute to the asymptotic behaviour of the cross sections. As one can easily see from formula (2.31) the polarizations in this case may tend to nonvanishing limits at $s \rightarrow \infty$. If only one of these amplitudes gives a contribution to the cross sections at large s , then the polarizations are tending to zero.

Now we will show that there exists a number of processes in which the fermion polarizations in the final states are tending to zero at $s \rightarrow \infty$ for fixed (non-vanishing) t irrespective of the relative behaviour of the invariant amplitudes. These are the processes which transform into themselves in the crossing transformation, i.e., the processes for which $\bar{a}_2 = a_1$. In this case, processes (I) and (II) coincide, so that $P^I = P^{II}$. On the other hand, by (2.27), $P^I(s, t) = -P^{II}(s, t)$ irrespective of the relative parities of particles. Therefore, in this case

$$P^I(s, t) = P^{II}(s, t) = 0$$

Thus, for example, the fermion polarizations in the final states of the processes

$$\begin{aligned} & K_{1,2}^0 + p \rightarrow K_{1,2}^0 + p \\ \text{and} & \\ & K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^- \end{aligned}$$

(if Ξ^- - hyperon spin is $1/2$) are tending to zero at $s \rightarrow \infty$ for fixed t irrespective of the relative parities of particles even in the case when both the invariant amplitudes give contributions to the asymptotic behaviour of the cross

sections. If the isotopic invariance is fulfilled then the polarization of the recoil neutron is also tending to zero in the charge exchange process

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n .$$

Indeed, we saw that the polarizations of the recoil neutrons in this process and in the process

$$\pi^0 + p \rightarrow \pi^- + n$$

are opposite at $s \rightarrow \infty$. However, it follows from the isotopic invariance that the matrix elements of these processes coincide (up to a sign). Therefore, the neutron polarizations in both processes must be equal to each other. It follows from here that at $s \rightarrow \infty$ the polarizations of the recoil neutrons of the processes under consideration tend to zero.

To check the obtained asymptotic relations between the polarizations it is probably simpler to use the polarized nucleon target and to measure the asymmetry parameter η^J for different processes which is known to be equal to the polarization (2.25) if the relative parities I_1 and I_2 are the same, and have the opposite sign if $I_1 = -I_2$ ^[31]. Moreover, between the polarizations and the asymmetry parameters in processes (I) and (III) there exist the following relations

$$P^I = -\eta^{III}, \quad P^{III} = -\eta^I$$

irrespective of the parities I_1 and I_2 . (2.28)

4. The Complete Set of Measurements for Elastic-Meson-Nucleon Scattering

In the case of zero spin meson scattering on the nucleon (with spin 1/2) the complete set of measurements has to yield three real quantities (for each value of the variables s and t) ^{x/}. As such quantities one can choose the differential cross section (2.17)-(2.18), the polarization $P^J(s, t)$ of the fermion in the final state by scattering on the unpolarized target (2.25) and the polarization by scattering on the polarization by scattering on the polarized target with the polarization vector $\vec{\zeta}$. The three-dimensional vector of the nucleon polarization in the final state in the process of elastic of meson scattering on a polarized nucleon target in the centre-of-mass system is equal to

$$\vec{\xi} = P^J(s, t)\vec{n} + \vec{\zeta} + Q^J(s, t)[(\vec{\zeta} \vec{n})\vec{n} - \vec{\zeta}], \quad J = I, II, \quad (2.29)$$

where $P^J(s, t)$ is given by the formula (2.25) and

^{x/} In ^[32], the complete set of measurements is restricted to two quantities since at the energy below the threshold for inelastic processes the remaining quantities can be determined from the elastic unitarity condition.

$$Q^J(s, t) = -32t C^2(s, t) \left[\frac{s}{(\sqrt{s+M})^2 - m^2} \right]^2 \frac{|A^J(s, t) - (\sqrt{s+M}) B^J(s, t)|^2}{F^J(s, t)}, \quad (2.30)$$

$F^J(s, t)$ is given by (2.18) (and the indications after formula (2.19)),

$$C^2(s, t) = - \frac{su - (M^2 - m^2)^2}{s^2} \rightarrow 1, \quad s \rightarrow \infty \quad (2.31)$$

As a third measurable quantity (along with $\frac{d\sigma^J}{dt}(s, t)$ and $P^J(s, t)$), one can take the quantity $Q^J(s, t)$ in virtue of (2.29). It can be easily seen that under the assumptions we have made the asymptotic values of the quantities $Q^J(s, t)$ for processes I and II must coincide at $s \rightarrow \infty$.

In the case of elastic meson-nucleon scattering under consideration the results obtained may be also derived from some weaker assumptions: instead of the existence of two complex (i.e., four real) limits (2.20) it suffices to assume the existence of the limits for the three experimentally measurable quantities $\frac{d\sigma^J}{dt}(s, t)$, $P^J(s, t)$ and $Q^J(s, t)$ or, what is the same, the existence of the limits (at $s \rightarrow \infty$) for the quantities

$$\left| \frac{f^J(s, t)}{\phi(s, t)} \right|, \quad \left| \frac{A^J(s, t)}{\phi(s, t)} \right|, \quad \text{and } \arg \left[\frac{A^J(s, t)}{f^J(s, t)} \right], \quad (2.32)$$

where

$$f^J(s, t) = 2MA^J(s, t) + (s - M^2 - m^2) B^J(s, t), \quad (2.33)$$

provided that $\text{Im } f^J(s, t) \geq 0$ at $s \rightarrow \infty$. This latter assumption is reasonable since

$$f^J(s, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[(\ell+1) f_{\ell}^{(+)} + \ell f_{\ell}^{(-)} \right] P_{\ell} \left(1 + \frac{t}{2k^2} \right) - \frac{t}{2k^2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[f_{\ell}^{(+)} - f_{\ell}^{(-)} \right] P_{\ell}^{\prime} \left(1 + \frac{t}{2k^2} \right), \quad (2.34)$$

and in virtue of the unitarity condition

$$\text{Im } f_{\ell}^{(\pm)} \geq 0. \quad (2.35)$$

Under these assumptions the conclusions about the asymptotic equality of the differential cross sections, about the relation between polarizations (2.27) and about the equality of the quantities $Q^J(s, t)$ (2.30) for processes (I) and (II) also hold true. The proof of this assertion is carried out similarly to that for the case of scalar particles (see I).

III. Asymptotic Properties of the Scattering Amplitudes of Spinor Particles

1. Asymptotic Equalities for Differential Cross Sections

Now we proceed to the study of processes (I), (II), (III) in the case when all the particles a_1 and b_1 have spin $1/2$. In this case processes (II) and (III) differ only in notations. Therefore, it suffices to consider processes (I) and (II). The amplitudes of these processes may be put as

$$T^J = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}_a(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_a(q_1) \bar{u}_b(p_2) \Gamma_i^{(b)}(q) u_b(p_1) F_i^J(s, t), \quad J=I, II. \quad (3.1)$$

where

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad p = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad (3.2)$$

$u_a(q_1)$ and $u_b(p_1)$ are the spinors with positive energy. In the first process $u_a(q_1)$ and $u_b(p_1)$ characterize the states of the particles a_1 and b_1 , $u_a(q_2)$ and $u_b(p_2)$ - the particles a_2 and b_2 , and in the second process $u_a(q_1)$ and $u_b(p_1)$ characterize the states of the particles \bar{a}_2 and b_1 , $u_a(q_2)$ and $u_b(p_2)$ - the particles \bar{a}_1 and b_2 . The covariant matrices $\Gamma_i^{(a,b)}$ in (3.1) may be chosen (depending on the relative parities of the particles) as follows

$$\Gamma_i^{(a)}(p) = \{ 1, I, \hat{p}, \hat{p}, \gamma_5, \gamma_5, \hat{p} \gamma_5, \hat{p} \gamma_5 \}, \quad (3.3)$$

(irrespective of the relative parities),

$$\Gamma_i^{(b)}(q) = \{ 1, \hat{q}, \hat{q}, I, \gamma_5, \hat{q} \gamma_5, \gamma_5, \hat{q} \gamma_5 \} \quad (3.4)$$

if $I_1 = I_2$,

$$\Gamma_i^{(b)}(q) = \{ \gamma_5, \hat{q} \gamma_5, \hat{q} \gamma_5, \gamma_5, I, \hat{q}, I, \hat{q} \} \quad (3.5)$$

if $I_1 = -I_2$.

The amplitudes T^{II} and T^I are connected by a relation of type (2.12):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i^{(b)}(q) \bar{u}_a(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_a(q_1) F_i^{II}(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_4 [C^{-1} \Gamma_i^{(b)}(q) C] \gamma_4 [\bar{u}_a(q_1) \Gamma_i^{(a)}(-p) u_a(q_2)] F_i^I(u, t). \quad (3.6)$$

It follows from this relation that the invariant amplitudes $F_i^J(s, t)$ of proces-

the following crossing symmetry relations

$$F_i^J(s, t) = \pm (-1)^{l_i+1} F_i^J(u, t)^* \quad (3.7)$$

where the $+$ sign corresponds to the case $l_i = l_f$, while the $-$ sign - to the case $l_i = -l_f$.

Note, that in the elastic scattering processes the relative parities of particles in the initial and final states are the same: $l_i = l_f$. It follows from the time reversal invariance that in this case the two amplitudes $F_6^J(s, t)$ and $F_7^J(s, t)$ are equal to zero and there exist only six independent amplitudes. Besides, if all the particles are the components of the same isotopic multiplet (for example, in case of nucleon-nucleon scattering), then the amplitudes $F_2^J(s, t)$ and $F_4^J(s, t)$ coincide, and there exist only five independent amplitudes.

The differential cross section for process (I) reads

$$\frac{d\sigma^I(s, t)}{dt} = \frac{1}{64 \pi s k_1^2} |F^I(s, t)|^2 \quad (3.8)$$

$$|F^I(s, t)|^2 = \sum_{i=1}^8 A_i B_i |F_i^I(s, t)|^2 + \text{Re} \sum_{i < j} A_{ij} B_{ij} F_i^I(s, t) F_j^I(s, t)^* \quad (3.9)$$

The coefficients A_i , B_i , A_{ij} , B_{ij} satisfy the equalities

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 = A_{12}, \quad A_3 = A_4 = A_{34}, \quad A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24}, \\ A_5 = A_6 = A_{56}, \quad A_7 = A_8 = A_{78}, \quad A_{57} = A_{67} = A_{58} = A_{68}, \\ B_1 = B_4 = B_{14}, \quad B_2 = B_3 = B_{23}, \quad B_{12} = B_{13} = B_{24} = B_{34}, \\ B_5 = B_7 = B_{57}, \quad B_6 = B_8 = B_{68}, \quad B_{56} = B_{58} = B_{67} = B_{78}, \\ A_{ij} = B_{ij} = 0 \quad |j-i| \geq 4. \end{aligned} \quad (3.10)$$

The coefficients A_1 , A_3 and A_{13} are equal

$$\begin{aligned} A_1 &= (m_1 + m_2)^2 - t \\ A_3 &= \frac{1}{4} \{ (s-u)^2 - (M_1^2 - M_2^2)^2 - [t - 2(M_1^2 + M_2^2)] [t - (m_1 - m_2)^2] \}, \\ A_{13} &= (m_1 + m_2)(s-u) + (m_2 - m_1)(M_2^2 - M_1^2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

and A_5 , A_7 and A_{57} are readily obtained from A_1 , A_3 and A_{13}

respectively, by the substitution $m_1 \rightarrow -m_1$. As for the coefficients B_i and B_{ij} they are determined depending on the relative parities of particles: in the case $I_1 = I_1$, B_1 , B_2 , B_{12} , B_5 , B_6 and B_{56} are obtained from A_1 , A_3 , A_{13} , A_5 , A_7 and A_{57} , respectively, by the substitution $m_1 \leftrightarrow M_1$; and in the case $I_1 = -I_1$ - by the same substitution from A_5 , A_7 , A_{57} , A_1 , A_3 and A_{13} , respectively.

The differential cross section for process (II) is determined in a similar manner. It is obtained from the differential cross section of process (I) by the substitution $F_1^{II}(s, t)$ for $F_1^I(s, t)$ and $m_1 \leftrightarrow m_2$.

We will consider the general case when all eight amplitudes $F_i^J(s, t)$ contribute to the asymptotic behaviour of the cross sections. It follows from (3.10) and (3.11) and the indications after these formulas that in this case the functions

$$F_1^J(s, t), sF_2^J(s, t), s^2F_3^J(s, t), sF_4^J(s, t), F_5^J(s, t), sF_6^J(s, t), sF_7^J(s, t), s^2F_8^J(s, t) \quad (3.12)$$

have the same asymptotic behaviour at $s \rightarrow \infty$ and for fixed t . As well as in the case of scalar particle scattering on spinor particles, it follows from Phragmen-Lindelof's theorem^{x/} and from the crossing symmetry relations that

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F_i^I(s, t)}{F_i^{II}(s, t)^*} = \begin{cases} + e^{-i\pi\alpha(t)} & , i = 1, 2, \dots, 6, \\ - e^{-i\pi\alpha(t)} & , i = 7, 8. \end{cases} \quad (3.13)$$

From relations (3.13) and the expressions for the differential cross section for processes (I) and (II) one can easily see that these cross sections are asymptotically equal. In particular, at $s \rightarrow \infty$ and for fixed t there occurs the asymptotic equality between the differential cross sections for the processes^{xx/}

^{x/} Note that, while the dispersion relations for pion-nucleon scattering are proved on the basis of general principles of local field theory^{8/}, the analytical properties of nucleon-nucleon scattering amplitude necessary for proving theorem 2 are proved only in any order of perturbation theory^{33,34/}. As for the hyperon scattering on the nucleon, then, as is shown in^{35/}, the usual dispersion relations do not hold on the lowest orders of perturbation theory even for the case of forward scattering. The analytical properties from which the equalities of the cross sections for processes (3.14) follow are the hypothetical ones.

^{xx/} As was pointed out in the previous footnote, the hypothesis about the meromorphy of the hyperon-nucleon scattering amplitude in the upper half-plane s (from which the asymptotic equalities between the cross sections follow) is not so far proved. This also holds for the equalities between the polarizations for the processes involving hyperons.

$$\begin{aligned}
 p + p &\rightarrow p + p & \text{and} & \quad \bar{p} + p \rightarrow \bar{p} + p, \\
 \Sigma^+ + p &\rightarrow \Sigma^+ + p & \text{and} & \quad \bar{\Sigma}^+ + p \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + p, \\
 \Sigma^- + p &\rightarrow \lambda + n & \text{and} & \quad \bar{\lambda} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^- + n, \\
 \Sigma^+ + p &\rightarrow p + \Sigma^+ & \text{and} & \quad \bar{p} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + \Sigma^+, \\
 \Sigma^- + p &\rightarrow n + \lambda & \text{and} & \quad \bar{n} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^- + \lambda.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

It should be noted that in the two latter reactions of (3.14) the momentum transfer t is measured between the initial proton and the final hyperon (as usual, this transfer is denoted by u). Therefore, in these cases we have the equality between the cross section for backward elastic hyperon-proton scattering and the annihilation cross section of the proton-antiproton pair into the hyperon-anti-hyperon pair.

2. Asymptotic Relations between Polarizations

We denote by ξ_μ^{Ia} and ξ_μ^{Ib} the four-dimensional polarization vectors of the particles a_2 and b_2 , respectively, in the final state of process (I), by ξ_μ^{IIa} and ξ_μ^{IIb} the polarization vectors of the particles a_2 and b_2 , respectively, in the final state of process (II), and by n_μ the unit space-like four-vector proportional to $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} p_{1\alpha} q_{1\beta} p_{2\gamma}$. If the particles in the initial state are unpolarized then the polarization vectors ξ_μ^{Ia} and ξ_μ^{Ib} are proportional to the unit vector n_μ .

$$\xi_\mu^{Ia} = P^{Ja}(s, t) n_\mu, \quad \xi_\mu^{Ib} = P^{Jb}(s, t) n_\mu. \tag{3.15}$$

Let us calculate the polarization of the particle b_2 in the final states of processes (I) and (II). For the first process we have

$$\begin{aligned}
 P^{Ib}(s, t) &= 2s\sqrt{-t} \frac{C(s, t)}{F^I(s, t)} \text{Im} \left\{ A_{12} F_1^I(s, t)^* F_2^I(s, t) + A_{13} F_1^I(s, t)^* F_3^I(s, t) \right. \\
 &+ A_{24} F_2^I(s, t) F_4^I(s, t)^* + A_{34} F_3^I(s, t) F_4^I(s, t)^* + A_{56} F_5^I(s, t)^* F_6^I(s, t) \\
 &\left. + A_{78} F_7^I(s, t)^* F_8^I(s, t) + A_{58} F_5^I(s, t)^* F_8^I(s, t) + A_{67} F_6^I(s, t) F_7^I(s, t)^* \right\},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

the function $C(s, t)$ tending to unity at $s \rightarrow \infty$ for fixed t . The expression for $P^{IIb}(s, t)$ may be obtained from (3.16) by substituting $F_i^{II}(s, t)$ for $F_i^I(s, t)$ and

$$m_1 \leftrightarrow m_2.$$

As was shown, at $s \rightarrow \infty$ for fixed t the functions $F^I(s, t)$ and $F^{II}(s, t)$ are asymptotically equal. It follows from relations (3.13) that for the six first terms in (3.16)

$$\text{Im } F_1^I(s, t)^* F_1^I(s, t) = - \text{Im } F_1^{II}(s, t)^* F_1^{II}(s, t), \quad (3.17a)$$

while for the two latter ones

$$\text{Im } F_1^I(s, t)^* F_1^I(s, t) = \text{Im } F_1^{II}(s, t)^* F_1^{II}(s, t). \quad (3.17b)$$

However, the coefficients A_{58} and A_{67} of these two latter terms are proportional for large s to the mass difference $m_1 - m_2$ and in the transition from $P^{Ib}(s, t)$ into $P^{IIb}(s, t)$ one should make the substitution $m_1 \leftrightarrow m_2$. i.e., in this transition the coefficients A_{58} and A_{67} change their signs, and the other coefficients do not change (asymptotically). Thus, for large s the polarizations $P^{Ib}(s, t)$ and $P^{IIb}(s, t)$ are equal by absolute value and have opposite signs, irrespective of the particle parities

$$P^{Ib}(s, t) = - P^{IIb}(s, t). \quad (3.18)$$

Consider now the polarization properties of the particles a_2 and \bar{a}_1 in processes (I) and (II), respectively. For the first process we have

$$P^{Ia}(s, t) = 2s\sqrt{-t} \frac{C(s, t)}{F(s, t)} \text{Im} \{ B_{13} F_1^I(s, t)^* F_3^I(s, t) + B_{14} F_1^I(s, t)^* F_4^I(s, t) \} \quad (3.19)$$

$$+ B_{23} F_2^I(s, t)^* F_3^I(s, t) + B_{24} F_2^I(s, t)^* F_4^I(s, t) + B_{58} F_5^I(s, t)^* F_8^I(s, t) \\ + B_{57} F_5^I(s, t)^* F_7^I(s, t) + B_{67} F_6^I(s, t)^* F_7^I(s, t) + B_{68} F_6^I(s, t)^* F_8^I(s, t) \},$$

$F^I(s, t)$ and B_{ij} being determined as earlier, while the polarization of the particle \bar{a}_1 in process (II), is obtained from (3.19) by substituting $F_1^{II}(s, t)$ for $F_1^I(s, t)$ and $m_1 \rightarrow m_2$. Note, that for large s B_{ij} are independent of the masses m_1 and m_2 . Therefore, they do not change in the transition from $P^{Ia}(s, t)$ to $P^{IIa}(s, t)$. It follows from asymptotic relations (3.13) that for the four first terms in (3.19)

$$\text{Im } F_1^I(s, t)^* F_1^I(s, t) = - \text{Im } F_1^{II}(s, t)^* F_1^{II}(s, t) \quad (3.20a)$$

and for the four remaining ones

$$\text{Im } F_1^I(s, t) \cdot F_1^I(s, t) = \text{Im } F_1^{II}(s, t) \cdot F_1^{II}(s, t). \quad (3.20b)$$

Thus, in the general case, when all the amplitudes $F_1^J(s, t)$ contribute to the asymptotic behaviour of the cross sections there exists no simple relation between $P^{Ia}(s, t)$ and $P^{IIa}(s, t)$.

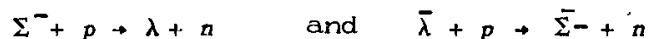
Consider the case of elastic particle scattering. In this case, as was pointed out, $F_1^J(s, t) = F_1^J(s, t) = 0$ i.e., the three last terms in (3.19) are equal to zero. Moreover, in this case $M_1 = M_2$, B_{58} does not contain the higher term like in (3.11) and the fifth term in (3.19), does not give a contribution $s \rightarrow \infty$. Therefore, $P^{Ja}(s, t)$ are determined by the four first terms which change their signs in the transition from $P^{Ia}(s, t)$ to $P^{IIa}(s, t)$. Thus, in the case of elastic particle scattering there holds the following asymptotic relation between the polarization of the particles a_2 and $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ in processes (I) and (II)

$$P^{Ia}(s, t) = -P^{IIa}(s, t). \quad (3.21)$$

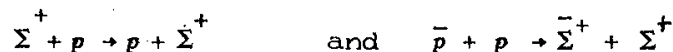
Consider some examples. In virtue of (3.18), at $s \rightarrow \infty$ and for fixed t the recoil proton polarizations in the processes



have the same magnitude and opposite signs; the recoil neutron polarizations in the processes



and the hyperon polarizations in the processes



are also opposite in signs and equal by the absolute value. In virtue of (3.21) the nucleon polarization (correspondingly-hyperon) and the antinucleon (correspondingly-antihyperon) in the elastic scattering processes



are also opposite.

If the initial particles are polarized, then in the angular distributions of final particles there will be the left-right asymmetry. We denote by $\eta^a(s, t)$ and $\eta^b(s, t)$ the asymmetry parameters in the processes with polarized particles a and b , respectively. For these quantities we have expressions analogous to (3.16) and (3.19) (but not exactly the same). From these expressions we can also prove the asymptotic relation analogous to (3.18)

$$\eta^{Ib}(s, t) = -\eta^{IIb}(s, t) \quad (3.18')$$

In the general case the connection between $\eta^{I_a}(\mathbf{s}t)$ and $\eta^{II_a}(\mathbf{s}t)$ is not so simple, but in the case of elastic scattering we have

$$\eta^{I_a}(\mathbf{s}t) = -\eta^{II_a}(\mathbf{s}t) \quad (3.21')$$

by analogy with (3.21). In the general case we have the following asymptotic relations

$$P^{I_a}(\mathbf{s}t) = -\eta^{II_a}(\mathbf{s}t), \quad P^{II_a}(\mathbf{s}t) = -\eta^{I_a}(\mathbf{s}t), \quad (3.22)$$

irrespective of the relative parities I_f and I_i .

Remind that in the case of boson-fermion scattering we have also similar relations (2.28).

IV. Asymptotic Properties of the Amplitudes of Pion-Photoproduction and Compton-Effect on Nucleon

We will show that the isotopic invariance of strong interactions and Phragmén-Lindelöf's theorem lead to the asymptotic equality between the differential cross sections of the processes

$$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n \quad (4.1)$$

and

$$\gamma + n \rightarrow \pi^- + p. \quad (4.2)$$

The amplitudes of the processes under consideration may be written as

$$T^a = \sum_{i=1}^4 \bar{u}(p_2) T_i u(p_1) F_i^a(\mathbf{s}t) \quad (4.3)$$

where

$$\begin{aligned} T_1 &= i \gamma_s \hat{\epsilon} \hat{k}, \\ T_2 &= 2i \gamma_s [(q\epsilon)(pk) - (qk)(p\epsilon)], \\ T_3 &= i \gamma_s [\hat{\epsilon}(qk) - \hat{k}(q\epsilon)], \\ T_4 &= 2i \gamma_s [\hat{\epsilon}(pk) - \hat{k}(p\epsilon)], \end{aligned} \quad (4.4)$$

p_1 and p_2 are the 4-momenta of the nucleons in the initial and final states, respectively, k and q are the 4-momenta of the photon and the π -meson, ϵ_μ is the 4-vector of the photon polarization,

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad s = (p_1 + k)^2, \quad u = (p_1 - q)^2, \quad t = (k - q)^2,$$

and α is the isotopic index of the pion. It follows from the isotopic invariance of strong interactions that the amplitudes $F_i^\alpha(s, t)$ have the following structure

$$F_i^\alpha(s, t) = \delta_{\alpha} F_i^{(\pm)}(s, t) + \frac{1}{2}[\tau_\alpha, \tau_3] F_i^{(\pm)}(s, t) + \tau_\alpha F_i^{(0)}(s, t). \quad (4.5)$$

The amplitudes $F_i^{(\pm)}(s, t)$ and $F_i^{(0)}(s, t)$ satisfy the crossing symmetry relations

$$F_i^{(+,0)}(s, t) = F_i^{(+,0)}(u, t)^*, \quad i=1,2,4 \quad (4.6)$$

$$F_3^{(+,0)}(s, t) = -F_3^{(+,0)}(u, t)^*,$$

and $F_i^{(\pm)}(s, t)$ satisfy the relations

$$F_i^{(\pm)}(s, t) = -F_i^{(\pm)}(u, t)^*, \quad i=1,2,4 \quad (4.7)$$

$$F_3^{(\pm)}(s, t) = F_3^{(\pm)}(u, t)^*.$$

The amplitudes $F_i^I(s, t)$ and $F_i^{II}(s, t)$ of processes (4.1) and (4.2), respectively, are related to the amplitudes $F_i^{(\pm,0)}(s, t)$ in the following manner

$$F_i^I(s, t) = \sqrt{2} [F_i^{(0)}(s, t) + F_i^{(\pm)}(s, t)], \quad (4.8)$$

$$F_i^{II}(s, t) = \sqrt{2} [F_i^{(0)}(s, t) - F_i^{(\pm)}(s, t)].$$

Therefore, the amplitudes $F_i^J(s, t)$ of processes (4.1) and (4.2) are connected by the relations

$$F_i^{II}(s, t) = F_i^I(u, t)^*, \quad i=1,2,4$$

$$F_3^{II}(s, t) = -F_3^I(u, t)^*. \quad (4.9)$$

The differential cross sections of the processes under consideration are equal

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^J(s, t)}{dt} = & \frac{1}{64\pi s k^2} \{ 4(s-M^2)(M^2-u) |F_1^J(s, t)|^2 + \\ & \frac{1}{2} [t^2(u-s)^2 - t(t-4M^2)(t-m^2)^2] |F_2^J(s, t)|^2 + [-t(s-M^2)^2 - t(u-M^2)^2 + 2M^2(t-m^2)^2] |F_3^J(s, t)|^2 \\ & + [(4M^2-t)(s-M^2)^2 + (4M^2-t)(u-M^2)^2 + 2M^2(s-u)^2] |F_4^J(s, t)|^2 + [t(u-s)^2 - (t-4M^2)(t-m^2)^2] \operatorname{Re} F_1^J(s, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_2^J(s, t) + 4M(s-u)(m^2-t) \operatorname{Re} F_1^J(s, t) F_3^J(s, t) + 2M(u-s)^2 \operatorname{Re} F_1^J(s, t) F_4^J(s, t) \\
 & + 2M [t(u-s)^2 - (t-4M^2)(t-m^2)^2] \operatorname{Re} F_2^J(s, t) F_4^J(s, t) \\
 & + 2(s-u)(t-4M^2)(t-m^2) \operatorname{Re} F_3^J(s, t) F_4^J(s, t) \} ,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

where M and m are the nucleon and pion masses. For fixed t at $s \rightarrow \infty$ this expression reads:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma^J(s, t)}{dt} & \approx \frac{1}{64\pi s k^2} \{ |2s F_1^J(s, t) + ts F_2^J(s, t) + 2M s F_4^J(s, t)|^2 \\
 & + |ts F_2^J(s, t) + 2M s F_4^J(s, t)|^2 + 8M^2 s^2 |F_4^J(s, t)|^2 \\
 & - 2t s^2 |F_3^J(s, t)|^2 \} .
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Using (4.11) and the crossing symmetry relations (4.9) and applying Phragmen-Lindelöf's theorem it is not difficult to prove the asymptotic equality between the differential cross sections

$$\frac{d\sigma^I(s, t)}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{d\sigma^J(s, t)}{dt}$$

for processes (4.1) and (4.2).

Consider now the elastic photon-nucleon scattering. This is a self-crossed process. In studying the processes of scalar particle scattering on spinor particles we showed that in the processes of this type the recoil fermion polarization is tending to zero at $s \rightarrow \infty$ for fixed t . We prove that this holds for the given case as well.

The amplitude of the process we are considering may be written as

$$\begin{aligned}
 T & = \bar{u}(p_2) \left\{ \frac{(\epsilon_2 P)(\epsilon_1 P')}{P'^2} [F_1(s, t) + \hat{k} F_2(s, t)] + \frac{(\epsilon_2 N)(\epsilon_1 N)}{N^2} [F_3(s, t) + \hat{k} F_4(s, t)] \right. \\
 & \left. + i \frac{(\epsilon_2 P')(\epsilon_1 N) - (\epsilon_2 N)(\epsilon_1 P')}{\sqrt{2P'^2 N^2}} \gamma_5 F_5(s, t) + i \frac{(\epsilon_2 P)(\epsilon_1 N) + (\epsilon_2 N)(\epsilon_1 P')}{\sqrt{2P'^2 N^2}} \gamma_5 \hat{k} F_6(s, t) \right\} ,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

where p_1 and p_2 are the 4-momenta of nucleons in the initial and final states, respectively, k_1 and ϵ_1 are the 4-momentum and the polarization vector of the photon before scattering, and k_2 and ϵ_2 are the same quantities after scattering,

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad p = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad P' = p - \frac{(pk)}{k^2} k,$$

$$N_a = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P'_\beta k_\gamma (k_1 - k_2)_\delta.$$

The polarization $P^Y(s, t)$ of the recoil nucleon is

$$P^Y(s, t) = 2s\sqrt{-t} \frac{C(s, t)}{F(s, t)} \text{Im} \{ F_1(s, t) F_2(s, t) + F_3(s, t) F_4(s, t) \}, \quad (4.13)$$

$$F(s, t) = (4M^2 - t) \{ |F_1(s, t)|^2 + |F_3(s, t)|^2 \} \\
+ \frac{1}{2} [(s-u)^2 - t^2] \{ |F_2(s, t)|^2 + |F_4(s, t)|^2 \} - t |F_5(s, t)|^2 + (M^4 - su) |F_6(s, t)|^2 \\
+ 2M(s-u) \text{Re} \{ F_1(s, t) F_2(s, t) + F_3(s, t) F_4(s, t) \}. \quad (4.14)$$

The amplitudes $F_i(s, t)$ have the following crossing symmetry properties

$$F_i(s, t) = F_i(u, t), \quad i = 1, 3, 5, 6 \quad (4.15) \\
F_i(s, t) = -F_i(u, t), \quad i = 2, 4$$

Using the expressions (4.13), (4.14), relations (4.15) and applying Phragmén-Lindelöf's theorem it is not difficult to see that the recoil nucleon polarization is tending to zero at $s \rightarrow \infty$ for fixed t even in the general case when all the independent invariant amplitudes give a contribution to the asymptotic behaviour of the cross section.

V. Asymptotic Relations between Forward Elastic Scattering Amplitudes

We have seen from the example of scalar particles (see I) that in the case of forward elastic scattering one can obtain the equality of the total cross sections, as well as some other asymptotic relations of type (1.19) if an additional assumption (1.14) $a(0) = 1$ is made, and if the real part of the amplitude increases not faster than the imaginary one. We shall show that for elastic scattering of particles with spin at zero angle it is possible to obtain (assuming

(1.14)) some new relations besides the equalities between the differential cross sections. The number of the relations which can be checked experimentally increases, if the isotopic invariance of strong interactions is taken into account.

Let us start with a consideration of elastic pion-nucleon scattering. The amplitudes $A(s, t)$ and $B(s, t)$ of this process (2.1), (2.2) have the following isotopic structure

$$A^{\beta\alpha} = A^{(+)} \delta_{\beta\alpha} + A^{(-)} \frac{1}{2} [r_{\beta}, r_{\alpha}], \quad B^{\beta\alpha} = B^{(+)} \delta_{\beta\alpha} + B^{(-)} \frac{1}{2} [r_{\beta}, r_{\alpha}]. \quad (5.1)$$

The amplitudes $A(s, t)$ of the physical processes

$$\begin{aligned} a_I) \quad \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p, & \quad a_{II}) \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \\ b_I) \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n & \quad b_{II}) \quad \pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n, \end{aligned} \quad (5.2)$$

and of the processes obtained from (5.2) by the substitution $p \rightarrow n$, $\pi^+ \rightarrow \pi^-$ are connected with amplitudes (5.1) by

$$\begin{aligned} A^{a_I} &= A^{(+)} - A^{(-)}, & A^{a_{II}} &= A^{(+)} + A^{(-)}, \\ A^{b_I} &= -A^{b_{II}} = -\sqrt{2} A^{(-)}, & A^c &= A^{(+)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

The same equalities hold for amplitudes $B(s, t)$ either.

Note, that in case of forward scattering the differential and total cross sections are expressed in terms of the same function

$$\frac{d\sigma^i(s, t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{64 \pi s k^2} |f^i(s)|^2, \quad (5.4)$$

$$i = a_I, a_{II}, b_I, b_{II}, c;$$

$$\sigma_{tot}^i(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \text{Im} f^i(s), \quad i = a_I, a_{II}, c,$$

where $f^i(s)$ is given by formula (2.33) at $t = 0$

$$f^i(s) = f^i(s, 0) = 2MA^i(s, 0) + (s - M^2 - m^2) B^i(s, 0). \quad (5.5)$$

One can apply theorem I to the functions $f^i(s)$, what leads, with account of (1.14), to the asymptotic relations

$$f^{a_I}(s) \approx -f^{a_{II}}(s)^*, \quad f^{b_I}(s) \approx -f^{b_{II}}(s)^*, \quad f^c(s) \approx -f^c(s)^*. \quad (5.6)$$

It follows from (5.3) and (5.6) that

$$\text{Im } f^{(*)}(s) \approx 0, \quad \text{Re } f^{(*)}(s) \approx 0, \quad (5.7)$$

and therefore

$$\begin{aligned} \text{Im } f^{aI}(s) \approx \text{Im } f^{aII}(s) \approx \text{Im } f^c(s), \quad \text{Im } f^{bI}(s) \approx \text{Im } f^{bII}(s) \approx 0, \\ \text{Re } f^{aI}(s) \approx -\text{Re } f^{aII}(s) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} f^{bI}(s) \approx -\frac{1}{\sqrt{2}} f^{bII}(s), \quad \text{Re } f^c(s) \approx 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

All the relations (5.8) can be checked experimentally. The equality of the imaginary parts for the processes a_I , a_{II} , c leads to the asymptotic equality of the total cross sections

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p) \approx \sigma_{\text{tot}}(\pi^- p) \approx \sigma_{\text{tot}}(\pi^0 p). \quad (5.9)$$

The first of these equalities is Pomeranchuk's theorem^{/12/}, and the second one was suggested in^{/1,2/} from the analysis of the experimental data. Further, we note that the charge exchange scattering amplitudes $f^{bI}(s)$ and $f^{bII}(s)$ for large s are real. Then, using the equalities (5.8) we get the following interesting relation between the differential and the total cross sections

$$\left[\frac{d\sigma^a(s,t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma^b(s,t)}{dt} \right]_{t=0} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{\text{tot}}(\pi^+ p)]^2. \quad (5.10)$$

The relation (5.10) is a generalization of equality (1.19) to the case of charged meson scattering. It is seen from (5.8) that equality (1.19) holds, without charge, for the cross sections of π^0 - meson scattering on the proton (process 'c'). In such manner one can show that relation (1.19) holds also for the cross sections of K_1^0 and K_2^0 scattering on the nucleon (if the weak interactions are neglected, the amplitudes of both these processes are equal). Point out also that if (1.14) holds, the amplitude for the process $K_2^0 + p \rightarrow K_1^0 + p$ is real at $t=0$ and $s \rightarrow \infty$.

A somewhat more complicated situation occurs in the case of elastic scattering of particles with spin 1/2, when we are dealing with six independent invariant functions (or with five functions in the case of nucleon-nucleon scattering). Instead of using the formulae (3.1)-(3.4) with $F_6^J(s,t) = F_7^J(s, \theta=0)$, it is more convenient in this case to write down the amplitudes of processes (I) and (II) as

$$T^J = \sum_{i=1}^6 \bar{u}_b(p_2) \Gamma_i^{(b)}(q) u_b(p_1) \bar{u}_a(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_a(q_1) F_i^J(s, t) \quad (5.11)$$

where

$$\Gamma_i^{(a)} = \{ 1, \gamma_\alpha, \gamma_5, 1, \hat{p}, \hat{p} \} \quad (5.12)$$

$$\Gamma_i^{(b)} = \{ 1, \gamma_\alpha, \gamma_5, \hat{q}, \hat{q}, 1 \}, \quad (5.13)$$

while p and q are given by the formula (3.2). For nucleon-nucleon scattering $F_i^J(s, t) = F_i^J(s, t)$ The crossing symmetry relation preserves its form (here $I_i^4 = I_i$). Besides, the hermitian and antihermitian parts of the amplitudes are given by

$$D^J = \sum_{i=1}^6 \bar{u}_b(p_2) \Gamma_i^{(b)}(q) u_b(p_1) \bar{u}_a(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_a(q_1) \text{Re} F_i^J(s, t), \quad (5.14)$$

$$A^J = \sum_{i=1}^6 \bar{u}_b(p_2) \Gamma_i^{(b)}(q) u_b(p_1) \bar{u}_a(q_2) \Gamma_i^{(a)}(p) u_a(q_1) \text{Im} F_i^J(s, t).$$

The choice of the matrices (5.13) is convenient because it allows to distinguish the amplitude $F_i^J(s, t)$ with the same matrix structure as the Coulomb one. For forward scattering (under assumption (1.14)) theorem 2 enables us to prove the following asymptotic relations

$$D^I(s, 0) \approx -D^{II}(s, 0), \quad (5.15)$$

$$A^I(s, 0) \approx A^{II}(s, 0)$$

The second equality leads to Pomeranchuk's theorem about the asymptotic equality of the total cross sections

$$\sigma_{tot}(\bar{p}p) \approx \sigma_{tot}(pp), \quad \sigma_{tot}(\bar{\Sigma}p) \approx \sigma_{tot}(\Sigma p)$$

The first equality (5.15) may also be verified experimentally.

VI. The Asymptotic Behaviour of the Vertex Part

On the basis of the perturbation theory considerations one may assert^{36/} that the vertex part $\Gamma(M^2, M^2, t)$ is an analytical function of the variable with a cut along the positive real axis $t = q^2$. It is well-known that in the local theory the form-factor increases not faster than a polynomial in the complex plane t . This permits to draw certain conclusions about the asympto-

tic behaviour of the processes which are described in the e^2 -approximation in terms of the electromagnetic form-factors. Consider, for instance, the processes of electron-proton scattering and the proton and antiproton annihilation into electron and positron. The cross section for these processes is expressed in e^2 -approximation in terms of the electromagnetic form-factors $F_1(t)$ and $F_2(t)$ or in terms of their linear combinations^[37]

$$G_E(t) = F_1(t) + \frac{t}{4M^2} \mu F_2(t), \quad G_\mu(t) = F_1(t) + \mu F_2(t). \quad (6.1)$$

In the first process t is negative, while in the second one t is positive.

The behaviour of the form-factors for large negative t was studied on the basis of numerous experiments on electron-proton scattering. Under the assumptions we have made it should be expected that the same behaviour must be observed for the form-factors at large positive t (to be more exact, the absolute values of the ratios $G_j(t)/G_j(-t)$, $j = E, \mu$ must tend to 1 at $t \rightarrow \infty$).

Let us emphasize also that since for $t < 0$ the functions $F_j(t)$ and $G_j(t)$ $j = E, \mu$ are real, then in virtue of theorem 2 at $t \rightarrow +\infty$ these functions must be real and $G_j(t) \rightarrow G_j(\infty)$ for $|t| \rightarrow \infty$ along any complex way, if this limit exists for $t \rightarrow -\infty$ (as this is indicated by experiment). Here, just as in case of the two-particle Green function, the vertex functions satisfy the dispersion relation.

$$G_j(t) = G_j(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im G_j(t')}{4m^2 t' - t} dt', \quad j = E, \mu, \quad (6.2)$$

$$Im G_j(\infty) = 0.$$

Summary of Results

Basing on the principle of local field theory and on the assumption that the amplitudes of the scattering processes for fixed momentum transfer t do not oscillate, when the energy squared $s \rightarrow \infty$, but have a definite (e.g., power or logarithmic) growth, we deduce the following physical consequences.

1. At high energies and for fixed momentum transfer there take place the asymptotic equalities between the differential cross sections $\frac{d\sigma(s, t)}{dt}$ for following pairs of processes

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p, \quad (7.1)$$

$$K^+ + p \rightarrow K^+ + p \quad K^- + p \rightarrow K^- + p, \quad (7.2)$$

$$\pi^{++} + p \rightarrow K^{+} + \Sigma^{+} \qquad K^{-} + p \rightarrow \pi^{-} + \Sigma^{+} \qquad (7.3)$$

$$\pi^{-} + p \rightarrow K^{0} + \lambda \qquad \bar{K}^{0} + p \rightarrow \pi^{+} + \lambda, \qquad (7.4)$$

$$K^{-} + p \rightarrow K^{0} + \Xi^{0} \qquad \bar{K}^{0} + p \rightarrow K^{+} + \Xi^{0} \qquad (7.5)$$

$$\Sigma^{+} + He \rightarrow p + He_{\lambda} \qquad \bar{p} + He \rightarrow \bar{\Sigma}^{+} + He_{\lambda} \qquad (7.6)$$

$$p + p \rightarrow p_{\lambda} + p \qquad \bar{p} + p \rightarrow \bar{p} + p, \qquad (7.7)$$

$$\Sigma^{+} + p \rightarrow \Sigma^{+} + p \qquad \bar{\Sigma}^{+} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^{+} + p, \qquad (7.8)$$

$$\Sigma^{-} + p \rightarrow \lambda + n \qquad \lambda + p \rightarrow \bar{\Sigma}^{-} + n, \qquad (7.9)$$

$$\Sigma^{+} + p \rightarrow p + \Sigma^{+} \qquad \bar{p} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^{+} + \Sigma^{+}, \qquad (7.10)$$

$$\Sigma^{-} + p \rightarrow n + \lambda \qquad \bar{n} + p \rightarrow \bar{\Sigma}^{-} + \lambda. \qquad (7.11)$$

(For proving the equalities between the cross sections for processes (7.6) and (7.8)-(7.11) it is necessary to make certain assumption about the analyticity of the amplitudes of these processes). In all these processes t is determined as the momentum transfer between the first particle at the beginning and the first particle at the end of the reaction. In more customary notations processes (7.10) and (7.11) are treated for fixed u (there occurs the equality between the differential cross section for the backward hyperon-proton scattering and the annihilation cross section of proton and antiproton into hyperon and antihyperon):

2. The recoil fermion polarizations in processes (7.1)-(7.5) are equal in absolute value and opposite in signs at $s \rightarrow \infty$ (if the meson is scattered on an polarized hydrogen target, the asymmetry coefficient in the first five pairs of reactions are also equal by magnitude and opposite in sign).

The measurement of the fermion polarizations in the final state in processes (7.6) allows to determine the relative parity of Σ and λ hyperons: if $I_{\lambda\Sigma} = 1$, then these polarizations must be opposite in sign (and be the same by absolute value) at high energies. If, on the other hand, $I_{\lambda\Sigma} = -1$, then the polarizations must coincide both by absolute value and in sign.

The fermion polarizations in reactions (7.7) and (7.8) should be opposite $P^{I\Sigma} = -P^{IIp}, P^{I\lambda} = -P^{II\bar{\lambda}}$ etc. The same holds true for the neutron polarizations in processes (7.9).

The recoil fermion polarizations in the reactions

$$K_{1,2}^0 + p \rightarrow K_{1,2}^0 + p, \quad (7.12)$$

$$K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-, \quad (7.13)$$

$$\gamma + p \rightarrow \gamma + p \quad (7.14)$$

are vanishing at high energies. If the isotopic invariance of strong interactions is assumed, one can show that the recoil neutron polarization in the process

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \quad (7.15)$$

must vanish at high energies.

3. If the absorptive part of the elastic scattering amplitude behaves like e.g., $s(\ln s)^\beta$, where β is an arbitrary real number, then there occur the asymptotic equalities between the total cross sections for particle and antiparticle interaction at high energies

$$\sigma_{tot}(\pi^+ p) \approx \sigma_{tot}(\pi^- p), \quad \sigma_{tot}(K^+ p) \approx \sigma_{tot}(K^- p), \quad (7.16)$$

$$\sigma_{tot}(\bar{p} p) \approx \sigma_{tot}(p p), \quad \sigma_{tot}(\Sigma^+ p) \approx \sigma_{tot}(\Sigma^- p). \quad (7.17)$$

Under the same assumption the differential cross section for forward elastic scattering of neutral meson on proton is proportional to the total cross section squared,

$$\frac{d\sigma(K_{1,2}^0 + p \rightarrow K_{1,2}^0 + p)}{dt} \Big|_{t=0} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(K_{1,2}^0 p)]^2. \quad (7.18)$$

If we take into account the isotopic invariance of strong interactions, we get

$$\left[\frac{d\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 + n)}{dt} \right] \Big|_{t=0} \approx \frac{1}{16\pi} [\sigma_{tot}(\pi^+ p)]^2, \quad (7.19)$$

$$\sigma_{tot}(\pi^+ p) \approx \sigma_{tot}(\pi^0 p). \quad (7.20)$$

Everywhere the sign $A \approx B$ should be understood as a symbolic writing of the equality $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A}{B} = 1$.

4. If one takes into account the isotopic invariance (together with the principles of the local theory) it is possible to prove the asymptotic equality between the differential cross sections for the processes

$$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n \quad \text{and} \quad \gamma + n \rightarrow \pi^- + p \quad (7.21)$$

for fixed momentum transfer.

5. The limits of the form-factors at $t \rightarrow \pm \infty$ are equal. It follows from here that in the e^2 approximation at high energies the differential cross sections for the processes

$$e^- + p \rightarrow e^- + p \quad \text{and} \quad \bar{p} + p \rightarrow e^- + e^+ \quad (7.22)$$

must coincide.

In conclusion the authors express their deep gratitude to S.M. Bilenky, R.M. Ryndin and O.A. Khrustalev, in collaboration with whom some results of the present paper were obtained. They are also grateful to N.N. Bogolubov, D.I. Blokhintsev, R.T. Denchev, M.A. Markov, N.N. Meiman, Ja. Khristov, P. Suranyi and to the participants of the seminars of the Laboratory of Theoretical Physics of the Joint Institute for Nuclear Research, of Steklov's Mathematical Institute and of the Institute of Theoretical and Experimental Physics for interest in the work and useful remarks.

References

1. И.Я. Померанчук. ЖЭТФ, 30 /1956/, 423.
2. Л.Б. Окунь и И.Я. Померанчук. ЖЭТФ, 30 /1956/, 426.
3. D.I. Blokhintsev, Nucl.Phys. 31 (1962), 628.
L. Van Hove, Inelastic Collisions and Shadow Scattering of Strongly Interacting Particles at High Energy. Preprint CERN 7053/TH, 368 (1963).
4. M. Gell-Mann. Phys.Rev. 125 (1962) 1067.
А.А. Логунов, В.А. Мешеряков и А.Н. Тавхелидзе. ДАН СССР, 142 /1962/, 317.
5. G. Chew, S.C. Frautschi. Phys.Rev.Lett., 7 (1961), 394; Phys.Rev., 123 (1961) 1478. M. Gell-Mann. Proceedings of the 1962 International Conference on High Energy at CERN, 533-542.
6. В.Н. Грибов. ЖЭТФ, 41 /1961/, 667 и 1962 В.Н. Грибов и И.Я. Померанчук. ЖЭТФ, 43 /1962/, 308.
G. Domokos. Nuovo Cim., 23 (1962), 1175; 26 (1962), 1301.
144 (1962), 1279; Preprint JINR D-922 (1962); Proceedings of the 1962 International Conference on High Energy Physics at CERN, 553-555.

7. L. Bertocchi, S. Fubini, M. Tonin. Nuovo Cim., 25 (1962), 626.
BIA. Arbuzov, A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, R.N. Faustov. Phys. Lett., 2 (1962), 150.
8. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М. ГИТТЛ., 1957 г. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., ГИФМЛ, 1958 г.
9. R. Haag and B. Schroer, J. Math. Phys., 3 (1962), 248.
10. L. Schwartz. Theorie des distribution, v. I-11, Paris, 1950.
11. В.С. Владимиров. Труды математического института им. В.А. Стеклова, 80 /1961/, 101.
12. И.Я. Померанчук. ЖЭТФ, 34 /1958/, 725.
13. D. Amati, M. Fierz and V. Glaser. Phys. Rev. Lett., 4 (1960), 89.
14. M. Sugawara and A. Kanazawa. Phys. Rev., 123 (1961), 1895.
15. S. Weinberg. Phys. Rev., 124 (1961), 2049.
16. H. Lehmann. Nucl. Phys., 29 (1962), 300.
17. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 43 /1962/, 2277.
18. Е. Тичмарш. Теория функций. М-Л, ГИТТЛ, 1951 /§ 5.6/
19. Р. Неванлина. Однозначные аналитические функция, М.-Л, ГИТТЛ, 1941 /гл. III § 2 и § 6/.
20. А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т. Тодоров и О.А. Хрусталеv. Асимптотические соотношения между сечениями в локальной теории поля, препринт ОИЯИ Р-1353 /1963/; ЖЭТФ /в печати/.
21. А.А. Logunov, Nguyen van Hieu, I.T. Todorov and O.A. Khrustalev. Phys. Lett., 7 (1963), 69 and 71.
22. С.М. Биленький, Нгуен Ван Хьеу и Р.М. Рындин. Об асимптотических соотношениях между поляризациями в перекрестных реакциях. Препринт ОИЯИ Р - 1404 /1963/; ЖЭТФ /в печати/.
23. L. Van Hove. Phys. Lett., 5 (1963), 252.
24. Н.Н. Мейман. Об асимптотическом равенстве дифференциальных сечений частиц и античастиц, препринт ИТЭФ, № 184 /1963/.
25. O.W. Greenberg and F.E. Low. Phys. Rev., 124 (1961), 2047.
26. M. Froissart. Phys. Rev., 123 (1961), 1053.
27. A. Martin. Some Rigorous Consequences of Unitarity and Analyticity of Scattering Amplitudes. Preprint CERN 6948/TH, 359.
28. G.F. Chew, M.L. Goldberger, F.E. Low and Y. Nambu. Phys. Rev., 106 (1957), 1337.
29. M.L. Goldberger, Y. Nambu, R. Oehme. Ann. of Phys., 2 (1957), 226.

30. П. Мэтьюс. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц. Москва ИИЛ, 1959, 89 и 84.
31. С.М. Биленький, ЖЭТФ, 36 /1959/, 291.
32. Л. Пузиков, Р.М. Рындия и Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 32 /1957/, 592.
33. K. Symanzik. Prog. Theor. Phys., 20 (1958), 690.
34. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров и Н.А. Черников; ЖЭТФ, 42 /1962/ /1285/.
А.А. Логунов, Лю И-чень, И.Т. Тодоров и Н.А. Черников, Дисперсионные соотношения и аналитические свойства парциальных амплитуд в теории возмущений. Препринт ОИЯИ. Р-1043 /1962/. Укр.Мат.журнал.
35. N. Nakanishi. Prog. Theor. Phys. 21 (1959) 135.
36. Лю И-чень и И.Т. Тодоров. ДАН СССР, 148, /1963/ 806.
М.А. Мествиришвили и И.Т. Тодоров. ДАН СССР, 148, /1963/ 562.
37. L.N. Hand, D.G. Miller and R.W. Wilson, Rev.Mod. Phys., 35 (1963), 335.

Received by Publishing Department
on December 28, 1963.

Note Added in Proof

In a recent paper by Logunov A.A., Nguyen van Hieu and Hsien Ting-chang (preprint of JINR E-1550) the method developed here was applied to study the consequences of the higher symmetries of strong interactions. In particular, it was shown that in any model with higher symmetries (unitary symmetry, G_2 - model) all the total cross sections of meson-baryon interactions are asymptotically equal, and the polarizations in the charge exchange processes tend to zero at $s \rightarrow \infty$.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3528. Тираж 440. 2,6 уч.-изд. л.
Перевод Л.А.Смирновой. Январь 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

Ван Най-янь, Н. Илиеску, Э.Н. Каржавина, Ким Хи Сан, А.Б. Попов,
Л.Б. Пикельнер, Т. Стадников, Э.И. Шарпов, Ю.С. Язвический

P-1546

НЕЙТРОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ
ПРАЗЕОДИМА И ТЕРБИЯ

Дубна 1964

P-1546

Ван Най-янь, Идиеску Н., Каржавина Э.Н.,
Ким Хи Сан, Попов А.Б., Пикельнер Л.Б.,
Стадников Т., Шарапов Э.И., Язвицкий Ю.С.

Нейтронные резонансы празеодима и тербия

Путем измерений пропускания, радиационного захвата и рассеяния нейтронов определены параметры резонансов *Tb* и *Pr*, включая значения спинов для ряда уровней. Для *Tb* проанализировано 22 уровня в области энергий до 100 eV, для *Pr* - 14 уровней до 1000 eV, из которых 4 уровня обнаружены впервые. Среднее значение радиационных ширин уровней *Tb* и *Pr* найдено одинаковым и равным 86 meV.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1964.**

Wang-Nai-yang, Iiesku N, Karzhavina E.N,
Kim Hi San, Popov A.B., Pikelner L.B,
Stadnikov T., Sharapov E.I., Yazvitsky Yu.S.

P-1546

Neutron Resonances of Praseodymium and Terbium.

The parameters of *Tb* and *Pr* resonances including the values of spins for some levels were determined by measuring the transmission, capture and scattering of neutrons. 22 levels in the energy range up to 100 eV were analysed for *Tb*. For *Pr*, there were analysed 14 levels in the energy interval up to 1000 eV. Out of these 14 levels, 4 were found for the first time. The mean value of the radiative widths of *Tb* and *Pr* levels was found to be the same and equal to 86 meV.

**Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.**

Ван Най-янь, Н.Илиеску, Э.Н.Каржавина, Ким Хи Сан, А.Б. Попов,
Л.Б.Пикельнер, Т.Стадников, Э.И.Шарапов, Ю.С.Язвический

P-1546

НЕЙТРОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ
ПРАЗЕОДИМА И ТЕРБИЯ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

В данной работе сообщаются результаты новых измерений, проведенных на нейтронном спектрометре по времени пролета, действующем на базе импульсного быстрого реактора Объединенного института ядерных исследований. Результаты первых измерений с родием и бромом уже опубликованы^{/1,2/}.

Для дальнейшего исследования были выбраны редкоземельные элементы тербий и празеодим. Данные атласа нейтронных сечений^{/3/} об этих элементах относятся к 1955 г. и не содержат спинов и значений Γ_{γ} в отдельных резонансах. Из работ последнего времени только в одной^{/4/} приведены результаты по празеодиму, полученные методом пропускания. Однако в отношении радиационных ширин большинство данных работы^{/4/} нельзя рассматривать даже как грубую оценку.

Приступая к работе с празеодимом и тербием, мы надеялись получить радиационные ширины и спины некоторых уровней и уточнить распределения приведенных нейтронных ширин этих элементов, в особенности для празеодима, у которого согласно данным работы^{/4/} число степеней свободы ν в распределении приведенных нейтронных ширин оказалось равным шести, вместо $\nu = 1$ для общепринятого распределения Портёра-Томаса.

1. Измерение пропускания

При измерении пропускания использовалась аппаратура, описанная в работе^{/5/}. Пропускание тербия измерялось в области энергий от 3 эв до 80 эв с образцами из окиси тербия толщиной $1,22 \cdot 10^{20}$; $6,94 \cdot 10^{20}$; $2,76 \cdot 10^{21}$ и $1,498 \cdot 10^{22}$ ядер на см^2 образца. В случае празеодима измерение проводилось в области от 8 эв до 1700 эв с образцами из окиси празеодима толщиной $1,08 \cdot 10^{21}$; $3,25 \cdot 10^{21}$; $9,42 \cdot 10^{21}$; $2,355 \cdot 10^{22}$ и $7,3 \cdot 10^{22}$ ядер Pr на см^2 образца. Обработка экспериментальных результатов проводилась методом, изложенным в работе^{/1/}. Метод основан на экспериментальном определении площади A провала на кривой пропускания, являющейся функцией параметров резонанса и толщины образца n :

$$A = A(g\Gamma_n, \Gamma, n).$$

(1)

2. Измерение радиационного захвата

Радиационный захват нейтронов изучался с помощью детектора, описанного в

работе^{/6/}. При этом осуществлялись две чередующиеся серии измерений. В первой серии в пучке нейтронов располагался только один образец D непосредственно в канале детектора. В этом случае можно получить, как показано в^{/2/}, выражение:

$$\frac{\sum N(D)}{\Pi(E_0)\epsilon_\gamma} = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} A_D = C, \quad (2)$$

где $\sum N(D)$ - сумма отсчетов детектора по всему резонансу, а произведение суммарного потока $\Pi(E_0)$ на эффективность регистрации акта радиационного захвата ϵ_γ определяется экспериментально одним из методов, описанных в работе^{/7/}.

Во второй серии измерений на пути пучка достаточно далеко от детектора устанавливался второй образец T (с числом ядер n_T на см^2). Из соотношения суммы отсчетов по всему резонансу при наличии и отсутствии пропускающего образца T можно получить выражение

$$\frac{\sum N(D, T)}{\sum N(D)} \exp(n_T \sigma_p) = \frac{A_{D+T} - A_T}{A_D}. \quad (3)$$

Этот метод самоиндикации был подробно описан ранее^{/8/, /2/}.

Следует отметить, что в случае резонансов с $\Gamma_n \gg \Gamma_\gamma$ в правой части уравнения (2) практически исчезает зависимость от параметров Γ_n и Γ . Это легко показать, подставив в (2) аналитическое выражение для A_D (см., например,^{/9/}):

$$A_D = \frac{\pi}{2} n \sigma_0 \Gamma e^{-\pi \sigma_0 / 2} [I_0(n \sigma_0 / 2) + I_1(n \sigma_0 / 2)].$$

Поскольку в этом случае $\Gamma_n / \Gamma \sim 1$, а $\sigma_0 \sim g \frac{\Gamma}{\Gamma^2}$, то в правой части уравнения (2) остается только зависимость от Γ_γ и g . Это значит, что для данного g радиационная ширина резонансов с $\Gamma_n \gg \Gamma_\gamma$ может быть определена из измерений резонансного захвата независимо от точного значения параметров Γ_n и Γ . Учет доплеровского уширения не меняет сути дела. Радиационные ширины большинства резонансов R_T были получены именно таким путем.

Выражения (2) и (3) выведены в предположении однократного взаимодействия нейтронов с ядрами образца. Однако при использовании образцов промежуточной толщины, особенно в случае $\Gamma_n \gg \Gamma_\gamma$, в эксперименте получалась величина $C_{\text{эксп.}}$, в которую входили отсчеты детектора, вызванные захватом нейтронов во втором и последующих взаимодействиях, и отсчеты, связанные с регистрацией детектором рассеянных нейтронов. Поэтому при использовании выражения (2) вводилась поправка, определяемая формулой:

$$C = C_{\text{эксп.}} (1 - Q_2 / Q_1) \left(1 + \frac{\Gamma_n \epsilon_n}{\Gamma_\gamma \epsilon_\gamma}\right)^{-1}. \quad (4)$$

Поправочный фактор $1 - Q_2 / Q_1$, вызванный вторичными взаимодействиями, содержит функции параметров резонанса и толщины образца: Q_1 и Q_2 , определяемые

как вероятности первого и второго взаимодействий нейтрона в образце. Q_1 и Q_2 рассчитаны в работе ^{/10/}. Поправка $(1 + \frac{\Gamma_n \epsilon_n}{\Gamma_\gamma \epsilon_\gamma})^{-1}$, связанная с регистрацией рассеянных нейтронов, пояснений не требует.

Измерения радиационного захвата нейтронов ядрами празеодима и тербия были проведены на пролетной базе 750 м с разрешением 0,05 мксек/м. Образцами служили окиси исследуемых элементов, засыпанные в тонкостенные алюминиевые кассеты диаметром 180 мм. Для Pr было использовано четыре D -образца толщиной от $1 \cdot 10^{21}$ до $5,5 \cdot 10^{21}$ яд./см² и четыре T - образцы с числом ядер от $8 \cdot 10^{20}$ до $2,1 \cdot 10^{22}$ на см². Для Tb было использовано два D -образца с числом ядер $7,9 \cdot 10^{20}$ и $15,3 \cdot 10^{20}$ на см² и один T -образец толщиной $7,4 \cdot 10^{20}$ ядер на см².

3. Измерение рассеяния нейтронов

При изучении рассеяния нейтронов непосредственно измеряемой величиной является разность между экспериментальной суммой отсчетов ΣN по области резонанса и суммой отсчетов ΣN_p в тех же каналах, обусловленной только потенциальным рассеянием при отсутствии резонансного взаимодействия. Эта разность связана с параметрами следующим образом:

$$\frac{\Sigma N - \Sigma N_p}{\Pi(E_0)\epsilon_n} = \frac{\Gamma_n}{\Gamma} A(1 - \Omega) f \quad (5)$$

Выражение (5) без множителя f приведено в работе ^{/2/}. Здесь $1 - \Omega$ - поправочный фактор, подробно обсуждавшийся в ^{/2/}, обусловленный тем, что резонансное взаимодействие нейтронов снижает число нейтронов, испытывающих потенциальное рассеяние. Произведение суммарного потока на эффективность регистрации нейтронов детектором $\Pi(E_0)\epsilon_n$ определяется из калибровочных измерений со свинцом, как показано в ^{/2/}.

Поправочный фактор f учитывает захват нейтронов после рассеяния. Для детектора с постоянной эффективностью ϵ_n , не зависящей от энергии нейтронов и угла их вылета из образца, этот фактор можно представить в виде:

$$f = \frac{1 - (\Gamma/\Gamma_n)(Q_2/Q_1)}{1 - Q_2/Q_1} \quad (6)$$

где Q_1 и Q_2 имеют тот же смысл, что и в выражении (4). Поправочный фактор f может быть использован в тех случаях, когда нельзя провести процедуру экстраполяции данных к нулевой толщине образца, описанную в ^{/2/}.

Следует отметить, что в случае резонансов с $\Gamma_n \gg \Gamma_\gamma$, измеряя рассеяние, можно получить величину A , обычно определяемую из пропускания. Необходимым

условием для этого является независимое определение Γ_y , что позволяет фиксировать отношение Γ_n/Γ с точностью 1-2% в широком диапазоне значений Γ_n . Тогда уравнение (5) определяет величину A , причем поправки, входящие в (5); в случае $\Gamma_n \gg \Gamma_y$ становятся малыми. Этот метод определения A из измерений рассеяния был применен для тонких образцов Pt , для которых трудно было получить хорошую точность при измерении пропускания.

Рассеяние нейтронов изучалось с помощью детектора, описанного в /11/. В измерениях с тербием разрешение составляло 0,08 мксек/м при пролетной базе 500 м. Были использованы три образца из окиси тербия толщиной $1,14 \cdot 10^{20}$; $1,9 \cdot 10^{20}$; $7,4 \cdot 10^{20}$ яд/см². В измерениях с празеодимом разрешение составляло 0,05 мксек/м при пролетной базе 1000 м. Использованные образцы празеодима имели толщину $2,02 \cdot 10^{20}$; $1,48 \cdot 10^{21}$ и $1,66 \cdot 10^{21}$ ядер/см².

4. Результаты и обсуждение

Уравнения (1), (2), (3) и (5) позволяют построить графики зависимости $g\Gamma_n$ от Γ для каждого измеренного образца. Для этого использовались таблицы, рассчитанные в работе /12/. Уравнения (2) и (5) давали при этом по две зависимости, каждое в соответствии с принятым значением статистического множителя g . Одно из двух полученных таким способом семейств кривых должно быть противоречивым в силу неправильного выбора g . В настоящей работе противоречивым считалось то семейство, для которого кривые, полученные из уравнений (2) и (5), проходили от эффективного центра пересечения других кривых на расстоянии большем, чем две стандартные ошибки, если при этом аналогичные кривые с другим значением g проходили от эффективного центра в пределах стандартной ошибки.

Тербий. Результаты измерений с тербием представлены в таблице 1. Разрешение спектрометра позволило провести анализ 22 уровней с энергией до 100 eV, не считая плохо разрешенные резонансы 76,8 и 78 eV.

Для всех резонансов данные по радиационному захвату нейтронов ядрами тербия калибровались, исходя из счета в максимуме сильного и хорошо разрешенного резонанса 11,1 eV по методу, изложенному в /7/.

Резонансы, для которых в таблице приведены спины уровней j , обрабатывались по полной программе. При этом данные по рассеянию экстраполировались к нулевой толщине образца по трем точкам (три образца) для резонансов с энергией 11,1 eV; 46,1 eV; 97,5 eV. Исключая случай наиболее сильного резонанса 11,1 eV, экстраполяция привела к тем же результатам, к которым приводила процедура внесения поправки

согласно уравнению (6). Ввиду этого, для остальных, более слабых, уровней данные по рассеянию были получены из выражения (5) с поправкой по (6). Наибольшее значение поправки доходило до 10%.

Для остальных резонансов, имеющих меньшие нейтронные ширины, измерения рассеяния и по методу самоиндикации не могли дать достаточной точности. Поэтому для этих резонансов получены только значения $g\Gamma_n$ в предположении, что $\Gamma = \bar{\Gamma}_y = 86 \text{ мев}$.

Спины нами определены для 7 уровней. Кроме того, недавно в работе ^{/13/} посредством поляризационной методики определены спины резонансов 3,34; 4,98 и 11,1 эВ. Для резонанса 11,1 эВ спины совпадают. Спины резонансов 3,34 и 4,98 эВ нами не определялись ввиду очень малых нейтронных ширин этих резонансов.

Как следует из таблицы, число уровней с данным значением спина согласуется с известной зависимостью для плотности уровней $\rho(j) \sim (2j + 1)$. Зависимости радиационной ширины от спина возбужденного состояния ядра в пределах ошибки измерений не наблюдается. Не наблюдается также заметных флуктуаций в величине радиационной ширины от резонанса к резонансу. Обращает на себя внимание сильное различие между нашими данными и данными работы ^{/14/} для параметра $g\Gamma_n$ в области энергий больше 50 эВ. Полученные нами значения $g\Gamma_n$ значительно меньше. При этом ряд уровней, наблюдавшихся нами, в работе ^{/14/} отсутствует. Весьма вероятно, что из-за недостаточного разрешения два или более близких уровня раньше принимались за один.

Данные таблицы 1 позволили получить значения средней приведенной нейтронной ширины $2\overline{g\Gamma_n^0} = (0,75 \pm 0,23) \text{ мев}$, среднего наблюдаемого расстояния между уровнями (без разделения по спину) $D = (4,2 \pm 0,6) \text{ эВ}$ и силовой функции $S_0 = (0,90 \pm 0,30) 10^{-4}$. Приведенные ошибки обусловлены в основном статистикой числа наблюдаемых уровней и рассчитаны в предположении Вигнеровского распределения для интервалов между уровнями и распределения приведенных нейтронных ширин по Портеру-Томасу. Как видно из рисунка 1а, последнее распределение удовлетворительно описывает экспериментальные данные.

Празеодим.

Для празеодима нами определены параметры 14 резонансов в области энергий до 1000 эВ. Результаты собраны в таблице 2. Слабые уровни 50; 112,1; 411 и 470 эВ обнаружены впервые. Чистота образцов согласно паспорту была не хуже 99,5%. Если считать эти резонансы принадлежащими ядрам примесей, то резонансы должны быть сильными. Было проведено сравнение со всеми сильными резонансами из работы ^{/3/}.

и сделаны дополнительные измерения с неодимом, как наиболее вероятной примесью. Отмеченные резонансы оказались новыми, принадлежащими празеодиму.

Значения параметра $g\Gamma_n$ для этих уровней получены на основании уравнения (2), где $\Pi(E_0)\epsilon_\gamma$ известно, а Γ_γ/Γ для слабых резонансов порядка единицы. Параметры резонансов 85,1 и 384 eV с малыми нейтронными ширинами получены обычным методом совместного анализа графиков зависимости $g\Gamma_n = f(\Gamma)$, построенных на основании уравнений (1), (2), (3).

Остальные резонансы празеодима имеют большие нейтронные ширины. Это позволило для них определить радиационные ширины из измерений радиационного захвата нейтронов. Однако это же обстоятельство привело к тому, что в отличие от измерений с тербием, где все поправки были малы, в измерениях с празеодимом поправочный фактор в уравнении (4), связанный с регистрацией рассеянных нейтронов, теперь уже отличался от единицы вплоть до 15%, а поправочный фактор $1 - Q_2/Q_1$ отличался от единицы, как правило, на 20-30%. При этом следует отметить, что именно после введения соответствующих поправок данные по радиационному захвату для разных по толщине образцов приводились в согласие, т.е. давали близкое значение Γ_γ .

Ввиду отсутствия у Pr резонансов с надежно измеренными параметрами, величины $\Pi(E_0)$ и ϵ_γ , входящие в уравнение (2), в случае празеодима определялись отдельно по методу, изложенному в работе^{/7/}. Оценка ошибок в значениях суммарного потока и эффективности показывает, что они не превышают 10% каждая. Имея в виду, что точность определения $\Sigma N(D)$ не хуже 5%, мы получаем для величины C суммарную среднеквадратичную ошибку 15%. Однако учитывая также возможную неточность результата из-за введения поправки на захват после рассеяния, мы оцениваем окончательную ошибку в величине Γ_γ в 20%.

В случае сильных резонансов графики зависимости $g\Gamma_n = f(\Gamma)$, полученные из уравнения (2), сводятся к двум линиям

$$g_i(\Gamma - \Gamma_n) = g_i \Gamma_\gamma, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

пересекающим кривые, полученные из уравнения (1) для пропускания. Спины были получены в тех случаях, когда кривые для пропускания и рассеяния независимо определяли совокупность параметров $(g\Gamma_n, \Gamma)$, которая ложилась в пределах своей стандартной ошибки (~10% для Γ) на одну из кривых (7) и отстояла от кривой с другим спином на расстояние в две или более стандартные ошибки. Пример определения параметров сильных резонансов показан на рис. 2.

Спины нами определены для 5 уровней. Значение спина резонанса 234 eV, поставленное в таблице в скобки, вытекает из эффекта интерференции между уровнями 216,7 и 234 eV, обнаруженного в работе^{/15/}. Таким образом, из шести уровней спин $j = 2$ имеет только один - 942 eV.

Относительно радиационных ширин следует отметить отсутствие (в пределах точности измерений) флуктуаций от уровня к уровню.

Анализ данных таблицы 2 приводит к следующим значениям усредненных характеристик ядер празеодима:

$$2g\bar{\Gamma}_n^0 = (49 \pm 18) \text{ meV} ; D = (64 \pm 13) \text{ eV} ; \bar{\Gamma}_\gamma = 86 \text{ meV} ; S_0 = (3,6 \pm 1,4) \cdot 10^{-4}$$

Представляет интерес сопоставление величины $\bar{\Gamma}_\gamma / D_0$, полученной в работе /16/ из измерения усредненного сечения радиационного захвата в области энергии ниже 50 keV, с результатами настоящей работы. Имея в виду, что $D_0 = D \cdot 2(2l+1)$, значение $\bar{\Gamma}_\gamma / D_0$ по нашим данным получается равными $(1,1 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}$, тогда как в /16/ приводится величина $(0,80 \pm 0,07) \cdot 10^{-4}$. Это расхождение почти не превосходит ошибку измерения, которая велика в нашем случае и в значительной степени связана с малой статистикой уровней. Однако можно предположить и другое объяснение. Как видно из таблицы 2, приведенные нейтронные ширины уровней с энергией 50; 112; 411 и 470 eV заметно меньше, чем у остальных уровней. Если предположить, что эти уровни обусловлены p -нейтронами, то это приведет к увеличению D_0 и хорошему согласию в величинах $\bar{\Gamma}_\gamma / D_0$. Предположению о том, что отмеченные резонансы являются p -волновыми, не противоречит найденное отсюда значение силовой функции $S_1 = (2,5 \pm 2,0) \cdot 10^{-4}$, согласующееся с найденной в /16/ величиной

$$S_1 = (1,1 \pm 0,6) \cdot 10^{-4}$$

Распределение нейтронных ширин для всех 14 уровней приведено на рис. 1б вместе с распределением Портера-Томаса для $\nu = 1$. Согласие не является хорошим; однако оценка по критерию Колмогорова вероятности такого случайного отклонения дает значение около 50%, т.е. противоречия между экспериментальным и теоретическим распределениями нет. В случае, если четыре слабых уровня отнесены к p -волновым, согласие между распределениями еще ухудшается, но и в этом случае критерий Колмогорова дает вероятность такого расхождения около 25%.

Дальнейшее уточнение вопроса о распределении нейтронных ширин может быть сделано при измерениях с лучшим разрешением в значительно более широком интервале энергии.

В заключение мы считаем своим приятным долгом поблагодарить Ф.Л. Шапиро за ценные обсуждения и интерес к работе. Мы благодарны И.И. Шелонцеву и Н.Ю. Шириковой за расчеты на электронной вычислительной машине.

Л и т е р а т у р а

1. Ван Най-янь, И. Визи, В.Н. Ефимов, Э.Н. Каржавина и др. Исследование нейтронных резонансов Rh^{103} . ЖЭТФ, 45, вып. 6 (12), 1743, 1963.
2. Д. Зелигер, Н. Илиеску, Ким Хи Сан, Д. Лонго, Л.Б. Пикельнер, Э.И. Шарапов. Нейтронные резонансы брома. ЖЭТФ, 45, вып. 5 (11), 1294, 1963.
3. D.J. Hughes, V.A. Magurno, M.K. Brussel. 1960. Supplement number 1 to BNL - 325, 2-nd ed 1958.
4. C. Corge, V.-D. Huynh, J. Julien, J. Morgenstern, F. Netter. J. Phys. Rad., 22, № 10, 719, 724 (1961).
5. И. Визи, Г.П. Жуков, Г.И. Забиякин, Э.Н. Каржавина и др. Nucl. Electronics, 1, 27, Vienna, 1962.
6. Л.Б. Пикельнер, М.И. Пшитула, Ким Хи Сан, Чен Лин-янь, Э.И. Шарапов. ПТЭ, № 2, 48, 1963.
7. Л.Б. Пикельнер, Э.И. Шарапов. Методы калибровки при измерении сечения радиационного захвата нейтронов. Препринт ОИЯИ Дубна, Р-1547, 1964.
8. J.L. Rosen, J.S. Desjardins, J. Rainwater, W.W. Havens. Phys. Rev., 118, 687 (1960).
9. J.V. Dardel, R. Persson. Nature, 170, N=4339, 117 (1952).
10. J.E. Draper. Nucl. Sci and Eng., 1, N=6, 552 (1956).
11. Л.Б. Пикельнер, М.И. Пшитула, Ким Хи Сан, Чен Лин-янь, Э.И. Шарапов. ПТЭ, № 2, 51 (1963).
12. В.Н. Ефимов, И.И. Шелонцев. Препринт ОИЯИ Р-641, Дубна, 1961.
13. Hans Postma, F.J. Shore, C.A. Reynolds BNL - 7347 (1963).
14. J.A. Harvey, D. Hughes, R. Carter, V. Pilcher. Phys. Rev., 99, N=1, 10 (1955).
15. J. Julien C.R. Acad. Sc., 252, 3233 (1961).
16. В.А. Конкс, Ю.П. Попов, Ф.Л. Шапиро. ЖЭТФ, 46, в 1, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 января 1964 г.

Т а б л и ц а - 1
 Параметры резонансов Tb^{159}

E_0 eV	$g\Gamma_n$ meV	Γ_γ meV	J	$2g\Gamma_n^0$ meV
1. 3,340 \pm 0,005	0,21 \pm 0,02	80 \pm 10	2	0,23
2. 4,98 \pm 0,01	0,032 \pm 0,003		1	0,029
3. 11,05 \pm 0,02	5,0 \pm 0,2	87 \pm 6	2	3,02
4. 14,38 \pm 0,03	0,084 \pm 0,008			0,044
5. 21,20 \pm 0,05	0,62 \pm 0,06			0,26
6. 24,6 \pm 0,07	2,7 \pm 0,2	76 \pm 11	2	1,12
7. 27,6 \pm 0,08	0,47 \pm 0,05			0,18
8. 33,9 \pm 0,11	1,4 \pm 0,2	81 \pm 15	1	0,48
9. 40,7 \pm 0,15	0,29 \pm 0,05			0,091
10. 43,7 \pm 0,17	2,5 \pm 0,2	76 \pm 16	2	0,765
11. 46,1 \pm 0,18	6,7 \pm 0,5	89 \pm 11	2	1,97
12. 50,3 \pm 0,20	1,3 \pm 0,3			0,37
13. 51,6 \pm 0,20	0,54 \pm 0,07			0,15
14. 54,2 \pm 0,23	0,30 \pm 0,05			0,081
15. 57,3 \pm 0,25	0,66 \pm 0,07			0,176
16. 58,7 \pm 0,25	0,85 \pm 0,15			0,22
17. 65,5 \pm 0,30	5,0 \pm 0,5	92 \pm 20		1,25
18. 66,8 \pm 0,30	1,2 \pm 0,1			0,29
19. 74,0 \pm 0,35	8,5 \pm 0,6	87 \pm 16	2	1,98
20. 76,8 \pm 0,4				
21. 78,0 \pm 0,4				
22. 88,8 \pm 0,5	1,8 \pm 0,2			0,38
23. 90,6 \pm 0,5	3,8 \pm 0,3			0,8
24. 97,5 \pm 0,5	14 \pm 1	103 \pm 14	1	2,7

Подчеркнуты значения спинов, определенные в работе/13/

Т а б л и ц а 2
 Параметры резонансов Pr^{141}

	E_0 eV	$g\Gamma_n$ meV	Γ_y meV	J	$2g\Gamma_n^0$ meV
1.	50,5 \pm 0,2	0,030 \pm 0,005			0,0085
2.	85,1 \pm 0,2	3,2 \pm 0,4	80 \pm 20		0,70
3.	112,0 \pm 0,3	0,23 \pm 0,03			0,044
4.	216,7 \pm 0,8	570 \pm 40	71 \pm 15	3	77,50
5.	234 \pm 1	460 \pm 25	93 \pm 15	(3)	60,2
6.	359 \pm 2	790 \pm 50	60 \pm 15	3	82,9
7.	384 \pm 3	27 \pm 4	125 \pm 30		2,75
8.	411 \pm 5	1,2 \pm 0,2			0,118
9.	470 \pm 5	1,7 \pm 0,3			0,157
10.	515 \pm 4	380 \pm 25	75 \pm 15	3	33,8
11.	631 \pm 5	1200 \pm 50	107 \pm 20		95,70
12.	718 \pm 6	1200 \pm 60	68 \pm 15		89,50
13.	839 \pm 7	2200 \pm 100	83 \pm 15	3	151,6
14.	942 \pm 8	1470 \pm 70	167 \pm 20	2	96,0

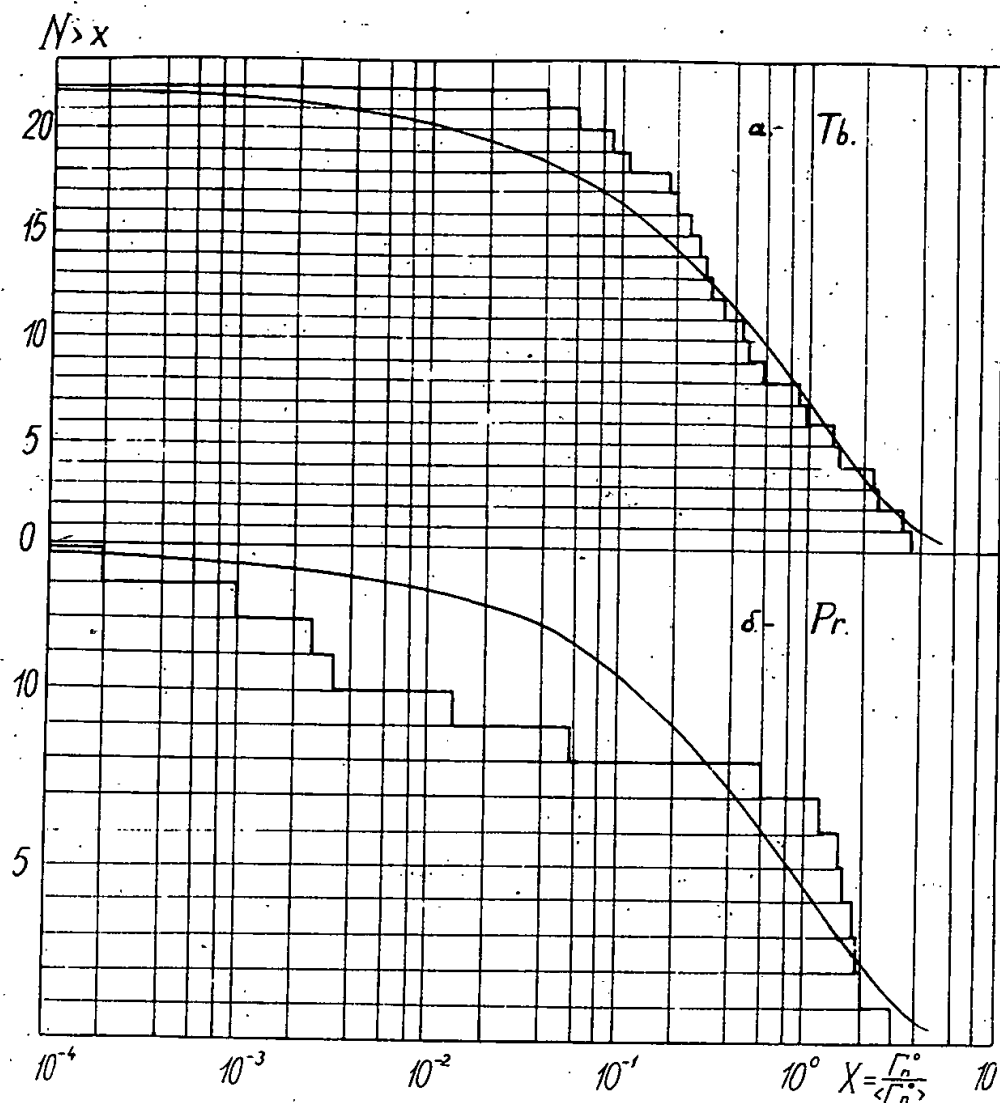


Рис.1. Распределение приведенных нейтронных ширин. Плавная кривая - распределение Портера-Томаса для $\nu = 1$
а) тербий, б) празеодим.

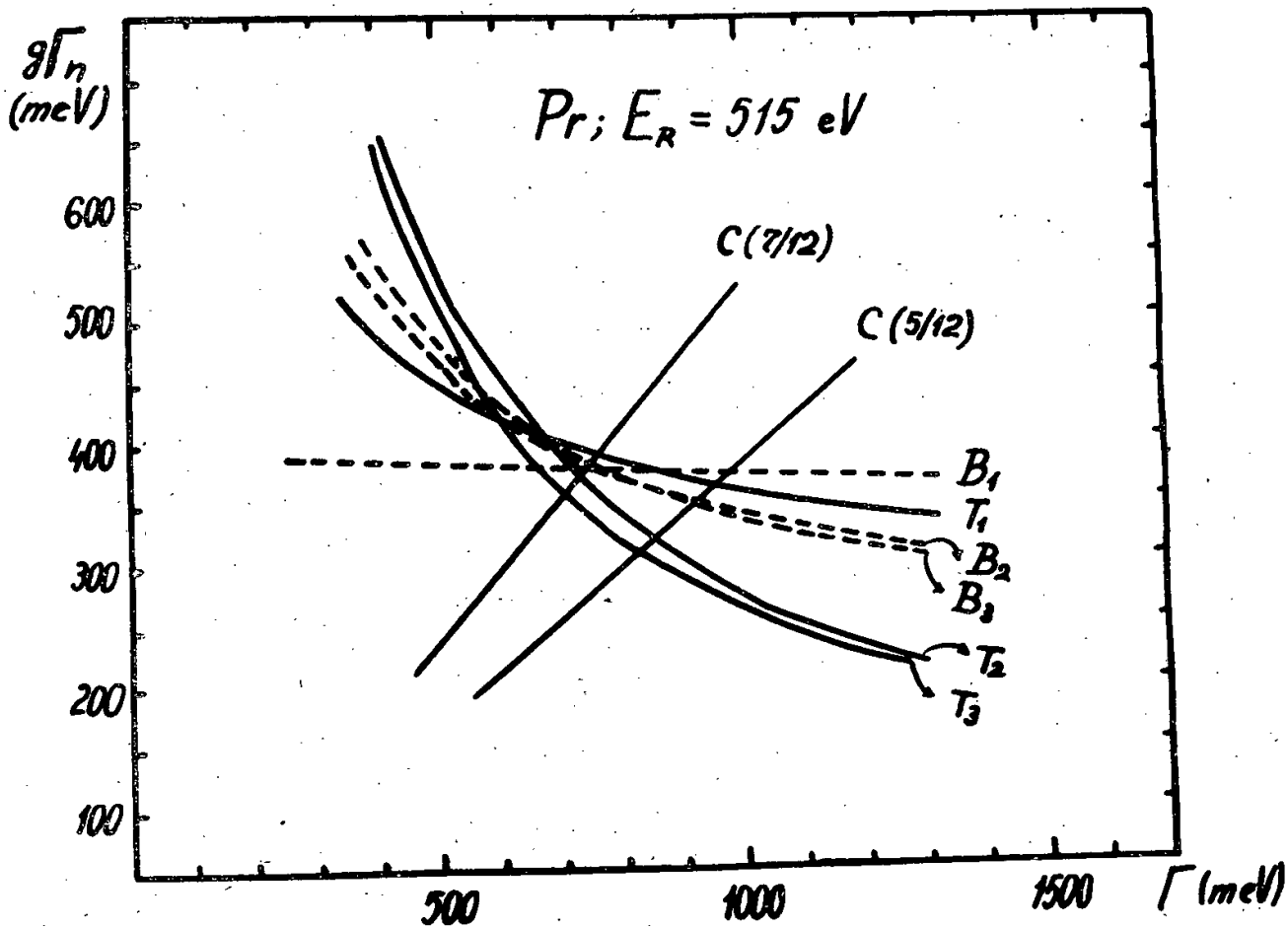


Рис. 2. Кривые B_1, B_2, B_3 получены из измерений рассеяния на образцах толщиной $2,02 \cdot 10^{20}$; $1,48 \cdot 10^{21}$ и $1,66 \cdot 10^{21}$ ядер/см² соответственно. Кривые T_1, T_2, T_3 - из измерений пропускания образцов толщиной $1,08 \cdot 10^{21}$; $2,35 \cdot 10^{22}$; $9,4 \cdot 10^{21}$ ядер/см² и кривые C - из измерений радиационного захвата для образцов толщиной $(1-5,5) \cdot 10^{21}$ ядер/см². Стоящие в скобках значения $7/12$ и $5/12$ указывают на принятое значение g .

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3553. Тираж 320. 0,8 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н.Зрелова Февраль 1964 г.

STAT
33



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Я. Квецинский и П. Шурань

P - 1533

STAT

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ
ПИОН-ПИОННОГО РАССЕЯНИЯ
В ПЛОСКОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Дубна 1964

Квецинский Я. и Шураньи П.

P - 1533

Об аналитических свойствах амплитуды пион-пионного рассеяния в плоскости углового момента.

Исследуется решение уравнения Бете-Солпитера с ядром, содержащим итерированные пузырьковые диаграммы. Показывается, что ведущая особенность в ℓ - плоскости - полюс. Найдена зависимость этого полюса от s для малых значений константы связи. Решение имеет особенность по константе связи. Высказываются некоторые предложения по экспериментальной проверке результатов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

Kwieceński J. and Suranyi P.

P - 1533

On the Analytical Properties of the Pion-Pion Scattering Amplitude in the Angular Momentum Plane.

The solution of the Bethe-Salpeter equation with an iterated bubble exchange kernel is investigated. It is shown that the leading singularity in the complex ℓ plane is a pole. The behaviour of the pole in s for small values of the coupling constant is found. The solution has a singularity in the coupling constant. Some suggestions about the experimental consequence of the results are given.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

Я. Квещинский и П. Шурань

P-1533

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ АМПЛИТУДЫ
ПИОН-ПИОННОГО РАССЕЙЯНИЯ
В ПЛОСКОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Дубна 1964

В последнее время одной из самых важных проблем физики высоких энергий является существование полюсов Редже в теории поля. Эта проблема была исследована с помощью уравнения Бете-Солпитера /БС/ с простыми ядрами. В случае рассеяния скалярных частиц оказалось ^{/1/}, что в так называемом лестничном приближении асимптотическое поведение амплитуды в перекрестном канале определяется одним полюсом Редже. С другой стороны, для рассеяния псевдоскалярных частиц с гамильтонианом взаимодействия $\phi^4(x)$ в "пузырьковом" приближении оказывается, что самая правая особенность - точка ветвления, не зависящая от энергии ^{/2/}. Появление разреза тесно связано с поведением ядра интегрального уравнения при больших передачах импульса. Для псевдоскалярной теории пузырьковая диаграмма как ядро, в отличие от полюсной диаграммы, не дает уравнения типа Фредгольма. Однако в принципе возможно, что точная амплитуда рассеяния двух псевдоскалярных частиц является мероморфной функцией углового момента ℓ . В этой работе, используя улучшенную модель рассеяния двух частиц, мы покажем, что это в самом деле возможно. Мы используем как ядро сумму так называемых итерированных пузырьковых диаграмм ^{/3/} /рис. 1/. Эти диаграммы содержат и однопузырьковый случай, так что решение уравнения БС дает более широкий класс диаграмм, чем уравнение с однопузырьковым ядром.

Сумма диаграмм, дающих ядро, может быть выражена следующей формулой ^{/3/}:

$$K(t) = \frac{\lambda^2 D(t)}{1 - \lambda D(t)}, \quad /1/$$

где λ - перенормированная константа связи и $D(t)$ - вычтенный спектральный интеграл, соответствующий пузырьковой диаграмме:

$$D(t) = \frac{1}{16\pi} t \int_4^\infty \frac{dt'}{t'(t'-t)} \sqrt{\frac{t'-4}{t'}}. \quad /2/$$

Как это замечается в работе ^{/3/}, если $\lambda < 0$, амплитуда рассеяния, данная формулой /1/, имеет полюс для $t < 0$ /призрачное состояние/. Для $\lambda > 0$ появляется связанное состояние, если

$$\lambda > \frac{4\pi}{\int_4^\infty \frac{dt'}{t' \sqrt{t'(t'-4)}}} = \lambda_0 = 8\pi.$$

Функция $K(t)$ может быть написана в спектральном виде:

$$K(t) = \frac{g^2(\lambda)}{t_0 - t} + \int_4^\infty \frac{dt' \operatorname{Im} K(t')}{t' - t},$$

где t_0 - решение уравнения $1 - \lambda D(t_0) = 0$ в области $t_0 < 4$ и $g^2(\lambda) = (D'(t_0))^{-1}$ для $\lambda < 0$ и $\lambda > \lambda_0$, в других случаях $g^2(\lambda) = 0$.

Уравнение Б.С. для парциальной амплитуды рассеяния T_ℓ в обозначениях работы /1/ имеет следующий вид /следуя Вику /4/, мы совершили поворот пути интегрирования/:

$$T_\ell(p, p_0; q, q_0; s) = B_\ell(p, p_0; q, q_0; s) + \int_0^\infty dp' \int_{-\infty}^{+\infty} dp'_0 K_\ell(p, p_0; p', p'_0) \frac{1}{F(p', p'_0; s)} \times T_\ell(p', p'_0; q, q_0; s), \quad /4/$$

где

$$K_\ell(p, p_0; q, q_0) = B_\ell(p, p_0; q, q_0) = \frac{g^2(\lambda)}{(2\pi)^4 \pi} Q_\ell\left(\frac{p^2 + q^2 + t_0 + (p_0 - q_0)^2}{2pq}\right) + \frac{1}{(2\pi)^4 \pi} \int_4^\infty dt' \operatorname{Im} K(t') Q_\ell\left(\frac{p^2 + q^2 + t' + (p_0 - q_0)^2}{2pq}\right).$$

$$a \quad F(p, p_0; s) = \left[p^2 + m^2 + \left(p_0 - i \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2 \right] \left[p^2 + m^2 + \left(p_0 + i \frac{\sqrt{s}}{2} \right)^2 \right].$$

После длинных, но простых вычислений можно проверить, что наше ядро из-за поведения $\operatorname{Im} K(t)$ в бесконечности является ядром типа Фредгольма. Из выражения /1/ следует, что $\operatorname{Im} K(t) \sim (\log t)^{-2}$ при $t \rightarrow \infty$.

Сейчас мы хотим получить поведение ведущей траектории Редже для малых значений λ . Сначала займемся случаем $\lambda < 0$. Мы покажем, что соответствующий полюс не стремится к какому-то целому значению углового момента ℓ при $\lambda \rightarrow -0$, а остается больше нуля. По теории Фредгольма для малых значений $|\lambda|$ мы должны вычислить след ядра. Тогда приближенное уравнение для траектории имеет следующий вид:

$$1 - T_r \left[K_\ell \frac{1}{F} \right] = 0, \quad /5/$$

где

$$T_r \left[K_\ell \frac{1}{F} \right] = \frac{1}{(2\pi)^4 \pi} \int_0^\infty dp \int_0^{+\infty} dp_0 \left[g^2(\lambda) Q_\ell \left(1 + \frac{t_0}{2p^2} \right) + \int_0^\infty dt \operatorname{Im} K(t) Q_\ell \left(1 + \frac{t}{2p^2} \right) \right] \frac{1}{F(p, p_0; s)}. \quad /6/$$

Интегрирование по p_0 может быть проведено точно /1/, и мы получим следующее выражение для $T_r \left[K_\ell \frac{1}{F} \right]$:

$$T_r \left[K_\ell \frac{1}{F} \right] = \frac{1}{(2\pi)^3 \pi} \int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2} (4(p^2 + m^2) - s)} \times \quad /7/$$

$$\times \left[g^2(\lambda) Q_\ell \left(1 + \frac{t_0}{2p^2} \right) + \int_0^\infty dt \operatorname{Im} K(t) Q_\ell \left(1 + \frac{t}{2p^2} \right) \right].$$

Вычислим поведение двух членов /7/ независимо.

Чтобы получить поведение первого члена, нам нужно поведение $g^2(\lambda)$ и t_0 для малых значений $|\lambda|$, $\lambda < 0$. Величина t_0 определяется из уравнения:

$$1 - \lambda \frac{1}{16\pi} t_0 \int_0^\infty \frac{dt}{t(t-t_0)} \sqrt{\frac{t-4}{t}} = 0. \quad /8/$$

Интеграл в уравнении /8/ вычисляется точно, однако для $\lambda \rightarrow -0$ нам нужен только его асимптотический вид при $t_0 \rightarrow -\infty$. Используя асимптотическую форму, получаем:

$$t_0 = -e^{\frac{16\pi}{|\lambda|}}$$

и

$$g^2(\lambda) = \frac{1}{D'(t_0)} = 16\pi e^{\frac{16\pi}{|\lambda|}}.$$

После замены $p = x\sqrt{t_0}$ в правой стороне уравнения /7/ получим для малых значений $|\lambda|$ ($t_0 \rightarrow -\infty$), что $T_r \left[K_\ell \frac{1}{F} \right]$ стремится к конечному пределу:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -0} T_r \left[K_\ell \frac{1}{F} \right] = \left(\frac{1}{2\pi^3} + \frac{1}{2\pi^2} \right) \frac{1}{\ell(\ell+1)}. \quad /9/$$

Можно проверить, что члены высшего порядка разложения определителя Фредгольма имеют то же самое поведение, именно: они не исчезают при $\lambda \rightarrow -0$.

Для малых положительных значений λ , $g^2(\lambda) = 0$, так что достаточно

оценить только поведение спектрального члена. После интегрирования по p_0 получаем для $T_r [K_\ell \frac{1}{F}]$ выражение того же типа, что и второй член соотношения /7/.

Разделяя области интегрирования на две части ($0 < p < N$, $N < p < \infty$ и $4 < t < M$, $M < t < \infty$), найдем, что вклады от низкоэнергетических областей пропорциональны λ^2 для малых λ и таким образом пренебрежимы по сравнению с главным членом ($N < p < \infty$, $M < t < \infty$), для вычисления которого можно использовать асимптотическую форму функции $\text{Im } K(t)$ и пренебречь массой m . После этих приближений мы приходим к следующему интегралу:

$$T_r [K_\ell \frac{1}{F}] = \frac{16}{(2\pi)^3 \pi} \int_N^\infty \frac{dp}{p} \frac{1}{4p^2 - s} \int_M^\infty dt Q_\ell(1 + \frac{t}{2p^2}) \frac{1}{(\frac{16}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \log t)^2 + 1}.$$

Если теперь положим $s = 0$, то этот интеграл может быть вычислен следующим образом: вычисляем сначала интеграл по p от нуля до бесконечности, а затем вычитаем из него интеграл от 0 до N , причем выбираем N и M таким образом /их величина пока произвольная!/, что $\frac{M}{2N^2} \gg 1$, так что в интеграле по p от P до N можно использовать асимптотическую форму Q_ℓ . Таким образом, мы получаем:

$$T_r [K_\ell \frac{1}{F}] = \frac{4}{(2\pi)^3 \ell} \frac{\lambda}{16} - \frac{4}{(2\pi)^3} \frac{1}{\ell} \frac{\lambda}{16} - \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \ell^{\frac{\pi \ell 16}{\lambda}} E_1(-\pi \ell \frac{16}{\lambda}) = - \frac{1}{(2\pi^2)} e^{\frac{\pi \ell 16}{\lambda}} E_1(-\pi \ell \frac{16}{\lambda}). \quad /10/$$

В выражении $T_r [K_\ell \frac{1}{F}]$ первый член возникает из интеграла в пределах $0 < p < \infty$, а остальные два члена из-за интегрирования в пределах $0 < p < N$.

Выражение $T_r [K_\ell \frac{1}{F}]$ для больших значений $|s|$ ($\log|s| \sim O(\frac{1}{\lambda})$) получается заменой $\frac{16}{\lambda}$ на $\frac{16}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \log(-s)$ в уравнении /10/.

Используя теперь соотношения /5/ и /10/, находим уравнение для асимптотического поведения ведущей траектории Редже:

$$1 = - \frac{1}{2\pi^2} \ell^{\frac{\pi \ell (16 + \frac{1}{\pi} \log(-s))}{\lambda}} E_1(-\pi \ell [\frac{16}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \log(-s)]). \quad /11/$$

Из уравнения /11/ видно, что, если $\lambda \rightarrow 0$ или $s \rightarrow \infty$, то $\ell \rightarrow 0$. Уравнение /11/ является трансцендентным уравнением по переменной $x = \pi \ell (\frac{16}{\lambda} + \frac{1}{\pi} \log(-s))$:

$$1 + \frac{1}{2\pi^2} e^{x_0} E_1(-x_0) = 0 \quad /12/$$

с приближенным решением:

$$x_0 = 3.10.$$

Так что для траектории Редже получаем следующее выражение:

$$\ell(s) = \frac{x_0}{\frac{16\pi}{\lambda} + \log(-s)} \quad /13/$$

Очевидно, что высшие члены в разложении функции $\text{Det} \left[1 - K_\ell \frac{1}{F} \right]$ привели бы нас к другой функции от x . Решение уравнения /12/ сильно зависит от коэффициента при $e^{x_0} E_1(-x_0)$. Например, если бы он был порядка единицы вместо $\frac{1}{2\pi^2}$, то мы бы имели разумное значение для x_0 . Итак, единственно, что мы можем сказать о поведении ведущей траектории для малых значений λ (и/или больших значений $|s|$), это то, что оно определяется выражением типа /13/ с некоторым значением x_0 .

Сравнивая значения ℓ , полученные из уравнения /9/ и /13/, можно наблюдать качественное различие между поведением траектории для $\lambda \rightarrow -0$ и $\lambda \rightarrow +0$. Это означает, что решение интегрального уравнения обладает особенностью по λ в точке $\lambda=0$, именно, траектория связанного состояния имеет скачок по λ .

Физически это поведение совершенно понятно, поскольку эти два случая существенно различны: когда $\lambda \rightarrow -0$, диаграммы, соответствующие ядру, содержат призрачное состояние, которого нет в случае $\lambda \rightarrow +0$.

Если сравнить поведение траектории, полученное из уравнения /13/, с траекториями для потенциала Юкава^{/5/} или для теории типа $g\phi^3$, видно, что наша траектория имеет намного более слабую зависимость от s . Возможно, что это может объяснить экспериментальное положение в опытах упругого рассеяния, где наблюдаемая граница сжатия дифракционного пика много меньше значения, предсказанного в упомянутых теориях^{/1,5/}.

Наконец, сделаем небольшое замечание: в ядре интегрального уравнения мы заменили простую однопузырьковую диаграмму более сложной, которая включает, однако, и однопузырьковую как частный случай. При этом оказалось, что в противоположность результатам работы^{/2/} асимптотическое поведение в перекрестном канале определяется одним ведущим полюсом Редже. Это дает надежду на возможность построения точной амплитуды рассеяния шагами, в которых мы всегда будем иметь дело с ядрами типа Фредгольма, дающими решения с ведущим полюсом Редже.

После окончания этой работы мы узнали о работе Пака^{/6/}, посвященной той же самой проблеме. Мы заметим, однако, что в этой работе используется асимптотическая формула для функции Лежандра Q_ℓ , что недопустимо, потому, что, как мы показали, главный вклад к определителю Фредгольма $\text{Det} \left(1 - K_\ell \frac{1}{F} \right)$ получается из интегралов по области, где аргумент функции Q_ℓ может быть близким к единице.

Авторы благодарны Г. Домокошу за ценные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. B.W. Lee and R.F. Sawyer. Phys.Rev., 127, 2266 (1962).
2. R.F. Sawyer. Phys.Rev., 131, 1384 (1963); P. Suranyi. Phys.Lett., 6, 59 (1963). G. Domokos and P. Suranyi. Препринт ОИЯИ Е-1400, Дубна, 1963; Nucl. Phys. (в печати),
3. W. Thirring. Лекция о связанных системах в книге Theoretical Physics, IAEA, Вена, 1963.
4. G.C. Wick. Phys.Rev., 96, 1124 (1952).
5. A. Ahmadzadch, P.G. Burke and C. Tate. Phys.Rev., 131, 1315 (1963).
6. P.Y. Pac. Progr. Theor. Phys., 30, 201 (1963).

* Рукопись поступила в издательский отдел
16. января 1964 г.

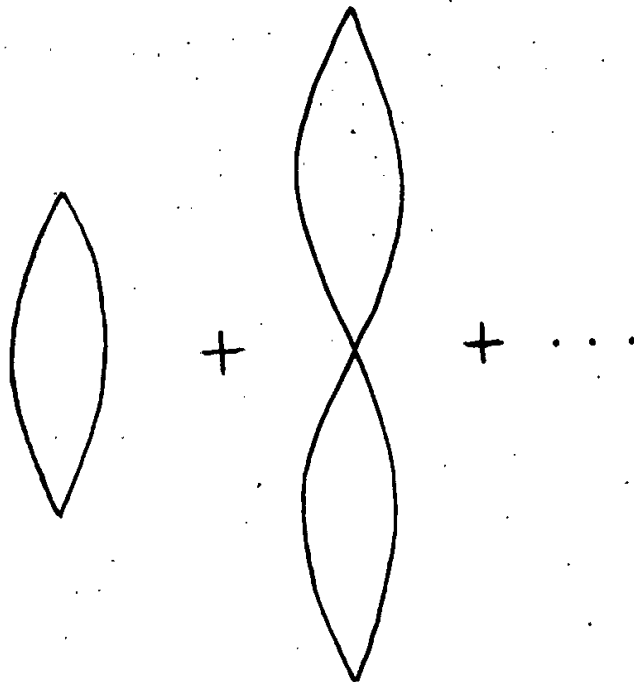


Рис. 1.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3549. Тираж 400. 0,5 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н.Зрелова Февраль 1964 г.

34

STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.К. Лукьянов

P-1532

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЯДЕР
ПРИ РАССЕЯНИИ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ

Дубна 1964

P - 1532

Лукьянов В.К.

Возбуждение ядер при рассеянии тяжелых ионов.

Исследуется вопрос о возбуждении ядер при рассеянии тяжелых ионов в подбарьерной области / $E < V_{\text{кул}}$ / , где учитывается кулоновское и периферическое ядерное взаимодействие тяжелого иона с ядром. Дано квантовомеханическое выражение для сечения возбуждения ядра с переходом мультипольности λ , а также его квазиклассическое выражение. Конкретный расчет выполнен для случая монопольного перехода в Gd^{156} при рассеянии на нем C^{12} и Ar^{40} . Монопольные переходы возбуждаются только ядерным взаимодействием и запрещены в обычном кулоновском возбуждении. Полученные сечения $10^{-27} - 10^{-32}$ см² указывают на экспериментальную возможность их измерения.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

Luk'yanov V.K.

P - 1532

Excitation of Nuclei in Heavy Ion Scattering

The problem of the excitation of nuclei by heavy ion scattering in the subbarrier region ($E < V_{\text{Coulomb}}$) is investigated. The Coulomb and peripheral nuclear interaction of the heavy ion with a nucleus is taken into account. A quantum-mechanical excitation cross section is given for the nuclear transitions with λ multipole. Its quasiclassical expression is also given. A concrete calculation is made for the case of the monopole transition in Gd^{156} when C^{12} and Ar^{40} are scattered in it. The monopole transitions are excited by the nuclear interaction only and forbidden in the usual Coulomb excitation. The cross sections were found to be $10^{-27} - 10^{-32}$ cm² what points to an experimental possibility of their measurement.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

В.К. Лукьянов

P - 1532

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЯДЕР
ПРИ РАССЕЯНИИ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ

Направлено в "Известия АН СССР"

Дубна 1964

В в е д е н и е

С помощью кулоновского возбуждения можно получать надежную информацию об уровнях и вероятностях электромагнитных переходов в ядрах, особенно при изучении низколежащих возбужденных состояний тяжелых ядер. При этом обычно рассматривается неупругое рассеяние заряженных частиц с энергией ниже кулоновского барьера ^{1,2/}. Это удобно, во-первых, потому что электромагнитное взаимодействие и движение частиц в кулоновском поле хорошо изучены и, во-вторых, потому что можно не учитывать действия ядерных сил, которые включаются возле кулоновского барьера и могут приводить к образованию составного ядра, распадающегося со значительной вероятностью в неупругий канал с вылетом легких частиц. Таким образом, при возбуждении ядра легкими частицами p , d , α с околобарьерной энергией становится невозможным экспериментально отделить неупругие каналы с вылетом этих частиц через составное ядро от каналов "прямого" возбуждения кулоновским полем.

В последнее время интенсивно изучается кулоновское возбуждение тяжелыми ионами, которые приводят к значительно большим сечениям возбуждения ядер. Здесь также по мере приближения к кулоновскому барьеру действие ядерных сил может приводить к образованию составной системы, однако распад ее по неупругому каналу с вылетом той же самой тяжелой частицы маловероятен из-за большого числа других всевозможных неупругих каналов, например, каналов с вылетом легких частиц $/ p, r, d, \alpha /$, γ -квантов и каналов деления. Это позволяет считать, что с помощью опытов на совпадение можно выделять процессы "прямого" возбуждения ядра кулоновским и ядерным полем налетающей тяжелой частицы, причем ее ядерное поле будет возбуждать ядро-мишень в околобарьерной области лишь "хвостом" ядерного потенциала.

В качестве первого следствия такого возбуждения ядерным полем следует ожидать появления монопольных переходов типа $0^+ \rightarrow 0^+$ в ядре-мишени, которые в случае кулоновского возбуждения запрещены, так как спин "передаваемого" ядру фотона равен единице. Аналогичным образом дополнительное "ядерное" возбуждение будет приводить к росту кривых выхода квадрупольных и других переходов в ядре.

В настоящей работе получены квантовомеханические и квазиклассические выражения для сечений возбуждения мультипольности λ на основании общего вида мультипольного разложения потенциалов кулоновского и ядерного взаимодействий.

Приложения сделаны для случая монопольного перехода в ядре Gd^{156} , возбуждаемого тяжелыми ионами C^{12} и Ar^{40} .

Вывод формулы сечения

Для вывода формул дифференциального и полного сечений будем использовать метод искаженных волн, который в нашем случае сводится к следующему. При энергиях падающих частиц ниже кулоновского барьера гамильтониан системы можно разбить на части, выделив члены $U_{вз.}$, ответственные за переход:

$$K = H + T + U = H + T + U_0 + U_{вз.} \quad /1/$$

Тогда переход системы в возбужденное состояние $i \rightarrow f$ характеризуется матрицей^{x/}

$$T_{if} = \langle \Phi_f | U_{вз.} | \Phi_i \rangle, \quad \Phi = \psi(\vec{r}) | IM \rangle, \quad /2/$$

причем волновые функции относительного движения $\psi(\vec{r})$ есть искаженные волны, удовлетворяющие уравнению

$$(T + U_0 - E) \psi(\vec{r}) = 0, \quad /3/$$

а волновые функции $|IM\rangle$ есть собственные функции гамильтониана H , описывающего внутренне состояние системы.

Сечение выражается с помощью /2/ в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar v_i} \rho(E_f) \frac{1}{2I_i + 1 M_i M_f} \sum |T_{if}|^2 = \frac{2\pi}{\hbar v_i} \rho(E_f) W_{if}, \quad /4/$$

$$\rho(E_f) = \frac{m^2 v_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

В случае возбуждения ядра кулоновским и ядерным полем налетающей частицы вероятность перехода

$$W_{if} = W_{if}^{кул.} + W_{if}^{яд.} + W_{if}^{интерф.}$$

^{x/} Представление матрицы перехода в виде /2/ становится неверным в случае так называемого "многократного возбуждения", теория которого развита для кулоновского поля в работе^{/3/}. Запись /2/ оказывается справедливой, если выполняется условие

$$P = \frac{d\sigma_{неупр.}(\theta=\pi)}{d\sigma_{упр.}(\theta=\pi)} \ll 1 \quad /2'/$$

поскольку потенциал взаимодействия состоит из двух частей:

$$U_{вз.} = U_{вз.}^{кул.} + U_{вз.}^{яд.}$$

а

$$U_0 = U_0^{кул.} + U_0^{яд.}$$

Для каждого из потенциалов $U^{кул.}$ и $U^{яд.}$ используем обычное представление:

$$U = U_0 + U_{вз.} = \int \rho(\vec{R}) v(|\vec{r} - \vec{R}|) d\vec{R}, \quad /5/$$

где $\rho(\vec{R})$ - плотность заряда /либо нуклонов/ ядра-мишени, а $v(x)$ - взаимодействие между центром падающей частицы и единицей объема ядра-мишени, которое можно записать в виде разложения по шаровым функциям:

$$v(|\vec{r} - \vec{R}|) = \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} G_{\lambda\lambda'}^{\lambda} q_{\lambda\sigma}(\vec{R}) q_{\lambda\lambda'}(r) Y_{\lambda\mu}^*(\Omega_{\vec{R}}) Y_{\lambda\mu}(\Omega_{\vec{r}}); \quad /6/$$

$r > R$

Тогда из формулы /5/ получим выражение для потенциала взаимодействия

$$U_{вз.} = \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\lambda\lambda'} G_{\lambda\lambda'}^{\lambda} q_{\lambda\sigma}(r) Y_{\lambda\mu}(\Omega_{\vec{r}}) \mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\sigma\sigma'} - U_0, \quad /7/$$

где

$$\mathfrak{M}_{\lambda\mu}^{\sigma\sigma'} = (-1)^{\mu} \int \rho(\vec{R}) q_{\lambda\sigma}(\vec{R}) Y_{\lambda-\mu}(\Omega_{\vec{R}}) d\vec{R}. \quad /8/$$

Поскольку потенциал относительного движения U_0 не зависит от внутренних координат ядра-мишени, то в матричный элемент перехода /2/ будет давать вклад лишь первое слагаемое формулы /7/. Для расчета матрицы перехода $T_{ii'}$ удобно представить волновые функции относительного движения в виде разложения:

$$\psi_{\vec{k}}^{(\pm)}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{kr} \sum_{\ell m} i^{\ell} e^{+i\sigma_{\ell}} Y_{\ell m}^*(\Omega_{\vec{k}}) Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}}) u_{\ell}(kr), \quad /9/$$

$$u_{\ell}(kr) = [\cos \delta_{\ell} F_{\ell}(kr) + \sin \delta_{\ell} G_{\ell}(kr)] e^{i\delta_{\ell}},$$

где σ_{ℓ} и δ_{ℓ} кулоновские и ядерные фазы. Подставляя /7/-/9/ в /2/ и затем в формулу для дифференциального сечения /4/, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{h\nu_i} \rho(E_i) 4\pi \sum_{\lambda} \sum_{\sigma\sigma'} \sum_{\kappa} G_{\lambda\kappa}^{\lambda\kappa} G_{\lambda\kappa'}^{\lambda\kappa'} \langle I_i \| \mathfrak{M}^{\sigma\kappa}(\lambda) \| I_i \rangle \langle I_i \| \mathfrak{M}^{\sigma'\kappa'}(\lambda) \| I_i \rangle^*$$

$$\sum_{\substack{\ell_1, \ell_1' \\ \ell_1', \ell_1'}} i^{(\ell_1 - \ell_1' - \ell_1' + \ell_1')} e^{i(\sigma_{\ell_1} + \sigma_{\ell_1'} - \sigma_{\ell_1} - \sigma_{\ell_1'})} (-1)^{\ell_1' - \ell_1} \frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_1' + 1)}{[(2\ell_1 + 1)(2\ell_1' + 1)]^{1/2}} \times$$

/10/

$$\times (\ell_1, \lambda 00 | \ell_1, 0) (\ell_1', \lambda 00 | \ell_1', 0) I_{\ell_1, \ell_1'}^{*k}(\lambda) I_{\ell_1', \ell_1}^{*k'}(\lambda) \sum_j (\ell_1, \ell_1', 00 | j 0) (\ell_1, \ell_1', 00 | j 0) \times$$

$$\times W(\ell_1, \lambda j \ell_1'; \ell_1, \ell_1') P_j(\cos \theta).$$

Здесь индексы k, k' введены для удобства и означают либо /кул./, либо /яд./, то есть величина, зависящая от такого индекса, связана с разложением /6/ либо кулоновского, либо ядерного потенциала взаимодействия. Орбитальные интегралы обозначены как

$$I_{\ell_1, \ell_1'}^{*k}(\lambda) = \frac{1}{k_1 k_1'} \int u_{\ell_1}^*(k_1, r) q^{\pm k}(\lambda)(r) u_{\ell_1}(k_1, r) dr. \quad /11/$$

Выражение для полного сечения неупругого рассеяния легко получить интегрированием /10/ по всем углам рассеяния θ :

$$\sigma = \frac{2\pi}{h v_1} \rho(E_1) (4\pi)^2 \sum_{\lambda} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_1' \\ \sigma_1', \sigma_1'}} \sum_{\substack{k, k' \\ \sigma_1', \sigma_1'}} G^{\lambda k} G^{\lambda k'} \langle I_1, || \pi^{\lambda k}(\lambda) || I_1 \rangle \langle I_1, < I_1, || \pi^{\lambda k'}(\lambda) || I_1 \rangle^*$$

/12/

$$\sum_{\ell_1, \ell_1'} (2\ell_1 + 1) (\ell_1, \lambda 00 | \ell_1, 0)^2 I_{\ell_1, \ell_1'}^{*k}(\lambda) I_{\ell_1', \ell_1}^{*k'}(\lambda).$$

Квазиклассическое приближение

Обычно в реакциях кулоновского возбуждения выбирают такие энергии падающей частиц, чтобы выполнялось условие квазиклассичности $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{h v} \gg 1$. В случае тяжелых ионов такое условие выполняется практически всегда для большого интервала энергий падающих частиц, включающего также область возле кулоновского барьера. Тогда формулы для сечений и орбитальных интегралов значительно упрощаются и иногда приводят к ответу в аналитическом виде.

Для перехода от квантовомеханических выражений /10/ и /12/ к квазикласси-

ческим воспользуемся асимптотическими формулами для больших ℓ , и ℓ , /2/:

$$(\ell, \lambda 00 | \ell, 0) \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{2\lambda+1}} Y_{\lambda\mu} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right),$$

$$\sum_{\ell, \ell'} \rightarrow \sum_{\mu} \int d\ell, \quad d\sigma \xrightarrow{\text{упр.}} \pi \kappa^2 2\ell d\ell, \quad /13/$$

$$I_{\ell, \ell'}^{\lambda \kappa}(\lambda 0) \rightarrow I_{\lambda \mu}^{\lambda \kappa}(-\theta, \xi), \quad \xi = \eta_1 - \eta_1.$$

Теперь формулы для сечений примут вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{кв. кл.}}{\pi v} \rho(E_1) \frac{(4\pi)^3}{\pi \kappa^2} \frac{\text{упр.}}{d\Omega} \sum_{\lambda \mu} \sum_{s t \kappa} \sum_{s' t' \kappa'} (2\lambda+1)^{-1} G_{s t \kappa}^{\lambda \kappa} G_{s' t' \kappa'}^{\lambda \kappa} /14/$$

$$\langle I_1 || \mathcal{M}^{\lambda \kappa}(\lambda) || I_1 \rangle \langle I_1 || \mathcal{M}^{\lambda' \kappa'}(\lambda) || I_1 \rangle Y_{\lambda \mu}^2 \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) I_{\lambda \mu}^{\lambda \kappa}(\theta \xi) I_{\lambda \mu}^{\lambda' \kappa'}(\theta \xi),$$

$$\sigma = \frac{\text{кв. кл.}}{\pi v} \rho(E_1) \frac{(4\pi)^3}{\pi \kappa^2} \sum_{\lambda \mu} \sum_{s t \kappa} \sum_{s' t' \kappa'} (2\lambda+1)^{-1} G_{s t \kappa}^{\lambda \kappa} G_{s' t' \kappa'}^{\lambda \kappa} \times /15/$$

$$\langle I_1 || \mathcal{M}^{\lambda \kappa}(\lambda) || I_1 \rangle \langle I_1 || \mathcal{M}^{\lambda' \kappa'}(\lambda) || I_1 \rangle Y_{\lambda \mu}^2 \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \int \frac{\text{упр.}}{d\Omega} \frac{d\sigma}{d\Omega} I_{\lambda \mu}^{\lambda \kappa}(\theta \xi) I_{\lambda \mu}^{\lambda' \kappa'}(\theta \xi) d\Omega.$$

Выражение для орбитальных интегралов /11/ также упрощается, поскольку волновые функции относительного движения $\psi_{\ell}(kr)$ уже являются квазиклассическими. При подбарьерных энергиях можно пренебречь в первом приближении влиянием "хвоста" ядерного потенциала на относительное движение падающей частицы /так как здесь $U_0^{\text{кул.}} \gg U_0^{\text{яд.}}$ /, хотя возмущающий ядерный потенциал $U^{\text{яд.}}$ будет приводить к внутриядерным переходам наравне с кулоновским потенциалом $U^{\text{кул.}}$ Тогда $\psi_{\ell}(kr)$ есть просто кулоновские функции $F_{\ell}(kr)$. Подставляя их квазиклассическое выражение в формулу для орбитального интеграла /11/ и делая замену переменных

$$r = \frac{\eta}{k} [\epsilon \text{ch } \omega + 1],$$

получим:

$$I_{\lambda}^{iK}(\theta, \xi) = \frac{1}{4k^2} \frac{\eta}{k} \int_{-\infty}^{\infty} q_{\lambda}^{iK}(r(\omega)) e^{i\xi(\epsilon \operatorname{sh} \omega + \omega)} \frac{(\epsilon + \operatorname{ch} \omega + i \operatorname{sh} \omega \sqrt{\epsilon^2 - 1})^{\mu}}{(1 + \epsilon \operatorname{ch} \omega)^{\mu-1}} d\omega, /16/$$

где

$$\epsilon = \sin^{-1} \frac{\theta}{2}, \quad \xi = \eta_f - \eta_i, \quad k = \frac{k_i + k_f}{2}, \quad \eta = \frac{\eta_i + \eta_f}{2}.$$

Монопольные переходы ($\lambda=0$)

Найдем полное сечение возбуждения монопольного перехода в квазиклассическом приближении. Этот случай является наиболее простым, и в то же время наиболее интересным, так как в случае обычного кулоновского возбуждения при энергиях ниже барьера такие переходы возбудить нельзя. Действительно, для кулоновского потенциала взаимодействия точечных зарядов разложение /5/ дает

$$G_{\lambda}^{(\text{кул.})} = \frac{4\pi}{2\lambda+1} \delta_{s_0 s_0} \delta_{t_0 t_0}; \quad q_{\lambda}^{(\text{кул.})}(R) = R; \quad q_{\lambda}^{(\text{кул.})}(r) = r^{-\lambda-1}. \quad /17/$$

В этом случае матричный элемент монопольного перехода

$$\langle I_i || \mathcal{M}^{(\text{кул.})}(0) || I_f \rangle = \langle I_i || Z || I_f \rangle = 0.$$

из-за ортогональности ядерных функций начального и конечного состояний. Это равенство приводит к исчезновению как кулоновского, так и интерференционного, слагаемых в сечениях /14/ и /15/ и таким образом

$$\sigma(\lambda=0) = \sigma^{\text{яд.}}(\lambda=0).$$

Будем считать, что влиянием ядерного потенциала на относительное движение подбарьерных частиц можно пренебречь. Тогда для вычисления сечения монопольного перехода необходимо задать, кроме кулоновского потенциала относительного движения $U_0^{\text{кул.}}$, лишь ядерный потенциал взаимодействия $U^{\text{яд.}}$ в. Так как мы рассматриваем подбарьерные столкновения, где взаимодействие происходит на "хвостах" ядерного потенциала, то нам достаточно задать правильную форму потенциала лишь на краю ядра, в области его резкого спада. На границе ядра /падающего тяжелого иона/ в области $x > R_1$ хорошей аппроксимацией известного потенциала Вудса-Саксона /с параметрами u_0 , $R_1 = r_0 A^{1/3}$, a / является функция:

$$v(x) = -V_0 \frac{e^{-ax}}{ax}, \quad V_0 = \frac{u_0 R_1 a}{g} \exp(ax R_1), \quad a = \frac{1}{a}. \quad /18/$$

Для потенциала такого вида разложение /6/ дает:

$$G_{\lambda}^{(яд.)} = 4\pi V_0 \delta_{\lambda 0} \delta_{l 0}, \quad q_{\lambda}^{(яд.)}(R) = j_{\lambda}(i\alpha R), \quad q_{\lambda}^{(яд.)}(r) = H_{\lambda}^{(1)}(i\alpha r). \quad /19/$$

Подставляя $q_{\lambda=0}^{(1)}(r) = h_0^{(1)}(i\alpha r)$ в квазиклассическое выражение орбитального интеграла /16/, получим:

$$I_{00}(\theta\xi) = -\frac{1}{2k^2 a} \exp\left[-a \frac{\eta}{k} - \xi \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi k}{a\eta}\right)\right] K_{i\xi}\left(\epsilon \sqrt{\xi^2 + \left(a \frac{\eta}{k}\right)^2}\right). \quad /20/$$

В случае, когда выполняется условие $\xi = \eta_1 - \eta_2 \ll 1$, вместо K -функции можно взять первый член ее асимптотического разложения. Тогда

$$I_{00}(\theta\xi) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2k^2 a} \left(2\epsilon a \frac{\eta}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-a \frac{\eta}{k}(1+\epsilon) - \xi \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi k}{a\eta}\right)\right]. \quad /21/$$

$\xi \ll 1$

Выражение для сечения монополюного перехода получим подстановкой в /15/ орбитального интеграла /21/, причем для сечения упругого рассеяния надо взять резерфордскую формулу:

$$\frac{d\sigma_{\text{упр.}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{кул.}}}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{\eta}{k}\right)^2 \sin^{-4} \theta.$$

Проводя в /15/ интегрирование по всем углам рассеяния, найдем полное сечение

$$\sigma(\lambda=0) = 8\pi^3 \left(\frac{V_0}{\hbar v a^2}\right)^2 \exp\left[-4a \frac{\eta}{k} - 2\xi \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi k}{a\eta}\right)\right] \langle I_{\lambda=0} | I_{\lambda=0} \rangle^2. \quad /22/$$

(яд.)

Отсюда видно, что сечение экспоненциально растет с ростом энергии падающих частиц, а его абсолютное значение зависит от величины ядерного матричного элемента.

Для оценки величины сечения монополюного возбуждения рассчитаем ядерный матричный элемент $O^+ \rightarrow O^+$ - перехода в ядре, которое можно описать в рамках модели А.С. Давыдова /4/. Данная модель использует параметры β_0 и γ_0 , соответствующие минимуму потенциальной энергии по β - и γ -колебаниям, и параметр неадиабатичности μ . В случае $\gamma_0 = 0$ нулевые γ -колебания поверхности ядра могут приводить все же к равновесной форме ядра с параметром $\gamma_{\text{равнов.}} = \Gamma$. В предельном случае $\mu < 1/3$, $\gamma_0 = 0$ и $\Gamma < 15^\circ$ волновые функции основного и возбужденного состояний равны

$$\psi_{nm} = \frac{H_n\left(\frac{\beta - \beta_0}{\mu \beta_0}\right) F(-n, 1, \frac{\gamma^2}{2\Gamma^2})}{[2^n n! \mu \beta_0 \sqrt{\pi}]^{1/2} \Gamma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\gamma^2}{2\Gamma^2} + \left(\frac{\beta - \beta_0}{\mu \beta_0}\right)^2\right]\right\}, \quad /23/$$

причем, например, для основного O^+ -состояния $n=m=0$, а для O_β^+ -колебательного состояния $n=1$, $m=0$.

Выражение для оператора перехода $\mathbb{M}^{\text{яд.}}$ ($\lambda=0$) можно получить, выбрав для плотности нуклонов ступенчатую функцию

$$\rho^{\text{(яд.)}}(R) = \begin{cases} \frac{3A}{4\pi R_0^3} & R < R_0 \\ 0 & R > R_0 \end{cases}, \quad /24/$$

где форма ядра задается в виде:

$$R = R_0 + \Delta R, \quad \Delta R = R_0 \left(\sum_{\kappa, \nu=0, \pm 2} a_{\kappa\nu} D^{(2)}_{\nu\kappa}(\Theta) Y_{2\mu}(\Omega_R) - \frac{\beta^2}{4\pi} \right),$$

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_{\pm 2} = \frac{\beta \sin \gamma}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя теперь /19/ и /24/ в формулу /8/, получим с точностью до членов разложения $\approx \beta^3$ следующее выражение для оператора монополюсного перехода:

$$\mathbb{M}^{\text{(яд.)}}(\lambda=0) = \frac{3A}{(4\pi)^{3/2} R_0^3} \int_0^\lambda \int_0^{\vec{R}} (i\alpha R) d\vec{R} = \text{const} + \frac{3A}{2(4\pi)^{3/2}} \left(\text{ch } \alpha R_0 - \frac{\text{sh } \alpha R_0}{\alpha R_0} \right) \beta^2 /25/$$

Остается вычислить ядерный матричный элемент монополюсного перехода $\langle I_1 || \mathbb{M}(\lambda=0) || I_1 \rangle$, где оператор и волновые функции заданы формулами /25/ и /23/. В результате выражение для сечения /22/ с возбуждением монополюсного $O^+ \rightarrow O_\beta^+$ -колебательного перехода примет вид:

$$\sigma(\lambda=0) = \left(\frac{3A v_0 \mu \beta_0^2}{4\pi v a^2} \right)^2 \left(\text{ch } \alpha R_0 - \frac{\text{sh } \alpha R_0}{\alpha R_0} \right)^2 \times /26/$$

$$\times \exp \left[-4\alpha \frac{\eta}{k} - 2\xi \arctg \left(\xi \frac{k}{a\eta} \right) \right].$$

Обсуждение

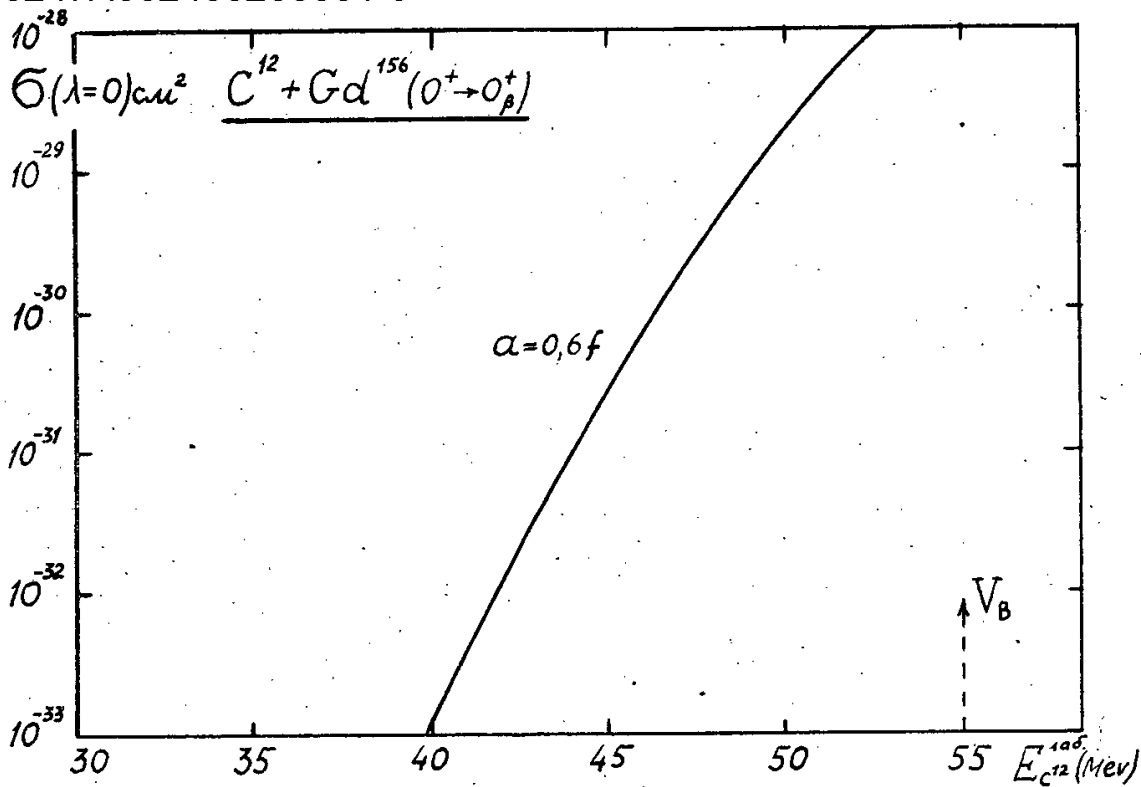
Сделаем оценку величины полученного сечения /26/ для какого-либо конкретного случая. Вычислим, например, сечение возбуждения монополярного перехода $O^+ \rightarrow O^+_{\beta}$ в Gd^{156} ядерном поле падающих тяжелых ионов C^{12} и Ag^{40} . Для расчета параметров этого поля /18/ можно взять обычные значения параметров саксоновского потенциала $u_0 = 45$ Мэв, $r_0 = 1,25f$, $a = 0,6f$. Параметры ядра Gd^{156} , описываемого в рамках модели А.С. Давыдова, можно взять из работы /5/: $\mu = 0,25$, $\beta_0 = 0,33$, $E^+_{O_2} = 1$ Мэв. Прежде чем проводить расчеты по формуле /26/, необходимо проверить условие /2'/ применимости используемых приближений /2/. Подстановка параметров в /2'/ дает $P \approx 10^{-3}$, $P_{Ar^{40}} \approx 3 \cdot 10^{-5}$, то есть условие $P \ll 1$ в данном случае выполняется. Вычисленные по формуле /26/ сечения представлены как функции энергии падающих ионов на рис. 1 и 2. Видно, что для Ag^{40} как более тяжелой частицы, сечение является более плавной функцией энергии, чем для C^{12} . Поэтому для эксперимента лучше выбирать тяжелые бомбардирующие частицы, так как эффект для них будет начинаться при энергиях более далеких от барьера, чем для легких частиц.

На рис. 2 показана также кривая, рассчитанная для $a = 0,4f$, то есть для более узкого слоя "размазки" потенциала, чем при $a = 0,6f$. Сечение при этом уменьшается примерно на два порядка, что свидетельствует о чувствительности эффекта к размерам диффузного слоя ядра. Это можно использовать для определения параметров формы потенциала у поверхности ядра.

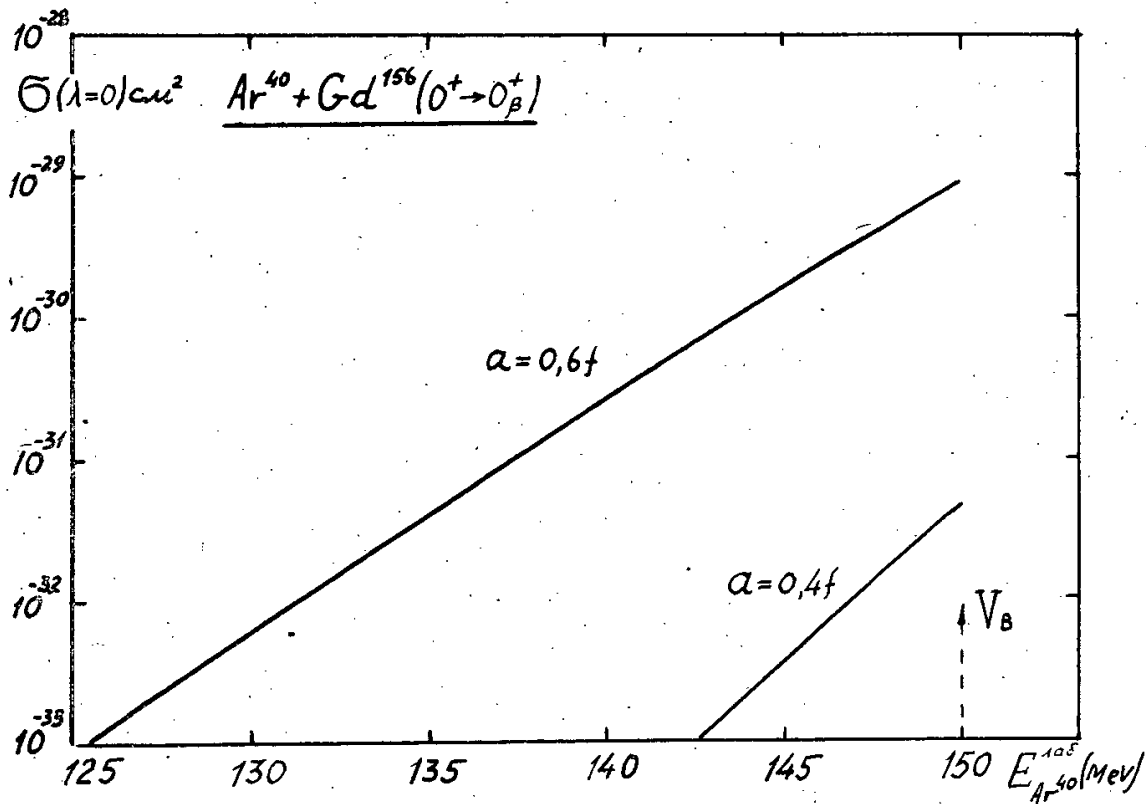
Л и т е р а т у р а

1. К.А. Тер-Мартirosян. ЖЭТФ, 22, 284 /1952/.
2. K. Alder, A. Bohr и др. См. сб. "Деформация атомных ядер", ИЛ., 1958.
3. K. Alder, A. Winther. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 32, 8 (1960).
4. А.С. Давыдов. Вестник МГУ, вып. физ., 1, 58 /1961/; Nucl. Phys., 24, 682 (1961); А.С. Давыдов, В.С. Ростовский, А.А. Чабан. Вестник МГУ, вып. физ., 3, 66 /1961/; Nucl. Phys., 27, 234 (1961).
5. V.N. Iutsenko. Nucl. Phys., 47, 42 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 января 1964 г.



Р и с. 1.



Р и с. 2.

Р и с. 1, 2. Сеченне возбуждения монополярного $0^+ \rightarrow 0^+_{\beta}$ - перехода в Gd^{156} в зависимости от энергии падающих ионов C^{12} и Ar^{40} .

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2014/04/25 :
CIA-RDP80-00247A002400260001-5

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2014/04/25 :
CIA-RDP80-00247A002400260001-5
Н.Н.Зрелова Февраль 1964 г.

СТАТ
33



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.В. Балашов, В.Б. Беляев, Н.М. Кабачник, Р.А. Эрамжян

P-1530

**РЕЗОНАНСНЫЙ МЕХАНИЗМ
ИСПУСКАНИЯ НЕЙТРОНОВ
ПРИ ЗАХВАТЕ μ^- -МЕЗОНОВ КИСЛОРОДОМ**

Дубна 1984

Балашов В.В., Беляев В.Б., Кабачник Н.М.,
Эрамжян Р.А.

P-1530

Резонансный механизм испускания нейтронов при захвате
 μ^- - мезонов кислородом.

Исследуется резонансный механизм испускания нейтронов
в процессах захвата мюонов легкими ядрами. Детальные расчеты
проведены для реакции $\mu^- + O^{16} \rightarrow N^{15} + n + \nu$. Показано, что
вплоть до $E = 10$ Мэв резонансный механизм захвата играет
определяющую роль в формировании спектра нейтронов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

Balashov V.V., Belyaev V.B., Kabachnik N.M., Eramzhian R.A.

P-1530

A Resonance Mechanism of Neutron Emission in Muon Capture
by Oxygen

A resonance mechanism of neutron emission in the processes of muon capture by
light nuclei is investigated. Detailed calculations are given for the reaction
 $\mu^- + O^{16} \rightarrow N^{15} + n + \nu$. It is shown that up to $E_n = 10$ MeV the resonance capture
mechanism plays the main role in producing the neutron spectrum.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

В.В. Балашов, В.Б. Беляев, Н.М. Кабачник, Р.А. Эрамжян

P-1530

РЕЗОНАНСНЫЙ МЕХАНИЗМ
ИСПУСКАНИЯ НЕЙТРОНОВ
ПРИ ЗАХВАТЕ μ^- -МЕЗОНОВ КИСЛОРОДОМ

Дубна 1984

В предыдущей работе^{/1/} была отмечена важная роль резонансного механизма испускания нейтронов при μ^- -захвате, связанного с образованием и распадом высоко возбужденных квазистационарных состояний ядра. Конкретные расчеты, проведенные для реакции $\text{Ca}^{40} + \mu^- \rightarrow \text{K}^{39} + n + \nu$, показали, что отношение вклада резонансных нейтронов с $E_n > 3$ Мэв, отвечающих только переходам первого запрета, к соответствующему интегральному выходу всех прямых нейтронов, полученному в рамках одно-частичного (оптического) расчета^{/2/}, оказывается равным 5. Даже при отборе нейтронов с большей энергией резонансные эффекты остаются по-прежнему очень существенными: при $E > 6$ Мэв указанное отношение равно 2,5.

Такая картина не является исключительной особенностью какого-нибудь отдельного ядра. Ниже приводятся результаты аналогичного расчета для реакции $\text{O}^{16} + \mu^- \rightarrow \text{N}^{15} + n + \nu$. Учет правил отбора при μ^- -захвате^{/3,4/} приводит к тому, что в данном случае наиболее интенсивными оказываются переходы первого запрета, соответствующие "частично-дырочным" возбуждениям типа $(1p)^{-1}(1d, 2s)$ с $J = 0^-, 1^-, 2^-$ ("разрешенные" переходы типа $(1s) \rightarrow (2s)$ и $(1p) \rightarrow (2p)$, соответствующие высокому возбуждению ядра, ослаблены в силу правила отбора по главному квантовому числу; вклад переходов более высокого порядка запрета оказывается также значительно меньшим^{x)}). Поэтому для сравнения роли резонансного и прямого механизмов и суждения о надежности оптических расчетов достаточно ограничиться рассмотрением только переходов первого запрета; во всяком случае, тем самым можно оценить нижнюю границу вклада резонансного механизма.

Положение и волновые функции состояний $0^-, 1^-, 2^-$ ядра N^{16} рассчитаны в рамках обычного "частично-дырочного" подхода, используемого при расчете состояний дипольного и спиново-волнового возбуждения. Уровни "нулевого приближения" определены по экспериментальным данным об уровнях соседних ядер; параметры остаточного взаимодействия между нуклонами выбраны такими же, как в^{/6/}, что не сильно отличается от соответствующих значений Эллиотта и Флауэрс^{/7/}. Распад квазистационарных состояний ядра N^{16} на "дырочные" уровни N^{15} с $J = \frac{1}{2}^-$ (основное состояние) и $J = 3/2^-$ ($E^* = 6,33$ Мэв) рассчитывается в рамках обычного формализма приведенных ширин.

x) Проведенные недавно эксперименты^{/5/} по изучению переходов на отдельные связанные состояния в реакции $\text{O}^{16}(\mu^-, \nu)\text{N}^{16}$ непосредственно подтверждают правила отбора по порядку запрета: вероятность перехода на уровень 3^- ядра N^{16} пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью переходов на уровни $0^-, 1^-, 2^-$.

Полный нейтронный спектр, полученный наложением отдельных нейтронных групп (рис. 1), показан на рис. 2 (энергетический разброс всех групп выбран одинаковым: $\Delta E_n = 2$ Мэв). Как и следовало ожидать, резонансный механизм дает большой вклад в жесткую часть спектра. Это находится в полном соответствии с результатом, полученным ранее при анализе распада дипольных состояний^{7,8/}: жесткая часть спектра фотонейтронов и фотопротонов, соответствующих "гигантскому резонансу", обязана в основном не прямому механизму фоторасщепления, а распаду дипольных состояний на низко лежащие "дырочные" состояния остаточного ядра; этот эффект обусловлен смешиванием оболочечных конфигураций и полностью исчезает в одночастичной (в частности, оптической) модели, используемой для расчета "прямого" фотоэффекта.

Сравним полученный результат с предсказаниями оптической модели^{12/}. Рассчитанный в^{12/} спектр показан на рис. 2. При $E_n > 3$ Мэв и даже при $E_n > 6$ Мэв отношение вклада резонансного механизма (соответствующего только переходам первого запрета) к интегральному вкладу всех прямых нейтронов значительно превышает единицу.

Полученные результаты подтверждают сделанные ранее выводы о ненадежности использования оптической модели для интерпретации данных по μ^- -захвату, по крайней мере, при $E_n < 10$ Мэв, а следовательно, и для суждения о μ^- -мезонных константах слабого взаимодействия. В частности, это относится к расчетам коэффициента асимметрии углового распределения нейтронов при захвате поляризованных μ^- -мезонов. Что касается резонансного подхода, то, хотя здесь, разумеется, есть принципиальная возможность расчета коэффициента асимметрии (путем учета интерференции переходов первого запрета с "разрешенными" и двукратно запрещенными переходами), такой расчет также не может быть проведен с требуемой для определения констант точностью. Тем самым приходится сделать вывод о том, что нейтронные эксперименты по изучению μ^- -захвата, если только в них не делается очень большая (> 10 Мэв) отсечка нейтронов, вообще не эффективны для определения констант (μp) взаимодействия. Что же касается использования самой жесткой части спектра нейтронов с $E_n > 10$ Мэв, то прежде надо выяснить вопрос, не сказываются ли здесь эффекты "кластерного" поглощения мезона, связанные с образованием в ядрах различных нуклонных структур.

Нам представляется, что для того, чтобы можно было с уверенностью извлекать мюонные константы из нейтронных экспериментов, следует предварительно поставить ряд специальных опытов по изучению самого механизма захвата с испусканием нейтронов, в частности, исследование энергетического спектра и абсолютного выхода нейтронов с энергией выше 3-4 Мэв.

Л и т е р а т у р а

1. Н.М. Кабачник. Дипломная работа, МГУ, 1962.
В.В.Балашов, Н.М. Кабачник, Р.А. Эрамжян. Nucl. Phys. (в печати).
2. Э.И. Долинский, Л.Д. Блохинцев. ЖЭТФ, 35, 1488 (1958).
3. M.Morita, A.Fujii. Phys. Rev., 118, 606 (1960).
4. J.R.Luyten, H.P.C.Rood, H.A.Tolhoek. Nucl. Phys., 41, 136 (1963).
5. R.C.Cohen, S.Devons, A.D.Kanaris. Phys. Rev. Lett., 11, 134 (1963).
6. В.В.Балашов, В.Б.Беляев, Р.А.Эрамжян. Препринт ОИЯИ. Р-887, Дубна, 1962.
7. J.P.Elliott, B.M.Flowers. Proc. Roy. Soc. A242, 57 (1957).
8. В.В.Балашов, В.Г.Шевченко, Н.П.Юдин. Nucl. Phys., 27, 323 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 января 1964 г.

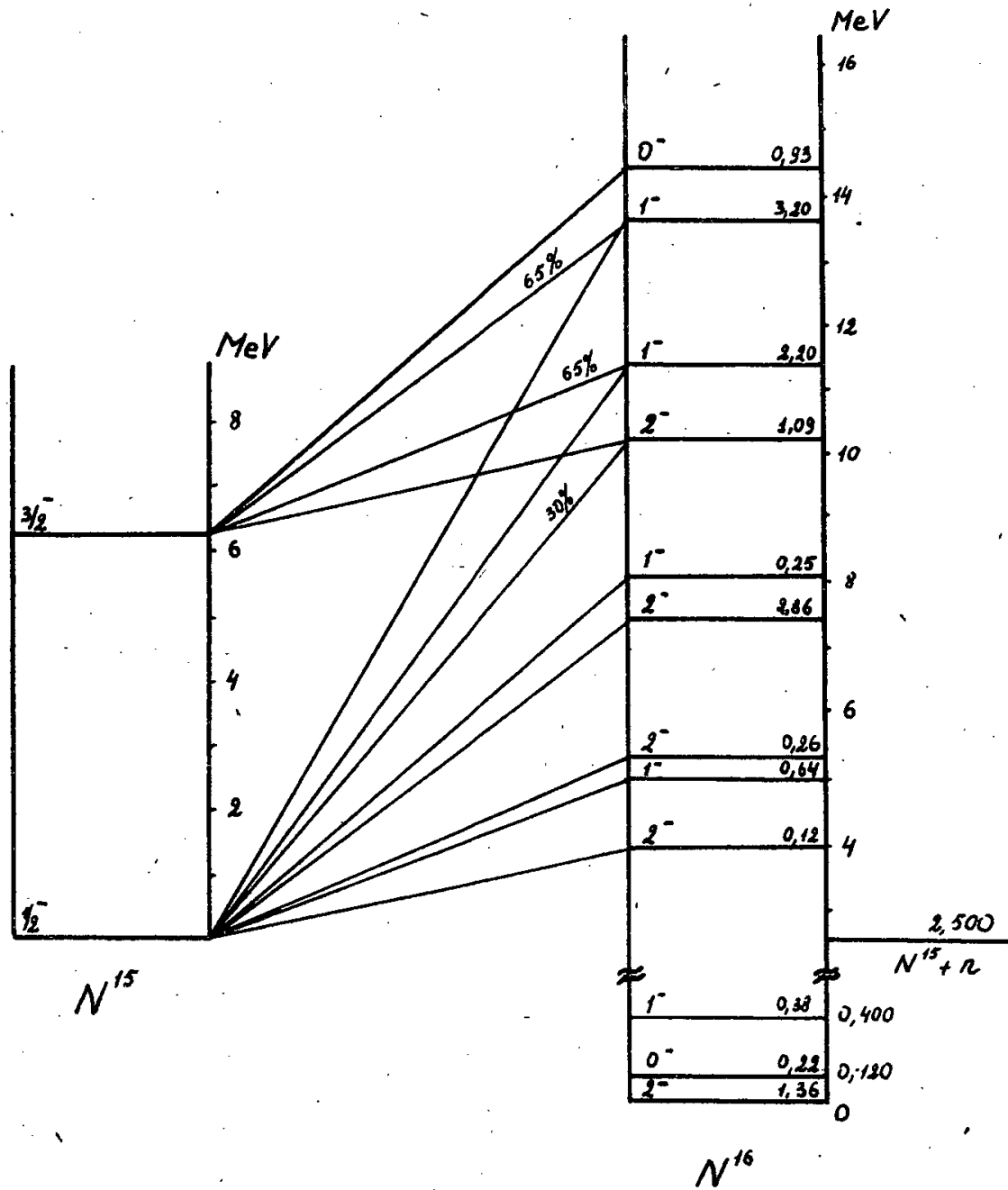


Рис. 1. Схема возбуждения уровней $J=0^-, 1^-, 2^- N^{16}$ при захвате μ^- -мезонов ядром O^{16} и каналы распада на различные уровни ядра N^{15} . Цифры, приведенные возле каждого уровня, - вероятности соответствующих парциальных переходов в единицах 10^4 сек^{-1} .

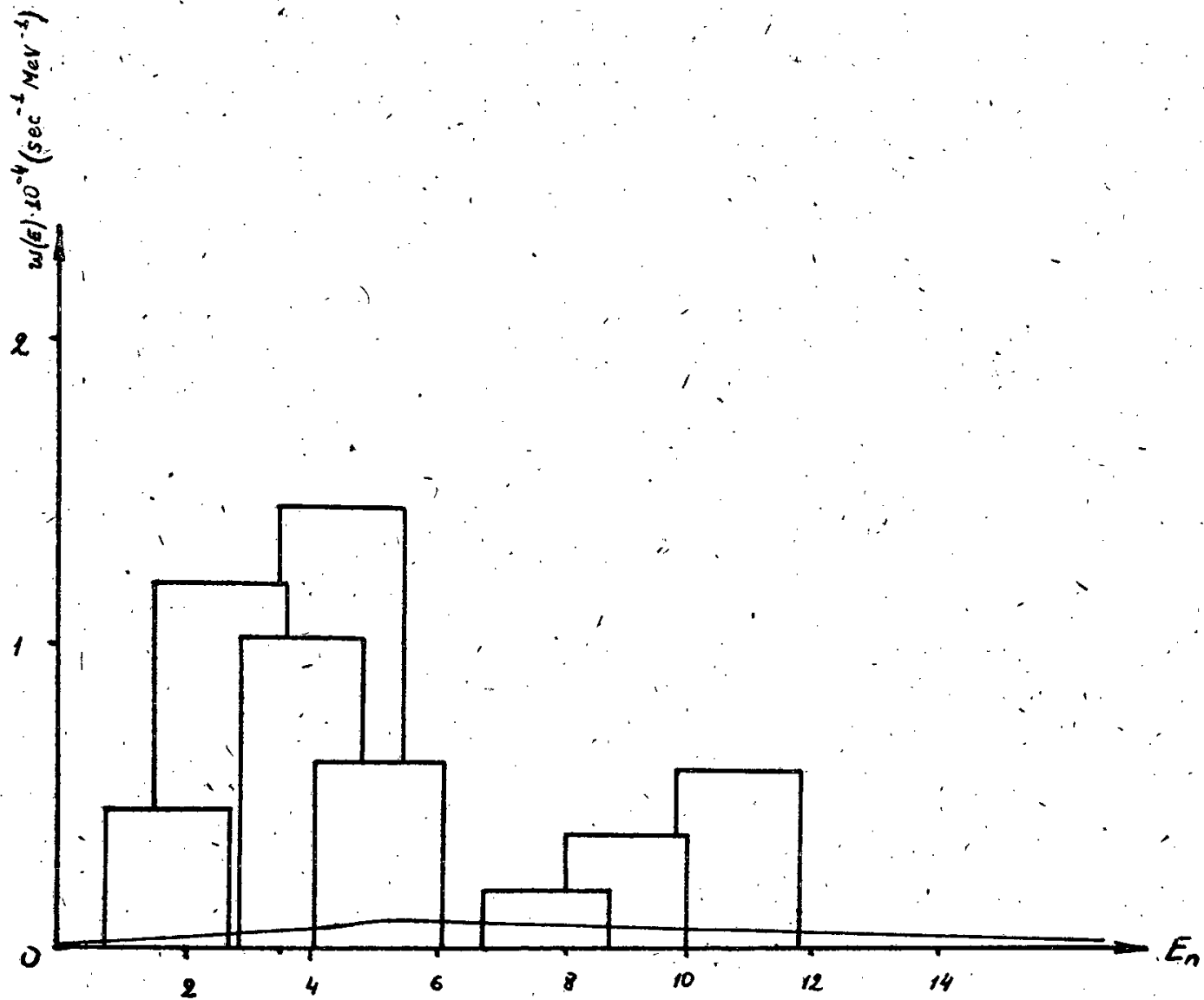


Рис. 2. Полный нейтронный спектр, полученный наложением отдельных нейтронных групп. Сплошной линией показан спектр, рассчитанный в ^{2/2} согласно оптической модели.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3529. / Тираж 415. 0,4 уч.-изд. л.
Техн. ред. Н.Н.Зрелова. Январь 1964 г.

36



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Т. Канарек, А. Филипковский

P-1529

ИЗУЧЕНИЕ ГЕНЕРАЦИИ Σ^0 -ГИПЕРОНОВ
В КСЕНОНОВОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЕ,
ОБЛУЧЕННОЙ π^- -МЕЗОНАМИ
С ИМПУЛЬСОМ 9 БЭВ/С

Дубна 1964

Канарек Т., Филипковский А.

P - 1529

Изучение генерации Σ^0 -гиперонов в ксеноновой пузырьковой камере, облученной π^- -мезонами с импульсом 9 Бэв/с.

В работе была проведена попытка идентификации Σ^0 -гиперонов, образованных во взаимодействии π^- -мезонов с импульсом 9 Бэв/с в ксеноновой пузырьковой камере. Были отобраны γ^0 -события, сопровождаемые конверсией γ -квантов небольших энергий. Распределение эффективных масс системы ($\Lambda^0 \gamma$) имеет размытый максимум в области массы Σ^0 -гиперонов; метод Монте-Карло дает похожие распределения эффективных масс системы ($\Lambda^0 \gamma$), что делает невозможным идентификацию Σ^0 -гиперонов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

Kanarek A., Filipkowski A.

P - 1529

A Study of Σ^0 Hyperon Generation in a Xenone Bubble Chamber Exposed to 9 GeV/c π^- -Mesons

An attempt has been made to identify Σ^0 hyperons produced in the interaction of 9 GeV/c π^- mesons in a xenone bubble chamber. The V^0 events which were accompanied by the conversion of γ quanta of not large energies have been selected. The distribution of the effective masses of the system ($\Lambda^0 \gamma$) has a washed out peak in the range of the Σ^0 hyperon mass; the Monte-Carlo method gives similar distributions of the effective masses of the system ($\Lambda^0 \gamma$) what makes it impossible to identify Σ^0 hyperons.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

Т. Канарек, А. Филипковский

P-1529

ИЗУЧЕНИЕ ГЕНЕРАЦИИ Σ^0 -ГИПЕРОНОВ
В КСЕНОНОВОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЕ,
ОБЛУЧЕННОЙ π^- -МЕЗОНАМИ
С ИМПУЛЬСОМ 9 БЭВ/С

Дубна 1964

В настоящей работе была сделана попытка изучения генерации Σ^0 -гиперонов, образовавшихся в ксеноновой пузырьковой камере при взаимодействии π^- - мезонов с ядрами Le .

Ксеноновая пузырьковая камера является хорошим прибором для регистрации γ -квантов, возникающих от распада $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, поскольку вероятность конверсии фотонов в рабочем объеме камеры составляет в среднем 70% /длина конверсии $t_0 = 3,8$ см/.

Как показано в работе ^{1/}, измерение энергии γ -квантов по суммарному пробегу электронов конверсии может быть проведено в интервале /30-300/ Мэв с точностью $\sim 20\%$. Легко показать, что при разумных предположениях о виде спектра Σ^0 - гиперонов подавляющая часть γ -квантов / $\geq 90\%$ /, возникающих от распадов Σ^0 -частиц, будет обладать энергиями, заключенными в этом интервале.

Для поиска распадов Σ^0 - гиперонов проводился просмотр снимков, полученных на 24-литровой ксеноновой пузырьковой камере ^{2/}, облученной π^- - мезонами с импульсом ~ 9 Бэв/с. Геометрия камеры показана на рис. 1. При просмотре ~ 2400 снимков было найдено 76 взаимодействий, сопровождающихся вылетом V^0 - частицы и по крайней мере одного γ - кванта, для которого все следы электронов конверсий оканчиваются в рабочем объеме камеры. Эффективность просмотра V^0 - событий равна 80%. Кроме того, было обработано 20 V^0 - частиц, найденных в предварительном просмотре ^{х/}.

Измерения событий проводились на микроскопе УИМ-21, а необходимые расчеты - на электронно-вычислительной машине. Все измерения дублировались. Вычисление ошибок величин, необходимых для идентификации Σ^0 - гиперонов, проводилось методом конечных разностей. Приняты следующие значения ошибок измеряемых величин: для координат на пленке $\delta(x) = \delta(y) = 11 \mu$, для углов на пленке $\delta(\theta) = \frac{0.0081}{t}$ рад, где t - длина ячейки. Ошибка в определении направления полета протона и π^- -мезона от распада V^0 , обусловленная многократным рассеянием, вычислялась при значении константы рассеяния

$$K = 1.7 \left[\text{рад} \cdot \text{Мэв} \cdot \text{мм}^{-1/2} \right]^{1/3}$$

х/ Авторы благодарят З. Стругальского, предоставившего им эти материалы.

Для ошибки энергии фотонов принято значение $\delta(E_\gamma) = 0.2E_\gamma$. Угол некомпланарности ϕ определялся как угол между плоскостями распада V^0 и направлением его полета. Показанное на рис. 2 распределение углов некомпланарности всех V^0 дает нам наглядное представление о точности измерения, достигаемой в ксенонной камере. В качестве критерия компланарности было принято условие $\frac{\phi}{\delta(\phi)} < 2$. Энергия протонов и π^- -мезонов определялась из соотношения "пробег-энергия" для ксенона. Для выходящих из камеры частиц оценивалась нижняя граница энергии при предположении, что они останавливаются^{X/}.

События, удовлетворяющие критерию компланарности /89 случаев/, были разделены на три группы:

" Λ^0 ", " $\Lambda^0 K^0$ ", "не Λ^0 ".

Классификация событий проводилась на основе сравнения значений энергий протона и π^- мезона, оцененных по пробегу, со значениями энергии, полученными из углов разлета, при предположении, что произошел распад Λ^0 . Количество случаев в группах оказалось равным 36, 33 и 20, соответственно.

Для отобранных γ -квантов производилось измерение энергии по методике, описанной в работе^{1/}. Их энергетический спектр представлен на рис. 3.

Для всех измеренных V^0 -событий и γ -квантов были вычислены эффективные массы и затем величины Q . При этом предполагалось, что все V^0 -частицы являются Λ^0 -гиперонами, а импульс Λ^0 определяется по углам разлета. На рис. 4 а представлено распределение 142 величин Q для событий из групп " Λ^0 " и " $\Lambda^0 K^0$ ". Такое же распределение для группы "не Λ^0 " и для компланарных случаев показано на рис. 4б. На рисунке 4а пунктирной линией показано распределение величины Q , полученное по методу Монте-Карло. Исходными данными послужили экспериментальные распределения: импульсов Λ^0 частиц из группы " Λ^0 " и " $\Lambda^0 K^0$ ", энергии γ -квантов и углов между направлениями Λ^0 и γ . Разыграно 284 случая. По своей форме все три распределения несущественно отличаются друг от друга.

Таким образом, можно сделать вывод, что идентификация распадов $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ использованным методом при энергии первичных π^- -мезонов 9 Бэв весьма затруднительна. Поэтому даже определение частоты испускания Σ^0 -гиперонов представляется мало реальным и при значительном увеличении статистики.

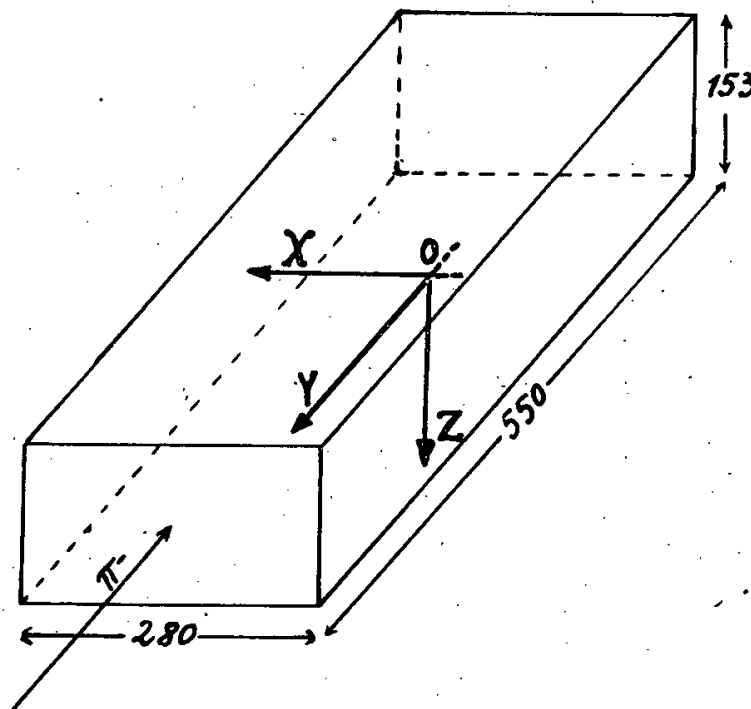
Авторы благодарны З.С. Стругальскому и И.М. Граменицкому за полезные обсуждения и Т.И. Борисовой, М.И. Филипповой, А.Г. Чекменевой за проведение измерений.

^{X/} Следует отметить, что только в ~ 20% случаев обе частицы от распада V^0 останавливались в камере.

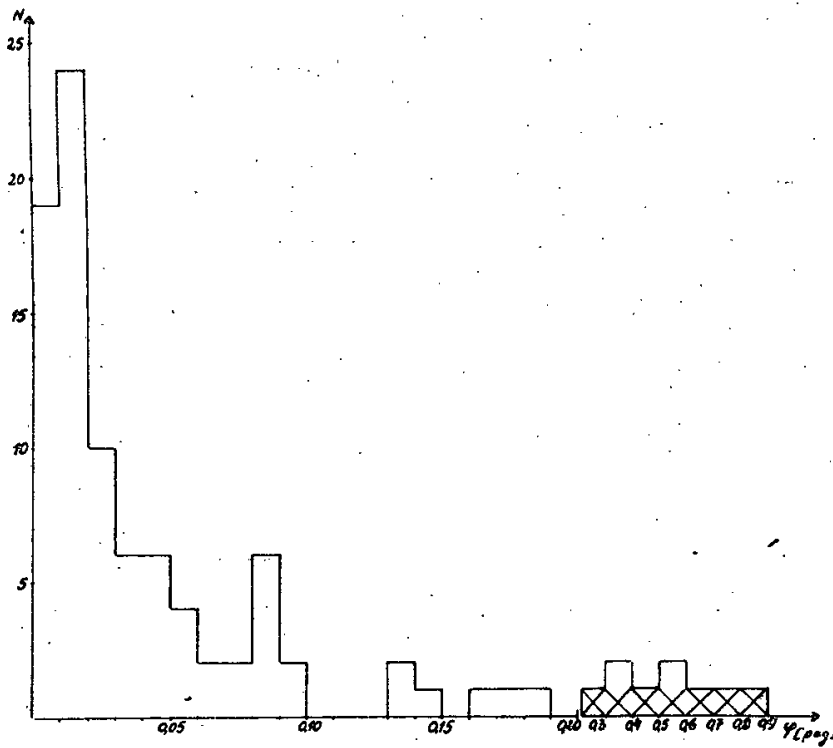
Л и т е р а т у р а

1. Я. Даныш, З. Стругальский, О. Чижевский. Препринт ОИЯИ Р-1144, Дубна, 1962.
2. T.I. Kanarek, E.I. Maltsev, T.Nagy, J. Nagy, A. Prokeš, G.M. Stashkov, E.P. Ustenko, I.V. Chuvilo and U.N. Shkobin; Proc. of the Internal Conf. on High-Energy Acceler. and Instrum., CERN, 1959, p. 508.
3. Д. Пинтер. ПТЭ № 6, 31 /1961/.

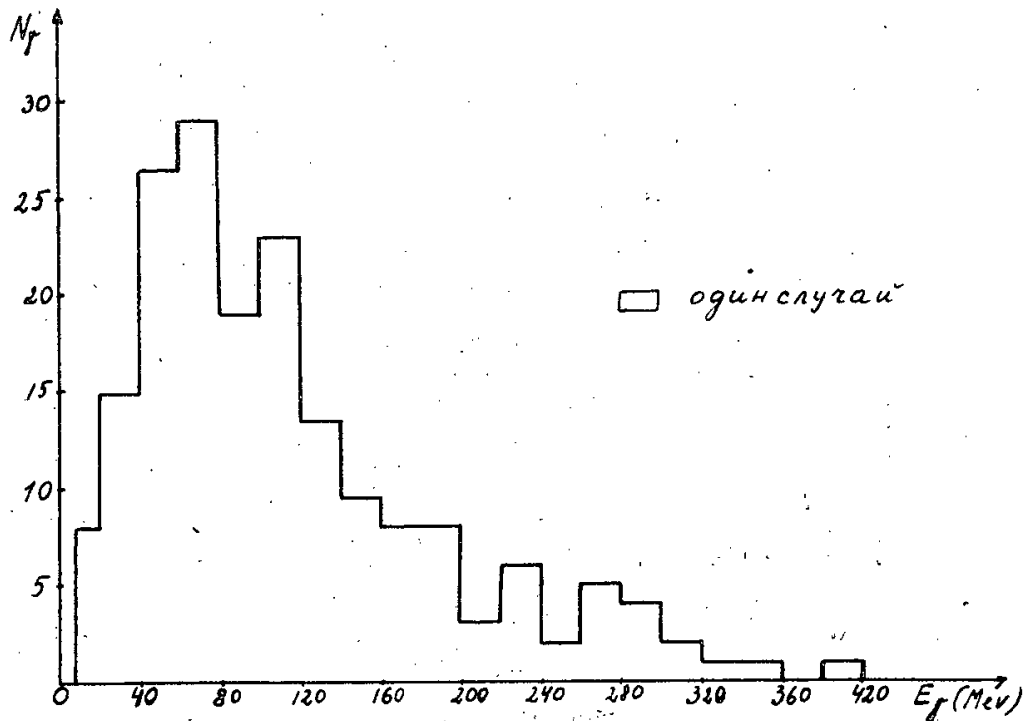
Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1964 г.



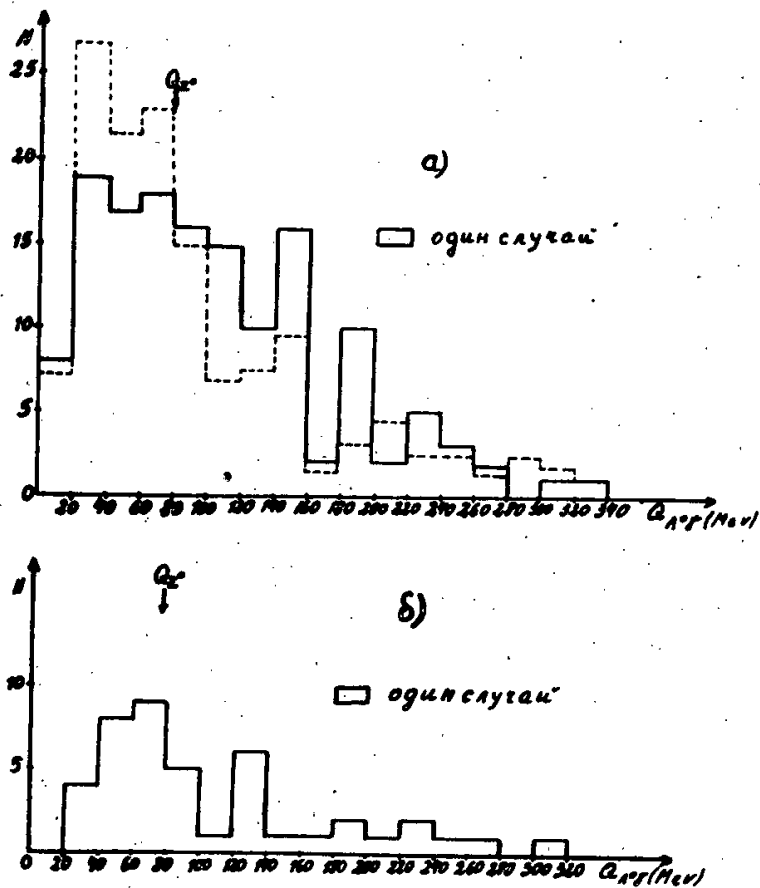
Р и с. 1. Геометрия ксеноновой пузырьковой камеры.



Р и с. 2. Распределение углов некомпланарности.



Р и с. 3. Энергетический спектр γ - квантов.



Р и с. 4. Распределение величины Q для событий ($\Lambda^0 \gamma$):

- а/ из группы " Λ^0 " и " Λ^0 или K^0 " и пунктирная линия - полученные по методу Монте-Карло.
- б/ из группы "не Λ^0 " и некомпланарных случаев.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3552. Тираж 300. Техн. редактор В. Р. Саранцева
0,4 уч.-изд. л. Февраль 1984 год.

37

STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.И. Усюкина

P-1525

АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ
ДЛЯ КОМПТОН-ЭФФЕКТА

Дубна 1964

Усюкина Н.И.

P - 1525

Асимптотика амплитуды рассеяния для комптон-эффекта

Асимптотика амплитуды рассеяния для комптон-эффекта при $t \rightarrow \infty$ получена суммированием определенного класса диаграмм теории возмущений при помощи ренормализационной группы. Вычисления выполнены в пороговой области $s \rightarrow 4m^2$.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Usyukina N.I.

P - 1525

The Asymptotic Behaviour of the Compton Scattering Amplitude.

The asymptotic behaviour of the Compton scattering amplitude at $t \rightarrow \infty$ is obtained by summing a certain class of the perturbation theory diagrams with the help of renormalization group. The calculations were carried out in the threshold region $S \rightarrow 4m^2$.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

Н.И. Усюкина

P-1525

АСИМПТОТИКА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ
ДЛЯ КОМПТОН-ЭФФЕКТА

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

В ^{/1/, /2/} была отмечена достаточная эффективность метода ренормализационной группы для рассмотрения асимптотик амплитуд рассеяния. Что касается квантовой электродинамики, то в ^{/2/} на примере системы электрон-позитрон было показано, что суммирование определенного класса диаграмм теории возмущений, улучшенное при помощи ренормализационной группы, в пределе больших энергий ведет к "реджевскому" поведению амплитуды рассеяния в перекрестном канале.

В настоящей работе с целью получения асимптотики при больших энергиях с той же точки зрения рассматривается другой пример квантовой электродинамики - комптон-эффект. Асимптотика рассматривается в пороговой области для позитрония $s \rightarrow 4m^2$, чтобы проверить соответствие значений энергетических уровней, полученных из выражения для показателя Редже, и значений энергетических уровней позитрония, вычисленных обычным образом.

Метод ренормализационной группы для нахождения асимптотики применяется не к инвариантным амплитудам, выбор которых произволен, а к физическим амплитудам рассеяния в синглетном и триплетном состояниях.

Проведем поэтому сначала разложение амплитуды рассеяния в низших порядках теории возмущений на инвариантные амплитуды, выделим амплитуды, соответствующие рассеянию в s канале в синглетном и триплетном состояниях, а затем применим метод суммирования при помощи ренормализационной группы.

Запишем матрицу рассеяния следующим известным образом:

$$S = 1 - i(2\pi)^{-2} \delta^4(q_1 + p_1 - q_2 - p_2) \frac{1}{\sqrt{4q_1^0 q_2^0}} F. \quad (1)$$

Так как F билинейна по векторам поляризации, то, например, для t канала

$$\langle \gamma_2 N_2 | F | \gamma_1 N_1 \rangle = \sum_{\mu, \nu} \epsilon_{2\nu} \bar{u}(p_2) F_{\mu\nu} u(p_1) \epsilon_{1\mu}. \quad (2)$$

Применение общих принципов инвариантности приводит к разложению $F_{\mu\nu}$ на систему 6 линейно-независимых амплитуд ^{/4/}:

$$F_{\mu\nu} = \sum_I A_I I_{\mu\nu}. \quad (3)$$

Нормировка выполнена таким образом, чтобы в инвариантных амплитудах отсутствовали кинематические особенности.

Соответствующими простыми вычислениями можно выделить инвариантные амплитуды A_i в матричных элементах 2-го и 4-го порядков.

Во втором порядке вклад в амплитуду рассеяния дают диаграммы рис. 1, для которых:

$$F_{\mu\nu}^{(2)} = e^2 \gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 + \hat{q}_1 + m}{t - m^2} \gamma_\nu + e^2 \gamma_\mu \frac{\hat{p}_1 - \hat{q}_2 + m}{u - m^2} \gamma_\nu. \quad (4)$$

Для инвариантных амплитуд получаем следующее выражение:

$$A_i = R_i e^2 \left\{ \frac{1}{t - m^2} + \frac{\eta_i}{u - m^2} \right\},$$

$$\eta_i = \begin{cases} +1 & \text{для } i = 1, 2, 3, 6 \\ -1 & \text{для } i = 4, 5 \end{cases}, \quad (5)$$

$$R_1 = 2m, \quad R_4 = -i,$$

$$R_2 = 0, \quad R_5 = i,$$

$$R_3 = +m, \quad R_6 = -i.$$

В 4-ом порядке существенны диаграммы рис. 2. Остальные диаграммы 4-го порядка дают вклады, не зависящие от s , и потому они, как будет видно ниже, несущественны в пороговой области.

Для диаграммы 4-го порядка 2а имеем:

$$F_{\mu\nu}^{(4)} = \frac{e^4}{(2\pi)^4 i} \sum_n g^{nn} \int d^4 k \gamma_n (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 + \hat{q}_1 - \hat{k} + m) \times \quad (6)$$

$$\times \gamma_\nu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \gamma_n \Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k),$$

(16a)

$$\Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k) = \frac{1}{(k^2 - \lambda^2) [(p_1 - k)^2 + m^2] [(p_2 - k)^2 - m^2] [(p_1 + q_1 - k)^2 - m^2]}$$

При проектировании на инвариантные амплитуды необходимо будет вычислить следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k \Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k), \\
 I_\alpha &= \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k k_\alpha \Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k), \\
 I_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k k_\alpha k_\beta \Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k), \\
 I_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{\pi^2 i} \int d^4 k k_\alpha k_\beta k_\gamma \Phi(p_1, p_2, p_1 + q_1, k).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

В асимптотической области $t \rightarrow \infty$ имеем:

$$I_0 = -2 \frac{\ln t}{t} f(s), \tag{8}$$

где

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds'}{4m^2(s'-s)\sqrt{s'(s'-4m^2)}} \tag{9}$$

$$s < 4m^2, \quad 4m^2 - s \ll m^2, \tag{10}$$

$$f(s) = \frac{\pi}{\sqrt{s(4m^2 - s)}}$$

Из (10) видно, что члены, пропорциональные I_0 , имеют особенность в пороговой области $s \rightarrow 4m^2$, а из этого следует, что вклады от диаграмм, не зависящих от s , в пороговой области несущественны.

Учет главных членов в пороговой области дает для $I_\alpha, I_{\alpha\beta}, I_{\alpha\beta\gamma}$

$$I_\alpha = I_0 P_\alpha, \quad I_{\alpha\beta} = I_0 P_\alpha P_\beta, \quad I_{\alpha\beta\gamma} = I_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma, \tag{11}$$

где

$$P_\alpha = \frac{P_{1\alpha} + P_{2\alpha}}{2}$$

В результате для главных членов инвариантных амплитуд при $t \rightarrow \infty$ в пороговой области получаем следующие выражения:

$$A_1^{a(4)} = 0, \quad A_4^{a(4)} = -\frac{4im^2 e^4}{16\pi^2} I_0,$$

$$A_2^{a(4)} = 0, \quad A_5^{a(4)} = \frac{2im^2 e^4}{16\pi^2} I_0, \quad (12)$$

$$A_3^{a(4)} = -\frac{e^4}{16\pi^2} smI_0, \quad A_6^{a(4)} = 0.$$

Получим теперь матричные элементы, соответствующие физическим синглетному и триплетному состояниям в s канале.

Как известно^{/5/}, возможны следующие состояния системы электрон-позитрон с определенной четностью и моментом:

$$|j \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle - |j - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle, \quad p = (-1)^{j+1}, \quad s = 0$$

$$|j \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle - |j - \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, \quad p = (-1)^{j+1}, \quad s = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} |j \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + |j - \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \\ |j \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + |j - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle \end{array} \right\} p = (-1)^j, \quad s = 1 \quad (13)$$

и, соответственно, состояния системы $u\bar{u}$:

$$|j 1 1\rangle + |j - 1 - 1\rangle, \quad p = (-1)^j,$$

$$|j 1 1\rangle - |j - 1 - 1\rangle, \quad p = (-1)^{j+1},$$

$$|j 1 - 1\rangle - |j - 1 1\rangle, \quad p = (-1)^{j+1},$$

$$|j 1 - 1\rangle + |j - 1 1\rangle, \quad p = (-1)^j.$$

В силу сохранения четности между этими состояниями возможны переходы, соответствующие следующим спиральным амплитудам^{/5/}:

синглетная амплитуда:

$$\phi_{00+}^I - \phi_{00-}^I, \quad (14a)$$

триплетные амплитуды:

$$\phi_{12}^J - \phi_{1-2}^J, \quad \phi_{10}^J, \quad \phi_{00+}^J + \phi_{00-}^J, \quad \phi_{02}^J, \quad \phi_{12}^J + \phi_{1-2}^J. \quad (14b)$$

Введем далее систему 6 независимых спиральных амплитуд и, записав явный вид представления, включая спиноры, сведем эти спиральные амплитуды к инвариантным^{/4/}.

Из этих формул и из (14a) видно, что в матричный элемент перехода в синглет-

ном состоянии при данном выборе структур дает вклад только инвариантная амплитуда A_s .

Таким образом, для матричного элемента перехода в синглетном состоянии получена следующая асимптотика в пороговом приближении:

$$M^0 = + \frac{e^2 m}{t} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} m^2 \ln t f(s) + \dots \right\} + \frac{e^2 m}{u} \eta_1 \left\{ 1 + \frac{e^2}{2\pi^2} m^2 f(s) \ln u \right\}. \quad (15)$$

Суммируя этот ряд при помощи ренормализационной группы, получаем "реджевскую" асимптотику:

$$M^0 = + e^2 m t^{-1 + \frac{e^2 m^2 f(s)}{2\pi^2}} + \eta_1 e^2 m u^{-1 + \frac{e^2 m^2 f(s)}{2\pi^2}} \quad (16)$$

и уравнение для определения связанных состояний в области $0 < 4m^2 - s \ll 4m^2$:

$$\ell = -1 + \frac{e^2}{2\pi} m^2 \frac{1}{\sqrt{s(4m^2 - s)}}, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (17)$$

которое в нерелятивистском приближении ($m \rightarrow \infty$) переходит в уравнение кулоновских уровней системы электрон-позитрон с радиальным квантовым числом 0.

$$\ell = -1 + a \sqrt{\frac{\pi}{-2E}} \quad (18)$$

Итак, как и в статье ^{1/2/}, амплитуда рассеяния в синглетном состоянии в пороговой области в s канале имеет "реджевскую" асимптотику по t , которая дает возможность определять энергетические уровни.

Как видно, в пороговой области разложение ряда теории возмущений проводится по $\frac{a}{\sqrt{-2E}}$, что в данном приближении соответствует получению энергетических уровней вплоть до e^2 . В этом порядке спиновые эффекты не дают вклада в энергию, и потому в пороговой области можно было бы надеяться получить для триплетных состояний выражения с той же асимптотикой, что и для синглетного состояния. Однако эта надежда, как следует из (5), (12), (156) и из вышеупомянутых формул ^{1/4/}, для триплетного состояния не оправдывается, по крайней мере, при рассмотренном способе суммирования ряда.

Я выражаю благодарность Соловьеву Л.Д. за полезные дискуссии и постоянное внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Б.А. Арбузов, Л.А.А. Логунов, А.Н. Тавхелидзе, Р.Н. Фаустов. Phys. Lett, 2, 150 (1962).
2. А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, А.Н. Тавхелидзе, О.А. Хрусталева. Nucl. Phys., 44, 275 (1963).

3. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталеv. Препринт ОИЯИ Е-1194, Дубна, 1963.
4. А.С.Неарн, Е.Лидер. Phys. Rev., 126, 789 (1962).
5. М.Джаков, Г.С.Вик, Ann. of Phys., 7, 404 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1964 г.

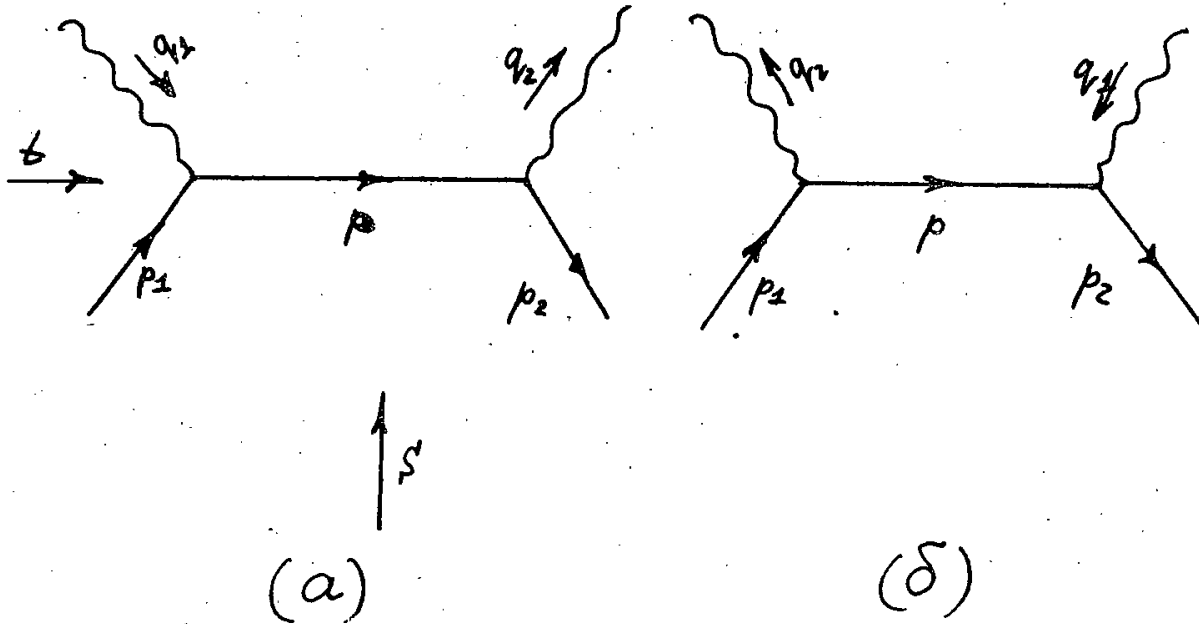


Рис. 1.

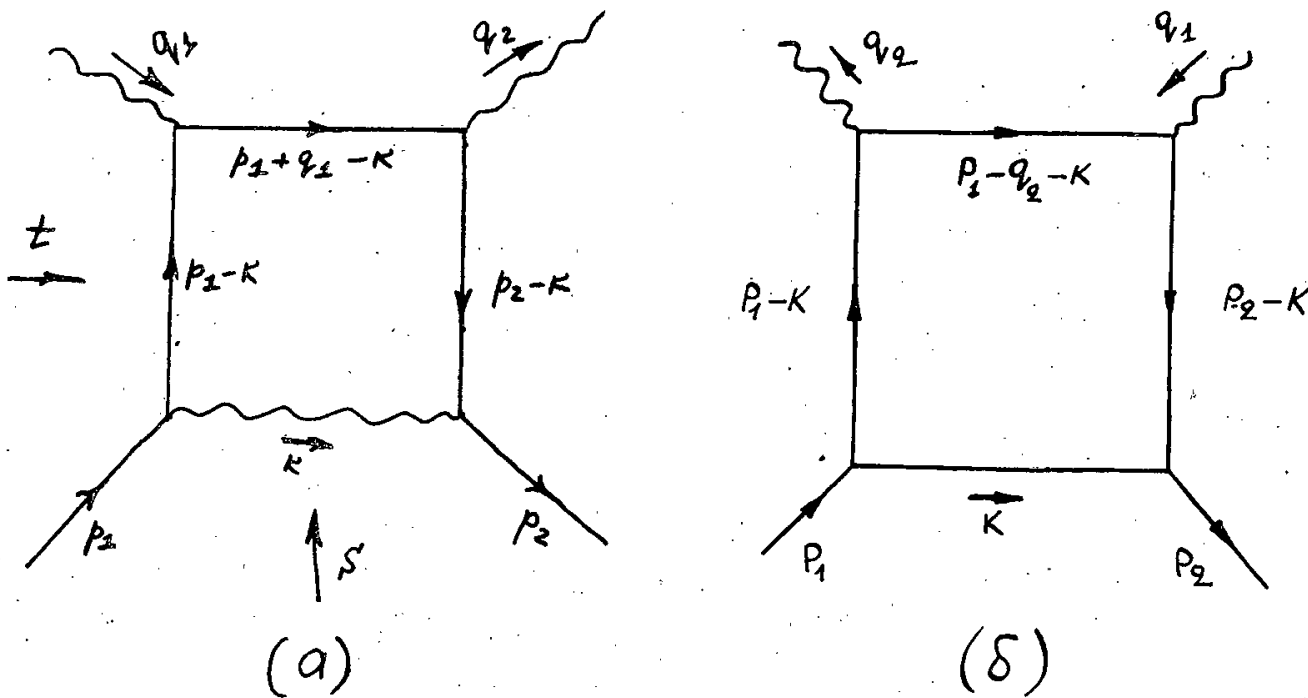


Рис. 2.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3569. . . . Тираж 400. 0.5 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. Февраль 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

В.А. Фомичев, Б.А. Гвоздев, В.В. Бредель

P-1521

ОТНОШЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ОБРАЗОВАНИЯ
ИЗОМЕРНОЙ ПАРЫ $Sc^{44, 44m}$
В РЕАКЦИЯХ ПРЯМОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
С ТЯЖЕЛЫМИ ИОНАМИ

Дубна 1964

P-1521

Фомичев В.А., Гвоздев Б.А., Бредель В.В.

Отношение сечений образования изомерной пары $Sc^{44,44m}$
в реакциях прямого взаимодействия с тяжелыми ионами

Определено изомерное отношение Sc^{44} / Sc^{44m} в реакциях срыва
нейтрона при облучении скандия ионами O^{16} и Ne^{22} . Оно состав-
ляет ~ 1 и не зависит от энергии.

Показано, что изомерное отношение при многонуклонной
передаче ($3pn$) в реакции $Al^{27} + Ar^{40} \rightarrow Sc^{44,44m}$ достигает
величин $\sim 6,5$, то есть больше, чем при реакциях полного слияния
ядер.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна, 1964.

P-1521

Fomichev V.A., Gvozdev B.A., Bredel V.V.

Ratio of Cross Sections for Production of an
Isomer Pair in Reactions of Direct Interaction with
Heavy Ions.

The isomer ratio Sc^{44} / Sc^{44m} in the neutron stripping₂₂
reactions when scandium is bombarded with O^{16} and Ne
ions has been measured. It constitutes ~ 1 and is energy
independent.

It is shown that the isomer ratio in the multi-nucleon
transfer ($3pn$) in the reaction $Al^{27} + Ar^{40} \rightarrow Sc^{44,44m}$
amounts to ≈ 6.5 , i.e., is greater than in the reactions of
a complete nuclear fusion.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1964.

В.А. Фомичев, Б.А. Гвоздев, В.В. Бредель

P-1521

ОТНОШЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ОБРАЗОВАНИЯ
ИЗОМЕРНОЙ ПАРЫ $Sc^{44, 44m}$
В РЕАКЦИЯХ ПРЯМОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
С ТЯЖЕЛЫМИ ИОНАМИ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

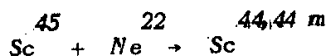
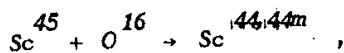
1. Введение

Одним из методов изучения влияния углового момента, вносимого в ядро в реакциях с тяжелыми ионами, на механизм этих реакций является исследование энергетической зависимости отношения сечений образования изомерной пары с большой разностью спинов. В предыдущей работе ^{/1/} изучалась энергетическая зависимость сечений образования $Sc^{44,44m}$ в реакциях с тяжелыми ионами, идущих через образование составного ядра. Опыты показали, что полное слияние ядер происходит только в том случае, когда вносимый угловой момент меньше некоторого критического углового момента $J_{крит}$. При касательных соударениях, когда $J > J_{крит}$, центробежные силы и кулоновское отталкивание препятствуют полному слиянию ядер, и в этом случае осуществляются реакции с передачей некоторого числа нуклонов между налетающим ионом и ядром-мишенью. Осуществление такого механизма ядерной реакции с тяжелыми ионами подтверждается и недавними теоретическими расчетами ^{/2,3/}.

В данной работе исследовалась энергетическая зависимость сечений образования изомерной пары $Sc^{44,44m}$ в реакциях с тяжелыми ионами, когда не происходит полного слияния ядер.

2. Методика эксперимента

Изомерная пара $Sc^{44,44m}$ получалась в реакциях передачи одного нейтрона:



а также в реакции многонуклонной передачи $Al^{27} + Ar^{40} \rightarrow Sc^{44,44m}$.

В опытах с кислородом облучалась стопка из 6 алюминиевых фольг толщиной 6-8 мк, на которые наносился слой окиси скандия ($1,1-1,5 \text{ мг/см}^2$). В опытах с неонам слой окиси скандия ($2,0-2,8 \text{ мг/см}^2$) наносился на никелевые фольги толщиной 2-2,5 мк. Предварительно было выяснено, что при взаимодействии неона с никелем скандия в заметных количествах не образуется. В качестве мишеней при облучении аргоном служили стопки алюминиевых фольг толщиной 3-8 мк.

Облучение производилось на внутреннем пучке циклотрона У-300 Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ. Энергия ионов измерялась по поглощению в алюминии и в некоторых случаях с помощью полупроводниковых детекторов ^{/4/}.

После облучения производилось химическое выделение скандия. Мишени растворялись в смеси соляной и азотной кислот в присутствии носителей элементов, образующихся в результате ядерных реакций. При растворении алюминиевых мишеней, облученных ионами аргона, добавлялось также определенное количество скандия. Затем производилось осаждение гидроокисей едкой щелочью (для отделения от алюминия) или аммиаком (для отделения от никеля). Повторное осаждение гидроокисей производилось пиридином. Путем обработки осадка карбонатом аммония скандий переводился в раствор и выделялся в виде фосфата. Выход скандия определялся по весу.

Гамма-излучение образцов измерялось на сцинтилляционном спектрометре со стокальным анализатором АИ-100. Запись спектра производилась на ленту самописца. Площадь пиков γ -линий измерялась планиметром.

Наряду со Sc^{44} наблюдались и другие изотопы скандия: Sc^{43} $E_{\gamma} = 511$ кэв, $T = 3,9$ час, Sc^{46} $E_{\gamma} = 1120$ кэв, $T = 84,1$ дня, Sc^{47} $E_{\gamma} = 180$ кэв, $T = 3,4$ дня. Переход Sc^{44m} в основное состояние происходит с $E_{\gamma} = 270$ кэв, $T = 59$ час, а Sc^{44} в основном распадается с $E_{\gamma} = 1160$ кэв, $T = 3,9$ час^{15/}.

Экспериментальные данные по изменению интенсивности γ -линий анализировались на электронно-счетной машине по методу наименьших квадратов в соответствии с зависимостью:

$$J = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} + A_3 e^{-\lambda_3 t} \quad \text{для } E_{\gamma} = 1160 \text{ кэв,}$$
$$J = A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t} \quad \text{для } E_{\gamma} = 511 \text{ кэв,}$$

где: $\lambda_1 = 0,01175$ 1/час - вероятность распада Sc^{44m} , $\lambda_2 = 0,178$ 1/час - вероятность распада Sc^{44} и Sc^{43} , $\lambda_3 = 0,000343$ 2/час - вероятность распада Sc^{46} (γ -линии 1160 кэв и 1120 кэв на спектрометре не разрешались), t - время после конца облучения.

Изотмерное отношение, а также относительное сечение образования изотопов Sc^{43} , Sc^{44} и Sc^{44m} определялось, как в работе^{11/}, а Sc^{46} и Sc^{47} - по соответствующим γ -пикам с учетом эффективности γ -спектрометра.

Опыт по снятию углового распределения скандия - 44 и - $44m$ в реакции $Al^{27} + Ar^{40} \rightarrow Sc^{44,44m}$ производился на специальной приставке к пробнику. Расстояние от мишени (Al $0,8$ мг/см²) до сборника составило 80 мм.

3. Результаты и обсуждения

а) реакции передачи одного нейтрона

Зависимость изотмерного отношения $Sc^{44,44m}$ от энергии налетающих ионов в реакциях $Sc^{45} + O^{16}$ и $Sc^{45} + Ne^{22}$ представлена на рис. 1 и 2, а зависимость относи-

тельного сечения образования изотопов скандия с массовыми числами 43, 44, 44m, 46 и 47, получаемых в реакции $Sc^{45} + Ne^{22}$, - на рис. 3. Обращает на себя внимание, что изомерное отношение при вырывании одного нейтрона из Sc^{45} не зависит от энергии налетающих ионов и равно ~ 1 , причем для ионов Ne^{22} оно несколько больше, чем для ионов O^{16} .

Такое значение величины изомерного отношения, по-видимому, свидетельствует о том, что в реакции передачи одного нейтрона возбуждаются состояния с небольшим спином. Рассчитать среднюю величину спина этих возбуждений с применением метода каскадной статистики ^{16/} не представляется возможным, поскольку число переходов мало, а спины уровней ядер Sc^{44} , лежащих над изомерным состоянием, неизвестны.

б) реакции многонуклонной передачи

Реакция многонуклонной передачи с образованием $Sc^{44,44m}$ осуществлялась путем облучения стопки алюминиевых фольг ионами Ar^{40} с энергией 270 Мэв. Подхватывая из ядер Al^{27} три протона и один нейтрон, аргон превращался в скандий. Относительный выход изотопов скандия с массовыми числами 43, 44, 44m, 46 и 47 на различной глубине стопки фольг показан на рис. 4.

Чтобы проверить, не является ли наличие скандия в первых фольгах стопки результатом того, что в пучке ионов аргона имеется низкоэнергетическая составляющая, был проделан фоновый опыт. Стопка из 11 алюминиевых фольг толщиной по 8,5 мк облучалась пучком аргона с энергией 256 Мэв. Исследовалось распределение γ -активности с энергией 1300 кэв по глубине стопки. Указанная активность распадалась с периодами $T = 14,9$ час, что соответствовало образованию Na^{24} , и $T = 1,82$ час, что соответствовало образованию Ar^{41} x). Кривые распределения активности приведены на рис. 5. На том же рисунке указан пробег ионов Ar^{40} с энергией 256 \pm 10 Мэв. Распределение активности Ar^{41} показывает, что в пучке ионов аргона не имелось низкоэнергетической составляющей со сколько-нибудь значительной интенсивностью.

Интересно распределение ядер Na^{24} . Эти ядра образуются как за счет срыва двух протонов и одного нейтрона с ядер Al^{27} (ядра с меньшим пробегом), так и за счет срыва 7 протонов и 9 нейтронов с ионов Ar^{40} (ядра с большим пробегом).

Распределение изомерного отношения Sc^{44m} / Sc^{44} по стопке алюминиевых фольг при облучении аргоном с энергией 270 Мэв показано на рис. 6. Обращает на себя внимание большое значение изомерного отношения, достигающее величины $\sim 6,5$. В работе ^{11/} нами было показано, что в реакциях полного слияния ядер максимальное значение изомерного отношения Sc^{44m} / Sc^{44} равно ~ 5 .

x) Кроме того, присутствовала неидентифицированная активность с периодом $T = 11$ дней.

С помощью каскадной статистики можно показать, что в реакциях многонуклонной передачи изомерное отношение может быть больше, чем в реакциях полного слияния, хотя в первом случае ядру скандия передается меньший угловой момент. В реакциях полного слияния образуются ядра скандия со спинами от 0 до некоторого значения J , где $J \leq J_{\text{крит}}$. При расчете изомерного отношения по каскадной статистике необходимо произвести усреднение по каскадам γ -лучей, испускаемых ядрами с исходными спинами от 0 до J . При этом необходимо учитывать относительную вероятность, с которой в реакции образуются ядра с данным угловым моментом ^{/см.1/}. За счет вклада каскадов с малым исходным спином усредненное изомерное отношение в реакциях полного слияния получается относительно небольшим.

В случае реакции многонуклонной передачи возможны только краевые соударения. Поэтому при расчете изомерного отношения необходимо учитывать только каскады с исходными спинами, соответствующие краевым соударениям. Изомерное отношение может быть в этом случае сравнительно большим даже при небольшой величине углового момента.

Для оценки величины изомерного отношения в случае реакции $Al^{27} + Ar^{40} \rightarrow Sc^{44,44m}$ при энергии ионов аргона 270 Мэв рассмотрим покоящееся ядро Ar^{40} , в край которого ударяются три протона и один нейтрон с энергией $E_{\text{лаб.}} = 27$ Мэв. В составное ядро Sc^{44} при этом будет внесен угловой момент 10. По γ -каскаду с исходным спином $J = 10 \hbar$ при среднем числе γ -переходов $N_{\gamma} = J + 3 = 13$ получаем для изомерной пары скандия $\sigma_{\text{и}}/\sigma_0 = 7,3$ (параметр обрезания по спинам σ взят равным 4). В расчетах учитывались новые значения спинов (2 для основного состояния и 6 - для изомерного), полученные в работе ^{/7/}.

Согласно приведенной трактовке, максимуму кривой изомерного отношения при $d = 9,5$ мг/см² Al на рис. 6 должны соответствовать реакции передачи трех протонов и одного нейтрона, происходящие в первой фольге стопки. Когда реакции указанного типа происходят на большей глубине стопки алюминиевых фольг, сумма пробега аргона до реакции и скандия после реакции больше $9,5$ мг/см² Al . Изомерное отношение при этом меньше чем в максимуме из-за уменьшения энергии ионов аргона. Это качественно может объяснить спад кривой изомерного отношения на большей глубине стопки фольг.

Спад кривой изомерного отношения в сторону меньших толщин стопки фольг можно попытаться объяснить тем, что осуществляются реакции и между Ar^{40} и Al^{27} с меньшим параметром соударения, чем в рассмотренном ранее случае. При этом аргон может захватить у алюминия более трех протонов и одного нейтрона и затем испарить излишек нуклонов. Ионы аргона теряют тогда больше энергии, чем в случае отрыва четырех нуклонов, и их пробег в Al окажется меньшим. Кроме того, разброс

пробегов образовавшихся таким образом ядер скандия будет увеличен за счет испарения нуклонов. Все это приводит к тому, что значительное количество ядер скандия остается в первых фольгах стопки.

Приведенное качественное объяснение согласуется также с угловым распределением изомерного отношения, показанным на рис. 7. Ионы Ar^{40} , подхватывающие три протона и один нейтрон, взаимодействуют сравнительно слабо с ядрами Al^{27} и летят преимущественно вперед. Этому типу реакций соответствуют большие значения изомерного отношения. Поэтому изомерное отношение под малым углом велико. При более тесном взаимодействии отклонение ядер скандия от направления движения ионов аргона может быть большим, а изомерное отношение - меньшим.

Авторы выражают глубокую благодарность Г.Н. Флерову, С.М. Поликанову и Е.Д. Донцу за обсуждение работы, А.Н. Филипсону и членам руководимой им группы за обеспечение надежной работы циклотрона во время облучений.

Л и т е р а т у р а

1. В.В. Бредель, Б.А. Гвоздев, В.А. Фомичев. ЖЭТФ, 45, 904 (1963).
2. Б.Н. Калинин, И.Ж. Петков. Препринт ОИЯИ Р-1347, Дубна, 1963.
3. S.Cohen, F.Plasil, W.J.Swiatecki. Preprint UCKL-10775, Berkeley, 1963.
4. Х. Кекк, В.Л. Михеев, А.А. Плева, Б.В. Фефилов. ПТЭ, № 4, 27, 1963.
5. Б.С. Джелепов, Л.К. Пеккер. Схемы распада радиоактивных ядер, стр. 91. Изд. АН СССР, М.-Л., 1958.
6. J.R.Huizenga, R.Vandenbosh. Phys. Rev., 120, 1305 (1960).
R.Wandenbosh, J.R.Huizenga. Phys. Rev., 120, 1313 (1960).
7. D.L.Harris, J.D.Cullen. Phys. Rev., 120, 1313 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 января 1964 г.

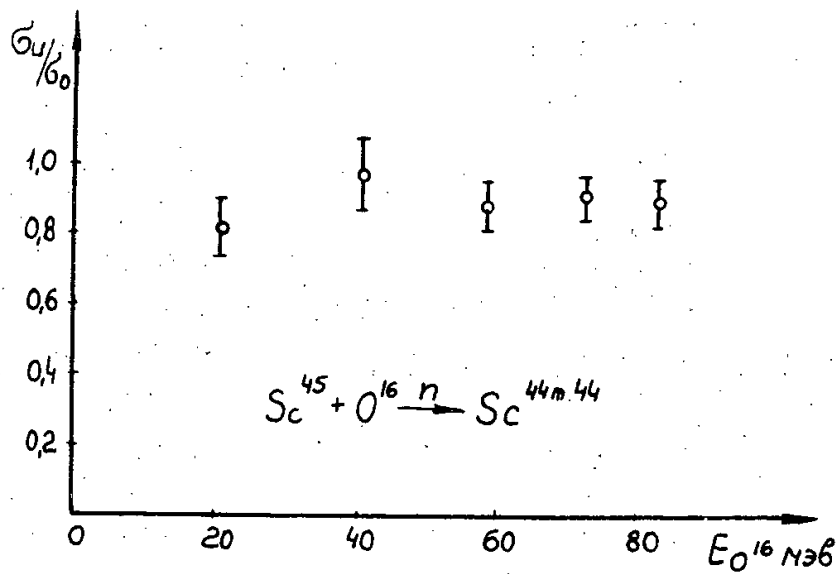


Рис. 1. Энергетическая зависимость изомерного отношения Sc^{44m}/Sc^{44} в реакции с ионами O^{16} .

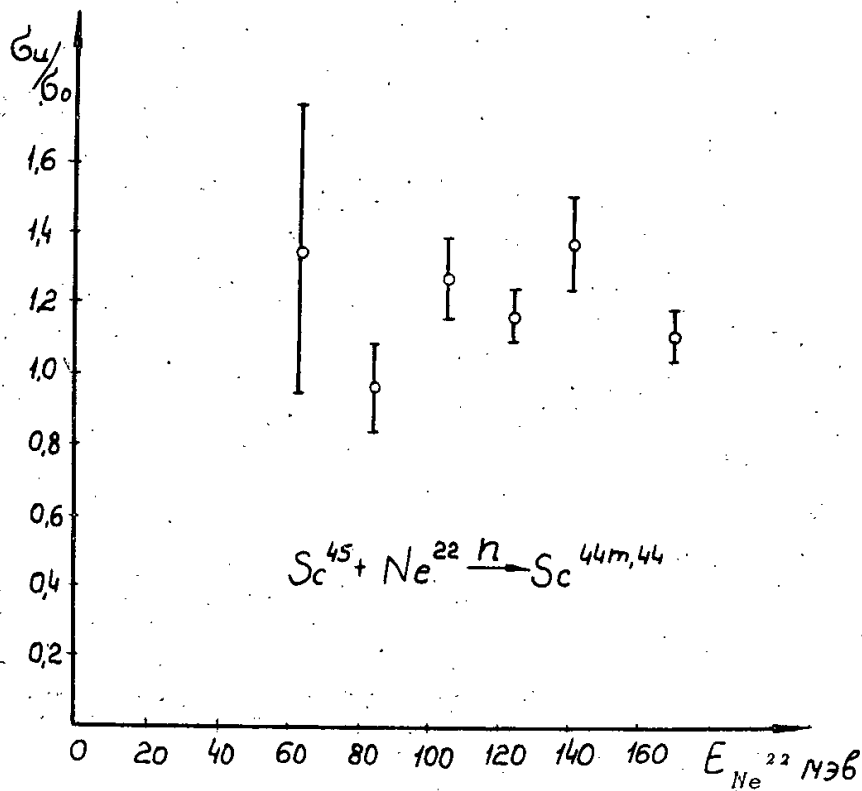


Рис. 2. Энергетическая зависимость изомерного отношения Sc^{44m}/Sc^{44} в реакции с ионами Ne^{22} .

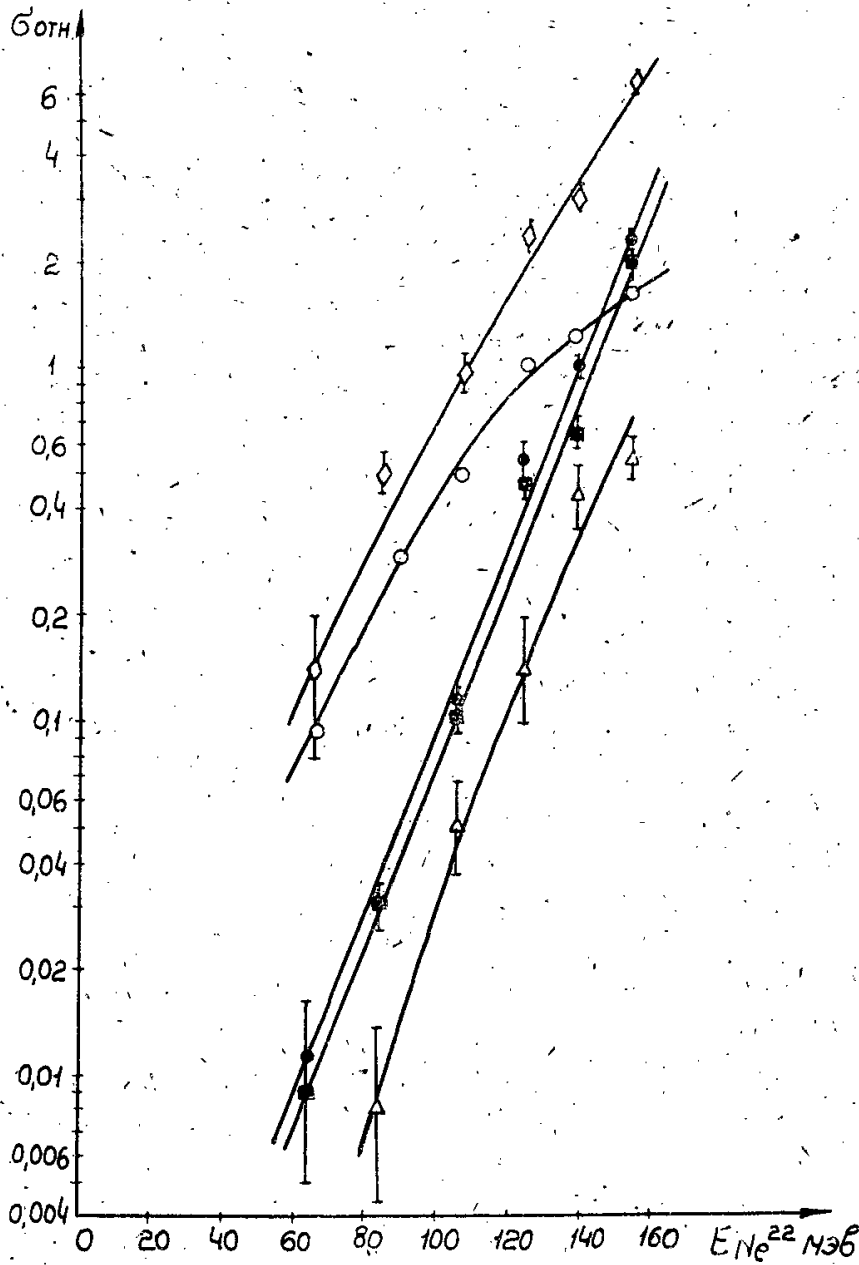


Рис. 3. Зависимость от энергии относительного сечения образования изотопов скандия в реакциях передачи нейтронов при облучении Sc^{45} ионами Ne^{22} .

● - $Sc^{44m} (-n)$, ■ - $Sc^{44} (-n)$,
△ - $Sc^{43} (-2n)$, ◇ - $Sc^{46} (+n)$, ○ - $Sc^{47} (+2n)$.

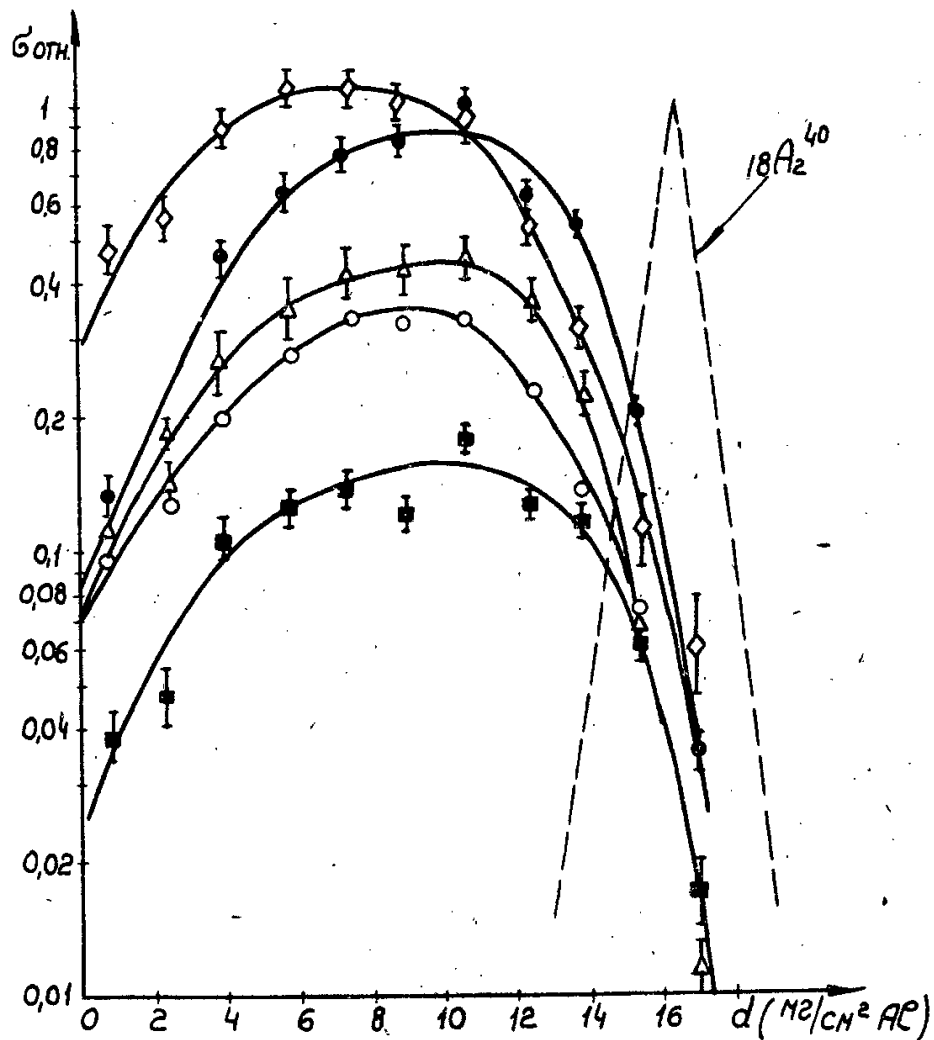


Рис. 4. Относительный выход изотопов скандия в реакции $Al^{27} + Ar^{40}$ на различной глубине стожки алюминиевых фольг:
 ● - Sc^{44m} (+3p), ■ - Sc⁴⁴ (+3pn),
 ▲ - Sc⁴³ (+3p), ◇ - Sc⁴⁶ (+3p,3n), ○ - Sc⁴⁷ (+3p,4n).

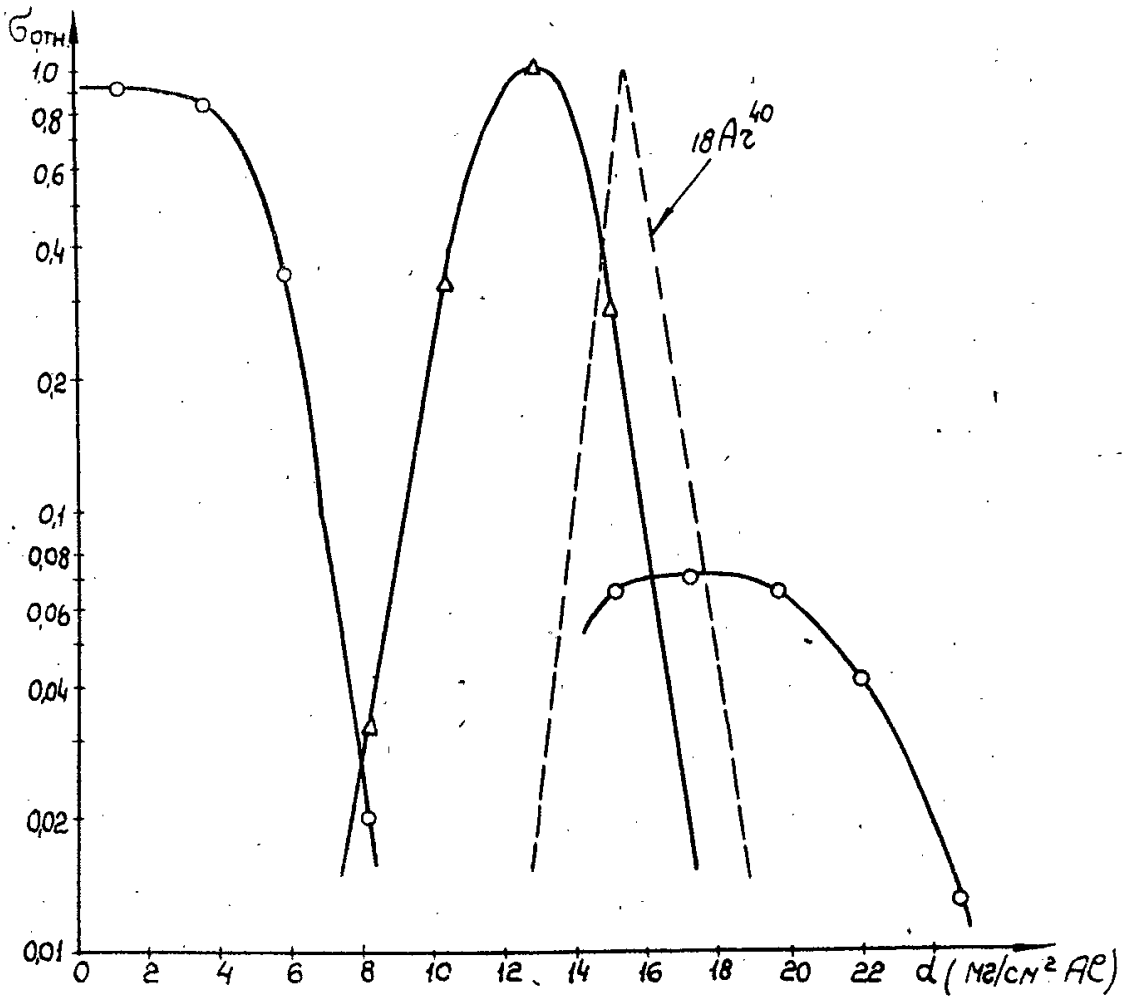


Рис. 5. Относительный выход Na^{24} (O) и Ar^{41} (Δ) в реакции $Al^{27} + Ar^{40}$ на различной глубине стопки алюминиевых фольг.

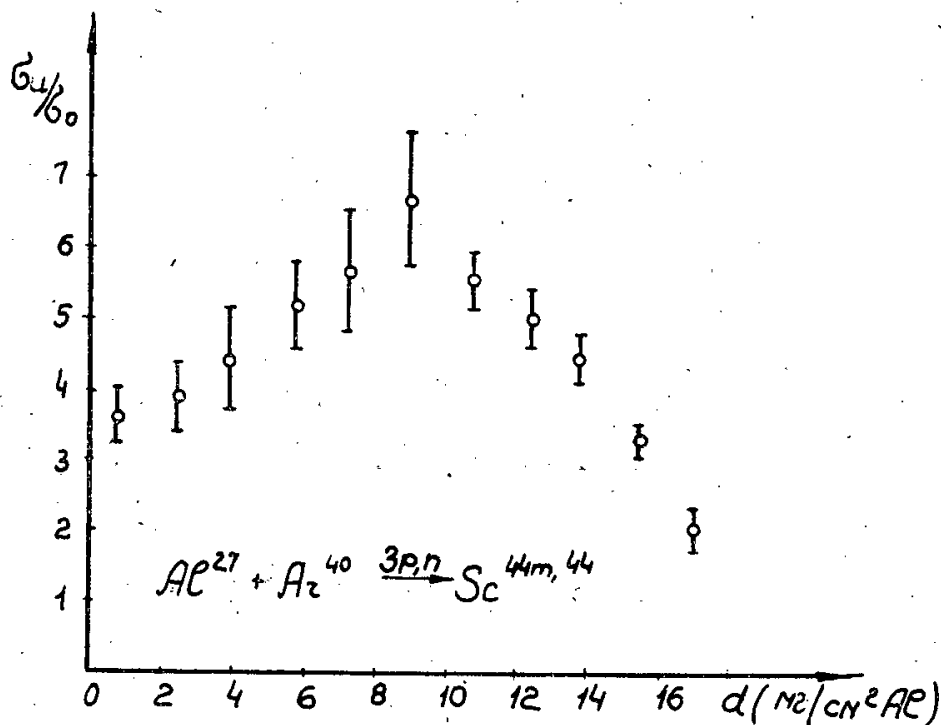


Рис. 6. Распределение изомерного отношения Sc^{44m}/Sc^{44} в реакции $Al^{27} + Ar^{40}$ по стопке алюминиевых фольг.

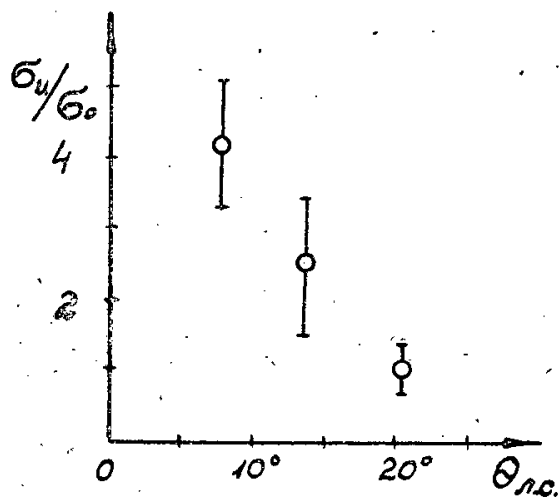


Рис. 7. Угловая зависимость изомерного отношения Sc^{44m}/Sc^{44} в реакции $Al^{27} + Ar^{40}$, $E_{Ar} = 270$ Мэв.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3556. Тираж 310. 0,8 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н.Зрелова. Февраль 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Смирн, Хуан Цзу-чжань

P-1511

N-N ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
В ПОЛЮСНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Дубна 1964

P-1511

Смрж П., Хуан Цзу-чжань

N-N взаимодействия в полюсном приближении

Вычисляются импульсные спектры протонов отдачи в *N-N* взаимодействиях на основе полюсного приближения. Приведены результаты расчетов для энергий первичного нуклона от 2,8 Бэв до 9 Бэв. Сравнение с существующими экспериментальными данными не дает заметных отклонений. Характерный вид кривых мало зависит от энергии, но виды спектров в *p-p* и *p-n* столкновениях значительно отличаются друг от друга. Это обусловлено разностью изоспиновых коэффициентов и является, таким образом, характерной чертой обмена одним мезоном.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна 1964

P-1511

Smrř P., Huang Tzy - tzan

N-N Interactions in Pole Approximation

The momentum spectra of the recoil protons in *NN* interactions are calculated in pole approximation. The results of calculations for the primary nucleon energies from 2.8 GeV up to 9 GeV are presented. A comparison with the available experimental data does not show noticeable deviations.

The characteristic shape of the curves is weakly energy dependent, but the shapes of the spectra for *p-p* and *p-n* collisions are considerably different. This is due to the difference in the isopin coefficients and is a characteristic feature of the exchange of one meson.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964

П. Смирн, Хуан Цзю-чжань

P-1511

N-N ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
В ПОЛЮСНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1964

В в е д е н и е

Хотя полюсное приближение уже много раз применялось к описанию неупругих $N-N$ столкновений, пока было вычислено только несколько специальных случаев теории. Так, в работах ^{1,2/} предполагалось, что частицы рождаются при распаде двух "изобар", масса которых может быть любой величиной, допустимой законами сохранения. Кроме того, там рассматривались только двухструйные диаграммы (см.рис.1,1), и вкладом диаграмм с одним невозбужденным нуклоном (рис. 1,2) пренебрегали. При этом некоторые экспериментальные данные указывают на то, что одноструйные диаграммы могут играть даже определяющую роль ^{3/}. В наших расчетах учитывались оба типа диаграмм, и в вершины представлялись экспериментальные данные по $\pi-N$ столкновениям. Из результатов следует подчеркнуть разницу между спектрами протона отдачи в $p-p$ и $p-\pi$ взаимодействиях, которая является основным свойством обмена одним мезоном, но экспериментально пока изучена плохо. Сравнение с опытом приводится для случая $p-p$ взаимодействия при энергии 3,5 Бэв, и при этом, как будет показано, получается удовлетворяющее согласие.

1. Метод расчета

Импульсный спектр нуклона отдачи процесса 1,1 вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial \sigma(t)}{\partial p} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{p^2 (U-m+\mu)^2}{2p^2 U^2} \int d(W_2^2) \int d(W_1^2) \int d(\cos \theta) \frac{\omega_{W_1} F_{W_1}(k_{W_1} \cos \theta)}{\omega_{W_1} F_{W_1}(k_{W_1})} \left(\frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} - \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \right) p_{W_2} \sigma(W_2^2)$$

где ω , p - энергия и импульс нуклона отдачи в системе центра масс сталкивающихся нуклонов,

$$\omega_{W_1} = \gamma \omega - \sqrt{\gamma^2 - 1} p \cos \theta,$$

$$k_{W_1} = \sqrt{\omega_{W_1}^2 - m^2},$$

$$\gamma = \frac{U^2 + W_1^2 - W_2^2}{2U W_1},$$

$$\cos \theta = \frac{\omega - \gamma \omega_{W_1}}{k_{W_1} \sqrt{\gamma^2 - 1}},$$

(2)

$$\Delta_{\min}^2 = -W_1^2 - W_2^2 + UE \pm 2p_U P, \quad E = \frac{U^2 + W_1^2 - W_2^2}{2U}, \quad P = \sqrt{E^2 - W_1^2}.$$

Импульсный спектр нуклона из верхней вершины процесса 1,2) вычисляется по формуле

$$\frac{\partial \sigma^{(2)}}{\partial p} = \frac{g^2}{4\pi} \frac{p^2}{2p^2 U^2} \int_{(m+\mu)^2}^{(U-m-\mu)^2} d(W^2) \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{\omega_W F_W(k_W, \cos \theta_W)}{\omega_W F_W(k_W, \cos \theta_W)} \left\{ I g \frac{\Delta_{\max}^2 + \mu^2}{\Delta_{\min}^2 + \mu^2} - \mu \frac{\Delta_{\max}^2 - \Delta_{\min}^2}{(\Delta_{\max}^2 + \mu^2)(\Delta_{\min}^2 + \mu^2)} \right\} \quad (3)$$

где ω_W , k_W , γ , $\cos \theta_W$ и Δ_{\max}^2 определяются формулами (2), при этом надо положить $W_2 = m$, $W_1 = W$.

Наконец, импульсный спектр нуклона из нижней вершины диаграммы 1,2) дается формулой

$$\frac{\partial \sigma^{(2)}}{\partial p} = \frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{p^2 U} p_W W \sigma_{\pi N}(W) \frac{p}{\omega} \left\{ I g \frac{\Delta_{\max}^2 + \mu^2}{\Delta_{\min}^2 + \mu^2} - \mu \frac{\Delta_{\max}^2 - \Delta_{\min}^2}{(\Delta_{\max}^2 + \mu^2)(\Delta_{\min}^2 + \mu^2)} \right\}. \quad (4)$$

В формулах (1) и (3) функция $F_W(k_W, \cos \theta_W)$ означает распределение по импульсу и углу нуклона отдачи в π -N столкновениях при энергии W в с.с.м. Так как совместное распределение по импульсу и углу экспериментально неизвестно, мы использовали приближение

$$F_W(k_W, \cos \theta_W) = \phi(W, k_W) \cdot \Theta(W, \cos \theta_W) \cdot \sigma_{\pi N}(W),$$

где ϕ и Θ означают нормированные к единице экспериментальные импульсные и угловые спектры. Изоспиновые коэффициенты учитывались отдельно для каждого конкретного вида взаимодействия. Виртуальностью промежуточного мезона мы пренебрегаем и формфактор нуклона полагаем равным единице во всей области интегрирования по Δ^2 .

2. Результаты вычислений

На рис. 2 а), б), в) приведены вычисленные импульсные спектры протона отдачи в системе центра масс для энергий первичного протона 2,8, 6 и 9 Бэв. На рис. 3 показано сравнение с экспериментальной гистограммой, опубликованной в ^{/4/}. Вычисленные полные сечения возрастают с энергией и для энергий 6 и 9 Бэв уже в несколько раз превышают экспериментальные величины (например, для p - p столкновения при энергии 9 Бэв $\sigma_{pp}^{tot} = 92$ мб). Причина заключается в выше указанных приближениях, в частности, в независимости полных сечений π -N взаимодействий от Δ^2 . Но, как было показано в ^{/5/}, форма импульсного спектра почти не зависит от обре-

ния больших Δ^2 , и, таким образом, более тщательное сравнение кривых на рис.2 с экспериментом является желательным. При этом главный вклад дают всегда одноструйные процессы (рис. 1,2). Для энергии 9 Бэв они представляют даже 73% полного сечения. Именно такое преимущество одноструйных процессов (которое наблюдается и экспериментально^{/3/}) ведет к различию между спектрами протона отдачи в $p-p$ и $p-n$ столкновениях. Изоспиновые коэффициенты, получающиеся при отборе протонных состояний нуклона отдачи, приводит к тому, что виртуальное πN рассеяние происходит в $p-p$ взаимодействиях в основном при $T=3/2$ и в $p-n$ взаимодействиях, наоборот, преимущественно при $T=1/2$. Это приводит к наличию высокоэнергетического максимума в $p-p$ столкновениях, который в $p-n$ выражается более слабо.

З а к л ю ч е н и е

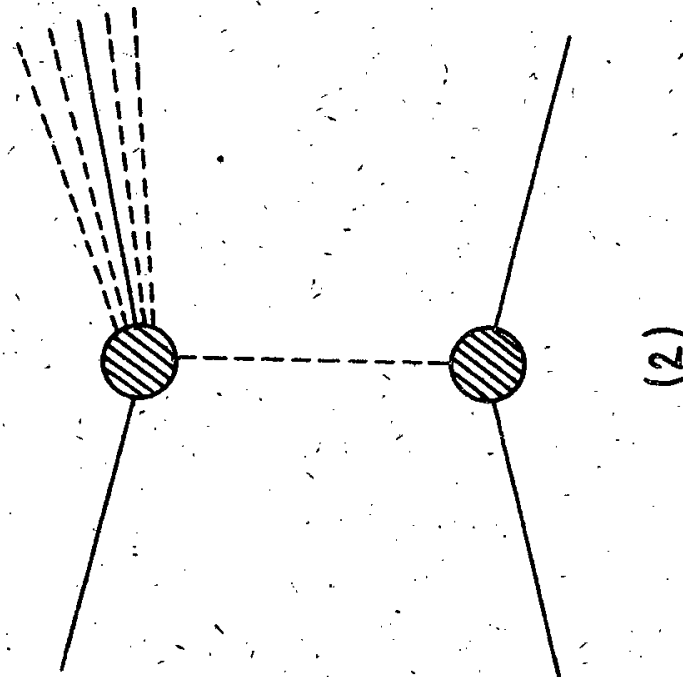
В заключение мы хотим подчеркнуть, что экспериментальное наблюдение различия между видом импульсного распределения протона отдачи в $p-p$ и $p-n$ столкновениях дало бы дальнейшие сведения о том, играют ли одноструйные процессы главную роль в нуклон-нуклонных столкновениях при средних энергиях. Так как при расчетах без ограничения величины Δ^2 получается и теоретически такое преимущество одноструйных процессов, можно утверждать, что неучет зависимости $\sigma_{\pi N}(W, \Delta^2)$ от Δ^2 является главной причиной получения больших сечений. (Поскольку убывающая зависимость $\sigma_{\pi N}(W, \Delta^2)$ от Δ^2 будет уменьшать оба основных типа взаимодействия, а обрезание формфактора уменьшало бы только вклад одноструйных диаграмм). Таким образом, учет такой зависимости представляет сейчас наибольший интерес.

Авторы выражают благодарность В.С.Барашенкову за полезные обсуждения и работникам Вычислительного центра ОИЯИ за выполнение численных расчетов.

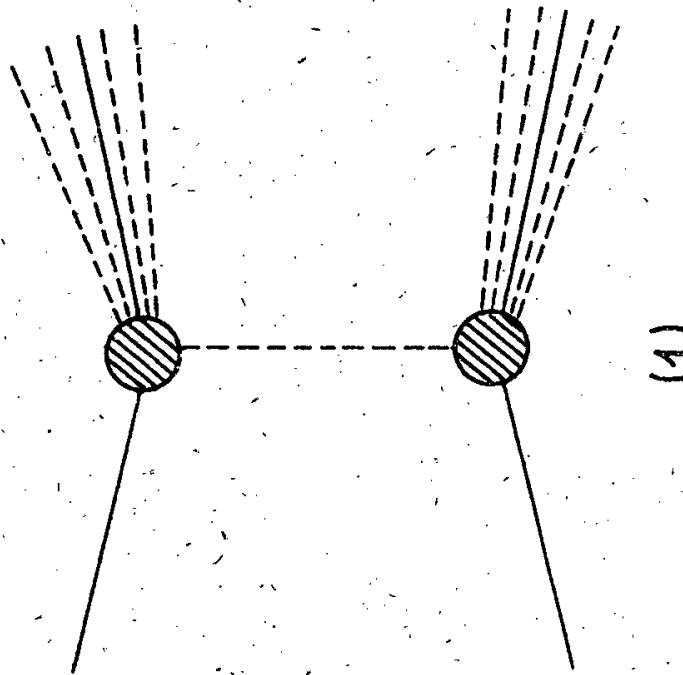
Л и т е р а т у р а

1. И.М. Граменицкий, И.М. Дремин, В.М. Максименко, Д.С. Чернавский. ЖЭТФ, 40, 1093 (1961).
2. И.М. Дремин, Д.С. Чернавский. ЖЭТФ, 38, 229 (1960).
3. В.А. Ботвин, Ж.С.Такибаев, И.Я. Часников, Н.Т. Павлова, Э.Г. Боос. ЖЭТФ, 41, 993 (1961).
4. R.Y.Giserchio, R.M.Kalbach. Nuovo Cim., 26, 729 (1962).
5. В.С. Барашенков, Д.И. Блохинцев, Э.К. Михул, И.Патера, Г.Л. Семашко. Препринт ОИЯИ Р-1245, Дубна, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 декабря 1963 г.



(2)



(1)

Рис. 1. N-N взаимодействие в одномерном приближении.

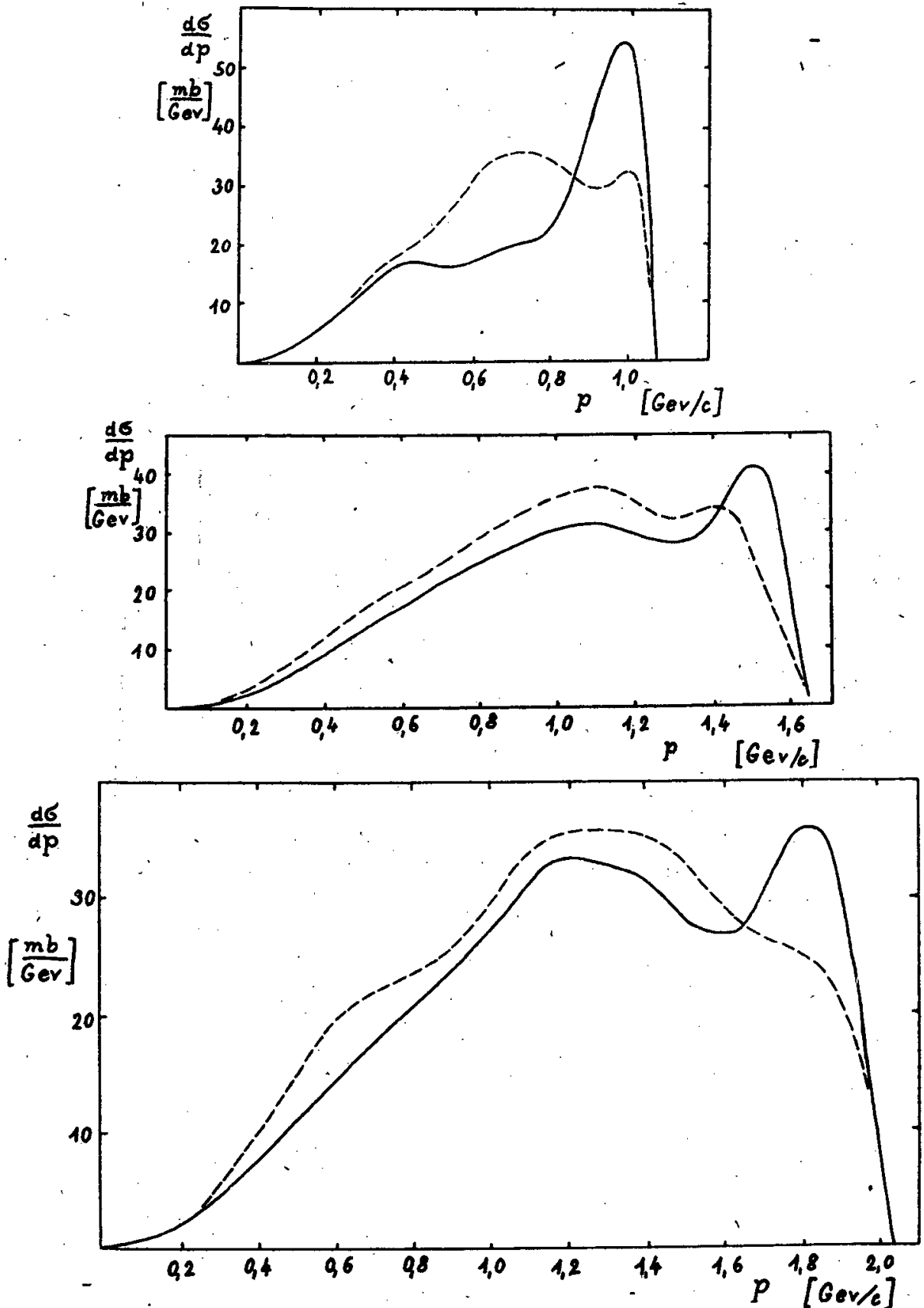


Рис. 2. Импульсные спектры протона в системе центра масс для лабораторных кинетических энергий первичного протона: а) 2,8 б) 8 и в) 9 Бэв. Сплошные кривые соответствуют p-p и пунктирные линии p-n столкновениям.

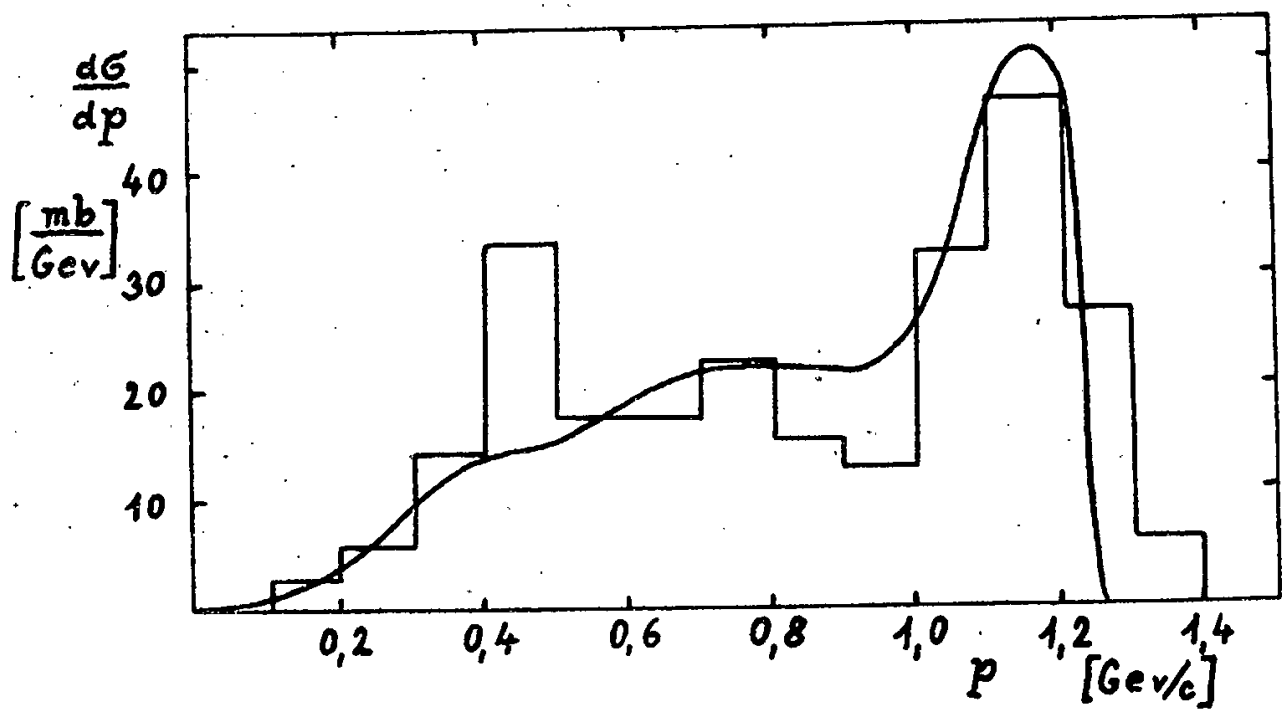


Рис. 3. Сравнение импульсного спектра протона отдачи для энергии 3,5 Бэв с экспериментальной гистограммой^{/4/}.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3518. Тираж 400. 05 уч.-изд. л.
Техн. ред. Н.Н.Зрелова. Январь 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

А.А. Абдумаликов, А.А. Абдуразаков, К.Я. Громов,
Ф.Н. Мухтасимов, Г.Я. Умаров

P-1509

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ
КОНВЕРСИОННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ
ИЗОТОПОВ ЭРБИЯ И ГОЛЬМИЯ
С $T_{1/2} \leq 18$ КСЕК

Дубна 1964

Абдумаликов А.А., Абдуразаков А.А., Р - 1509
Громов К.Я., Мухтасимов Ф.Н., Умаров Г.Я.

Исследование спектров конверсионных электронов изото-
пов эрбия и гольмия с $T_{1/2} \leq 18$ ксек

С помощью β -спектрографа с постоянным магнитным полем изучались спектры конверсионных электронов, возникающие при распаде Er^{159} , Ho^{159} , Ho^{156} и Ho^{155} в области энергии от 25 до 1000 кэв, при разрешении прибора около 0,07%.

На основании полученных данных предложена схема распада Er^{159} и Ho^{159} . Уточнены ранее имеющиеся данные о конверсионных электронах Ho^{156} . Обнаружен ряд новых гамма-переходов, принадлежащих Ho^{156} и Ho^{155} .

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1964 .

Abdumalikov A.A., Abdurazakov A.A., Gromov K.Ja., Mukhtasimov F.N.,
Umarov G.Ja.

P - 1509

The Investigation of Conversion Electron Spectra of Erbium and Holmium
Isotopes with $T_{1/2} \leq 18$ k sec.

A β - spectrograph with a constant magnetic field was used to study the spectra of conversion electrons arising in the decay of Er^{159} , Ho^{159} , Ho^{156} and Ho^{155} in the energy range of 25 up to 1000 keV, the resolution of the apparatus being about 0.07%.

According to the data obtained a decay scheme for Er^{159} and Ho^{159} is proposed. The data on conversion electrons of Ho^{156} which were previously obtained have been made more accurate. A number of new gamma - transitions belonging to Ho^{156} and Ho^{155} has been found.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1964 .

А.А. Абдумаликов, А.А. Абдуразаков, К.Я. Громов,
Ф.Н. Мухтасимов, Г.Я. Умаров

P-1509

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ
КОНВЕРСИОННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ
ИЗОТОПОВ ЭРБИЯ И ГОЛЬМИЯ
С $T_{1/2} \leq 18$ КСЕК

Дубна 1964

С помощью β -спектрографа с постоянным магнитным полем и фотографической регистрацией электронов изучались спектры конверсионных электронов фракций эрбия и гольмия, полученных при облучении танталовой мишени протонами с энергией 660 Мэв на синхротроне Объединенного института ядерных исследований. Источники для β -спектрографа изготовлялись электролитически. От каждого источника снято по несколько спектрограмм, в области энергий от 25 до 1000 кэв, при разрешении прибора около 0,07%. При определении энергии и относительных интенсивностей линий конверсионных электронов мы пользовались методами, описанными в работе ^{/1/}.

Изотопы Er^{159} ($T_{1/2} = 3000$ сек) Ho^{159} ($T_{1/2} = 1980$ сек)

Изотоп Er^{159} был открыт Абдуразаковым и др. ^{/2/}. Изотоп Ho^{159} впервые обнаружен Тосом ^{/3/}. В работе ^{/2/} мы сообщали, что Er^{159} имеет период полураспада около 3600 сек, и при его распаде возникает γ -переход с энергией 205,9 кэв. К распаду Ho^{159} были отнесены γ -переходы с энергиями 56,7; 79,8; 173,0; 177,5; 249,8; 253,0 и 309,7 кэв. Была предложена возможная схема распада цепочки, начинающейся с Er^{159} .

Продолжая исследования этой цепочки распада, мы обнаружили несколько новых переходов, возникающих при распаде Ho^{159} , и получили данные об относительных интенсивностях конверсионных линий. Результаты наших исследований цепочки распадов $Er^{159} \rightarrow Ho^{159} \rightarrow Dy^{159}$ представлены в таблице 1.

Конверсионные линии γ -перехода с энергией 205,9 кэв наблюдаются только в спектре фракции эрбия. Все остальные линии наблюдаются как во фракции эрбия, так и во фракции гольмия. По разностям энергий конверсионных линий установлено, что переход с энергией 205,9 кэв происходит в ядре гольмия, а остальные - в ядре диспрозия. Мы измеряли период полураспада, с которым изменяется интенсивность K -линии γ -перехода с энергией 205,9 кэв, с помощью β -спектрометра с двойной фокусировкой. Он оказался равным (3000 ± 600) сек. Идентификация γ -перехода 249,8 кэв, указанного в нашей работе ^{/2/}, оказалась ненадежной. Поэтому он не включен в таблицу 1. Мы считаем необходимым отметить, что исследования спектров конверсионных электронов производились в сложных условиях: в присутствии линий конверсионных электронов других изотопов эрбия и гольмия. Мы не имели возможности надежно идентифицировать линии конверсионных электронов Er^{159} и Ho^{159} .

Т а б л и ц а 1

Энергия γ -переходов и относительных интенсивностей конверсионных линий цепочки $E\text{r}^{159} \rightarrow \text{Ho}^{159} \rightarrow \text{Dy}^{159}$

Распад	$h\nu$, кэВ	Относительная интенсивность					Мультипольность		
		K	L_I	L_{II}	L_{III}	M		N	
$\text{Er}^{159} \rightarrow \text{Ho}^{159}$	205,9	1000	120	850	550	350	200	$E3 \left(\frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{7^-}{2} \right)$	
	56,7	-	3300	670	700	1000	140	$M1 + E2 \left(\frac{5^-}{2} \rightarrow \frac{3^-}{2} \right)$	
	79,8	-	400	120	Сложн.	Сложн.	-	$E1, M1 + E2 \left(\frac{7^-}{2} \rightarrow \frac{5^-}{2} \right)$	
	121,0	2700	215	55	75	-	-	$E1$	
	155,8	150	-	-	-	-	-	-	
	$\text{Ho}^{159} \rightarrow \text{Dy}^{159}$	159,3	270	45	-	-	-	-	$M1 (?)$
		173,0	500	Сложн.	-	-	-	-	-
		177,5	210	25	-	-	-	-	-
		202,5	200	60	40	-	-	-	-
		253,0	1000	100	15	-	-	-	$E1$ или $M1$
309,7	900	150	-	-	-	о.о.с.	-	$E1$ или $E1 + M2, M1$	

Обозначения: Сложн. - сложный,
о.о.с. - очень, очень слабый

если их энергия близка к энергии конверсионных линий других изотопов. Например, согласно схеме распада (рис. 1), должен существовать γ -переход с энергией 136,5 кэВ. Мы не наблюдали такого перехода, так как при распаде Ho^{156} и, возможно, Ho^{155} возникают интенсивные γ -переходы с близкой энергией. В связи с этим при распаде Er^{159} или Ho^{159} могут возникать конверсионные линии заметной интенсивности, которых мы не наблюдали.

В таблице 2 экспериментальные отношения интенсивностей конверсионных линий некоторых переходов таблицы 1 сравниваются с теоретическими отношениями для различных мультиполей. Однозначно устанавливается мультипольность перехода 205,9 кэВ $E3$. Переходы 56,7 кэВ и 79,8 кэВ оказались смешанными, типа $M1 + E2$; переход 121,0 кэВ есть переход типа $E1$. Для остальных переходов не удается сделать однозначного вывода о мультипольности; возможные мультипольности их указаны в последних колонках таблицы 1 и таблицы 2. Обращают на себя внимание относительные интенсивности γ -перехода 202,5 кэВ (см. табл. 1). Отношения интенсивностей конверсионных линий этого перехода не могут быть объяснены при любых предположениях о мультипольности, вплоть до $E3$ и $M1$. Хотя разности энергий линий конверсионных электронов, приписанных переходу с энергией 202,5 кэВ, прекрасно совпадают с разностями энергий связи на K и L оболочках диспрозия, по-видимому, не исключено, что это совпадение случайное, т.е. не исключено, что идентификация перехода 202,5 кэВ неверна.

Полученные результаты позволяют теперь более уверенно высказаться о схеме распада цепочки $Er^{159} \rightarrow Ho^{159} \rightarrow Dy^{159}$ (рис. 1). Прежде всего следует обратить внимание на изомерный переход типа $E3$ с энергией 205,9 кэВ, возникающий при распаде Er^{159} . Изомерные переходы такого типа наблюдаются в соседних ядрах гольмия Ho^{164} (энергия 211 кэВ) и Ho^{163} (энергия 305 кэВ). Эти переходы истолкованы как переходы из изомерного состояния типа $\frac{7}{2} + [411]$ в основное состояние типа $\frac{7}{2} - [523]$. Очевидно, что в Ho^{159} мы имеем дело с таким же переходом, т.е. можно считать установленным, что основное состояние Ho^{159} имеет характеристики $\frac{7}{2} - [523]$ и что наблюдается изомерный уровень типа $\frac{7}{2} + [411]$ с энергией 205,9 кэВ.

Квантовые характеристики основного состояния ${}_{66}^{159}Dy_{93}$ должны определяться 93-м нейтроном. Рассматривая диаграммы одночастичных состояний деформированных ядер Нильссона, можно ожидать, что 93-й нейтрон находится в состоянии $\frac{3}{2} - [521]$. Имеющиеся сведения о распаде ${}_{66}^{159}Dy_{93}$ не противоречат предположению, что основное состояние ${}_{66}^{159}Dy_{93}$ имеет спин $3/2$ и отрицательную четность. Энергия первого уровня ротационной полосы состояния $\frac{3}{2} - [521]$ равна 55 кэВ в ${}_{64}^{157}Cd_{93}$ и 60 кэВ в ${}_{64}^{155}Cd_{91}$. Можно ожидать, что энергия первого ротационного уровня ${}_{66}^{159}Dy_{93}$ близка к этим значениям. Среди наблюдаемых γ -переходов (табл. 1) имеется переход

Таблица 2
Сравнение экспериментальных отношений $K:L_I:L_{II}:L_{III}$ с теоретическими для разных мультипольностей γ -переходов ${}_{68}Er^{159}$, ${}_{67}Ho^{159}$, ${}_{66}Dy^{159}$

$h\nu$, кэВ	Отношение	Эксперимент	Теория						Мультипольность
			E1	E2	E3	M1	M2	M3	
205,9 (z = 67)	$K:L_{III}$	$1,8 \pm 0,6$	57,68	8,31	1,99	614,5	56,3	10,5	E3
	$L_I:L_{III}$	$0,14 \pm 0,02$	7,08	0,66	0,15	12,44	7,94	5,25	
	$L_{II}:L_{III}$	$1,54 \pm 0,3$	0,935	1,32	1,58	6,67	1,26	0,46	
56,7	$L_I:L_{II}$	$4,9 \pm 1,0$	2,40	0,33	0,01	9,98	10,00	6,60	M1(69%) + E2(31%)
	$L_{II}:L_{III}$	$0,95 \pm 0,20$	0,78	0,83	0,85	6,95	0,36	0,09	
79,8	$L_I:L_{II}$	$3,3 \pm 0,7$	3,80	0,105	0,016	10,96	8,91	0,66	M1(93%) + E2(7%), E1
121,0	$K:L_I$	$12,5 \pm 3,0$	9,84	10,00	8,93	7,71	5,01	2,95	E1
	$L_I:L_{II}$	$3,9 \pm 0,8$	5,33	0,27	0,05	11,57	8,32	5,62	
	$L_{II}:L_{III}$	$0,73 \pm 0,16$	0,75	1,02	1,26	7,00	0,79	0,22	
159,3	$K:L_I$	$6,0 \pm 1,5$	9,12	10,00	8,07	7,41	5,50	3,40	M1(?)
253,0	$K:L_I$	$10,0 \pm 2,5$	8,72	9,33	8,14	7,44	6,03	4,78	E1 или M1
	$L_I:L_{II}$	6,6	8,41	0,96	0,26	12,50	8,12	5,50	
309,7	$K:\Sigma L$	$6,0 \pm 1,2$	7,01	3,85	1,72	6,68	5,37	3,82	E1 или M1, E1 + M2

с энергией 56,7 кэв типа ($M1 + E2$). Допустим, что этот переход определяет энергию первого ротационного уровня. Тогда энергия второго уровня полосы может быть вычислена по формуле $E_i = A [I(I+1) - I_0(I_0 + 1)]$. Она оказывается равной 136,5 кэв. Мы наблюдаем переход с энергией 79,8 кэв типа $M1 + E2$. Вероятно, это переход со второго уровня ротационной полосы на первый. Таким образом, устанавливаются энергии двух ротационных уровней основного состояния Dy^{159} с энергиями 56,7 кэв ($\frac{5}{2} \frac{3}{2} [521]$) и 136,5 кэв ($\frac{7}{2} \frac{3}{2} [521]$). Энергетические соображения позволяют также ввести уровень с энергией 309,7 кэв. С этого уровня идут три перехода с энергиями 309,7 кэв; 253,0 кэв и 173,0 кэв.

Имеющиеся экспериментальные данные не позволяют определенно высказаться о спине и четности уровня с энергией 309,7 кэв. Однако тот факт, что возможными мультипольностями для переходов 253,0 и 309,7 являются только $M1$ или $E1$, позволяет сказать, что этот уровень имеет спин $5/2$ или $3/2$.

В таблице 3 интенсивности γ -переходов рассчитаны по интенсивностям линий конверсионных электронов таблицы 1. При этом использованы теоретические значения коэффициентов конверсии по Сливу^{/6/}. Привлекая эти данные к рассмотрению схемы уровней Dy^{159} , можно утверждать, что переход 253,0 кэв имеет мультипольность $M1$, так как в случае, если он типа $E1$, его интенсивность почти в два раза больше интенсивности перехода 56,7 кэв, находящегося с ним в каскаде.

Определение мультипольности перехода 253,0 кэв ($M1$) устанавливает четность уровня 309,7 кэв. Четность этого уровня отрицательна, а спин $3/2$ или $5/2$. В схеме уровней Нильссона вблизи уровня $3/2-[521]$ (основное состояние Dy^{159}) нет состояний типа $3/2$, и есть только одно состояние типа $5/2^- - 5/2^- [523]$. Возбуждение такого состояния при распаде Ho^{159} , имеющего в основном состоянии характеристики $7/2-[523]$, следует ожидать. Это разрешенный незадержанный β -переход. Пока трудно сказать, как расположены в схеме уровней другие переходы таблицы 1.

Обращает на себя внимание переход с энергией 121,0 кэв. Этот переход типа $E1$. Как видно из таблицы 3, он обладает значительной интенсивностью. Очевидно, что этот переход в схеме уровней Dy^{159} должен быть связан с уровнем положительной четности.

Распад Ho^{159} на уровень положительной четности запрещен, поэтому появление такого уровня непонятно.

Изотопы Ho^{156} ($T_{1/2} = 3360 \pm 120$ сек) и Ho^{155} ($T_{1/2} = 2760 \pm 180$ сек)

Изотоп Ho^{156} был открыт Михеликом и др.^{/7/} в 1957 году. Спектр конверсионных электронов изучался Михеликом и др.^{/7/}, Громовым и др.^{/8/}, Басиной и др.^{/9/} и Григорьевым и др.^{/10/}. Григорьев и др. показали, что при распаде Ho^{156} возникают

Т а б л и ц а 3

Интенсивности γ -переходов, возникающих при распаде Eg^{159} и Ho^{159}

$h\nu$, кэВ	Мультипольность	I_{γ}^*	$I_{\gamma} + I_e^*$
205,9	E3	2090	5160
56,7	M1	2500	8400 ^{xx/}
79,8	M1	762	3960
121,0	E1	17080	20230
253,0	E1	45660	46830
	M1	5000	6170
309,7	E1	68160	69310
	M1	10330	11480

x) Использованы те же единицы интенсивности, что и в таблице 1.

xx) Интенсивность перехода 56,7 кэВ оценена без учета интенсивности K -конверсионной линии. Если принять, что отношение $K/L_1 = 5$, то интенсивность перехода 56,7 должна быть около 25000.

γ -переходы с энергиями 138,0; 266,5; 366,7 и 685,2 кэВ. Принадлежность всех этих переходов Ho^{156} доказана измерением периода полураспада K -линий. Во всех случаях было получено значение 3360 ± 120 сек. Было показано, что первые три перехода имеют мультипольность E2 и образуют ротационную полосу основного состояния Dy^{156} . Других сведений о распаде Ho^{156} нет.

Существование Ho^{155} установлено Михеликом и др.^{/7/} и Далхсуреном и др.^{/11/}. Далхсурен и др. измерили период полураспада Ho^{155} путем измерения активности препаратов Dy^{155} , последовательно выделенных из гольмиевой фракции. Период полураспада оказался равным 2760 ± 180 сек. Никаких сведений об излучении, возникающем при распаде Ho^{155} , нет.

В спектре конверсионных электронов фракции гольмия мы наблюдали ряд линий (табл. 4 и 6), интенсивность которых убывала с периодом полураспада меньше двух часов. В спектре фракции эрбия они не наблюдались. Эти факты позволяют сделать вывод, что обсуждаемые линии возникают при распаде Ho^{156} или Ho^{155} . Используемый нами метод (фоторегистрация) не позволяет разделить линии этих изотопов по периоду полураспада. В таблице 4 приведены экспериментальные данные о γ -переходах, которые Григорьев и др.^{/10/} приписывают распаду Ho^{156} . Остальные линии, которые,

по нашему мнению, принадлежат Ho^{156} или Ho^{155} , перечислены в таблице 6.

Как видно из таблицы 4, полученные нами данные о γ -переходах (137,85 кэв; 266,6 кэв; 366,5 кэв и 684,7 кэв) хорошо согласуются с результатами Григорьева и др. Более высокая разрешающая способность нашего прибора позволила нам лучше разрешить L -линии γ -переходов 137,85 кэв; 266,6 кэв и на этой основе более надежно установить мультипольность этих переходов (см. таблицу 5).

Выше указано, что линии таблицы 6 могут принадлежать либо Ho^{156} , либо Ho^{155} . Для удобства сравнения интенсивности этих линий указаны в тех же единицах, что и в таблице 4 (т.е. линия К-266 принята за 100 единиц).

При исследовании спектра конверсионных электронов гольмиевой фракции мы наблюдали ряд слабых конверсионных линий. Мы не можем уверенно сказать, какому из известных изотопов принадлежат эти линии, однако считаем полезным привести списки этих линий. В таблице 7а перечислены линии конверсионных электронов, интенсивность которых спадает с $T_{1/2} < 9000$ сек. В таблице 7б приведены линии, интенсивность которых убывает с периодом полураспада $T_{1/2} \leq 18000$ сек. Представляется наиболее вероятным, что линии таблицы 7а и возникают при распаде Ho^{155} , Ho^{159} или Ho^{159} , а линии таблицы 7б, возможно, возникают при распаде Ho^{160} .

Л и т е р а т у р а

1. А.А.Абдуразаков, Ф.М.Абдуразакова, А.А.Абдумаликов, К.Я.Громов и Г.Я.Умаров. Изв. АН Узб.ССР, сер.физико-матем., № 1, 37 (1962).
2. А.А.Абдуразаков, Ф.М.Абдуразакова, К.Я.Громов и Г.Я.Умаров. ЖЭТФ, 41, 1729 (1961).
3. Toth K.S. Inorg. and Nucll. Chemistry, 7, 1 (1958).
4. И.С.Днепровский, Л.Нэмет, Л.К.Пекер. ЖЭТФ, 39, 13 (1960).
5. S.L.Hammer, M.G.Stewart. Phys..Rev., 106, 1001 (1957).
6. Гамма-лучи. Под редакцией Л.А.Слива. Изд-во АН СССР, 1961.
7. J.W.Mihelich, V.Harmatz, T.H.Handley. Phys. Rev., 108, 489 (1957).
8. К.Я.Громов, Б.С.Джелепов, Зыонг Чонг Бай, В.Г.Чумин. Материалы второго совещания по нейтронодефицитным изотопам редких земель, т.3, стр. 37, препринт ОИЯИ Р-483, Дубна, 1959.
9. А.Басина, К.Я.Громов, Б.С.Джелепов. Материалы третьего совещания по нейтронодефицитным изотопам, т.1, стр. 197. Препринт ОИЯИ Р-613, Дубна, 1960.
10. Е.П.Григорьев, Б.С.Джелепов. ДАН СССР, 135, 504 (1960).
11. Б.Далхсурен, И.Ю.Левенбург, Ю.В.Норсеев, В.Н.Покровский, С.С.Хойнацкий. Атомная энергия, т.8, 248 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1963 г.

Т а б л и ц а 4

Конверсионные линии Ho^{156} ($T_{1/2} = 3360$ сек)

Григорьев и др. /10/			Наши данные			
E_e , кэВ	Интенсивн.	E_e , кэВ	Интенсивн.	Линии	$h\nu$, кэВ	
I. 84,1	480 ± 145	84,02	613	K - 137,81	137,85±0,2	
2. -	-	128,87	70	L _I - 137,95		
3. 129,4	165	129,36	165	L _{II} - 137,98		
4. 130,2	106	130,11	145	L _{III} - 137,96		
5. -	-	135,70		M _I - 137,74		
6. -	-	135,91	88	M _{II} - 137,76		
7. -	-	136,08		M _{III} - 137,76		
8. -	-	137,38	16	N - 137,80		
9. 212,6	100 ± 11	212,68	100 ^{x/}	K - 266,47	266,6±0,35	
10. } 257,6	24 ± 3	257,52	12	L _I - 266,60		
11. }		257,98	95	L _{II} - 266,60		
12. 258,6	9,4 ± 1	258,71	7,5	L _{III} - 266,56		
13. -	-	264,50	5,3	M - 266,60		
14. 312,9	9,9 ± 1	312,63	9,3	K - 366,4	366,5±0,5	
15. 357,6	1,5 ± 0,2	357,55	0 ^{xx/}	L _I - 366,6		
16. 359,0	0,43 ± 0,1	-	-	L _{II} - 366,5		
17. 631,4	6,1 ± 0,8	630,9	4,3	K - 684,7	484,7±1,0	

x) Интенсивность K-266,6 кэВ для удобства сравнения приняты за 100 произвольных единиц.

xx) С - слабый.

Т а б л и ц а 5
 Определение мультипольности переходов в Dy^{156}

Переходы в кэв	Отношение	Эксперимент	Т е о р и я						Мультипольность
			E1	E2	E3	M1	M2	M3	
137,9	$K : L_I$	8,84±2,2	9,16	9,95	5,75	7,42	5,49	3,31	E2
	$L_I : L_{II}$	0,43±0,08	5,60	0,36	0,11	12,02	7,76	5,50	
	$L_{II} : L_{III}$	1,20±0,25	0,85	1,10	1,35	3,29	0,35	0,08	
266,6	$K : L_I$	8,20±2,0	8,70	8,84	8,23	7,33	6,04	5,00	E2
	$L_I : L_{II}$	1,25±0,25	8,51	1,02	0,28	12,85	8,27	5,52	
	$L_{II} : L_{III}$	1,28±0,25	0,93	1,40	1,72	6,36	1,74	5,45	

Т а б л и ц а 6

Конверсионные электроны Ho^{156} ($T_{1/2} = 3360$ сек) + Ho^{155} ($T_{1/2} = 2760$ сек)

№№ пп	H_p	E_e , кэВ	Интенсивн. 1)	Идентификация	Энергия гамма- переходов в кэВ
1	2	3	4	5	6
1.	597,2	30,45	226	$L_I - 39,53$	} 39,55±0,05
2.	602,2	30,95	120	$L_{II} - 39,57$	
3.	609,9	31,72	165	$L_{III} - 39,57$	
4.	664,6	37,46	-	$M_I - 39,50$	
5.	666,4	37,65	-	$M_{II} - 39,50$	
6.	667,9	37,82	-	$M_{III} - 39,50$	
7.	679,4	39,08	C ⁴⁾	$N - 39,50$	
8.	684,8	39,69	12	-	-
9.	863,1	61,76	53	(K-II5,55)	(115,6±0,1)
10.	936,5	72,03	3,5 ²⁾	-	-
11.	941,8	72,79	2,8	-	-
12.	1006,4	82,40	33,3	K - 136,19	136,2±0,15
13.	1158,8	106,88	4,88	-	-
14.	1163,7	107,71	2,4	-	-
15.	1172,5	109,21	30,6	-	-
16.	1275,3	127,16	6,7	$L_I - 136,24$	} 136,2±0,15
17.	1278,0	127,65	1,1	$L_{II} - 136,27$	
18.	- 3)	-	-	$L_{III} - 136,2$	
19.	1298,5	131,35	-	(K - 185,14)	(185,1±0,2)
20.	1477,0	165,10	2,7	(K - 218,9)	(218,9±0,25)
21.	1530,5	175,72	1,5	-	-
22.	1538,3	177,3	1,1	-	-
23.	1583,2	186,38	2,9	(K - 240,17)	(240,2±0,3)
24.	1977,3	271,57	2,8	K - 325,4	325,4±0,35
25.	3427,0	636,3	1,7	K - 690,1	690,1±1,0

1) Интенсивность дается по отношению интенсивности K-266,6 Ho^{156} , принятой за 100 единиц. Часть линий этой таблицы, вероятно, относится к Ho^{155} . В связи с этим интенсивности этих линий, по-существу искусственно связаны с интенсивностями Ho^{156} . Однако указанные интенсивности, по нашему мнению, могут быть полезны в дальнейших исследованиях.

2) Линия сложная, не отделена от $L_{III} - 79,8 Ho^{159}$.

3) Совпадает с $L_I - 137,9 Ho^{159}$.

4) С. - слабый.

Т а б л и ц а 7

Список неидентифицированных линий конверсионных электронов, которые не наблюдались при исследовании гольмиевой фракции

№№ лп	H_p	E_e , кэВ	Интенсивность ^{х)}
а) $T_{1/2} < 2,5$ час			
I.	677,9	38,92	5,9
2.	1041,1	87,76	3,2
3.	1043,5	88,14	0,93
4.	1065,3	91,57	I,I
5.	1073,8	92,93	I,I
6.	1379,1	146,28	0,53
7.	1382,0	146,80	0,93
8.	1505,0	170,50	C ^{xx/}
9.	1507,0	171,0	C
10.	1793,0	230,6	C
11.	1799,0	231,9	0,7
12.	1812,0	234,7	0,7
13.	1879,8	249,7	0.C.
14.	1886,8	251,2	C.
15.	2056,8	289,8	C.
16.	2078,5	294,8	C.
б) $T_{1/2} \leq 5$ час.			
17.	1086,1	94,90	C.
18.	1313,8	134,14	I,I
19.	1406,0	151,38	C.
20.	1413,1	152,73	I,I
21.	1423,2	154,67	0,8
22.	1445,0	158,9	0.0.C.
23.	1458,0	161,4	0.0.C.
24.	1603,6	190,5	0.C.
25.	1761	223,7	0.C.

х) Для ориентировочной оценки интенсивности перечисленных линий в таблице даны интенсивности линий, полученные при фотометрировании одной из пластинок; где интенсивность линии K-266 Ho^{156} была принята за 100.

xx) В настоящей и во всех предыдущих таблицах интенсивности конверсионных линий, которые трудно или невозможно количественно определить при помощи микрофотометра МФ-2, оценены визуально и разделены на три группы:

C. - слабый, 0.C. - очень слабый, 0.0.C. - очень, очень слабый.

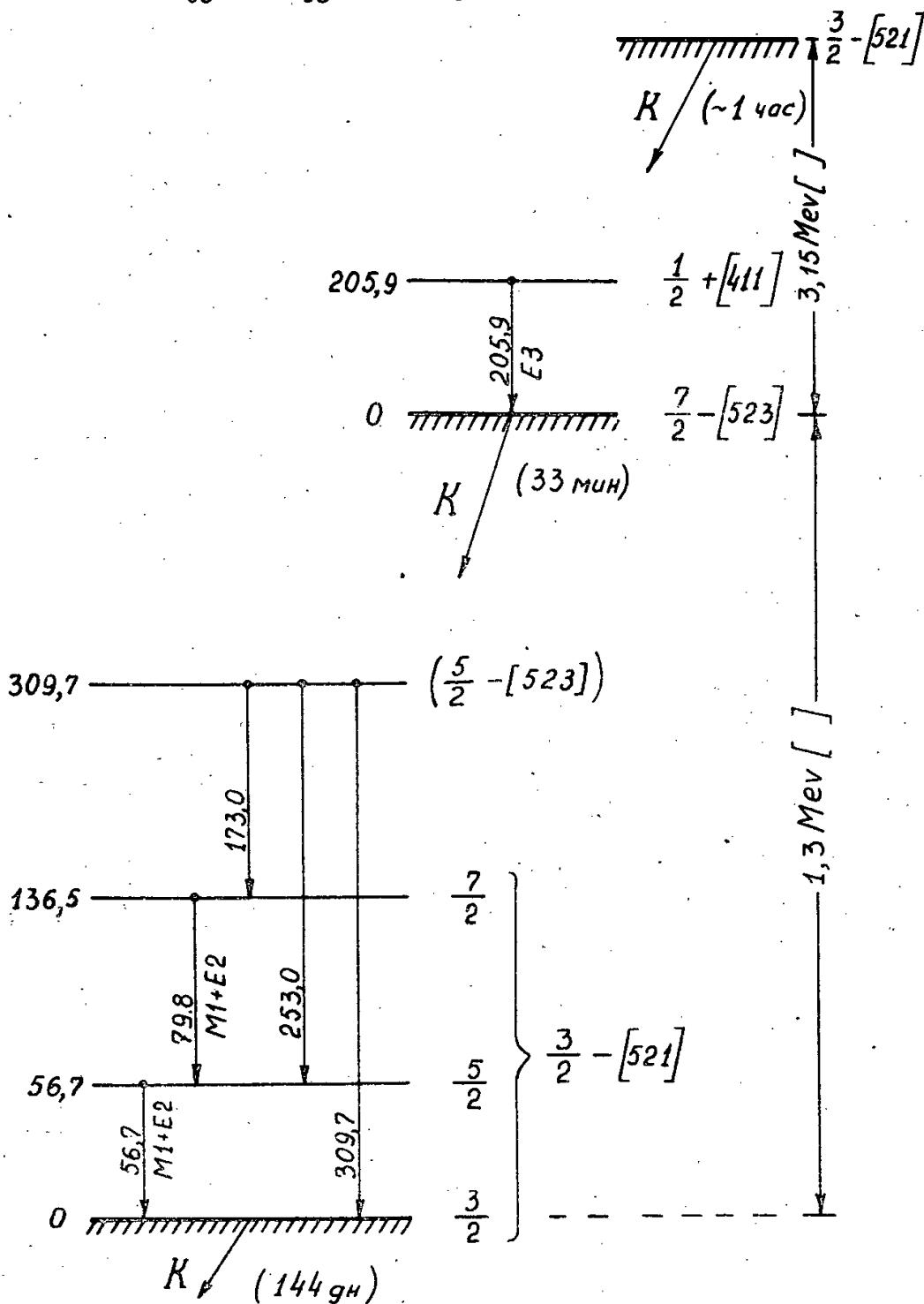
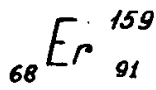
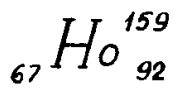
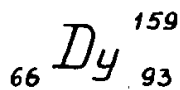
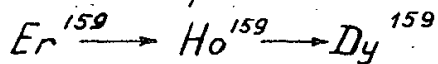


Схема распада цепочки



Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3540. Тираж 300. 0,9 уч.-изд, л.
Техн. ред. Н.Н.Зрелова. Февраль 1964 г.

41



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Ю.Ц. Оганесян, Г. Индреаш, И.В. Кузнецов, Р.Ц. Оганесян

STAT

P-1507

**ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ВЫВОД
ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ ИЗ ЦИКЛОТРОНА**

Дубна 1964

P - 1507

Оганесян Ю.Ц., Индреаш Г., Кузнецов И.В., Оганесян Р.Ц.

Высокочастотный вывод тяжелых ионов из циклотрона

Высокочастотный внешний электрический дефлектор был использован для вывода пучка ионов углерода с энергией 75 Мэв из ускорительной камеры 150 см. циклотрона. При постоянном напряжении на внешних пластинах около 20 кв коэффициент вывода составлял ~ 40%.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

P-1507

Oganesian Yu. Ts., Indreash G., Kuznetsov I.V., Oganesian R. Ts.

Radio - Frequency Extraction of Heavy Ions from the Cyclotron

A radio - frequency external electric deflector was used to extract a beam of 75 MeV carbon ions from the accelerating chamber of a 150.- cm cyclotron. When the constant voltage at the external planes was about 20 kV the extraction coefficient was approximately 40%.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

Ю.Ц. Оганесян, Г. Индреаш, И.В. Кузнецов, Р.Ц. Оганесян

P-1507

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ ВЫВОД
ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ ИЗ ЦИКЛОТРОНА

Дубна 1964

Известно, что классическая система электростатического отклонения частиц эффективно используется на многих циклотронах для получения выведенного пучка протонов, дейтронов и α -частиц относительно небольшой энергии. Однако дефлектор, расположенный внутри дуанта, обладает сравнительно низкой электрической прочностью, и использование постоянного потенциала выше 100 кв становится практически невозможным. Вместе с тем интенсивные пучки частиц высокой энергии сравнительно легко могут быть получены на циклотронах с азимутальной вариацией магнитного поля, и вопрос вывода пучка становится одной из основных проблем. Подобные трудности возникают также при выводе пучка тяжелых частиц, скорость которых сравнительно велика, а заряд относительно мал (для 300 см циклотрона ОИЯИ $E_1 = 8$ Мэв/нуклон, а отношение $\frac{e}{m}$ находится в пределах $0,3 \geq \frac{e}{m} \geq 0,15$). Поэтому проблема эффективного вывода пучка тяжелых ионов также непосредственно связана с получением высокой напряженности электрического поля в зазоре дефлектора.

Использование высокочастотного напряжения дуанта для отклонения частиц с конечной орбиты в некоторых случаях может иметь существенные преимущества перед статической системой вывода с экранированным дефлектором.

Основанная на этом принципе система вывода была разработана и испытана для вывода пучка ионов углерода с энергией - 75 Мэв.

1. Описание метода

Пусть частица с зарядом e и массой m испытала n ускорений до энергии E_1 и достигла радиуса R_k , который является предельным для данных резонансных условий. На предельном радиусе ускорения R_k частица проходит промежуток между дуантами в определенной фазе ϕ_n относительно амплитуды высокочастотного напряжения.

Если после n -ого прохождения промежутка через определенный угол θ_1 исключить экранирующее действие дуанта, в котором в данный момент находится частица, то на нее будет действовать потенциал, равный $U_0 \cos(\phi_n + \theta_1)$, который будет отталкивать частицу от дуанта. Частица будет испытывать отклоняющее действие на азимуте $\theta = [\frac{1}{2} \pi - (\phi_n + \theta_1)]$. Для двухдуантной системы угловая протяженность дуанта меньше $\frac{\pi}{2}$, поэтому процесс отклонения закончится при некотором значении $\theta_k = \phi_n + \theta_1 + \theta_2$ (рис. 1).

Теперь видно, что если изготовить дуант специальной формы (рис. 2) таким образом, чтобы боковая кромка при значении θ_1 находилась на расстоянии от центра строго равном R_k , то на протяжении θ_2 между кромкой дуанта и заземленной пластиной частица будет отклоняться от конечного радиуса. Если известна фаза частицы ϕ_n , выбирая разумно θ_2 , можно добиться максимального отклоняющего эффекта.

Это рассмотрение относится к "чисто" высокочастотному методу вывода. Отклоняющее напряжение может быть увеличено, если на внешние пластины подать постоянный отрицательный потенциал. В этом случае на частицу будет действовать суммарный потенциал $U = U_{\text{пост.}} + U_{\text{в.ч.}}$.

В высокочастотном (в.ч.) выводе частицы движутся в изменяющемся во времени электрическом поле. Проведенное нами рассмотрение справедливо для одной частицы. На самом деле сгусток частиц занимает некоторый временной промежуток (область фаз $\Delta\phi_n$), поэтому условия прохождения в дефлекторе для частиц, пришедших в разное время, различны. Это обстоятельство приводит к дополнительному радиальному размытию пучка на выходе дефлектора. С этой точки зрения желательно, чтобы интервал фаз на входе дефлектора был по возможности мал. Из этого следует также, что фазовое положение сгустка ϕ_n должно быть постоянным в определенных пределах, что непосредственно связано со стабилизацией ускоряющего в.ч. напряжения.

Нами было проведено измерение временной структуры внутреннего пучка частиц на циклотроне тяжелых ионов с помощью быстрого временного анализатора (разрешение $\tau = 5 \cdot 10^{-10}$ сек/1). Интервал фаз на предельном радиусе ускорения составлял $\Delta\phi = 10 - 12^\circ$. Смещение абсолютной величины фазы сгустка ϕ_n на 10° соответствовало 10% изменению ускоряющего напряжения.

Из этих данных следует, что для в.ч. вывода пучка не требуется специальной стабилизации напряжения на дуантах, постоянство в.ч. потенциала в пределах 4-5% можно считать удовлетворительным.

2. Конструкция дефлектора

Описанный метод отклонения пучка с использованием в.ч. потенциала был применен нами для вывода частиц C^{+4} с энергией 75 Мэв, ускоренных на 150 см циклотроне Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ.

Конструкция дуанта и отклоняющих пластин представлена на рис. 2 и фото 3. Частицы выходят из дуанта при значении $\theta_1 = 0,75^\circ$ после прохождения ускоряющего промежутка. При этих условиях наиболее эффективно используется положительная полу-волна синусоиды в.ч. напряжения.

Дефлектор состоит из внутренней пластины, находящейся под потенциалом дуанта, и двух внешних пластин, изолированных от корпуса камеры, которые имеют отдельное высоковольтное питание. Для заземления внешних пластин по в.ч. использовались высоковольтные конденсаторы $C = 2000$ пф, расположенные вне ускорительной камеры. Все пластины охлаждались водой и имели механическую регулировку в горизонтальной плоскости в широких пределах. Выбор двух независимых внешних пластин был обусловлен получением максимальной напряженности электрического поля вдоль всего тракта вывода^{х)}.

Амплитуда в.ч. потенциала на дуанте составляла $U_0 = 90-95$ кв. Постоянное напряжение $100-105$ кв на внешних пластинах было получено после 20-минутной тренировки и обеспечивало стабильную работу в течение длительного времени.

Таким образом, амплитудное значение отклоняющего потенциала достигало $190-200$ кв, что соответствовало напряженности электрического поля между пластинами $\sim 140-150$ кв/см.

Естественно, столь большие электрические поля не требовались для вывода пучка на 150 см циклотроне, однако это дало возможность в достаточно широких пределах изменять расстояние между пластинами для нахождения оптимальных условий.

3. Экспериментальные результаты

С помощью описанной дефлекторной системы был осуществлен вывод ионов C^{+4} с энергией 75 Мэв. При конечном радиусе ускорения $R_k = 66,5$ см максимальная интенсивность отклоненного пучка была получена на $R = 80$ см при значении постоянного напряжения на внешних пластинах $U_1 = U_2 = 20$ кв.

Коэффициент вывода, определяемый как отношение интенсивности отклоненного пучка к интенсивности внутреннего пучка на $R = 60$ см, оказался равным $0,4-0,45$.

Размеры выведенного пучка непосредственно на выходе дефлектора и на мишени, удаленной на расстояние ~ 1 м, представлены на рис. 4. Радиальное смещение максимальной интенсивности на 1 см на мишени, расположенной на оси резонансных линий, соответствует изменению постоянного потенциала на 4 кв.

Зависимость интенсивности отклоненного пучка от постоянного напряжения на внешних пластинах при $U_{в.ч.} = const$ представлена на рис. 5.

х) Использование одной несекционированной пластины было бы менее эффективным, так как предельный потенциал определялся бы входным промежутком.

Из данных, приведенных в настоящей работе, следует:

1. Высокочастотный метод отклонения может быть успешно использован для эффективного вывода пучков тяжелых ионов из ускорительной камеры циклотрона.
2. Используемая конфигурация deflectора позволяет получить суммарный отклоняющий потенциал $U = U_{в.ч.} + U_{ост.}$ до 200 кв. Максимальное значение электрического поля между пластинами deflectора достигает величины более 150 кв/см.
3. Коэффициент вывода, измеренный как отношение интенсивности отклоненного к внутреннему пучку, составляет 40-45%.

Авторы благодарны проф. Г.Н. Флерову за руководство настоящей работой, ценные советы и замечания, А.Ф. Линеву и Г.Н. Вялову за полезные дискуссии.

Мы благодарны также сотрудникам циклотронной группы за помощь в проведении экспериментов.

Л и т е р а т у р а

1. Ю.Ц.Оганесян, А.П.Кабаченко. Препринт ОИЯИ Р-1121, Дубна, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1963 г.

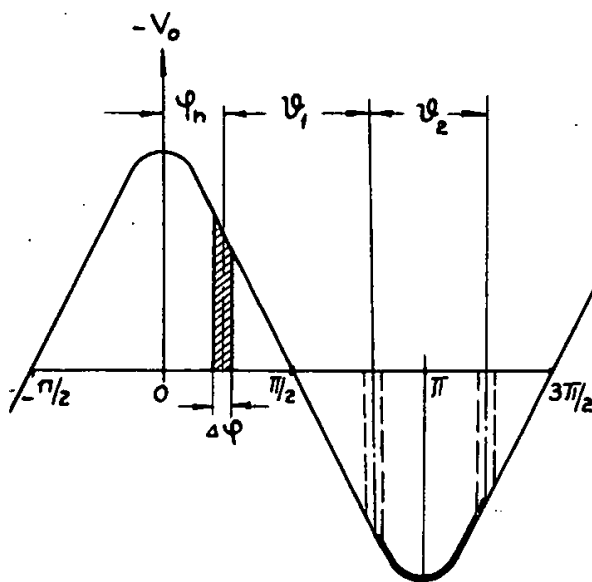
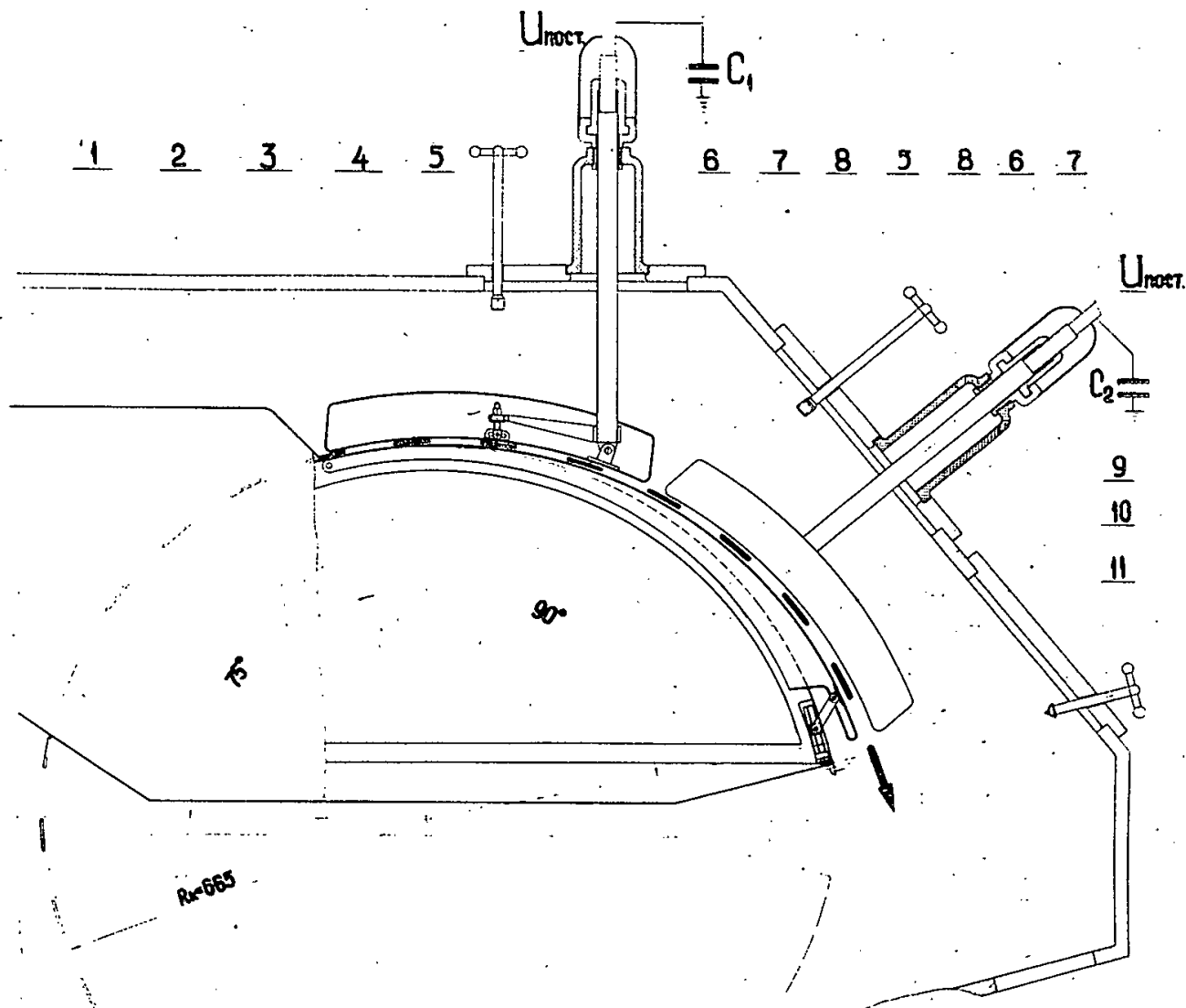


Рис. 1.



КОНСТРУКЦИЯ ДУАНТА И ОТКЛОНЯЮЩИХ ПЛАСТИН ДЛЯ В.Ч. ВЫВОДА
УСКОРЕННЫХ ИОНОВ ИЗ ЦИКЛОТРОНА

1-диамант левый, 2-отсекающая пластина, 3,9-отклоняющие пластины, 4-устройство для поворота отклоняющей пластины,
5-рукоятки регулировки, 6-устройство для регулировки радиального положения отклоняющих пластин, 7-экраны,
8-изоляторы, 10-устройство для регулировки положения отсекающей пластины, 11-рукоятка регулировки.

Рис. 2.

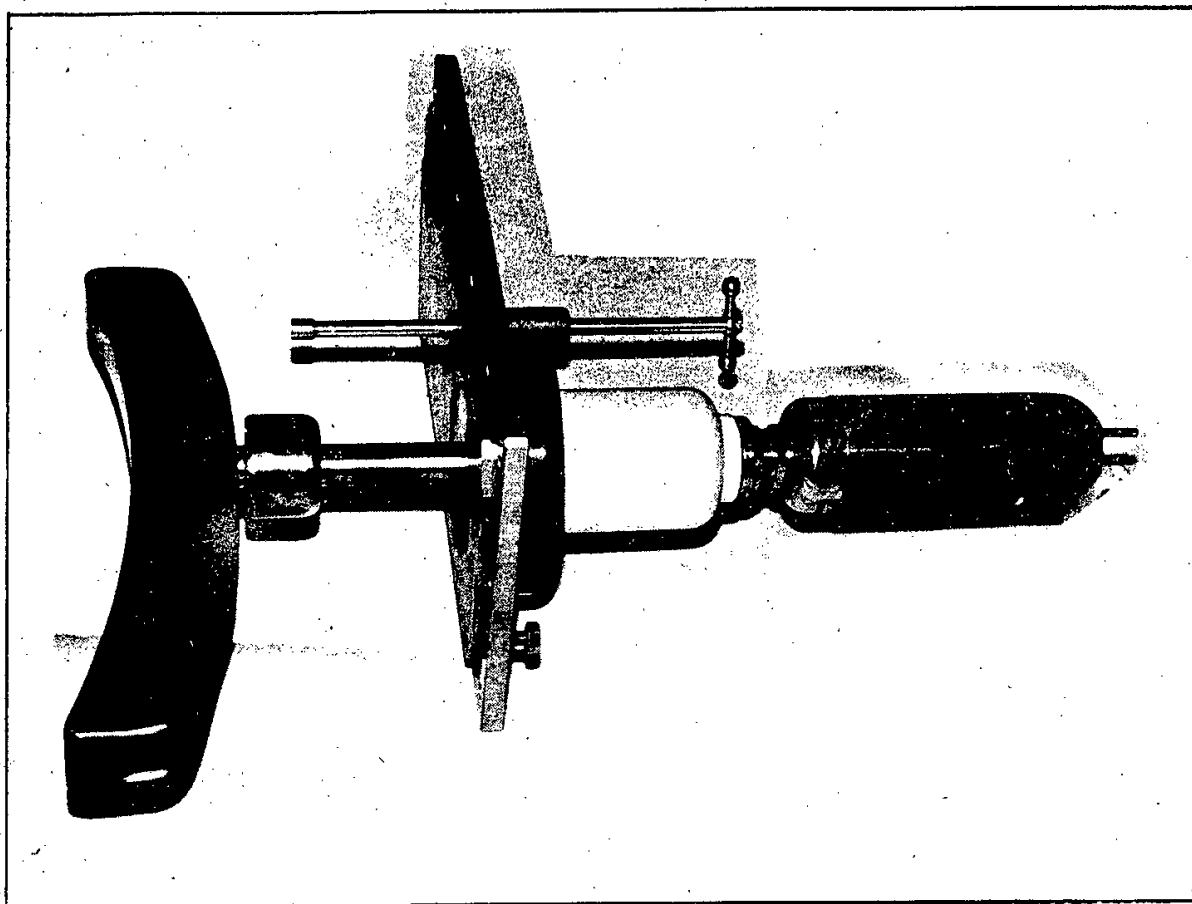


Рис. 3. Внешняя пластина высокочастотного дефлектора.

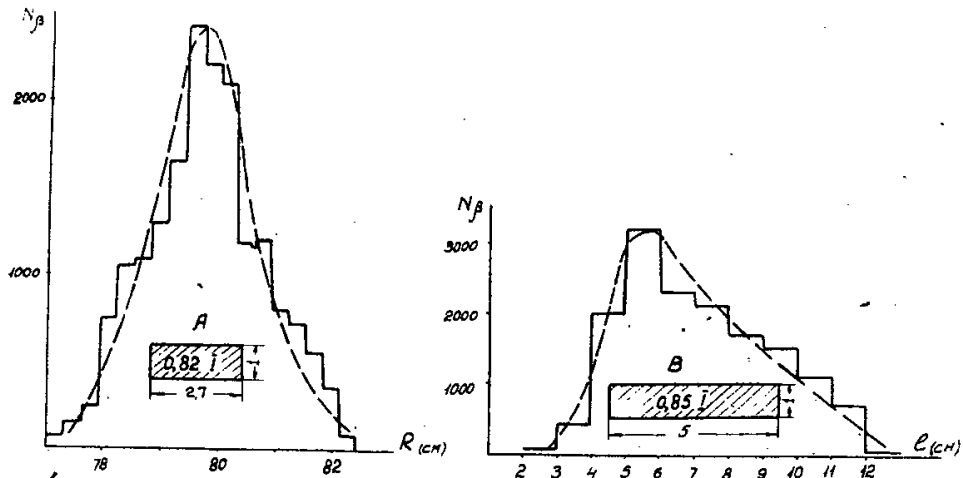


Рис. 4. Радиальные размеры выведенного пучка по наведенной β -активности медной фольги, перекрывающей пучок. А.- Непосредственно на выходе дефлектора. В. На мишени, расположенной на расстоянии ~ 1 м. Заштрихованная область охватывает ~ 85% пучка. Размеры указаны в см.

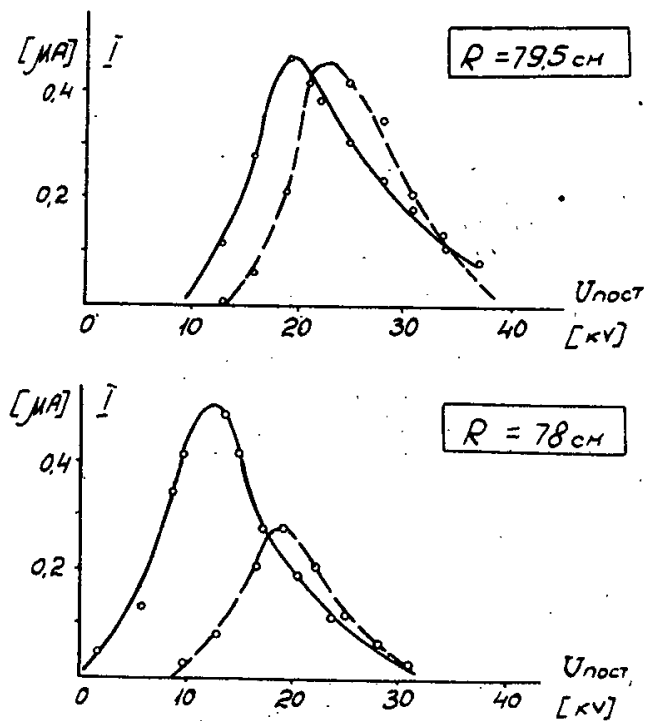


Рис. 5. Зависимости интенсивности отклоненного пучка от величины постоянного напряжения на внешних пластинах. Кривые $I = f(U_{\text{пост}})$ при $U_{\text{вч}} = \text{const}$ снимались для двух положений мишени ($R = 78$ и $R = 79,5$ см) и различной апертуры дефлекторного канала (сплошная и пунктирная линии).

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3519. Тираж 310. 0,6 уч.-изд. л.
Техн. ред. Н.Н. Зрелова. Январь 1964 г.

42



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Ю.А. Плис, Л.М. Сороко

P - 1502

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРОТОНОВ В ИЗОХРОННЫХ ЦИКЛОТРОНАХ

Результаты данной работы были кратко изложены
на Международной конференции по ускорителям
(Дубна. 1963 г.)

Дубна 1964

Плис Ю.А., Сороко Л.М.

P-1502

Деполаризация протонов в изохронных циклотронах.

На основании проектной топографии магнитного поля релятивистского циклотрона на энергию 700 MeV произведены расчеты максимальных искажений медианной поверхности магнитного поля, при которых возможно ускорение поляризованных протонов без существенной деполаризации.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.**

Plis Yu.A., Soroko L.M.

P-1502

Proton Depolarization in Isochronous Cyclotrons.

Using the design topography of the magnetic field in a 700 MeV relativistic cyclotron, the calculations were made of the median plane distortions of the magnetic field at which it is possible to accelerate polarized protons without an essential depolarization.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

Ю.А. Плис, Л.М. Сороко

P-1502

ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРОТОНОВ
В ИЗОХРОННЫХ ЦИКЛОТРОНАХ

Результаты данной работы были кратко изложены
на Международной конференции по ускорителям
(Дубна, 1963 г.)

Дубна 1964

1. В работе ^{/1/} рассмотрены эффекты деполяризации протонов и дейтронов в синхротроне Лаборатории ядерных проблем на энергию 680 Мэв. В связи с проблемой создания релятивистского циклотрона весьма интересно знать круг физических задач, которые могут быть изучены на этом ускорителе. В частности, большое значение имеет возможность получения интенсивного пучка первично-поляризованных частиц. С этой целью в настоящей работе рассмотрены основные эффекты деполяризации протонов при ускорении их в релятивистском циклотроне.

2. Исходим из топографии напряженности магнитного поля в медианной плоскости релятивистского циклотрона, которая имеет следующий вид:

$$B_z = B(r) \left[1 + \epsilon(r) \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right], \quad /1/$$

где $B(r) = B_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right]^{-1/2}$, $B_0 = 7900$ эрстед /0,79 тл/,
 $r_0 = 396$ см, /2/

$$\epsilon = 0,3 \quad \lambda = 7,7 \text{ см}, \quad N = 8.$$

Энергия частицы и радиус траектории связаны при этом соотношением

$$r = \frac{m \sqrt{\gamma^2 - 1}}{e B \gamma}, \quad /3/$$

где $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, а v - скорость протона, $c = 1$.

Выразим радиальные и азимутальные составляющие B_ρ и B_θ на высоте z над медианной плоскостью при смещении ρ действительной орбиты относительно равновесной.

$$B_\rho = z \frac{\partial B_z}{\partial r} + z \rho \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} =$$

$$= z \left\{ \frac{dB(r)}{dr} \left[1 + \epsilon \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right] + \left[B(r) \frac{d\epsilon}{dr} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + B(r) \frac{\epsilon}{\lambda} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right] \right\} + \quad /4/$$

$$+ z \rho \left\{ \frac{d^2 B(r)}{dr^2} \left[1 + \epsilon \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right] + 2 \frac{dB(r)}{dr} \left[\frac{d\epsilon}{dr} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + \frac{\epsilon}{\lambda} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) \right] + \right.$$

$$+ [B(r) \frac{d^2 \epsilon}{dr^2} \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta) - B(r) \frac{\epsilon}{\lambda^2} \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta) + 2B(r) \frac{d\epsilon}{dr} \frac{1}{\lambda} \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta)] ; \quad /4/$$

$$B_\theta = \frac{z}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} + \frac{z \rho}{r} \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial \theta} =$$

$$= \frac{z}{r} [-N B(r) \epsilon \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta)] + \frac{z \rho}{r} [-N \frac{dB(r)}{dr} \epsilon \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta) -$$

$$- N B(r) \frac{d\epsilon}{dr} \cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta) + N B(r) \frac{\epsilon}{\lambda} \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta)] ; \quad /5/$$

где

$$\frac{dB(r)}{dr} = \frac{B_0}{[1 - (\frac{r}{r_0})^2]^{3/2}} \frac{r}{r_0^2} \quad /6/$$

Величина z в /4/ и /5/ включает значения свободных вертикальных колебаний и отклонения медианной поверхности от плоскости отсчета:

$$z = z_m \cos \omega_s \theta + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell \cos \ell \theta, \quad /7/$$

где $\omega_s = 0,24\omega$, $\omega_c = \frac{eB(r)}{m\gamma}$ циклотронная частота. Для вычисления вектора деполяризации s' воспользуемся выражением типа /III.9/ в работе /1/, - с той только разницей, что теперь необходимо учесть зависимость $B(r)$ от радиуса.

Имеем:

$$s' = -i e^{-i\phi(\theta)} \int_0^\theta e^{i\phi(\theta') + i\theta'} [(1+1,8\gamma) \frac{B_r}{B(r)} - 2,8i \frac{B_\theta}{B(r)}] d\theta', \quad /8/$$

где

$$\phi = - \int_0^\theta (1+1,8\gamma) [1 + \epsilon(r) \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta')] d\theta'. \quad /9/$$

Запишем $e^{i\phi}$ приближенно в виде:

$$e^{i\phi} \approx e^{-i \int_0^\theta (1+1,8\gamma) d\theta'} [1 - i \int_0^\theta (1+1,8\gamma) \epsilon \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta') d\theta']. \quad /10/$$

Оценим интеграл в квадратных скобках /10/, считая постоянными величины ϵ , $\frac{dr}{d\theta}$

$$\int_0^\theta (1+1,8\gamma) \epsilon \sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta') d\theta' = \epsilon (1+1,8\gamma) \frac{\cos(\frac{r}{\lambda} - N\theta)}{N - \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta}} -$$

$$- \frac{2,8 \epsilon}{N - \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta}} + \frac{\sin(\frac{r}{\lambda} - N\theta)}{(N - \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta})^2} \epsilon \cdot 1,8 \frac{d\gamma}{d\theta}. \quad /11/$$

При этом $N \gg \frac{1}{\lambda} \frac{dr}{d\theta}$.

III. Рассмотрим условия появления возможных резонансов, не учитывая пока нелинейного члена $z\rho$:

$$\boxed{-(1+1,8\gamma) + 1 + \ell = 0} \quad /12/$$

Возникает два резонанса:

$$\begin{aligned} \ell = 2, & \quad \gamma = 1,11, & \quad r = 178; \\ \ell = 3, & \quad \gamma = 1,67, & \quad r = 315. \end{aligned} \quad /13/$$

Коэффициент, определяющий интенсивность этих двух резонансов, равен

$$C_{\ell}^{(1)} = \frac{a_{\ell}}{2} \left\{ \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} (1 + 1,8\gamma) - i \left[\frac{1}{2} \epsilon^2 (1 + 1,8\gamma)^2 \frac{1}{\lambda N} + i \frac{2,8}{2} \frac{\epsilon^2}{r} (1 + 1,8\gamma) \right] \right\}, \quad /14/$$

Значения отдельных слагаемых в фигурных скобках /14/ равны соответственно:

$$\begin{aligned} \text{при } \ell = 2 & \quad 4,3 \cdot 10^{-3}, & \quad 6,6 \cdot 10^{-3}, & \quad 2,1 \cdot 10^{-1}; \\ \text{при } \ell = 3 & \quad 22,5 \cdot 10^{-3}, & \quad 11,7 \cdot 10^{-3}, & \quad 1,6 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad /15/$$

Модуль коэффициента

$$\kappa_{\ell}^{(1)} = \frac{2 C_{\ell}^{(1)}}{a_{\ell}}$$

равен:

$$\begin{aligned} \text{при } \ell = 2 & \quad |\kappa_2^{(1)}| = 9,1 \cdot 10^{-3}; \\ \ell = 3 & \quad |\kappa_3^{(1)}| = 27 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad /16/$$

Определим ширину резонанса как

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\pi}{1,8 \frac{dy}{d\theta}}}, \quad /17/$$

$$\text{где } \frac{dy}{d\theta} = \frac{2eV_0}{2\pi m} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^9} \approx 3,2 \cdot 10^{-5}, \quad \text{откуда} \quad /18/$$

$$\Gamma = 3,3 \cdot 10^2$$

Таким образом, ширина резонанса, благодаря высоким значениям V_0

оказывается достаточно узкой по сравнению с шириной резонанса в синхротроне.

Оценим величину деполаризации

$$|s'| = |\kappa| \frac{a}{2} \Gamma, \quad /19/$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \ell = 2 & \quad |s_2^{(1)}| = |\kappa_2^{(1)}| \frac{a_2}{2} \Gamma = 1,5 a; \\ \ell = 3 & \quad |s_3^{(1)}| = 4,5 a_3. \end{aligned}$$

Для выполнения условий $|s_2^{(1)}| < 1$ и $|s_3^{(1)}| < 1$, необходимо, чтобы

$$\boxed{a_2 < 0,67 \text{ см}}, \quad \boxed{a_3 < 0,22 \text{ см}} \quad /20/$$

Посмотрим, каким напряженностям B_{ρ} соответствуют эти допуски по a_{ℓ} . Поскольку

$$B_{\rho \ell} = \frac{r B_0 a_{\ell}}{r_0^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{3/2}}, \quad /21/$$

то

$$\begin{aligned} B_{\rho_2} &= 12,5 a_2, & r &= 178 \text{ см}, & \boxed{B_{\rho_2} < 8,4 \text{ эрстед}}; & /22/ \\ B_{\rho_3} &= 75 a_3, & r &= 315 \text{ см}, & \boxed{B_{\rho_3} < 16,5 \text{ эрстед}}. \end{aligned}$$

Аналогичные резонансы появляются на тех же радиусах при $\ell = 5$ и $\ell = 6$. Коэффициент, определяющий интенсивность этих резонансов, равен

$$C_{\ell}^{(2)} = \frac{a_{\ell}}{2} \left\{ \frac{(1 + 1,8 \gamma)}{2} \frac{\epsilon}{\lambda} + i \frac{2,8}{2} \epsilon \frac{N}{r} \right\} \quad /23/$$

/ $\ell = 5,6$ /, откуда находим

$$\kappa_{\ell}^{(2)} = \frac{2 C_{\ell}^{(2)}}{a_{\ell}}$$

$$\begin{aligned} \text{при } \ell = 5, & \quad \gamma = 1,67, & r &= 315 \text{ см} \\ & |\kappa_5^{(2)}| = |0,078 + i 0,009| = 0,08; & /24/ \\ \text{при } \ell = 6, & \quad \gamma = 1,11, & r &= 178 \text{ см} \\ & |\kappa_6^{(2)}| = 0,07. \end{aligned}$$

Затем определяем модуль вектора деполяризации /19/:

$$\begin{aligned} \ell = 5 & \quad |s_5^{(2)}|' = 13 a_5; \\ \ell = 6 & \quad |s_6^{(2)}|' = 11 a_6. \\ |s_5^{(2)}|' < 1, \text{ если } & a_5 < 0,074 \text{ см}; \\ |s_6^{(2)}|' < 1, \text{ если } & a_6 < 0,09 \text{ см}. \end{aligned} \quad /25/$$

Эти условия соответствуют требованиям на радиальные компоненты

$$B_{\rho_5} < 5,6 \text{ эрстед}, \quad B_{\rho_6} < 1,1 \text{ эрстед}. \quad /26/$$

Найдем ограничения на 8-ю гармонику искажения медианной поверхности, которая не приводит к резонансной деполяризации

$$\begin{aligned} |s_8^{(2)}| &= a_8 \frac{\epsilon}{\lambda} \frac{4}{3} = 0,05 a_8; \\ |s_8^{(2)}| < 1, \text{ если } & a_8 < 20 \text{ см}. \end{aligned} \quad /27/$$

4. Рассмотрим вопрос о том, не внесут ли дополнительных эффектов деполяризации нелинейные члены, описывающие связь вертикальных и радиальных колебаний.

Условия появления таких резонансов имеют вид:

$$\boxed{- / 1 + 1,8 \gamma / + 1 + 0,24 \pm - \omega_{\rho} = 0} \quad /28/$$

где ω_{ρ} изменяется в пределах от 1 до 1,7 за время ускорения, так что отсюда видно, что резонанс связи не может осуществляться.

5. Учет влияние вынужденных радиальных колебаний. Как известно^{/2/}, амплитуда этих колебаний ρ_k связана с коэффициентами b_k при соответствующей гармонике азимутальной асимметрии следующим соотношением:

$$\rho_k = \frac{b_k}{(k^2 + \omega_s^2 - 1)} r, \quad /29/$$

где

$$B_s = B(r) [1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\theta + \alpha_k)] . \quad /30/$$

Резонанс возможен при $k = 2$;

$$\boxed{- / 1 + 1,8 \gamma / + 1 + 0,24 + 2 = 0} ; \quad /31/$$

$$\gamma = \frac{2,24}{1,8} = 1,24; \quad r = 235 \text{ см.}$$

Расчет показывает, что деполяризация оказывается пренебрежимо малой.

6. Рассмотрим резонанс, обусловленный связью между радиальными колебаниями и искажениями медианной поверхности.

$$B_{\rho} = \frac{\partial B_s}{\partial r} z + \frac{\partial^2 B_s}{\partial r^2} \rho z, \quad /32/$$

$$B_{\theta} = \frac{\partial B_s}{\partial \theta} \frac{z}{r} + \frac{\partial^2 B_s}{\partial r \partial \theta} \frac{z \rho}{r},$$

где

$$B_s(r) = B(r) + B_{\theta}(r) \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right), \quad /33/$$

$$B_{\theta}(r) = B(r) \epsilon(r),$$

Нас интересуют вторые слагаемые, пропорциональные ρz . Интенсивность резонансов определяется коэффициентом при ρz :

$$\frac{\partial^2 B_s}{\partial r^2} = \frac{d^2 B(r)}{dr^2} + \frac{d^2 B_{\theta}}{dr^2} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + \frac{2}{\lambda} \frac{dB_{\theta}}{dr} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) -$$

$$- \frac{1}{\lambda^2} B_{\theta} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right); \quad /34/$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r \partial \theta} \frac{1}{r} = -\frac{N}{r} \frac{dB_z}{dr} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right) + \frac{N}{r} \frac{B_z}{\lambda} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\theta\right);$$

где

$$\frac{d^2 B(r)}{dr^2} = \frac{B_0}{r_0^2} \frac{1 + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{5/2}} \quad /35/$$

Возможные резонансы определяются соотношением

$$\boxed{-\frac{1}{1 + 1,8 \gamma} - \frac{1}{1 + \ell} \pm \omega_\rho = 0}, \quad /36/$$

где $\omega_\rho = \gamma$.

В результате получаем положения резонансов

$\ell = 3$	$\gamma = 1,07$	$r = 144$ см ;	
$\ell = 4$	$\gamma = 1,43$	$r = 284$ см ;	/37/
$\ell = 1$	$\gamma = 1,25$	$r = 235$ см .	

Интенсивность резонанса $\ell = 3$ и $\ell = 1$ определяется вкладом следующих членов:

$$C_\ell^{(3)} = \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{1}{B(r)} \frac{d^2 B(r)}{dr^2} (1 + 1,8 \gamma),$$

$$C_\ell^{(4)} = \frac{2}{\lambda} \frac{dB_z}{dr} \frac{\epsilon}{NB(r)} (1 + 1,8 \gamma)^2 \frac{1}{2} \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2}, \quad /38/$$

$$C_\ell^{(5)} = \frac{1}{2} \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} \frac{\epsilon}{B(r)} 2,8 (1 + 1,8 \gamma).$$

Интенсивность резонанса $\ell = 4$ зависит также от следующих коэффициентов:

$$C_\ell^{(6)} = \frac{1}{2} \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{2}{\lambda} \frac{dB_z}{dr} \frac{1}{B(r)} (1 + 1,8 \gamma),$$

$$C_\ell^{(7)} = \frac{1}{2} \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{B_z}{\lambda^2 B(r)} (1 + 1,8 \gamma),$$

$$C_\ell^{(8)} = \frac{1}{2} \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{d^2 B_z}{dr^2} \frac{1}{B(r)} (1 + 1,8 \gamma), \quad /39/$$

$$C_\ell^{(9)} = \frac{1}{2} \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{NB_z}{\lambda B(r)} \frac{2,8}{r},$$

$$C_\ell^{(10)} = \frac{1}{2} \frac{a_\ell}{2} \frac{\rho_m}{2} \frac{N}{r} \frac{dB_z}{dr} \frac{2,8}{B(r)}.$$

Полагая максимальную амплитуду радиальных колебаний равной 5 см, находим вектор деполяризации:

$$\begin{aligned} \ell = 3 & \quad |s'_3| = 10^{-2} a_3, \\ \ell = 1 & \quad |s'_1| = 1,4 \cdot 10^{-1} a_1, \\ \ell = 4 & \quad |s'_4| = 3,5 a_4, \end{aligned} \quad /40/$$

Члены, аналогичные /39/, дают кроме этого следующие резонансы:

$$\begin{aligned} \ell = 5 & \quad |s'_5| = 2,8 a_5, \quad r = 144 \text{ см}; \\ \ell = 7 & \quad |s'_7| = 3,6 a_7, \quad r = 235 \text{ см}. \end{aligned}$$

Итак, дополнительными условиями, которые необходимо выполнить, для получения малой деполяризации, являются:

$a_4 < 0,28 \text{ см}$	при	$r = 284 \text{ см};$	$B_{\rho_4} < 11,8 \text{ э}$	/41/
$a_5 < 0,35 \text{ см}$	"	$r = 144 \text{ см};$	$B_{\rho_5} < 3,15 \text{ э}$	
$a_7 < 0,28 \text{ см}$	"	$r = 235 \text{ см};$	$B_{\rho_7} < 6,3 \text{ э}$	

7. До сих пор мы не учитывали, что орбита движения протонов вследствие азимутальной вариации магнитного поля не является окружностью. Отклонения от окружности можно рассматривать как вынужденные радиальные колебания. Согласно /29/

$$\rho_s = \frac{b}{s} \frac{r}{64 + \omega^2 - 1} = 4,7 \cdot 10^{-3} r. \quad /42/$$

Радиальные колебания с такой частотой могут дать резонансы связи со второй и третьей гармониками искажений медианной поверхности. Интенсивность резонансов определяется в основном коэффициентом

$$C_{\ell}^{(11)} = \frac{\rho_s}{2} \frac{a_{\ell}}{2} \frac{\epsilon}{\lambda^2} /1 + 1,8 \gamma / \quad /43/$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \text{При } \ell = 2 & \quad |s_2^{(11)}| = a_2, \\ \text{при } \ell = 3 & \quad |s_3^{(11)}| = 2,5 a_3. \end{aligned} \quad /44/$$

Требование малой деполяризации $|s| < 1$ удовлетворяется при условии:

$$\begin{aligned} a_2 < 1 \text{ см} & \quad \text{при} & \quad r = 178 \text{ см}, \\ a_3 < 0,4 \text{ см} & \quad \text{при} & \quad r = 315 \text{ см}. \end{aligned} \quad /45/$$

Видно, что эти условия слабее, чем требование /20/.

8. Мы не рассмотрели детально деполяризацию, вызванную электрическим ускоряющим полем. Однако оценки показывают, что деполяризация электрическим полем оказывается незначительной.

Деполяризация при выводе из ускорителя не рассматривается ввиду отсутствия данных о конструкции выводной системы.

9. В таблицах 1 и 2 суммированы основные результаты данных расчетов.

Т а б л и ц а 1

Происхождение резонанса	Радиус равновесной орбиты r				
	144 см	178 см	235 см	284 см	315 см
Искажение медианной поверхности		$a_2 < 0,67$ см $a_6 < 0,09$ см		$a_3 < 0,22$ см $a_5 < 0,074$ см	
Свободные вертикальные колебания	нерезонансная деполаризация				
Связь радиальных и вертикальных колебаний	нерезонансная деполаризация				
Вынужденные радиальные колебания	$b_2 < 1$				
Связь радиальных колебаний с искажениями медианной поверхности	$a_5 < 0,35$ см	$a_2 < 1$ см	$a < 7$ см $a_7 < 0,28$ см ⁴	$a < 0,28$ см	$a_3 < 0,4$ см

Т а б л и ц а 2

r см	144	178	235	284	315
a_1			< 7		
a_2		$< 0,67$			
a_3					$< 0,22$
a_4				$< 0,28$	
a_5	$< 0,35$				$< 0,074$
a_6		$< 0,09$			
a_7			$< 0,28$		
a_8	нерезонансная				

В заключение авторы выражают благодарность В.П. Дмитриевскому и В.В.Кольге за полезные замечания.

Л и т е р а т у р а

1. Ю.А. Плис, Л.М. Сороко. Деполяризация протонов при ускорении в синхротроне. Препринт ОИЯИ, Р-1449, Дубна, 1963.
2. Л.Л. Гольдин, С.В. Скачков, К.Н. Шорин. Магнитные измерения в ускорителях заряженных частиц. Госатомиздат, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 декабря 1963 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3560. Тираж 310. 0,7 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н.Зрелова Февраль 1964 г.

СТАТ
43



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.Ш. Вашакидзе, Г.А. Чилашвили

P-1579

**ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ ГИПЕРТРИТИЯ
В СЛУЧАЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Дубна 1964

P-1579

Вашакидзе И.Ш., Чилашвили Г.А.

Энергия связи гипертрипия в случае нелокального взаимодействия

В работе проведен расчет энергий связи гипертрипия в случае нелокального факторизирующегося потенциала с применением гипотезы глобальной симметрии и с учетом $\Lambda N \rightleftharpoons \Sigma N$ переходов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Vashakidze I.Sh., Chilashvili G.A.

P-1579

The Hypertritium Binding Energy in Case of Nonlocal Interaction

The hypertritium binding energy is calculated in the case of the nonlocal but separable potential. The global symmetry hypothesis is applied and account is taken of $\Lambda N \rightleftharpoons \Sigma N$ transitions.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

И.Ш. Вашакидзе, Г.А. Чилашвили

P-1579

ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ ГИПЕРТРИТИЯ
В СЛУЧАЕ НЕЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Направлено в ДАН СССР

Дубна .1984

Вопрос изучения гиперядер важен как с точки зрения выяснения целого ряда свойств атомных ядер, так и для изучения элементарных актов взаимодействия между сильно взаимодействующими частицами - гиперонами и нуклонами. Получение ядер типа $\Lambda\Lambda^X$ дало возможность применять гиперядра также для изучения Λ - Λ взаимодействия^{/1/}. Поэтому последнее время изучению гиперядер уделяется особое внимание.

В настоящей работе изучается гипертриплет в предположении нелокального факторизуемого взаимодействия между любой парой частиц с применением гипотезы глобальной симметрии Гелл-Манна^{/2/}. Принцип глобальной симметрии предполагает, что $(\Sigma \Lambda \pi)$ - и $(\Sigma \Sigma \pi)$ - взаимодействия тесным образом связаны с $(NN\pi)$ - взаимодействием, что позволяет связать нуклон-нуклонный потенциал с пионной компонентой гиперон-нуклонного потенциала. Гипотеза глобальной симметрии является приближенной, так как, например, наблюдаются такие реакции, которые были бы запрещены в том случае, если бы глобальная симметрия выполнялась точно. Поэтому при изучении гиперядер гипотезу глобальной симметрии рассматривают лишь как удобную модель для объяснения экспериментальных фактов. Заметим, что с ее помощью можно получить удивительно хорошее качественное согласие с результатами наблюдений^{/3/}.

Применяя вариационный метод, Далитц и Даунс нашли энергии связи легких гиперядер, в том числе и Λ^4 . Они пользовались спин-зависимым центральным потенциалом Гаусса и получили, что Λ - N потенциал характеризуется большим притяжением в синглетном состоянии, чем в триплетном. Кроме того, они объяснили факт несуществования гипердейтрона.

При рассмотрении Λ - N -взаимодействия мы должны принять во внимание возможность перехода $\Lambda N \rightleftharpoons \Sigma N$, и поэтому, кроме $\Lambda N \rightleftharpoons \Lambda N$ и $\Sigma N \rightleftharpoons \Sigma N$ потенциалов, мы должны иметь также $\Lambda N \rightleftharpoons \Sigma N$ потенциал. Отсюда ясно, что полную задачу рассеяния мы должны описать зацепляющимися уравнениями Шредингера, в которых учитывается возможность таких переходов.

Как известно, решить задачу трех тел для локальных потенциалов невозможно. С другой стороны, в случае нелокального факторизуемого двухчастичного потенциала для проблемы трех неодинаковых частиц получается система одномерных интегральных уравнений, которые можно легко решить с помощью электронной счетной машины. Такой потенциал для гиперядер рассматривается в работе^{/4/}, где с помощью

гипотезы глобальной симметрии устанавливаются параметры потенциала гиперон-нуклонного взаимодействия и доказывається факт несуществования гипердейтрона. При расчете энергии связи ΛN^3 авторы указанной работы применяют вариационный метод для локальных потенциалов с параметрами, подобранными для случая нелокального взаимодействия, а также не учитывают возможность $\Lambda N \rightleftharpoons \Sigma N$ переходов.

В настоящей работе найдена полная энергия связи ΛN^3 путем решения системы связанных интегральных уравнений с учетом $\Lambda N \rightleftharpoons \Sigma N$ переходов.

§ 1. Выбор потенциалов взаимодействия

Для потенциалов гиперон-нуклонного взаимодействия в $T=1/2$ состоянии введем следующие обозначения: V^{YN} - представляет потенциал гиперон-нуклонного взаимодействия: $Y+N \rightleftharpoons Y+N$; кроме этих потенциалов, как мы отметили выше, будут участвовать $V^{\Lambda\Sigma}$ и $V^{\Sigma\Lambda}$ потенциалы, описывающие процессы $N+\Lambda \rightleftharpoons \Sigma+N$. Если мы применим модель глобальной симметрии, то получим следующие соотношения, связывающие потенциалы нуклон-нуклонного взаимодействия с потенциалами гиперон-нуклонного и гиперон-гиперонного взаимодействия /5/:

$$\begin{aligned} V^{N\Lambda} &= \frac{1}{4}(3V_1^{NN} + V_0^{NN}) \\ V^{N\Sigma} &= \frac{1}{4}(3V_0^{NN} + V_1^{NN}) \\ V^{\Lambda\Sigma} &= V^{\Sigma\Lambda} = \frac{\sqrt{3}}{4}(V_1^{NN} - V_0^{NN}), \end{aligned} \quad (1)$$

где через V_T^{NN} обозначен нуклон-нуклонный потенциал в изотопическом состоянии T .

Рассмотрим теперь нелокальный факторизующий потенциал следующего вида /6/:

$$(\vec{p} | V_\ell | \vec{p}') = \sum \xi_{\ell m}(p) \xi_{\ell m}(p') Y_{\ell m}(\vec{p}) Y_{\ell m}(\vec{p}'). \quad (2)$$

Ясно, что V_ℓ действует на функцию как проекционный оператор, он выделяет только состояние с определенным ℓ . Имея ввиду применение (1) для гипертриплетта, мы рассмотрим только случай с $\ell=0$. По этой причине для потенциала (2) соотношения (1) примут весьма простой вид /4/:

$$V_s^{N\Lambda} = \frac{1}{4} V_s^{NN}, \quad V_s^{N\Sigma} = \frac{1}{3} V_s^{N\Lambda}, \quad (V_s^{\Lambda\Sigma})^2 = V_s^{N\Lambda} V_s^{N\Sigma} \quad (3)$$

$$V_t^{N\Lambda} = \frac{1}{4} V_t^{NN}, \quad V_t^{N\Sigma} = 3 V_t^{N\Lambda}, \quad (V_t^{\Lambda\Sigma})^2 = V_t^{N\Lambda} V_t^{N\Sigma} \quad (4)$$

Индекс T опущен.

В качестве нуклон-нуклонного потенциала выберем потенциал

$$(\vec{p} | V^{NN} | \vec{p}') = - \frac{\lambda^{NN}}{2 \mu_{NN}} g(\vec{p}) g(\vec{p}'), \quad (5)$$

где λ^{NN} - глубина $N-N$ - взаимодействия, μ_{NN} приведенная масса системы, а $g(\vec{p})$ - потенциал Юкавы

$$g(p) = (\beta^2 + p^2)^{-1}, \quad (6)$$

где $1/\beta$ - радиус взаимодействия. λ^{NN} и β можно взять из данных по нуклон-нуклонному взаимодействию при малых энергиях.

Известно, что гипертриплет находится в $T=0$ и $I=1/2$ состоянии, причем нейтрон и протон в ΛH^3 характеризуется 3S - состоянием, а $N-\Lambda$ и $N-\Sigma$ взаимодействия происходят в 1S состоянии. Поэтому нам понадобятся потенциалы $V_{N\Sigma}^{N\Sigma}$ и $V_{N\Lambda}^{N\Lambda}$ только в синглетном состоянии, так что модель глобальной симметрии дает следующие факторизующиеся потенциалы:

$$V_{N\Lambda} = - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\lambda_s}{2 \mu_{NN}} \right) g_s(p) g_s(p')$$

$$V_{N\Sigma} = - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_s}{2 \mu_{NN}} \right) g_s(p) g_s(p') \quad (7)$$

$$V_{\Lambda\Sigma} = - \frac{\sqrt{13}}{4} \left(\frac{\lambda_s}{2 \mu_{NN}} \right) g_s(p) g_s(p')$$

$$V_{NN}^{s,t} = - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\lambda_{s,t}}{2 \mu_{NN}} \right) g_{s,t}(p) g_{s,t}(p').$$

Здесь все потенциалы зависят от нуклон-нуклонных параметров; индексы s и t указывают на принадлежность параметров к синглетному и триплетному состоянию соответственно. В качестве $g(\vec{p})$ функции ниже мы будем брать выражение (6).

Проблема двух тел дает следующие значения параметров потенциала взаимодействия

$$\beta_t^{NN} = 1,4488 f^{-1}, \quad \lambda_t^{NN} = 0,4143 f^{-3}, \quad \beta_s^{NN} = 1,158 f^{-1}, \quad \lambda_s^{NN} = 0,1467 f^{-3}. \quad (8)$$

При вычислении энергии связи ΛH^3 мы будем пользоваться этими значениями так, что в теории у нас не будет свободного параметра.

§ 3. Расчет энергии связи

Выпишем сначала зацепляющиеся уравнения Шредингера для гипертрития, учитывая $\Lambda \leftrightarrow \Sigma$ переходы в случае локального взаимодействия. Эти уравнения в наглядных обозначениях имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & [T_1 + T_2 + T_3 - \epsilon^{(\Lambda)}] \Psi_{\Lambda}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{\Lambda}) = \\ & = V_{N_1 \Lambda}(\vec{r}_1 - \vec{r}_{\Lambda}) \Psi_{\Lambda} + V_{N_2 \Lambda}(\vec{r}_2 - \vec{r}_{\Lambda}) \Psi_{\Lambda} + V_{N_1 N_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Psi_{\Lambda} + \\ & + V^{\Lambda \Sigma}(\vec{r}_{\Lambda} - \vec{r}_1) \psi_{\Sigma} + V^{\Lambda \Sigma}(\vec{r}_{\Lambda} - \vec{r}_2) \psi_{\Sigma}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & [T_1 + T_2 + T_3 - \epsilon^{(\Sigma)}] \Psi_{\Sigma}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{\Sigma}) = \\ & = V_{N_1 \Sigma}(\vec{r}_1 - \vec{r}_{\Sigma}) \Psi_{\Sigma} + V_{N_2 \Sigma}(\vec{r}_2 - \vec{r}_{\Sigma}) \Psi_{\Sigma} + V_{N_1 N_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Psi_{\Sigma} + \\ & + V^{\Sigma \Lambda}(\vec{r}_{\Sigma} - \vec{r}_1) \Psi_{\Lambda} + V^{\Sigma \Lambda}(\vec{r}_{\Sigma} - \vec{r}_2) \Psi_{\Lambda}, \end{aligned} \quad (10)$$

где энергия связи $\epsilon^{(\Lambda)}$ отличается от $\epsilon^{(\Sigma)}$ на величину разности масс

$$\delta = c^2(M_{\Sigma} - M_{\Lambda}). \quad (11)$$

К уравнениям для нелокального факторизующегося взаимодействия можно перейти известным путем ^{/7,8/}. Учитывая формулы ^{/7/}, окончательно получаем систему интегральных уравнений в импульсном представлении

$$\begin{aligned} & [1 - \frac{3}{4} \lambda_0 N_{23}^{\Lambda}(p_1)] \Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{p}_1) - \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda_0 N_{23}^{\Lambda}(p_1) \Phi_{\Sigma}^{\circ}(\vec{p}_1) = \\ & = \lambda_0 \int \Gamma_{\Lambda}^{-1}(\vec{x} + \frac{\vec{p}_1}{a_{\Lambda}}, \vec{p}_1) g_0(\vec{x} + \frac{\vec{p}_1}{a_{\Lambda}}) g_t(p_1 + \frac{1}{2} \vec{x}) \Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{x}) d\vec{x} + \\ & + \frac{3}{4} \lambda_0 \int \Gamma_{\Lambda}^{-1}(\vec{x} + \frac{\vec{p}_1}{a_{\Lambda}}, \vec{p}_1) g_0(\vec{x} + \frac{\vec{p}_1}{a_{\Lambda}}) g_0(p_1 + \frac{\vec{x}}{a_{\Lambda}}) [\Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{x}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi_{\Sigma}^{\circ}(\vec{x})] d\vec{x}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & [1 - \frac{1}{4} \lambda_0 N_{31}^{\Sigma}(p_2)] \Phi_{\Sigma}^{\circ}(\vec{p}_2) - \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda_0 N_{31}^{\Sigma}(p_2) \Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{p}_2) = \\ & = \lambda_0 \int \Pi_{\Sigma}^{-1}(\vec{x} + \frac{\vec{p}_2}{a_{\Sigma}}, \vec{p}_2) g_0(\vec{x} + \frac{\vec{p}_2}{a_{\Sigma}}) g_0(p_2 + \frac{1}{2} \vec{x}) \Phi_{\Sigma}^{\circ}(\vec{x}) d\vec{x} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda_0 \int \Pi_{\Sigma}^{-1}(\vec{x} + \frac{\vec{p}_2}{a_{\Sigma}^0}, \vec{p}_2) g_1(\vec{x} + \frac{\vec{p}_2}{a_{\Sigma}^0}) g_1(\vec{p}_2 + \frac{\vec{x}}{a_{\Sigma}^0}) [\Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{x}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi_{\Sigma}^{\circ}(\vec{x})] dx$$

$$[1 - \lambda_1 N_{12}^{\Lambda}(p_3)] \Phi_{\Lambda}^{\circ}(p_3) = \frac{3}{2} \lambda_0 \int K_{\Lambda}^{-1}(\vec{x} + \frac{1}{2} \vec{p}_3, \vec{p}_3) g_1(\vec{x} + \frac{1}{2} \vec{p}_3) \cdot$$

$$g_1(\vec{p}_3 + \frac{\vec{x}}{a_{\Lambda}}) [\Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{x}) + \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi_{\Sigma}^{\circ}(\vec{x})] dx$$

где, например, функция $\Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{p})$ определяется следующим образом:

$$\Phi_{\Lambda}^{\circ}(\vec{p}_1) = \int g_1(k'_{23}) \Psi_{\Lambda}(k'_{23}, \vec{p}_1) dk'_{23} \quad (13)$$

k'_{23} и \vec{p}_1 импульсы, соответствующие координатам Якоби, а через a_{Λ} , a_{Λ}° , a_{Σ} , a_{Σ}° обозначены величины

$$a_{\Lambda, \Sigma} = \frac{M + M_{\Lambda, \Sigma}}{M_{\Lambda, \Sigma}}, \quad a_{\Lambda, \Sigma}^{\circ} = \frac{M + M_{\Lambda, \Sigma}}{M} \quad (14)$$

Функции $N_{ik}^{\Lambda}(p)$ определяются по формулам:

$$N_{23}^{\Lambda, \Sigma}(p) = \int \frac{g_1^2(\vec{x}) d\vec{x}}{\Gamma_{\Lambda, \Sigma}(\vec{x}, \vec{p})} \quad (15)$$

$$N_{12}^{\Lambda}(p) = \int \frac{g_1^2(\vec{x}) d\vec{x}}{K_{\Lambda}(\vec{x}, \vec{p})} \quad (16)$$

$$N_{31}^{\Sigma}(p) = \int \frac{g_1^2(\vec{x}) d\vec{x}}{\Pi_{\Sigma}(\vec{x}, \vec{p})} \quad (17)$$

где

$$K_{\Lambda}(\vec{x}, \vec{p}) = \gamma^2 + \vec{x}^2 + \frac{2M + M_{\Lambda}}{4M_{\Lambda}} p^2, \quad (18)$$

$$\Gamma_{\Lambda, \Sigma}(\vec{x}, \vec{p}) = \gamma^2 + \frac{a_{\Lambda, \Sigma}}{2} \vec{x}^2 + \frac{2M + M_{\Lambda, \Sigma}}{2(M + M_{\Lambda, \Sigma})} p^2 \quad (19)$$

$$\Pi_{\Sigma}(\vec{x}, \vec{p}) = \gamma^2 + \gamma_0^2 + \frac{a_{\Sigma}}{2} \vec{x}^2 + \frac{2M + M_{\Sigma}}{2(M + M_{\Sigma})} p^2, \quad (20)$$

γ и γ_0 определяются формулами

$$\gamma^2 = \frac{M \epsilon^{\Lambda}}{h^2}, \quad \gamma_0^2 = \frac{M \delta}{h^2} \quad (21)$$

После интегрирования по углам система интегральных уравнений (12) дает систему трех одномерных интегральных уравнений, которые легко решить с помощью вычислительных машин. Но мы можем заранее упростить эту систему, учитывая особенность системы ΛH^3 . Энергия связи ΛH^3 лишь на малую величину отличается от энергии связи дейтрона; это значит, что ΛH^3 является очень рыхлой системой и, по крайней мере, одна частица всегда находится сравнительно далеко от остальных. Большим расстояниям соответствует малый импульс, а это означает, что в этом случае для решения системы (12) можно применить приближение, рассмотренное Митра¹⁹⁾ для решения проблемы ${}_1H^3$. Это приближение заключается в пренебрежении $(\vec{x}\vec{p})$ произведением в интенсивных уравнениях. Отметим, что это приближение для нашей задачи будет гораздо лучшим, чем для случая ${}_1H^3$.

В этом приближении решения системы интегральных уравнений даются выражениями:

$$\begin{aligned} \Phi_0^\Lambda(\vec{p}) = h^\Sigma(p) \left[A \frac{g_0(\frac{p}{a\Lambda}) g_0(p)}{\gamma^2 + \frac{1}{2} a_\Lambda p^2} + B \frac{g_0(\frac{p}{a\Lambda}) g_t(p)}{\gamma^2 + p^2} \right] + \\ + h_2^\Lambda(p) \left[(F+H) \frac{g_0(\frac{p}{a\Sigma}) g_0(p)}{\gamma^2 + \gamma_0^2 + \frac{a\Sigma}{2} p^2} + G \frac{g_0(\frac{p}{a\Sigma}) g_0(p)}{\gamma^2 + \gamma_0^2 + p^2} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0^\Sigma(p) = h_3^\Lambda(p) \left[(F+H) \frac{g_0(\frac{p}{a\Sigma}) g_0 p}{\gamma^2 + \gamma_0^2 + \frac{a\Sigma}{2} p^2} + G \frac{g_0(\frac{p}{a\Sigma}) g_0(p)}{\gamma^2 + \gamma_0^2 + p^2} \right] + \\ + h_4^\Sigma(p) \left[(A+C) \frac{g_0(\frac{p}{a\Lambda}) g_0(p)}{\gamma^2 + \frac{a\Lambda}{2} p^2} + B \frac{g_0(\frac{p}{a\Lambda}) g_0(p)}{\gamma^2 + p^2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Phi_t^\Lambda(p) = (D+E) \frac{g_t(\frac{p}{2}) g_0(p)}{h_5^\Lambda(p) [\gamma^2 + \frac{a\Lambda}{2} p^2]} \quad (24)$$

где

$$h_1^\Sigma(p) = \mu(p) \left[1 - \frac{1}{4} \lambda_0 N_{13}^\Sigma(p) \right],$$

$$h_2^\Lambda(p) = \mu(p) \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda_0 N_{13}^\Lambda(p),$$

$$\begin{aligned}
 h_3^\Lambda(p) &= \mu(p) [1 - \frac{1}{4} \lambda_0 N_{13}^\Lambda(p)], \\
 h_4^\Sigma(p) &= \mu(p) \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda_0 N_{13}^\Sigma(p), \\
 h_5^\Lambda(p) &= 1 - \lambda_1 N_{12}^\Lambda(p),
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

a

$$\mu(p) = \left\{ 1 - \frac{\lambda_0}{4} [3 N_{13}^\Lambda(p) + N_{13}^\Sigma(p)] \right\}^{-1}.
 \tag{26}$$

Входящие в формулы (22) - (24) величины A, B, C, D, E, F, G, H являются постоянными, зависящими от энергии и от параметров потенциала; они определяются в виде интегралов, под знаком которых находятся функции $\Phi_0^\Lambda(\vec{p}), \Phi_0^\Sigma(\vec{p})$ и $\Phi_1^\Lambda(\vec{p})$, например, C определяется формулой:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{4} \lambda_0 \gamma^2 \beta_0^4 \int \frac{g_0(\vec{x}) g_0(\frac{\vec{x}}{\beta\Lambda}) \Phi_0^\Sigma(\vec{x}) dx}{(\gamma^2 + \frac{\beta\Lambda}{2} x^2)}.
 \tag{27}$$

Из (22) - (24) системы ясно, что собственные значения энергии определяются из условия равенства нулю детерминанта восьмого порядка.

Численные значения корней детерминанта были найдены с помощью вычислительной машины.

Наименьший корень этого детерминанта $a = \frac{\gamma}{\beta_0} = 0,228$ соответствует полной энергии связи $\epsilon(\Lambda N^3) = 2,904$ Мэв, что находится в удовлетворительном согласии с экспериментальной величиной энергии связи $\epsilon \approx 2,3$ Мэв.

Отметим, что в наших расчетах можно перейти к пределу, когда исключается возможность $\Lambda \rightleftharpoons \Sigma$ переходов. В этом случае энергия находится из условия равенства нулю детерминанта третьего порядка. Наименьший корень этого детерминанта соответствует энергии связи $\epsilon(\Lambda N^3) = 4,6$ Мэв. Этот результат показывает, что учет $\Lambda \rightleftharpoons \Sigma$ переходов играет важную роль.

Таким образом, применяя модель глобальной симметрии и взяв взаимодействие между частицами в виде нелокального факторизирующегося потенциала в форме Ямагучи с учетом возможности $\Lambda \rightleftharpoons \Sigma$ переходов, можно объяснить наблюдаемую величину полной энергии связи гипертрития.

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить В.Г. Соловьева

Л и т е р а т у р а

1. Hiroshi Nakamura, Physics Letters, 6, 207, 1963.
2. Gell-Mann M., Phys.Rev., 106, 1296, 1957.
3. Р. Далици. "Современные проблемы ядерной физики", Госатомиздат, 1963 г., стр.50.
4. G. Rajasekaran, S. Biswas. Phys.Rev., 122, 712, 1961.
5. D. Amati, B. Vitale. Fortschr.d.Phys., 7, 375, 1959.
6. Yoshio Yamaguchi. Phys.Rev., 95, 1628, 1954.
7. В.Ф. Харченко. УФН, т. VII , № 582, 1962.
8. Г.А. Чилашвили. Сообщения АН СССР, т. XXX11:1,43, 1963.
9. A.N. Mitra. Nucl. Phys., 32, 529, 1962;
A.N. Mitra, V.S. Bhasin. Phys.Rev., 131, 1265, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3637. Тираж 400. 0,6 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р.Сараница Февраль 1984 г.

44



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.Н. Фаустов

P-1572

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД
В ЗАДАЧЕ ОБ УРОВНЯХ
ЭНЕРГИИ ПОЗИТРОНИЯ

Дубна 1964

P-1572

Фаустов Р.Н.

Квазипотенциальный метод в задаче об уровнях энергии
позитрония

На основе квазипотенциального метода в квантовой теории поля рассмотрено связанное состояние системы электрон+позитрон (позитроний). Получена величина расщепления основного уровня энергии позитрония с точностью до α^5 (α - постоянная тонкой структуры). Результат согласуется с предыдущими вычислениями, однако, новый метод значительно упрощает весь расчет.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Faustov R.N.

P-1572

Quasipotential Method in the Problem about the Positronium
Energy Levels

The bound state of the electron-positron system (positronium) is considered on the basis of the quasipotential method in quantum field theory. The magnitude of the splitting of the ground energy level of the positronium is obtained with the accuracy up to α^5 (α is the fine structure constant). The result is in agreement with earlier calculations, however the new method simplifies essentially the whole procedure.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

Р.Н. Фаустов

Р - 1572

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД
В ЗАДАЧЕ ОБ УРОВНЯХ
ЭНЕРГИИ ПОЗИТРОНИЯ

Дубна 1964

В в е д е н и е

Проблема двух частиц в квантовой теории поля является одной из центральных и принципиально важных, так как мы получаем здесь наиболее детальное описание динамики взаимодействия. Обычно при исследовании этой проблемы использовалось либо уравнение Бете-Солпитера, либо метод дисперсионных соотношений и условие унитарности. При описании системы двух частиц с помощью уравнения Бете-Солпитера возникает ряд трудностей, связанных с четырехмерностью волновой функции (неясный физический смысл относительного времени двух частиц, отсутствие положительности нормы волновой функции и др.). Уравнения, получающиеся в методе дисперсионных соотношений в комбинации с условием унитарности имеют существенно нелинейный характер, что сильно затрудняет их исследование и приводит к большой неоднозначности решений.

В последнее время был предложен квазипотенциальный метод описания системы двух частиц^{/1/}. Уравнения, получающиеся в этом методе, являются трехмерными и линейными, так что сохраняется основное достоинство уравнения Бете-Солпитера - линейность, в то же время отсутствуют указанные выше недостатки. Амплитуда рассеяния описывается уравнением типа Липпмана - Швингера, а волновая функция - уравнением типа Шредингера с комплексным потенциалом, зависящим от энергии. Потенциал для этих уравнений строится методом двухвременных функций Грина. Если ограничиться задачей получения физической амплитуды рассеяния, то потенциал можно определить по теории возмущений с помощью матричных элементов рассеяния на массовой поверхности. Как показано в^{/2/}, оба метода построения потенциала дают одинаковые результаты при вычислении энергетических уровней системы. Однако второй метод обладает существенными преимуществами, так как оперирует с величинами на массовой поверхности и, следовательно, допускает использование свойств аналитичности и унитарности.

В настоящей работе демонстрируется применение квазипотенциального метода к рассмотрению связанного состояния электрона и позитрона (позитрония). Эта система удобна тем, что ввиду малости константы связи в квантовой электродинамике, здесь допустимо разложение по теории возмущений и соответствующие результаты можно сравнить с экспериментом. Ясно, что в низшем порядке теории возмущений мы получим кулоновские уровни энергии. В следующих порядках появится расщепление этих уровней, зависящее от полного спина и полного момента системы. В работе

будет вычислено расщепление основного уровня энергии ($n=1$) с точностью до α^5 , где α - постоянная тонкой структуры.

Поправки к уровням энергии позитрония с точностью до α^4 вычислялись в /3/. Расщепление основного уровня с точностью до α^5 было впервые вычислено в /4/ с помощью уравнения типа Бете-Соллнера. Наши результаты полностью совпадают с этими вычислениями.

1. Определения

Введем T -матрицу, описывающую рассеяние двух фермионов с массой m

$$\langle f | S | i \rangle = 1 - i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \langle f | T | i \rangle, \quad (1.1)$$

где S - матрица удовлетворяет обычному соотношению унитарности

$$S^\dagger S = 1. \quad (1.2)$$

Подставляя (1.1) в (1.2) получим соотношение унитарности для T -матрицы в виде:

$$\begin{aligned} \langle f | T | i \rangle - \langle f | T | i \rangle^\dagger &= \\ &= i(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(p_f - p_n) \langle f | T | n \rangle \langle n | T | i \rangle. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В дальнейшем удобно будет работать в с.ц.и. Определим поэтому импульсы начального и конечного состояний следующим образом:

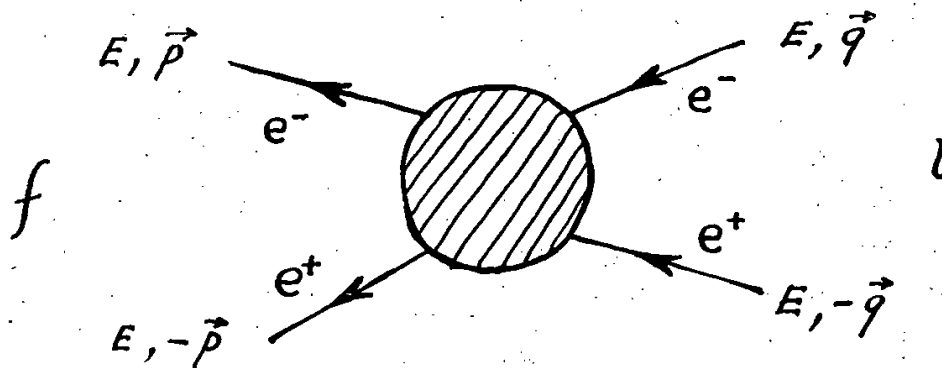


Рис. 1.

Поскольку мы находимся на массовой поверхности, то $E^2 = p^2 + m^2 = q^2 + m^2$. Тогда квадрат полной энергии в с.ц.и. $S = 4E^2 = 4(p^2 + m^2)$, а передача импульса $t = -(\vec{p} - \vec{q})^2 = -2p^2(1 - \cos\theta)$. Если в выражении (1.3) ограничиться упругой унитарностью (двухфермионным промежуточным состоянием), то мы получим

$$\begin{aligned}
 & \langle \vec{p} | T^\dagger - T | \vec{q} \rangle = -2i \operatorname{Im} \langle \vec{p} | T | \vec{q} \rangle = \\
 & = i(2\pi)^4 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^6} \delta(2E - 2\sqrt{k^2 + m^2}) \langle \vec{p} | T^\dagger | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | T | \vec{q} \rangle = \\
 & = \frac{i}{(2\pi)^2} \int dk \sqrt{k^2 + m^2} \delta(E^2 - k^2 - m^2) \theta(E) \langle \vec{p} | T^\dagger | \vec{k} \rangle \langle \vec{k} | T | \vec{q} \rangle
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

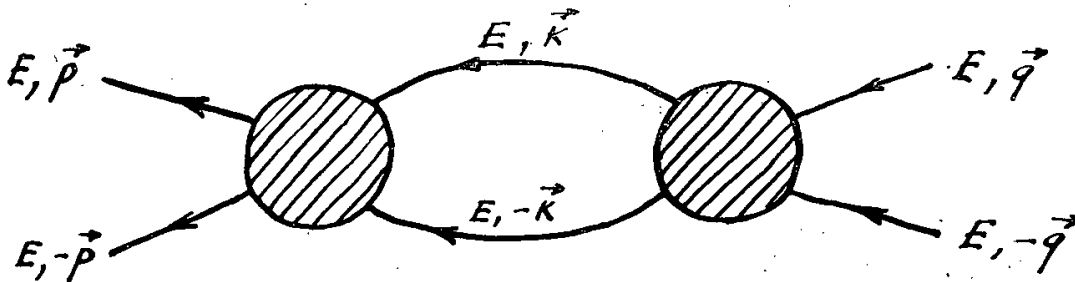


Рис. 2.

В соответствии с методом работы /1/ запишем теперь для матричного элемента T -матрицы линейное уравнение типа Липпмана-Швингера с комплексным потенциалом V . Потребуем, чтобы при действительном потенциале мы получили бы правильное двухчастичное соотношение унитарности (1.4). Эффекты запаздывания и неупругих процессов будем считать включенными в потенциал V . Это уравнение имеет вид:

$$T(\vec{p}, \vec{q}) = V(\vec{p}, \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{V(\vec{p}, \vec{k}) \sqrt{k^2 + m^2} T(\vec{k}, \vec{q})}{(E + i\epsilon)^2 - k^2 - m^2} d\vec{k} \tag{1.5}$$

Здесь $T(\vec{p}, \vec{q})$ обозначает матричный элемент рассеяния вне энергетической поверхности $E^2 = p^2 + m^2 = q^2 + m^2$. При этом T и V зависят от E как от параметра, но это не будет явно указываться.

Покажем, что в случае действительного потенциала V из уравнения (1.5) получается соотношение унитарности (1.4). Для этого перепишем (1.5) в символической форме:

$$T = V + V F T, \tag{1.6}$$

где F - "диагональная" матрица $\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\delta(\vec{k} - \vec{k}') \sqrt{k^2 + m^2}}{(E + i\epsilon)^2 - k^2 - m^2}$.

Тогда, взяв мнимую часть, имеем:

$$Im T = V(Im F)(Re T) + V(Re F)(Im T) = V(Im F)T + V F(Im T)$$

или

$$Im T = (I - VF)^{-1} V(Im F)T \quad (1.7)$$

Но из уравнения (1.6) следует

$$T = (I - VF)^{-1} V$$

Подставляя это выражение в (1.7), получим

$$Im T = T(Im F)T,$$

где

$$Im F = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \delta(E^2 - k^2 - m^2) \theta(E) \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

что в точности совпадает с (1.4).

В методе двухвременных функций Грина мы имеем уравнение /1,2,9/

$$\tilde{T}(\vec{p}, \vec{q}) = \tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{V}(\vec{p}, \vec{k}) \tilde{F}(k) \tilde{T}(\vec{k}, \vec{q}) dk \quad (1.6)$$

Амплитуда рассеяния \tilde{T} определяется через двухвременную функцию Грина двух частиц \tilde{G} :

$$-i \tilde{F} \tilde{T} \tilde{F} = \tilde{G} - i \tilde{F},$$

а

$$\tilde{F}(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon S_1(\vec{k}, E + \epsilon) S_2(-\vec{k}, E - \epsilon),$$

где S - одночастичная функция Грина фермиона.

В низшем приближении

$$\tilde{F}_0(k) = \pi \frac{\gamma_1^0 \gamma_2^0 (k^2 + m^2) - \gamma_1^0 E (m - \gamma_2^0 \vec{k}) + (m - \gamma_1^0 \vec{k}) \gamma_2^0 E - (m - \gamma_1^0 \vec{k})(m - \gamma_2^0 \vec{k})}{\sqrt{k^2 + m^2} (E^2 - k^2 - m^2)} \quad (1.9)$$

Как нетрудно видеть, $\det \tilde{F}_0(k) = 0$ и, следовательно, функция $\tilde{F}_0(k)$ не имеет обратной. Однако, уже при учете простейших радиационных поправок к одночастичным функциям Грина фермионов, $\det \tilde{F}(k)$ становится отличным от нуля, что в свою очередь позволяет последовательным образом построить квазипотенциал \tilde{V} , используя уравнение (1.8) /1,2,9/.

Для практических вычислений удобнее спроектировать уравнение (1.8) на состояния с положительной энергией (аналогично тому, как это делается в уравнении Дирака).

При этом мы получим уравнение

$$T_+(\vec{p}, \vec{q}) = V_+(\vec{p}, \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^4} \int V_+(\vec{p}, \vec{k}) F_+(k) T_+(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} \quad (1.10)$$

$$F_+(k) = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \overleftrightarrow{F}_0(k) u_1 u_2 = \frac{\pi}{E - \sqrt{k^2 + m^2}}; \quad T_+ = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \overleftrightarrow{T} u_1 u_2,$$

где u - спиноры для состояний с положительной энергией. Записывая уравнение (1.10) в символическом виде:

$$T_+ = V_+ + V_+ F_+ T_+,$$

получим формальное выражение для квазипотенциала

$$V_+ = T_+ (1 + F_+ T_+)^{-1}.$$

Уравнение для волновой функции связанного состояния будет при этом иметь вид:

$$2(E - \sqrt{p^2 + m^2}) \psi_+(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int V_+(\vec{p}, \vec{q}) \psi_+(\vec{q}) d\vec{q}$$

В соответствии с замечаниями, сделанными во введении, мы в дальнейшем будем строить квазипотенциал V с помощью матричных элементов амплитуды рассеяния на массовой поверхности, используя для этого уравнение (1.5).

Определяя, как обычно, волновую функцию в импульсном пространстве через амплитуду рассеяния

$$\psi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{E^2 - p^2 - m^2} T(\vec{p}, \vec{q}) \quad (1.11)$$

$$E^2 = q^2 + m^2,$$

получим из (1.5) для ψ следующее уравнение

$$\psi(\vec{p}) = \delta(\vec{p} - \vec{k}) + \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{(E^2 - p^2 - m^2)(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{q}, \quad E^2 = k^2 + m^2. \quad (1.12)$$

В дальнейшем нас будет интересовать лишь задача о связанных состояниях, поэтому δ -функцию в правой части (1.12) можно отбросить. В результате мы получим уравнение

$$(E^2 - p^2 - m^2) \psi(\vec{p}) = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{q}. \quad (1.13)$$

Нетрудно видеть, что в нерелятивистском пределе $m^2 \rightarrow \infty$ мы имеем обычное уравнение Шредингера

$$\left(\frac{p^2}{m} - W\right) \psi(\vec{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int V(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{q}, \quad (1.14)$$

где $W = 2(E - m)$ - энергия связи.

§ 2. Построение потенциала

При построении потенциала для уравнения (1.13) будем исходить из того, что амплитуда рассеяния на массовой поверхности правильно описывает как процессы рассеяния, так и связанные состояния (полюса амплитуды). Поэтому выберем потенциал V таким образом, чтобы уравнение (1.5) правильно описывало амплитуду T на энергетической поверхности $E^2 = p^2 + m^2 = q^2 + m^2 / 1/$. Это можно сделать, задавая амплитуду T по теории возмущений в виде суммы графов Фейнмана и определяя потенциал V последовательными итерациями уравнения (1.5) по теории возмущений ^{1/1/}. Перепишем уравнение (1.5) в виде:

$$V(\vec{p}, \vec{q}) = T(\vec{p}, \vec{q}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{V(\vec{p}, \vec{k}) \sqrt{k^2 + m^2} T(\vec{k}, \vec{q})}{(E^2 - k^2 - m^2)} dk \quad (2.1)$$

или символически (см. (1.6))

$$V = T - V F T, \quad (2.2)$$

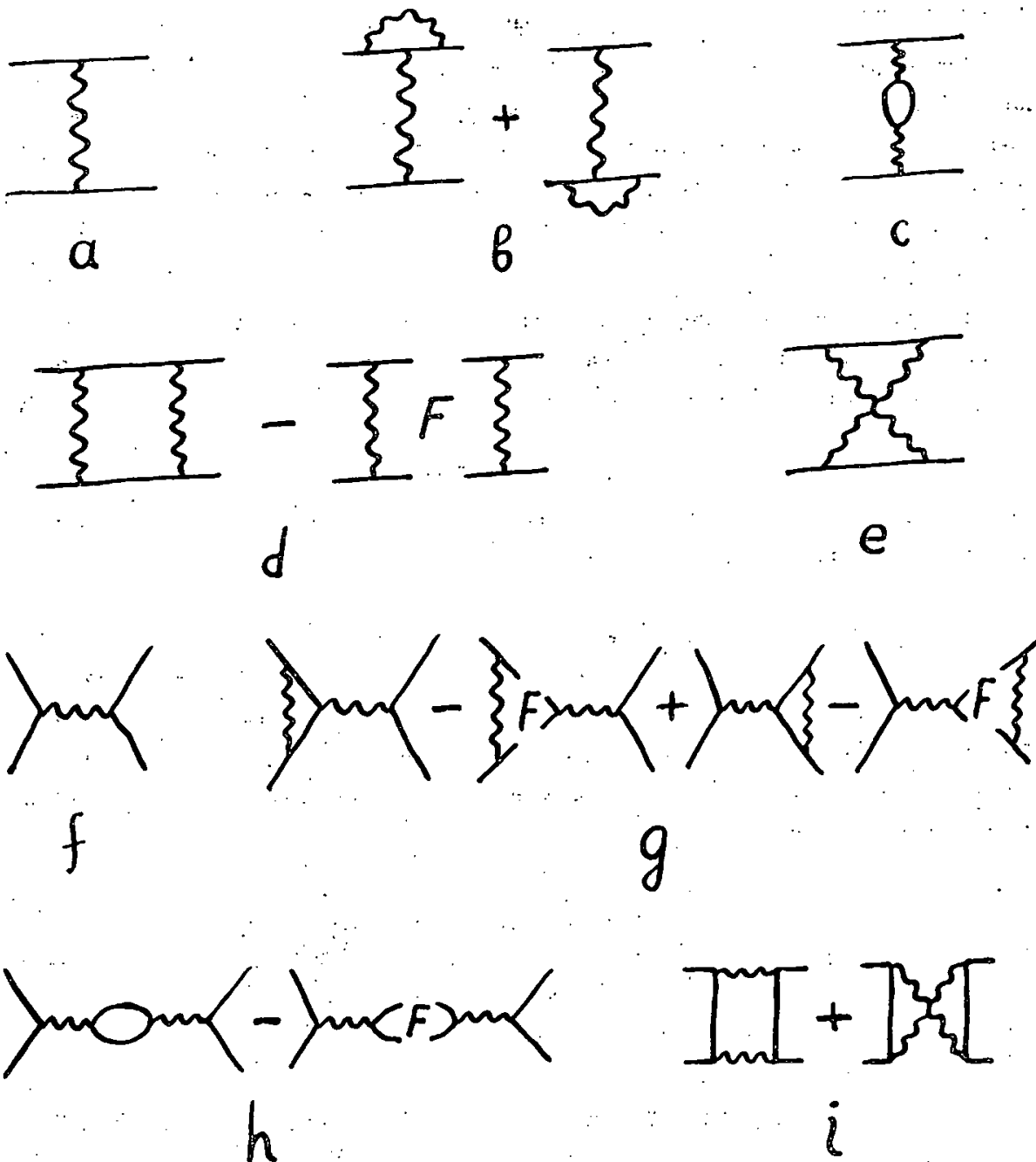
и представим V и T в виде разложений по теории возмущения

$$\begin{aligned} T &= T^{(2)} + T^{(4)} + \dots \\ V &= V^{(2)} + V^{(4)} + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда, подставляя (2.3) в (2.1), получим:

$$\begin{aligned} V^{(2)} &= [T^{(2)}] \\ V^{(4)} &= [T^{(4)}] - [[T^{(2)}] \cdot F [T^{(2)}]], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где квадратные скобки обозначают здесь переход на массовую поверхность. В случае квантовой электродинамики при рассеянии электрона на позитроне соотношения (2.4) можно изобразить с помощью диаграмм Фейнмана следующим образом (в принятом приближении достаточно ограничиться диаграммами до четвертого порядка включительно):



Р и с. 3.

(Сплошная линия обозначает электрон или позитрон, волнистая - фотон).

При этом $V^{(2)}$ описывается диаграммами a и f рис. 3, а $V^{(4)}$ - всеми остальными диаграммами. Диаграммы, где внутри вставлено F, условно изображают вычитаемые члены в определении (2.4) для $V^{(4)}$. Более подробная запись ясна из (2.1). Диаграммы f, g, h, i описывают так называемое обменное взаимодей-

ствие электрона с позитроном, учитывающее возможность виртуального превращения электрона и позитрона в фотоны.

Как нетрудно видеть, потенциал V является комплексным. Действительно, диаграммы i имеют неупругое двухфотонное промежуточное состояние, и, следовательно, их мнимая часть в области, где имеются связанные состояния, $s = 4E^2 < 4\pi^2$ отлична от нуля. Как известно, мнимая часть потенциала характеризует неупругие процессы. В данном случае она описывает вероятность распада парапозитрония на два фотона.

Вычисление уровней энергии позитрония мы будем производить по теории возмущений. При этом за исходное приближение естественно взять кулоновский потенциал, волновые функции которого хорошо известны. Представляя диаграмму a рис. 3 в виде

$$V_a = \bar{C} + \Delta V_a,$$

где \bar{C} - кулоновский потенциал, и обозначая обменную диаграмму f рис. 3 через V_f , получим для потенциала выражение

$$V = \bar{C} + \Delta V_a + V_f + V^{(4)}. \quad (2.5)$$

Члены ΔV_a и V_f имеют первый порядок малости ($\approx a$), а $V^{(4)}$ - второй порядок малости ($\approx a^2$). Поэтому при вычислении поправок к кулоновским уровням энергий необходимо учитывать член второго порядка теории возмущений, получающийся от части потенциала $(\Delta V_a + V_f)$. Таким образом поправку к уровням энергии можно символически записать в виде:

$$\Delta E = \langle \Delta V_a + V_f \rangle + \langle V^{(4)} \rangle + \langle (\Delta V_a + V_f) F (\Delta V_a + V_f) \rangle. \quad (2.6)$$

Величина F определена в (1.6), а символ $\langle \dots \rangle$ означает матричный элемент по волновым функциям уравнения (1.13) с кулоновским потенциалом.

§ 3. Вычисление уровней энергии позитрония. Прямое взаимодействие

Рассмотрим сначала диаграммы $a - e$ рис. 3, описывающие прямое взаимодействие электрона и позитрона. В низшем порядке прямой потенциал дается диаграммой a рис. 3 на массовой поверхности. Используя определение T -матрицы (1.1), получаем из (2.4), согласно обычным фейнмановским правилам ^{/5/}:

$$V_a(\vec{p}, \vec{q}) = -e^2 \frac{[\bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma_1^\mu u_1^-(\vec{q})][\bar{u}_2^-(\vec{q}) \gamma_2^\mu u_2^+(\vec{p})]}{(\vec{p} - \vec{q})^2 - i\delta}. \quad (3.1)$$

Обозначения импульсов соответствуют рис.1. Мы используем следующее представление для γ -матриц:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $\vec{\sigma}$ - спиновые матрицы Паули, и скалярное произведение определяется как

$$a^\mu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Для получения дальнейшего приближения удобно представить четырехкомпонентные спиноры u^+ и u^- в двухкомпонентной форме^{/6/}

$$u^-(\vec{p}) = \sqrt{\frac{p^0 + m}{2p^0}} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & w \\ p^0 + m & \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где w - произвольные двухкомпонентные спиноры.

Преобразуем также спиноры \bar{u}^- и u^+ в \bar{u}^- и \bar{u}^+ с помощью матрицы зарядового сопряжения C :

$$\bar{u}^- = C u^+, \quad u^+ = C \bar{u}^-. \quad (3.4)$$

Это соответствует введению волновой функции позитрона^{/6/}. Матрицу зарядового сопряжения выберем в виде:

$$C = \gamma^0 \gamma^2. \quad (3.5)$$

Учитывая соотношение

$$\bar{u}^- \gamma^\mu u^+ = \bar{u}^+ \gamma^\mu u^-$$

и подставляя (3.2) и (3.3) в (3.1), получим:

$$V_a(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{k^2} \frac{(p^0 + m)(q^0 + m)}{4p^0 q^0} \times \\ \times w_1^\dagger w_2^\dagger \left\{ \left[1 + \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})}{(p^0 + m)(q^0 + m)} \right] \left[1 + \frac{(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{(p^0 + m)(q^0 + m)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{(p^0 + m)(q^0 + m)} [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p})\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_1(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})][(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p})\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})] \right\} w_1 w_2 \quad (3.6)$$

$$p^0 = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad q^0 = \sqrt{q^2 + m^2}, \quad \vec{k} = \vec{p} - \vec{q}.$$

Поскольку как T , так и V являются матрицами, что соответствует различным ориентациям спина электрона и позитрона (поляризационные индексы у спиноров u и w опущены), то в дальнейшем мы будем опускать спиноры w , получая таким образом явное матричное выражение для T и V . При вычислении поправок к уровням энергии

надо будет взять матричные элементы V по соответствующим собственным функциям полного углового момента и спина. Мы произведем в (3.6) нерелятивистское разложение по p/m , поскольку в дальнейшем при вычислении поправок к кулоновским уровням энергии нам придется брать матричные элементы по кулоновским волновым функциям. Эти функции содержат множитель

$$\frac{r^l}{(p^2 - m W_n)^{l+2}}$$

где W_n - кулоновские уровни энергии, поэтому при интеграции по p от 0 до ∞ основной вклад будет давать область $p^2 \approx |m W_n| = m^2 a^2$. Таким образом разложение подынтегрального выражения по p/m будет эквивалентно разложению всего интеграла по a (при условии сходимости интеграла).

Применяя несколько раз соотношение

$$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$$

можно преобразовать (3.6) к виду:

$$V_0(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{k^2} \left\{ 1 + \frac{1}{4m^2} (3i[\vec{p} \times \vec{q}] \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) + 4(\vec{p} \cdot \vec{q}) + (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_1)(\vec{k} \cdot \vec{\sigma}_2) - k^2(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)) \right\} \quad (3.7)$$

$\vec{k} = \vec{p} - \vec{q}$

Как нетрудно видеть, первый член в выражении (3.7) дает кулоновский потенциал:

$$U(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{q})^2} \quad (3.8)$$

который мы выберем в качестве исходного приближения. Нерелятивистское уравнение (1.14) при этом дает хорошо известные уровни энергии ^{/6/}

$$W_n = -\frac{m}{4} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{n^2} = -\frac{m}{4} \frac{a^2}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

$a = \frac{e^2}{4\pi}$

Выпишем еще значение квадрата модуля волновой функции в r -пространстве при $r=0$

$$|\psi_r(0)|^2 = \frac{(am)^3}{8\pi n^3} \quad (3.10)$$

Как известно, для системы двух фермионов сохраняется отдельно как полный момент количества движения, так и полный спиновый момент. В связи с этим все уровни позитрония можно разделить на синглетные (парапозитроний) с $s=0$ и триплетные (ортопозитроний) с $s=1$ ($s(s+1)$ - собственные значения оператора квадрата полного спина). Целью настоящей работы является вычисление расщепления уровней энергий основных состояний ($n=1$) орто- и парапозитрония, т.е. $\Delta W = E(1^3 S_1) - E(1^1 S_0)$. Орбитальный момент при этом равен нулю и, следовательно, соответствующие волно-

вые функции не зависят от угловых переменных. В качестве решений уравнения (1.14) с потенциалом (3.8) мы возьмем паулевские волновые функции, которые в данном случае будут собственными функциями оператора квадрата полного спина.

В низшем порядке теории возмущений поправки к уровням энергии (3.9) имеют вид:

$$\Delta E_n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi^*(\vec{p}) \Delta V_n(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}, \quad (3.11)$$

где

$$\Delta V_n = V_n - U,$$

а V_n - дается выражением (3.7). Мы не учитываем здесь релятивистских поправок, которые дает уравнение (1.13) (фактор $\sqrt{p^2 + m^2}$) поскольку они не дают вклада в расщепление основного уровня позитрония. При интеграции в (3.11) отличные от нуля результаты дают два последних члена выражения (3.7). Используя формулу

$$\int (\vec{a} \vec{k}) (\vec{b} \vec{k}) d\Omega_k = \frac{1}{3} (\vec{a} \vec{b}) k^2 \int d\Omega_k, \quad (3.12a)$$

где \vec{a} и \vec{b} коммутируют, получим

$$\begin{aligned} \Delta E_n &= \frac{e^2}{(2\pi)^3 4m^2} \int \psi^*(\vec{p}) \left[(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - \frac{(\vec{k} \vec{\sigma}_1)(\vec{k} \vec{\sigma}_2)}{k^2} \right] \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} = \\ &= \frac{e^2}{4m^2} |\psi_n(0)|^2 \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle = \frac{2\pi a}{3m^2} |\psi_n(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь под символом $\langle \dots \rangle$ понимается взятие матричного элемента по собственным функциям оператора квадрата полного спина.

Рассмотрим теперь вклад в потенциал от диаграммы в рис. 3 (поправки в вершинную часть). Этот вклад сводится к учету аномального магнитного момента электрона (позитрона). Действительно, при вычислении поправки к уровням энергии мы получим интеграл типа (3.11). Аналогично предыдущему легко убедиться, что в этом интеграле основной вклад будут давать малые значения импульсов \vec{p} и \vec{q} . Выражение для вершинной части третьего порядка при малых значениях \vec{p} и \vec{q} имеет вид /5/:

$$\Gamma_\mu(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{a}{8\pi m} \{ (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\mu - \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}) \}.$$

Поскольку в потенциале Γ_μ будет стоять между спинорами u , то можно использовать уравнение Дирака

$$(\hat{p} - m) u^-(\vec{p}) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{u}^+(\vec{p}) \Gamma_\mu(\vec{p}, \vec{q}) u^-(\vec{q}) &= \frac{a}{8\pi m} \bar{u}^+(\vec{p}) [(\hat{p}-\hat{q})\gamma^\mu - \gamma^\mu(\hat{p}-\hat{q})] u^-(\vec{q}) = \\ &= \frac{a}{4\pi m} \bar{u}^+(\vec{p}) [-(p+q)_\mu + 2m\gamma^\mu] u^-(\vec{q}). \end{aligned}$$

Первый член не дает вклада в расщепление основного уровня позитрония. Вклад второго члена в потенциал эквивалентен замене точечной вершины $e\vec{y}$ на $e\vec{y} \frac{a}{2\pi}$ что и соответствует учету аномального магнитного момента.

Выражение для поправки к уровням энергии может быть получено поэтому умножением ΔE_a на $2 \frac{a}{2\pi}$, поскольку имеются две вершины (две диаграммы *b*). Таким образом

$$\Delta E_b = \frac{a}{\pi} \Delta E_a = \frac{2a^2}{3m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle. \quad (3.13)$$

Часть потенциала, связанная с диаграммой с рис. 3, не дает вклада в поправку к основному уровню энергии позитрония. Действительно, поскольку эта диаграмма имеет порядок a^2 , то при вычислении матричных элементов с достаточной точностью можно положить в выражении для потенциала $\vec{p} = \vec{q} = 0$, $E = m$. При этом, однако, в силу условия нормировки для поляризационного оператора $\Pi[(\vec{p}-\vec{q})^2]$ в нуле^{15/}:

$$\Pi(0) = 0; \quad k^2 \Pi(k^2) |_{k^2=0} = 0$$

соответствующий член ΔV_c в потенциале обращается в нуль.

Рассмотрим теперь вклад в потенциал от двухфотонного обмена, даваемый диаграммами *d* и *e* рис. 3, а также поправку к уровням энергии второго порядка от возмущения ΔV_a . Согласно формуле (2.6), эта поправка будет иметь вид:

$$\Delta E' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) \left[\int d\vec{k} \Delta V_a(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \Delta V_a(\vec{k}, \vec{q}) \right] \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q},$$

где согласно уравнению (1.13)

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{E^2 - k^2 - m^2}. \quad (3.14)$$

Поправка к уровням энергии от части потенциала, соответствующей диаграммам *d* рис. 3, дается выражением:

$$\begin{aligned} \Delta E''_d &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) \left\{ T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) - \right. \\ &\quad \left. - \int V_a(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_a(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} \right\} \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $T_d^{(4)}$ обозначает квадратную диаграмму на массовой поверхности, а V_d дается выражением (3.1). Складывая (3.14) и (3.15) с учетом того, что $\Delta V_d = V_d - \bar{C}$ получим:

$$\begin{aligned} \Delta E_d &= \Delta E_d' + \Delta E_d'' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) \{ T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) - \\ &- \int \Delta V_d(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \bar{C}(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} - \\ &- \int \bar{C}(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \Delta V_d(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} - \\ &- \int \bar{C}(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \bar{C}(\vec{k}, \vec{q}) d\vec{k} \} \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} = \\ &= \int \psi(\vec{p}) R_d(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}; \quad \bar{C}(\vec{p}, \vec{k}) = -\frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{k})^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Выражение для $T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q})$ на массовой поверхности с учетом (3.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} T_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) &= \bar{u}_1^+(\vec{p}) C_2 \bar{u}_2^-(\vec{q}) M_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) u_1^-(\vec{q}) C_2 u_2^+(\vec{p}) \\ &= \bar{u}_1^+(\vec{p}) \bar{u}_2^+(\vec{p}) M_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) u_1^-(\vec{q}) u_2^-(\vec{q}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$M_d^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{i e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\gamma_1^\mu [m + \gamma_1^0 (E + k^0) - \vec{\gamma}_1 \vec{k}] \gamma_1^\nu \gamma_2^\mu [m + \gamma_2^0 (E - k^0) + \vec{\gamma}_2 \vec{k}] \gamma_2^\nu d^4 k}{[(E + k_0)^2 - k^2 - m^2] [(E - k_0)^2 - k^2 - m^2] [k_0^2 - (\vec{k} - \vec{p})^2] [k_0^2 - (\vec{k} - \vec{q})^2]}.$$

При вычислении интегралов в (3.16) можно пренебречь зависимостью $R_d(\vec{p}, \vec{q})$ от \vec{p} и \vec{q} и соответственно положить $E^2 = m^2$, так как поправка ΔE_d будет при этом пропорциональна $e^4 |\psi_r(0)|^2 = a^5$ и, следовательно, учет членов типа $(p^2/m^2) = a^2$ даст превышение точности (см. замечание после формулы (3.6)). По этой же причине можно считать, что спиноры u имеют лишь верхние "большие" компоненты. Последний член в (3.16) не дает вклада в расщепление основного уровня позитрония и мы не будем его здесь рассматривать. С учетом этих замечаний выражение для $M_d^{(4)}$ можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} M_d^{(4)}(0,0) &= \frac{2 i e^4}{(2\pi)^4} \int \frac{[k_0^2 (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) - (\vec{k} \vec{\sigma}_1) (\vec{k} \vec{\sigma}_2) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)] d^4 k}{k_\mu^2 k_\mu^2 [(m + k_0)^2 - k^2 - m^2] [(m - k_0)^2 - k^2 - m^2]} \\ &= \frac{2 i e^4}{(2\pi)^4} 4\pi \int k^2 dk \int dk_0 \frac{(k_0^2 - \frac{2}{3} k^2) (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{k_\mu^2 k_\mu^2 [(m + k_0)^2 - k^2 - m^2] [(m - k_0)^2 - k^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

где при взятии интеграла по углам использована формула (3.12) и соотношение

$$(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) = 2(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2).$$

Подставляя в (3.16) выражение (3.18) для $T_d^{(4)}$ и выражение (3.11) для ΔV_d и интегрируя по k_0 , имеем для ΔE_d выражение:

$$\Delta E_d = \frac{e^4}{(2\pi)^4} \frac{8\pi}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle I,$$

где

$$I = \frac{\pi}{8} \int dk \left\{ \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{1}{k} + \frac{8m}{3k^2} \left(\frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} - 1 \right) \right\} = \frac{\pi}{8} \left[\ln \frac{2\lambda}{m} - \frac{8}{3} \right],$$

или

$$\Delta E_d = \frac{a^2}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left[\ln \frac{2\lambda}{m} - \frac{8}{3} \right]. \quad (3.19)$$

Здесь величина λ , обрезающая интеграл по k в нуле, отражает наличие инфракрасной расходимости. Подробно этот вопрос в связи с вычислением уровней энергии позитрония рассмотрен^{17/}. Здесь же мы только заметим, что в сумме с поправкой для уровней энергии, даваемой диаграммой e рис. 3, член с логарифмом λ исчезает. Поправка к потенциалу, даваемая диаграммой e рис. 3, вычисляется совершенно аналогично предыдущему.

В результате получаем:

$$\begin{aligned} V_o(0,0) &= T_o^{(4)}(0,0) = \frac{2ie^4}{(2\pi)^4} 4\pi \int k^2 dk \int dk_o \frac{(k_o^2 - \frac{2}{3}k^2)(\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{(k_\mu^2)^2 [(m-k_o)^2 - k^2 - m^2]^2} = \\ &= \frac{e^4}{(2\pi)^4} \frac{\pi^2}{m^2} \int dk \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{5}{3} \frac{m^2}{(\sqrt{k^2 + m^2})^3} \right\} (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) \\ &= \frac{a^2}{m^2} \left[-\ln \frac{2\lambda}{m} + \frac{5}{3} \right] (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2). \end{aligned}$$

Поправка к уровням энергии будет иметь вид:

$$\Delta E_o = \frac{a^2}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \left[-\ln \frac{2\lambda}{m} + \frac{5}{3} \right]. \quad (3.20)$$

Складывая (3.19) и (3.20), получим:

$$\Delta E_d + \Delta E_o = -\frac{a^2}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle. \quad (3.21)$$

Собирая вместе выражения (3.12), (3.13) и (3.21), получим поправку к основному уровню энергии позитрония, обусловленную прямым взаимодействием:

$$\Delta E_D = \Delta E_a + \Delta E_b + \Delta E_c + \Delta E_d + \Delta E_e = \quad (3.22)$$

$$= \frac{a\pi}{m^2} |\psi_i(0)|^2 \left[1 - \frac{a}{2\pi} \right] \frac{2}{3} \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle.$$

§ 4. Вычисление уровней энергии позитрония.

Обменное взаимодействие

Рассмотрим теперь вклад в потенциал V от обменных членов, даваемых диаграммами $l-i$ рис. 3.

Выражение для полюсной диаграммы l рис. 3 имеет вид:

$$T_l(\vec{p}, \vec{q}) = - \frac{e^2}{4E^2} [\bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma^\mu u_2^+(-\vec{p})] [\bar{u}_2^-(\vec{q}) \gamma^\mu u_1^-(\vec{q})]. \quad (4.1)$$

С нужной точностью можно положить $E^2 = m^2$, так как соответствующая поправка $\frac{E^2 - m^2}{m^2}$ имеет порядок a^2 , а весь член $\sim a^6$, что выходит за рамки принятого приближения. Заменяя спинорные функции u^+ и \bar{u}^- , согласно (3.4), получим:

$$T_l(\vec{p}, \vec{q}) = - \frac{e^2}{4m^2} [\bar{u}_1^+(\vec{p}) \gamma^\mu C \bar{u}_2^+(-\vec{p})] [\bar{u}_2^-(\vec{q}) C \gamma^\mu u_1^-(\vec{q})]. \quad (4.2)$$

Поскольку в выражении (4.2) для T_l содержится множитель a/m^2 , то можно считать, что спиноры u (3.3) имеют лишь верхние "большие" компоненты, так как учет нижних компонент дает поправки порядка $p^2/m^2 \approx a^2$. Кроме того выражение (4.2) может быть приведено к виду, где матрицы $\vec{\sigma}$ относятся к спинам отдельных частиц (в расщепление основного уровня дают вклад только пространственные \vec{y} -матрицы):

$$(\bar{u}_1^+ \gamma^\mu C \bar{u}_2^+) (u_2^- C \gamma^\mu u_1^-) \rightarrow w_1 w_2 \frac{1}{2} (3 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) w_1 w_2 = w_1 w_2 s^2 w_1 w_2, \quad (4.3)$$

где

$$s = \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2). \quad (4.4)$$

- оператор полного спина системы. Опуская двухкомпонентные спиноры w , получаем, согласно (2.4) выражение для потенциала

$$V_l(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^2}{4\pi^2} s^2 = \frac{\pi a}{m^2} s^2. \quad (4.5)$$

Поправка к уровням энергии получится после усреднения (4.5) по волновым функциям уравнения (1.13) с кулоновским потенциалом:

$$\Delta E_f = \langle V_f \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) d\vec{p} \int \psi(\vec{q}) d\vec{q}. \quad (4.6)$$

Волновые функции $\psi(\vec{p})$ можно приближенно получить, итерируя уравнение (1.13) с кулоновским потенциалом и взяв в качестве исходного приближения кулоновские волновые функции ψ_c , удовлетворяющие уравнению (1.14).

Тогда в первом приближении имеем:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{p}) &= \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{E^2 - p^2 - m^2} \int U(\vec{p}, \vec{q}) \psi_c(\vec{q}) d\vec{q} = \\ &= \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{m} \psi_c(\vec{p}) = \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \psi_c(\vec{p}) + \frac{p^2}{m \sqrt{p^2 + m^2}} \psi_c(\vec{p}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где первое слагаемое дает нерелятивистское приближение при $\frac{p^2}{m^2} \ll 1$. Нормированную кулоновскую волновую функцию S-состояния можно представить в виде:

$$\psi_c(\vec{p}) = \frac{2ma}{\sqrt{2\pi}} \psi_r(0) \frac{1}{(p^2 + \frac{1}{4}m^2a^2)^2}. \quad (4.8)$$

Используя (4.7) и (4.8), с требуемой точностью можно записать интегралы, фигурирующие в (4.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \psi(\vec{p}) d\vec{p} &\approx (2\pi)^{3/2} \psi_r(0) \left[1 + \frac{2a}{\pi} \int_0^\Lambda \frac{dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right] = \\ &= (2\pi)^{3/2} \psi_r(0) (1 + aL). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Величина L представляется расходящимся интегралом (Λ - обрезание). Однако, как будет видно из дальнейшего, в сумме с поправками к уровням энергии от диаграмм g (рис. 2) мы получим конечный результат. Подставляя (4.9) в (4.6), имеем:

$$\Delta E_f = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle s^2 \rangle + \langle V_f \rangle |\psi_r(0)|^2 2aL. \quad (4.10)$$

Вклад в потенциал от диаграммы g рис. 3 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} V_g(\vec{p}, \vec{q}) &= T_{g_1}(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} V_a(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_f(\vec{k}, \vec{q}) + \\ &+ T_{g_2}(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} V_f(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_a(\vec{k}, \vec{q}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$T_{\alpha_1} = \frac{e^2}{4E^2} \{ \bar{u}_1^+(\vec{p}) \}_\mu (\vec{p}, E) C \bar{u}_2^+(-\vec{p}) \{ u_2^-(\vec{q}) C \gamma^\mu u_1^-(\vec{q}) \} +$$

$$T_{\alpha_2} = \frac{e^2}{4E^2} \{ \bar{u}_1^+(\vec{p}) \} \gamma^\mu C u_2^+(-\vec{p}) \{ u_2^-(\vec{q}) C \Gamma_\mu(\vec{q}, E) u_1^-(\vec{q}) \} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_\mu(\vec{p}, E) = \frac{e^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{\gamma^\mu [m - \gamma^0(E+k^0) + \vec{\gamma}(\vec{k}-\vec{p})] \gamma^\nu [m + \gamma^0(E-k^0) - \vec{\gamma}(\vec{p}-\vec{k})] \gamma^\nu d^4k}{k_\nu [(E+k^0)^2 - (\vec{k}-\vec{p})^2 - m^2] [(E-k^0)^2 - (\vec{k}-\vec{p})^2 - m^2]}$$

Необходимо также учесть соответствующий член второго порядка теории возмущений для поправки к уровням энергии из (2.6):

$$\Delta E'_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) \int d\vec{k} \{ \Delta V_\alpha(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_1(\vec{k}, \vec{q}) +$$

$$+ V_1(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \Delta V_\alpha(\vec{k}, \vec{q}) \} \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}, \quad (4.13)$$

где

$$\Delta V_\alpha = V_\alpha - \mathcal{C}$$

$$\mathcal{C}(\vec{p}, \vec{k}) = -\frac{e}{(\vec{p}-\vec{k})^2}$$

Беря матричный элемент от потенциала (4.11) и складывая с (4.13), получим для поправки к уровням энергии выражение:

$$\Delta E_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) \{ T_{\alpha_1}(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} \mathcal{C}(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_1(\vec{k}, \vec{q}) +$$

$$+ T_{\alpha_2}(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} V_1(\vec{p}, \vec{k}) F(k) \mathcal{C}(\vec{k}, \vec{q}) \} \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q}. \quad (4.14)$$

Используя уравнение (1.14) и представление (4.7) для ψ преобразуем второе и четвертое слагаемые из (4.14) следующим образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_c(\vec{p}) \mathcal{C}(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_1(\vec{k}, \vec{q}) \psi_c(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{k} d\vec{q} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi_c(\vec{p}) \frac{\sqrt{p^2+m^2}}{m} V_1(\vec{p}, \vec{q}) \psi_c(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} = \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \dot{\psi}_c(\vec{p}) V_f(\vec{p}, \vec{q}) \psi_c(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} + \langle V_f \rangle |\psi_r(0)|^2 a L.$$

где L определено в (4.9).

Таким образом выражение (4.14) для ΔE_g принимает вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_g = & \int \dot{\psi}_c(\vec{p}) \{ T_{g_1}(\vec{p}, \vec{q}) + T_{g_2}(\vec{p}, \vec{q}) - 2V_f(\vec{p}, \vec{q}) \} \psi_c(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} - \\ & - \langle V_f \rangle |\psi_r(0)|^2 2a L = \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$= \int \dot{\psi}_c(\vec{p}) R_g(\vec{p}, \vec{q}) \psi_c(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} - \langle V_f \rangle |\psi_r(0)|^2 2a L.$$

Отсюда видно, что действительно выражения (4.10) и (4.16) в сумме дают конечный результат.

При вычислении матричных элементов в (4.16) можно с достаточной точностью, как и раньше, положить в $R_g(\vec{p}, \vec{q})$ $\vec{p} = \vec{q} = 0$ и $E = m$, а также считать, что спиноры u имеют лишь верхние "большие" компоненты. Выражение для вершинной части принимает вид:

$$\Gamma_\mu(0, m) = \frac{e^2}{i(2\pi)^4} \int \frac{\gamma^\mu (2k_0^2 - \frac{2}{3} k^2 - 4m^2) d^4 k}{k_\nu^2 [(m - k_0)^2 - k^2 - m^2][(m + k_0)^2 - k^2 - m^2]}.$$

Кроме того, надо произвести ренормировку вершинной функции Γ_μ , которая в данном случае сводится к вычитанию ее значения в нуле $\Gamma_\mu(0, 0)$. Производя преобразование, аналогичное (4.3), окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \Delta E_g = & \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle s^2 \rangle \frac{4a m^2}{\pi} \int \frac{dk}{k^2} \left[\frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} - 1 \right] = \\ = & - \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle s^2 \rangle \frac{4a}{\pi} - \langle V_f \rangle |\psi_r(0)|^2 2a L. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Диаграммы h описывают вклад в потенциал от эффекта поляризации вакуума:

$$V_h(\vec{p}, \vec{q}) = T_h(\vec{p}, \vec{q}) - \int d\vec{k} V_f(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_f(\vec{k}, \vec{q}), \quad (4.18)$$

где

$$T_h(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{e^2 [d(4E^2) - 1]}{4E^2} [u_1^+(\vec{p}) \gamma^\mu C u_2^+(-\vec{p})] [u_2(-\vec{q}) C \gamma^\mu u_1^-(\vec{q})].$$

Фактор $[d(4E^2) - 1]$ появляется за счет модификации фотонного пропагатора. Относящийся сюда член второго порядка теории возмущений имеет вид (см. (2.6)):

$$\Delta E'_h = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \dot{\psi}_c(\vec{p}) \left[\int d\vec{k} V_f(\vec{p}, \vec{k}) F(k) V_f(\vec{k}, \vec{q}) \right] \psi_c(\vec{q}) d\vec{q} d\vec{p}. \quad (4.19)$$

Складывая (4.19) с матричным элементом от V_h , получим:

$$\Delta E_h = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(\vec{p}) T_h(\vec{p}, \vec{q}) \psi(\vec{q}) d\vec{p} d\vec{q} \dots \quad (4.20)$$

Здесь, как и прежде, с нужной точностью можно положить в выражении для T_h $\vec{p} = \vec{q} = 0$, $E = m$. Функция $d(k^2)$ в низшем порядке теории возмущений хорошо известна^{/5/}. Производя соответствующую ренормировку, имеем:

$$d(4m^2) - 1 = \frac{e^2}{4\pi^2} \left(-\frac{8}{9}\right) = -\frac{8a}{9\pi}. \quad (4.21)$$

Подставляя (4.21) в (4.18) и производя замену (4.3), получим из (4.20):

$$\Delta E_h = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle s^2 \rangle \left(-\frac{8a}{9\pi}\right). \quad (4.22)$$

Диаграммы i учитывают возможность виртуальной двухфотонной аннигиляции электрона и позитрона. Соответствующий вклад в потенциал совпадает с матричным элементом рассеяния:

$$\begin{aligned} V_i(\vec{p}, \vec{q}) &= T_i^{(4)}(\vec{p}, \vec{q}) = \bar{u}_1^+(\vec{p}) \bar{u}_2^-(\vec{q}) M_i(\vec{p}, \vec{q}) u_2^-(\vec{p}) u_1^-(\vec{q}) = \\ &= -\bar{u}_1^+(\vec{p}) u_2^-(\vec{q}) C M_i(\vec{p}, \vec{q}) C u_2^-(\vec{p}) u_1^-(\vec{q}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$\begin{aligned} M_i(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{ie^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\{\gamma^\mu [m - \gamma_0 k_0 - \vec{\gamma}(\vec{p} - \vec{k})] \gamma^\nu \} \{\gamma_\mu [m - \gamma_0 k_0 - \vec{\gamma}(\vec{q} - \vec{k})] \gamma_\nu \}}{[k_0^2 - (\vec{p} - \vec{k})^2 - m^2] [k_0^2 - (\vec{q} - \vec{k})^2 - m^2] [(E + k_0)^2 - k^2] [(E - k_0)^2 - k^2]} d^4 k \\ &+ \frac{ie^4}{(2\pi)^4} \int \frac{\{\gamma^\mu [m - \gamma_0 k_0 - \vec{\gamma}(\vec{p} - \vec{k})] \gamma^\nu \} \{\gamma_\nu [m + \gamma_0 k_0 - \vec{\gamma}(\vec{q} + \vec{k})] \gamma_\mu \}}{[k_0^2 - (\vec{p} - \vec{k})^2 - m^2] [k_0^2 - (\vec{q} + \vec{k})^2 - m^2] [(E + k_0)^2 - k^2] [(E - k_0)^2 - k^2]} d^4 k. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему рассмотрению можно положить $\vec{p} = \vec{q} = 0$, $E = m$.

Дополнительно умножая величину M_i слева и справа на матрицу зарядового сопряжения C , получим:

$$C M_i(0,0) C = \frac{ia^2}{\pi^2} \int \frac{\gamma^\mu (m - k) \gamma^\nu C \{ C \gamma_\mu (m - k) \gamma_\nu + C \gamma_\nu (m + k) \gamma_\mu \}}{(k_0^2 - k^2 - m^2)^2 [(m + k_0)^2 - k^2] [(m - k_0)^2 - k^2]} d^4 k. \quad (4.24)$$

В рамках принятого приближения можно считать, что спиноры u имеют лишь верхние большие компоненты. Тогда вклад в расщепление основного уровня позитрония будет давать лишь следующая матричная структура в числителе (4.24):

$$-\gamma_i (\vec{\gamma} \vec{k}) \gamma_j C [-C \gamma_i (\vec{\gamma} \vec{k}) \gamma_j + C \gamma_j (\vec{\gamma} \vec{k}) \gamma_i].$$

Интеграция по углам с использованием формулы (3.12) приводит к выражению

$$-\frac{1}{3} k^2 \gamma_i \gamma_n \gamma_j C [-C \gamma_i \gamma_n \gamma_j + C \gamma_j \gamma_n \gamma_i], \quad i, j, n=1, 2, 3 \quad (4.25)$$

Нетрудно видеть, что отличный от нуля вклад дают лишь члены, где все индексы i, j, n различны. Вводя тогда матрицу

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,$$

перепишем (4.25) в виде

$$4k^2 (\gamma_0 \gamma_5 C) (C \gamma_0 \gamma_5).$$

Используя теперь явное представление (3.5) для матрицы C , получим вместо числителя подынтегрального выражения в (4.24)

$$-4k^2 (\gamma_5 \gamma_2) (\gamma_5 \gamma_2).$$

Матричный элемент в (4.23) преобразуем аналогично (4.3)

$$\begin{aligned} & (\bar{u}_1^+ \gamma_5 \gamma_2 \bar{u}_2^+) (u_2^- \gamma_5 \gamma_2 u_1^-) \rightarrow \\ & \rightarrow -\bar{w}_1 \bar{w}_2 \frac{1}{2} [1 - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)] w_1 w_2 = \\ & = -\bar{w}_1 \bar{w}_2 (2 - s^2) w_1 w_2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Интеграл в (4.24) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{16i a^2}{\pi} \int k^4 dk \int dk_0 \frac{1}{(k_0^2 - k^2 - m^2)^2 [(m+k_0)^2 - k^2] [(m-k_0)^2 - k^2]} \\ & = \frac{2a^2}{m^2} \int dk \left[\frac{k^2}{\sqrt{(k^2 + m^2)^3}} + \frac{k}{m^2 - k^2 + i\epsilon} \right] = \\ & = \frac{a^2}{m^2} [2 \ln 2 - 1 - i\pi], \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставляя (4.26) и (4.27) в (4.23), получаем выражение для

$$V_i = \frac{a^2}{m^2} [2 \ln 2 - 2 - \pi i] (2 - s^2). \quad (4.28)$$

Усредняя V_i по кулоновским волновым функциям, получим соответствующую поправку к уровням энергии

$$\Delta E_i = \frac{\pi a}{m^2} \langle s^2 - 2 \rangle |\psi_r(0)|^2 \frac{2a}{\pi} \left(1 - \ln 2 + \frac{\pi i}{2} \right). \quad (4.29)$$

Как уже указывалось в разделе 2, мнимая часть в (4.23) характеризует вероятность распада позитрония на два γ -кванта и, следовательно, определяет его время жизни.

Подставляя для $|\psi_r(0)|^2$ выражение (3.10), получим для вероятности распада:

$$w_{2\gamma} = -2Im \Delta E_i = \frac{a^5 \pi}{2} = 0,804 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{сек}} \quad (4.30)$$

Собирая равенства (4.10), (4.17), (4.22) и действительную часть (4.29) получим для полной поправки к основному уровню энергии позитрония от обменного взаимодействия:

$$\Delta E_E = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle s^2 \rangle \left[1 - \frac{44a}{9\pi} \right] + \langle s^2 - 2 \rangle \frac{2a}{\pi} (1 - \ln 2) \quad (4.31)$$

§ 5. Результаты и заключение

Складывая вместе поправки к основному уровню энергии от прямого и обменного взаимодействий (равенства (3.22) и (4.31)) получим:

$$\Delta E = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \rangle \frac{2}{3} \left[1 - \frac{a}{2\pi} \right] + \langle s^2 \rangle \left[1 - \frac{44a}{9\pi} \right] + \langle s^2 - 2 \rangle \frac{2a}{\pi} (1 - \ln 2) \quad (5.1)$$

Из (5.1) видно, что появляется расщепление $1^1 S_0$ и $1^3 S_1$ - состояний в позитронии. Поскольку

$$\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 = 2s^2 - 3,$$

то зависимость этих уровней энергии от полного спина \vec{s} системы будет иметь вид:

$$\Delta E = \frac{\pi a}{m^2} |\psi_r(0)|^2 \langle s^2 \rangle \left[\frac{7}{3} - \frac{2a}{\pi} \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \right] \quad (5.2)$$

Отсюда для разности триплетного и синглетного уровней получаем, заменяя $|\psi_r(0)|^2$ его значением (3.10) для $n=1$:

$$\begin{aligned} \Delta W &= E(1^3 S_1) - E(1^1 S_0) = \\ &= a^4 m \left\{ \frac{7}{12} - \left(\frac{16}{9} + \ln 2 \right) \frac{a}{2\pi} \right\} = 2,0337 \cdot 10^5 \text{ Мгц} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это значение находится в полном согласии с экспериментально найденной величиной расщепления^{/8/}

$$\Delta W = (2,0333 \pm 0,0004) \cdot 10^5 \text{ Мгц}$$

Таким образом, проведенные выше вычисления показывают, что квазипотенциальный подход в квантовой теории поля является эффективным методом для вычисления энергии связанного состояния двух частиц. Преимущество этого метода по сравнению с рассмотрением этой задачи на основе четырехмерного уравнения Бете-Солпитера состоит в том, что при квазипотенциальном подходе достаточно значения "трехмерных" волновых функций. Основные осложнения в ^{14/} возникают именно из-за необходимости использования четырехмерных волновых функций, получающихся путем подстановки кулоновских волновых функций в правую часть уравнения Бете-Солпитера. Кроме того, поскольку квазипотенциал определяется в терминах амплитуды рассеяния на массовой поверхности, то значительно облегчается построение этого потенциала (например, с помощью диаграмм Фейнмана и техники дисперсионных соотношений).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, Нгуен Ван Хьеу, А.Н. Тавхелидзе за плодотворные и стимулирующие дискуссии и Б.А. Арбузову, А.Т. Филиппову, О.А. Хрусталеву за обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Quasi-optical Approach in Quantum Field Theory., Preprint JINR, E-1145. Nuovo Cimento 29, 380 (1963).
2. Нгуен Ван Хьеу, Р.Н. Фаустов. Квазиоптический потенциал в модели квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ Р-1253.
3. J. Pirene. Arch. Sci. Phys. Nat., 29, 121, 207, 265 (1947).
В.Б. Берестецкий, Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 19, 673, 1130 (1949).
4. R. Karplus, A. Klein. Phys. Rev., 87, 848 (1952).
5. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантовых полей ГИТТЛ, Москва (1957).
6. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Физматгиз, Москва (1959).
7. T. Fulton, R. Karplus. Phys. Rev., 93, 1109 (1954).
8. V.W. Hughes, S. Marde, C.S. Wu. Phys. Rev., 6, 934 (1957).
9. Р.Н. Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1566, Дубна (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 февраля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3632. Тираж 400. 1,5 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р.Саранцева Февраль 1964 г.

45

STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.Г. Соловьев, Т. Шиклош

P - 1568

ЭНЕРГИИ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ
СИЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР
В ОБЛАСТИ $228 \leq A \leq 254$

Дубна 1964

Соловьев В.Г., Шиклош Т.

P-1568

Энергии четно-четных сильно деформированных ядер в области $228 \leq A \leq 254$.

Рассчитаны энергии двухквaziчастичных возбужденных состояний четно-четных ядер в области $228 \leq A \leq 254$. Результаты расчетов даны в виде таблиц, содержащих энергии ряда коллективных неротационных возбужденных уровней и энергии двухквaziчастичных нейтронных и протонных уровней до 2 Мэв. Приведены данные, касающиеся структур гамма-вибрационных и октупольных состояний. Показано, какое из них должно проявляться как двухквaziчастичное, а какое участвует в образовании коллективного состояния.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Soloviev V.G., Siklos T.

P-1568

Energies of Even-Even Strongly Deformed Nuclei in the Region $228 \leq A \leq 254$.

The energies of the two-quasi-particle excited states of even-even nuclei in the range $228 \leq A \leq 254$ are calculated. The obtained energies of some collective non-rotational excited states and those of two-quasi-particle neutron and proton states up to 2 MeV are tabulated. Data on the structures of gamma vibrational and octupole states are given. It is shown what state must be displayed as two-quasi-particle one and what state takes part in the formation of collective states.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.

В.Г. Соловьев, Т. Шиклош

P-1568

ЭНЕРГИИ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ
СИЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР
В ОБЛАСТИ $228 \leq A \leq 254$

Направлено в "Nuclear Physics"

Дубна 1964

С развитием сверхтекучей модели ядра появилась возможность вычислять энергии неротационных возбужденных состояний четно-четных ядер. Основные положения сверхтекучей модели ядра и методы вычислений характеристик сильно деформированных ядер изложены в ^{/1/}. Наиболее хорошо изучены экспериментально возбужденные состояния четно-четных ядер в области $150 \leq A \leq 190$. Анализ экспериментальных данных и вычисления энергий двухквaziчастичных возбужденных состояний четно-четных ядер в этой области даны в ^{/2/}. В дополнение к расчетам в ^{/2/} были проведены вычисления энергии ядер в этой области, результаты которых приведены в ^{/3/}.

Первые расчеты энергий двухквaziчастичных уровней четно-четных ядер в области $228 \leq A \leq 254$ были выполнены в ^{/4/}. Более полные исследования свойств трансуранических элементов на основе сверхтекучей модели ядра проведены в ^{/5/}. В этой работе параметры модели были выбраны на основе экспериментальных данных по одноквaziчастичным уровням нечетных A - ядер и парным энергиям. В ней проанализированы вероятности β - переходов и величины энергии двухквaziчастичных уровней четно-четных ядер, однако приведены данные только по ядрам Pu^{240} и Sm^{244} .

В настоящей работе рассчитаны энергии двухквaziчастичных возбужденных состояний четно-четных сильно деформированных ядер в области $228 \leq A \leq 254$. Приведены энергии коллективных и двухквaziчастичных возбужденных состояний тех ядер, по которым имеются экспериментальные данные о неротационных уровнях. Результаты данной работы совместно с результатами ^{/5/} позволяют получить энергии двухквaziчастичных состояний до 2 Мэв для всех четно-четных ядер с $138 \leq N \leq 154$ и $90 \leq Z \leq 100$.

В расчетах были использованы волновые функции и схемы одночастичных уровней потенциала Нильссона ^{/6/}. Энергии одночастичных уровней среднего поля $E(s)$, корреляционные функции S и химические потенциалы λ для основных состояний систем, с четным и нечетным числом нуклонов, записаны в таблице 1. Характеристики основных состояний нечетных A - ядер приведены для полноты. Квантовые числа, характеризующие одночастичные уровни среднего поля обозначили через $N n_z \Lambda \uparrow$, если $K = \Lambda + \Sigma$, и через $N n_z \Lambda \downarrow$, если $K = \Lambda - \Sigma$. Здесь N - полное число осцилляторных квантов, n_z - число осцилляторных квантов вдоль оси, перпендикулярной к оси симметрии ядра, Λ - проекция углового момента на ось симметрии ядра, Σ - проекция спина на эту ось. Все величины в таблице 1 приведены в единицах

$\hbar \omega_0 = 41 A^{-1/3}$ Мэв, причем их значения близки к данным в ^{/5/}. Расчеты прово-

дятся при одной и той же равновесной деформации для всех ядер.

Из сравнения рассчитанных значений парных энергий с величинами парных энергий, найденными из разностей масс ядер, в^{/5/} получены следующие значения констант парного взаимодействия:

$$G_N = \frac{26}{A} \text{ Мэв,} \quad (1)$$
$$G_z = \frac{29}{A} \text{ Мэв.}$$

Эти значения G_N и G_z используются в настоящей работе. Заметим, что константы G_N и G_z , описываемые (1), употребляются также при расчетах в области $150 \leq A \leq 190$.

Результаты расчетов энергий двухквазичастичных и коллективных состояний даны в таблицах 2-11. Сначала приведены данные, относящиеся к коллективным состояниям, далее записаны энергии двухквазичастичных нейтронных и протонных состояний. В сверхтекучей модели ядра коллективные неротационные состояния четно-четных ядер рассматриваются как суперпозиции разного рода двухквазичастичных состояний. Энергии коллективных квадрупольных и октупольных состояний рассчитаны в^{/7,8/}. В таблицах 2-11 для гамма-вибрационных и октупольных состояний приведено по три двухквазичастичных состояния, которые дают наибольший вклад в данное коллективное состояние. Этот вклад получен из условия нормировки волновой функции соответствующего коллективного состояния. Он выражен в процентах, причем через nn обозначены нейтронные, а через pp - протонные двухквазичастичные состояния. Те состояния, которые не проявляются как двухквазичастичные, а участвуют в образовании соответствующих коллективных состояний, в этих таблицах имеют пометку "колл". Для коллективных состояний приведены соответствующие экспериментальные данные, взятые из^{/9-18/}.

В первой графе части таблиц 2-11, относящейся к двухквазичастичным состояниям, даны их конфигурации, причем через K обозначен последний заполненный уровень среднего поля в модели независимых частиц, через $K+1$ - первый незаполненный уровень и т.д. Квантовые характеристики состояний $K, K+1, K-1$ и других записаны внизу соответствующей части таблицы. Во второй колонке приведены проекция полного момента на ось симметрии ядра K и четность π , причем сначала - их значения для состояний с $\Sigma = 0$, которые, согласно правилу Галлахера, имеют меньшую энергию, а ниже - с $\Sigma = 1$. Заметим, что в тех случаях, когда для одного из состояний дублета $K\pi = 0-$, то, как показано в^{/19/}, правило Галлахера нарушается и состояние с $K \neq 0$ всегда имеет более низкую энергию, а энергия спинового расщепления оказывается малой. Далее приведены энергии двухквазичастичных состояний, рассчитанные на основе сверхтекучей модели ядра с учетом эффекта блокировки. В этих таблицах приведены энергии всех двухквазичастичных состояний до 2 Мэв.

Заметим, что в ^{/20/} предложен более точный метод для расчета энергий двухквaziчастичных состояний. Сравнения результатов, полученных в ^{/20/}, с нашими показывают, что точность настоящих расчетов является достаточно хорошей.

Энергии коллективных состояний, рассчитанные на основе сверхтекучей модели ядра, достаточно хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными. Ряд состояний обладает ярко выраженными коллективными свойствами. Например, в Th^{228} для гамма-вибрационного состояния наибольшие вклады от двухквaziчастичных состояний равны 16%, 8% 7% и т.д. Другие коллективные состояния по своим свойствам приближаются к двухквaziчастичным. Так, например, в состоянии с $K\pi = 2^-$ в U^{234} двухквaziчастичное нейтронное состояние $631\uparrow - 743\uparrow$ дает вклад, равный 78%. Если вклад одного двухквaziчастичного состояния в данное коллективное состояние превышает 95%, то такое состояние рассматривается как двухквaziчастичное. Например, в U^{234} в наинищее состояние с $K\pi = 3^-$ двухквaziчастичное нейтронное состояние $631\uparrow - 743\uparrow$ дает вклад, равный 99,8%.

Ряд двухквaziчастичных состояний с $K\pi$, соответствующим квадрупольным и октоупольным состояниям, не принимает участия в образовании коллективных состояний. Они проявляются только как чистые двухквaziчастичные состояния. Так, например, в случае $K\pi = 2+$ нейтронное состояние $631\uparrow - 622\uparrow$, протонные состояния $523\uparrow - 630\uparrow$, $514\uparrow - 521\uparrow$ и другие проявляются только как двухквaziчастичные.

Как было отмечено выше, расчеты проведены при одном и том же положении уровней среднего поля для всех ядер, т.е. как бы при одной равновесной деформации для всех ядер. Однако для легких изотопов Th и U равновесные деформации несколько меньше, чем для остальных ядер в области $228 \leq A \leq 254$, поэтому точность расчетов для них может быть несколько худшей, чем для остальных ядер. Вычисления не проводились для изотопов с $A < 228$, поскольку для них пришлось бы изменить положение уровней среднего поля по сравнению с данными в таблице 1. Как известно, нет экспериментальных данных об одноквaziчастичных уровнях нечетных A - ядер с $N > 153$ и $Z > 99$, и поэтому неясно, насколько правильно схемой Нильссона описывается положение уровней среднего поля с $N > 153$ и $Z > 99$. В связи с этим результаты расчетов энергий коллективных и двухквaziчастичных возбужденных состояний для изотопов Cf и Fm являются менее надежными, чем для остальных ядер.

Данные, приведенные в таблицах 2-11 и ^{/5/} для Pu^{240} и Cm^{244} , позволяют найти энергии двухквaziчастичных состояний для всех изотопов Th , U , Pu , Cm , Cf и Fm в области $228 \leq A \leq 254$. Это связано с тем, что энергии двухквaziчастичных уровней одинаковы для всех ядер с данными Z или данными N .

Так, например, для ${}_{98}^{248}\text{Cf}$ двухквaziчастичные протонные уровни даны в таблице 10, а нейтронные - в таблице 9.

Экспериментальные данные об двухквaziчастичных уровнях четно-четных ядер в области $228 \leq A \leq 254$ чрезвычайно скудны. Так, имеется двухквaziчастичное состояние в ${}_{82}^{244}\text{Sm}$ с $K\pi = 6+$ и конфигурацией $\pi\pi$ $622\uparrow + 624\uparrow$, энергия которого, согласно ^{15/}, равна 0,92 Мэв, что хорошо согласуется с экспериментальным значением 1,042 Мэв. Вычисленная величина $\log ft = 6,0$ для β -распада ${}_{82}^{244}\text{Am}$ с $K\pi = 6-$ на данное состояние ${}_{82}^{244}\text{Sm}$ практически совпадает со значением $\log ft = 5,9$, полученном на опыте. Имеющиеся экспериментальные данные указывают на существование сравнительно низколежащих двухквaziчастичных состояний в ${}_{90}^{228}\text{Th}$, ${}_{92}^{234}\text{U}$, ${}_{94}^{240}\text{Pu}$ и в других ядрах, однако для определения величин $K\pi$ и конфигураций двухквaziчастичных состояний необходимы дальнейшие экспериментальные исследования. Можно надеяться, что данные по энергиям неротационных возбужденных состояний, приведенные в таблицах 2-11, окажутся полезными при анализе экспериментальных данных.

В заключение выражаем благодарность Т. Верешу, принимавшему участие в начальной стадии настоящего исследования, и Н.А. Буздавиной за проведение численных расчетов.

Л и т е р а т у р а

1. V.G. Soloviev, Selected topics in nucl. theory, p.233, 1963 (Vienna).
В.Г. Соловьев. Влияние парных корреляций сверхпроводящего типа на свойства атомных ядер. Атомиздат, 1963.
2. C.J. Gallagher, V.G. Soloviev, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 2, N.2 (1962).
3. Н.И. Пятов, В.Г. Соловьев. Известия АН СССР, сер. физич. (в печати).
4. В.Г. Соловьев. ЖЭТФ, 40, 654 (1961).
5. Т. Вереш, В.Г. Соловьев, Т. Шиклош. Известия АН СССР, сер. физич., 26, 1045 (1962).
6. S. Nilsson, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 29, N.16 (1955);
B. Mottelson, S. Nilsson, Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1, N.6 (1959).
7. Лю Юань, В.Г. Соловьев, А.А. Корнейчук. ЖЭТФ (в печати).
8. В.Г. Соловьев, П. Фогель, А.А. Корнейчук. Изв. АН СССР, сер. физич. (в печати);
В.Г. Соловьев, Н. Фогель. Phys. Lett., 6, 126 (1963).
9. S. Bjornholm, M. Lederer, F. Asaro, I. Perlman, Phys. Rev., 130, 2000 (1963).

10. E. Arbman, O.B. Nielsen, S. Bjornholm. Nucl. Phys., 21, 406 (1960).
R.A. Bell, S. Bjornholm, J.C. Severiens. Kgl. Dansk. Vid.Selsk. Mat.Fys.
Medd. 32, No. 12 (1960).
11. F.K. McGowan, P.H. Stelson. Phys.Rev., 120, 1803 (1960).
12. S. Bjornholm, F. Boehm, A.B. Knutsen, O.B. Nielsen. Nucl. Phys., 42, 469
(1963).
13. C.I. Gallagher, T.D. Thomas. Nucl. Phys., 14, 1 (1959/60);
P.G. Hansen, K. Wilsky, S. Bjornholm. Nucl.Phys., 45, 417 (1963).
14. A.B. Smith. Nucl. Phys., 47, 633 (1963).
15. J. Borggreen, O.B. Nielsen, H. Nordby. Nucl. Phys., 29, 515 (1962);
R.G. Albridge, J.M. Hollander. Nucl.Phys., 21, 438 (1960).
16. S.E. Vandenbosch, P. Day. Nucl.Phys., 37, 482 (1962).
17. S.E. Vandenbosch, H. Diamond, R.K. Sjoblom, P.R. Fields. Phys. Rev., 115
(1962).
18. J.M. Hollander, C.L. Nordling, K. Siegbahn. Arkiv for Fys., 23, 35 (1963).
19. Н.И. Пятов. Известия АН СССР, сер.физическая 27, 1436 (1963).
20. И.Н. Михайлов. ЖЭТФ, 45, 1102 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 февраля 1964 г.

ТАБЛИЦА I
 Одночастичные уровни среднего поля

Z или N	$N n_z \Delta \Sigma$	$\frac{E(s)}{\hbar \omega_0}$	Четная система $Z+1$ или $N+1$		Нечетная система Z или N	
			$C/\hbar \omega_0$	$\lambda/\hbar \omega_0$	$C/\hbar \omega_0$	$\lambda/\hbar \omega_0$
Протонная система						
89	651 ↑	0,68	0,141	0,753	0,121	0,733
91	530 ↑	0,75	0,130	0,803	0,105	0,788
93	642 ↑	0,83	0,120	0,859	0,093	0,823
95	523 ↓	0,86	0,110	0,921	0,076	0,899
97	521 ↑	0,98	0,109	0,987	0,077	0,941
99	633 ↑	0,99	0,104	1,045	0,074	1,025
Нейтронная система						
137	631 ↑	0,71	0,119	0,734	0,100	0,711
139	752 ↑	0,72	0,112	0,778	0,091	0,759
141	633 ↓	0,78	0,104	0,826	0,078	0,803
143	743 ↑	0,85	0,099	0,880	0,068	0,850
145	631 ↓	0,90	0,097	0,936	0,061	0,910
147	622 ↑	0,97	0,099	0,994	0,059	0,964
149	624 ↓	1,03	0,107	1,048	0,068	1,023
151	734 ↑	1,10	0,117	1,094	0,084	1,070
153	620 ↑	1,17	0,126	1,133	0,101	1,109

ТАБЛИЦА 2

Энергетические уровни $T h_{128}^{133}$

Коллективные состояния					
К П	Энергия (Мэв)		Структура состояния		
	Расчет.	Эксперимент.			
0-	0,14	0,328	nn633↓-752↑ 20%, nn631↑-761↑17%, pp660↑-530↑ 13%		
2+	0,6	0,969	nn743↑-761↑16%, nn631↑+631↑8%, pp532↓- 530↑ 7%		
0+					
2-	1,4	1,123	nn631↑-743↑65%, pp642↑-530↑13%, pp651↑+530↑8%		
I-	1,1		nn631↑-752↑64%, pp651↑-530↑12%, nn633↓-761↑ 5%		

Двухквaziчастичные состояния					
Нейтронные			Протонные		
Состояние	К П	Энергия (Мэв)	Состояние	К П	Энергия (Мэв)
K,K+I	I- колл.	1,3	K,K+I	I- колл.	1,7
K,K+2	4+ I+	1,4	K+I,K+2	2- колл. 3-	1,8
K+I,K+2	5- 0- колл.	1,4	K-I,K+I	2+ колл. I+	1,8
K-I,K+I	I+ 4+	1,5	K,K+2	I+ 4+	1,9
K-I,K	3- 0- колл.	1,5	K+I,K+3	3+ 2+	2,0
K-I,K+2	4- I- колл.	1,6	K-I,K+2	4- I-	2,0
K-2,K+I	4- 9-	1,7	K-2,K+I	I- 0- колл.	2,0
K-2,K	5+ 8+	1,7	K,K+3	4- I-	2,0
K,K+3	2- колл. 5-	1,8	K-I,K	3- 0- колл.	2,1
K+I,K+3	I+ 6+	1,8	K+2,K+3	5- 0- колл.	2,3
K+2,K+3	6- I- колл.	2,0			
K-2,K-I	5- 8-	2,0			

K-2=606↑, K-I =761↑, K=631↑
 K+I=752↑, K+2 =633↓, K+3 =743↑

K-2=400↑, K-I =532↓, K= 651↑
 K+I =530↑, K+2= 642↑, K+3 =523↓

ТАБЛИЦА 3
 Энергетические уровни T_h ¹³⁰₉₀ ¹⁴⁰

Коллективные состояния			
КП	Энергия (Мэв)		Структура состояния
	Расчет.	Эксперимент.	
0-	0,50	0,508	nn633↓-752↑ 27%, pp660↑-530↑14%, nn631↑-761↑10%
0+	0,5	0,634	
2+	0,74	0,783	nn743↑-761↑18%, nn631↑+631↑13%, nn633↓-631↓ 12,6 %
I-	I, I	0,954	nn631↑-752↑39%, nn633↓-743↑30%, pp651↑-530↑14%
2-	I, 4		nn631↑-743↑84%, pp642↑-530↑6%, pp651↑+530↑ 3%

Двухквaziчастичные состояния					
Нейтронные			Протонные		
Состояние	КП	Энергия (Мэв)	Состояние	КП	Энергия (Мэв)
K, K+I	5- 0- колл.	I, 2	K, K+I	I- колл. 2- колл.	I, 7
K-I, K+I	4+ I+	I, 3	K+I, K+2	2- колл. 3-	I, 8
K, K+2	I+ 6+	I, 5	K-I, K+I	2+ колл. I+	I, 8
K+I, K+2	6- I- колл.	I, 5	K, K+2	I+ 4+	I, 9
K-I, K	I- колл. 4-	I, 5	K+I, K+3	3+ 2+	2, 0
K-I, K+2	2- колл. 5-	I, 5	K-I, K+2	4- I-	2, 0
K-2, K+I	4- I- колл.	I, 6	K-2, K+I	I- колл. 0-	2, 0
K, K+3	3- 2- колл.	I, 8	K, K+3	4- I-	2, 0
K+I, K+3	2+ колл. 3+	I, 8	K-I, K	3- колл. 0-	2, I
K-2, K	I+ 4+	I, 9	K+2, K+3	5- колл. 0-	2, 2
K-2, K-I	3- 0- колл.	I, 9			

K-2=76I ↑, K-I =63I ↑, K= 752 ↑,
 K+I =633 ↓, K+2 = 743 ↑, K+3 = 63I ↓

K-2 =400 ↑, K-I =532 ↓, K=65I ↑,
 K+I =530 ↑, K+2 = 642 ↑, K+3 = 523 ↓

ТАБЛИЦА 4
 Энергетические уровни ${}_{90}^{232}\text{Th}_{142}$

Коллективные состояния						
К П	Энергия (Мэв)		Структура состояния			
	Расчет.	Эксперимент.				
0+	-	0,725				
2+	0,85	0,788	nn633↓-631↓25%, nn631↑+631↓ 15%, nn743↑-761↑ 13%			
0-	0,8	1,045	nn633↓-752↑20%, pp660↑-530↑16%, nn622↑-752↑ 10%			
Двухквaziчастичные состояния						
Нейтронные			Протонные			
Состояние	К П	Энергия (Мэв)	Состояние	К П	Энергия (Мэв)	
K,K+I	6- I- колл.	1,1	K,K+I	I- колл. 2- колл.	1,7	
K,K+2	2+ колл. 3+	1,4	K+I,K+2	2- колл. 3-	1,8	
K-I,K+I	I+ 6+	1,4	K-I,K+I	2+ колл. I+	1,8	
K-2, K+I	2- колл. 5-	1,5	K,K+2	I+ 4+	1,9	
K+I,K+2	4- 3-	1,5	K+I,K+3	3+ 2+	2,0	
K-I,K+2	3- 2-	1,6	K-I,K+2	4- I-	2,0	
K-I,K	5- колл. 0-	1,7	K-2,K+I	I- колл. 0-	2,0	
K-2,K	4+ I+	1,7	K,K+3	4- I-	2,0	
K, K+3	5+ колл. 0+	1,8	K-I,K	3- колл. 0-	2,1	
K+I,K+3	I- колл. 6-	1,9	K+2,K+3	5- колл. 0-	2,2	
K-2,K-I	I- колл. 4-	2,0				
K+2,K+3	3+ 2+	2,1				

K-2=631↑, K-I =752↑, K= 633↓
 K+I =743↑, K+2 = 631↓, K+3 = 622↑

K-2 =400↑, K-I = 532↓, K = 651↑
 K+I =530↑, K+2 = 642↑, K+3 = 523↓

ТАБЛИЦА 5
 Энергетические уровни ${}_{92}^{232}\text{U}$
 ${}_{140}$

Коллективные состояния						
КП	Энергия (Мэв)		Структура состояния			
	Расчет.	Эксперимент.				
0-	0,60	0,564	nn633↓-752↑30%, nn631↑-761↑10%, pp651↑-521↑9%			
0+	0,8	0,693				
2+	0,9	0,868	nn743↑-761↑20%, nn631↑+631↓14%, nn633↓-631↓14%			
2-	1,1	(1,016)	nn631↑-743↑75%, pp642↑-530↑16%, nn642↓-743↑2%			
1-	1,1		nn631↑-752↑42%, nn633↓-743↑33%, pp651↑-530↑7%			
Двухквaziчастичные состояния						
Состояние	Нейтронные		Состояние	Протонные		
	КП	Энергия (Мэв)		КП	Энергия (Мэв)	
К, К+1	5- 0- колл.	1,2	К, К+1	2- колл. 3-	1,4	
К-1, К+1	4+ 1+	1,3	К, К+2	3+ 2+	1,5	
К, К+2	1+ 6+	1,5	К+1, К+2	5- 0- колл.	1,7	
К+1, К+2	3- 1- колл.	1,5	К-1, К+1	1+ 4+	1,8	
К-1, К	1- колл. 4-	1,5	К-1, К+2	4- 1-	1,9	
К-1, К+2	2- колл. 5-	1,5	К-2, К+1	4- 1-	2,0	
К-2, К+1	4- 1- колл.	1,6	К-1, К	1- колл. 2- колл.	2,0	
К, К+3	3- 2-	1,8	К-2, К	2+ колл. 1+	2,2	
К+1, К+3	2+ колл. 3+	1,8				
К-2, К	1+ 4+	1,8				
К-2, К-1	3- 0- колл.	1,9				
К-2= 761↑, К-1 = 631↑, К= 752↑ К+1 = 633↓, К+2 = 743↑, К+3 = 631↓			К-2 = 532↓, К-1 = 651↑, К= 530↑ К+1 = 642↑, К+2 = 523↓			

ТАБЛИЦА 6

Энергетические уровни $^{134}_{92}\text{U}_{142}$

Коллективные состояния

КП	Энергия (Мэв)		Структура состояния
	Расчет.	Эксперимент.	
0-	0,86	0,788	nn633↓-752↑ 23%, nn622↑-752↑11%, pp651↑-521↑ 11%
0+		0,811	
2+	0,9	0,922	nn633↓-631↓30%, nn631↑+631↓ 16%, nn743↑-761↑ 14%
2-	1,3	(1,240)	nn631↑-743↑78%, pp642↑-530↑15%, pp651↑+530↑1%
0+		1,049	
I-	1,4		nn633↓-743↑84%, nn622↑-743↑4%, pp651↑-530↑ 3%

Двухквaziчастичные состояния

Нейтронные			Протонные		
Состояние	КП	Энергия (Мэв)	Состояние	КП	Энергия (Мэв)
K, K+I	6- I- колл.	1,1	K, K+I	2- колл. 3-	1,4
K, K+2	2+ колл. 3+	1,4	K, K+2	3+ 2+	1,5
K-I, K+I	1+ 6+	1,4	K+I, K+2	5- колл. 0-	1,6
K-2, K+I	2- колл. 5-	1,5	K-I, K+I	1+ 4+	1,8
K+I, K+2	4- 3-	1,5	K-I, K+2	4- I-	1,9
K-I, K+2	3- 2-	1,6	K-2, K+I	4- I-	2,0
K-I, K	5- колл. 0-	1,7	K-I, K	I- колл. 2- колл.	2,0
K-2, K	4+ I+	1,7	K-2, K	2+ колл. I+	2,2
K, K+3	5+ колл. 0+	1,8			
K+I, K+3	I- колл. 6-	1,9			
K-2, K-I	I- колл. 4-	2,0			

K-2 = 631↑, K-I = 752↑, K = 633↓, K+I = 743↑
 K+2 = 631↓, K+3 = 622↑

K-2 = 532↓, K-I = 651↑, K = 530↑,
 K+I = 642↑, K+2 = 523↓.

ТАБЛИЦА 7
 Энергетические уровни U_{144}^{238}

Коллективные состояния					
КП	Энергия (Мэв)		Структура состояния		
	Расчет.	Эксперимент.			
0-	0,9	0,679	nn624↓-743↑ 16%, pp651↑-521↑ 12%, pp660↑-530↑ 10%		
0+		0,930			
2+	1,2	1,062	nn622↑-620↑ 18%, nn633↓-631↓ 16%, pp532↓+530↑ 6%		
Двухквaziчастичные состояния					
Нейтронные			Протонные		
Состояние	КП	Энергия (Мэв)	Состояние	КП	Энергия (Мэв)
K,K+I	3+	0,9	K,K+I	2-	1,4
	2+			3-	
K-I,K+I	1-	1,3	K,K+2	3+	1,5
	6-			2+	
K,K+2	3+	1,3	K+I,K+2	5-	1,6
	4+			0- колл.	
K-I,K	4-	1,5	K-I,K+I	1+	1,8
	3-			4+	
K-I,K+2	7-	1,6	K-I,K+2	4-	1,8
	0- колл.			1-	
K+I,K+2	6+	1,6	K-2,K+I	4-	1,9
	1+			1-	
K-2,K+I	5+ колл.	1,7	K-2,K	1-	2,0
				2-	
				2+ колл.	
				1+	
K,K+3	5-	1,8	K,K+3	1+	2,2
	4-			2+ колл.	
K-2,K	2+ колл.	2,0			
	3+				
K+I,K+2	6+	2,0			
	1+				

K-2= 633↓, K-I = 743↑, K=63I↓
 K+I= 622↑, K+2 = 624↓, K+3 = 734↑

K-2 = 532↓, K-I = 65I↑, K= 530↑
 K+I = 642↑, K+2 = 523↓, K+3 = 521↑.

ТАБЛИЦА 8
 Энергетические уровни $^{235}_{94}\text{Pu}_{144}$

Коллективные состояния			
КП	Энергия (Мэв)		Структура состояния
	Расчет.	Эксперимент.	
0-	I,0	0,605	pp642↑-523↓18%, nn622↑-752↑14%, pp651↑-521↑ 13%
0+		0,940	
2+	I,I	1,030	nn633↓-631↓ 40%, nn631↑+631↓13%, nn743↑-761↑ 6%
I-	I,I		nn622↑-743↑68%, nn633↓-743↑ 16%, pp642↑-521↑ 8%

Двухквaziчастичные состояния					
Нейтронные			Протонные		
Состояние	КП	Энергия (Мэв)	Состояние	КП	Энергия (Мэв)
K,K+I	4- 3-	0,9	K,K+I	5- 0- колл.	I,I
K,K+2	I- колл. 6-	I,3	K,I,K+I	3+ 2+	I,6
K-I,K+I	2+ колл. 3+	I,3	K-I,K	2- 3-	I,7
K+I,K+2	3+ 2+	I,5	K,K+2	I- колл. 4-	I,8
K-I,K	6- I- колл.	I,6	K,K+3	I+ 6+	I,8
K-I,K+2	5+ 0+ колл.	I,6	K+I,K+2	4+ I+	I,8
K-2,K+I	3- 2-	I,7	K+I,K+3	6- I-	I,9
K,K+3	7- 0- колл.	I,7	K-2,K+I	4- I-	2,0
K+I,K+3	3+ 4+	I,9	K-I,K+2	I+ 2+ колл.	2,0
K-2,K	I+ 6+	I,9	K-2,K	I+ 4+	2,I
K+2,K+3	6+ I+	2,2			

K-2= 752 ↑, K-I =633↓, K= 743↑
 K+I =631↓, K+2 = 622↑, K+3 =624↓

K-2 =651↑, K-I =530↑, K= 642 ↑
 K+I = 523↓, K+2 = 521↑, K+3 = 633↑.

ТАБЛИЦА 9
 Энергетические уровни $^{246}_{150}\text{Cm}$

Коллективные состояния					
К П	Энергия (Мэв)		Структура состояния		
	Расчет.	Эксперимент.			
2+	0,8		nn622↑-620↑37%, nn624↓-622↓24% , nn622↓+ 620 ↑ 6 %		
0+					
0-	1,2		pp651↑-521↑ 17%, pp642↑-523↓ 14%, nn631↓-761↓ 14 %		
2-	1,1		nn622↑-734↑ 61%, pp633↑-521↑ 32%, nn624↓-725↑ 1 %		
Двухквaziчастичные состояния					
Нейтронные			Протонные		
Состояние	К П	Энергия (Мэв)	Состояние	К П	Энергия (Мэв)
К,К+I	8- I-	I, I	К,К+I	4+ I+	I, 3
К-I, К+I	2- 7- колл.	I, 4	К,К+2	6- I-	I, 3
К,К+2	4+ 3+	I, 5	К, I, К+I	I- 4-	I, 5
К-I, К	6+ I+	I, 5	К-I, К+2	I+ 6+	I, 5
К,К+3	7+ 0+ колл.	I, 6	К+I, К+2	2- 5- колл.	I, 7
К-I, К+2	2+ 3+ колл.	I, 7	К-I, К	5- 0- колл.	I, 8
К+I, К+2	4- 5-	I, 8	К, К+3	I+ 6+	I, 8
К-2, К+I	5- 4-	I, 8	К-2, К+I	I+ 2+ колл.	2, 0
К+I, К+3	I- 8-	I, 9			
К-2, К	3+ 4+	I, 9			
К+I, К+4	6- 3-	2, 0			

К-2 = 63I↓ , К-I = 622↑, К = 624↓ К-2 = 530↑, К-I = 642↑, К = 523↓,
 К+I = 734↑, К+2 = 620↑, К+3 = 613↑, К+4 = 622↓ К+I = 521↑, К+2 = 633↑, К+3 = 514↓.

ТАБЛИЦА 10
 Энергетические уровни $^{250}\text{Cf}_{152}$

Коллективные состояния						
К П	Энергия (Мэв)		Структура состояния			
	Расчет.	Эксперимент.				
2+	0,8	1,032	nn622↑-620↑26%, nn624↓-622↓25%, nn622↑+ 620↑ 18 %			
0+						
Двухквaziчастичные состояния						
Нейтронные			Протонные			
Состояние	К П	Энергия (Мэв)	Состояние	К П	Энергия (Мэв)	
К,К+1	4- 5-	1,4	К,К+1	2- 5-	0,9	
К-1,К	8- 1-	1,5	К,К+2	5+ 2+	1,4	
К,К+2	1- 8-	1,5	К+1,К+2	7- 0-	1,4	
К,К+3	6- 3-	1,6	К-1,К+1	6- 1-	1,7	
К-1,К+1	4+ 3+	1,6	К-1,К	4+ 1+	1,7	
К-1,К+2	7+ 0+ колл.	1,7	К-2,К+1	1+ 6+	1,8	
К-2,К	2- 7-	1,8	К-2,К	1- 4-	1,8	
К+1,К+2	3+ 4+	1,8	К-1,К+2	1+ 6+	1,8	
К+1,К+3	2+ колл. 1+	1,9	К,К+3	2+ колл. 1+	2,0	
К-2,К+1	2+ колл. 3+	1,9	К+1,К+3	4- 3-	2,0	
К+1,К+4	5- 6-	1,9	К+1,К+4	1+ 8+	2,0	
К+2,К+3	5+ 2+	2,0				
К-2,К-1	6+ 1+	2,0				
К-2=622↑, К-1=624↓, К=734↑, К+1=620↑, К+2=613↑, К+3=622↓, К+4=725↑			К-2=642↑, К-1=523↓, К=521↑, К+1=633↑, К+2=514↓, К+3=521↓, К+4=624↑			

ТАБЛИЦА II

Энергетические уровни F_m^{254}
_{100 154}

Коллективные состояния					
КТ	Энергия (Мэв)		Структура состояния		
	Расчетн.	Эксперимент.			
2+	0,5	0,692	nn622↓+620↑ 36%, nn613↑- 611↑ 30%, pp521↑+521↓ 20%		
0+					
Двухквaziчастичные состояния					
Нейтронные			Протонные		
Состояние	КТ	Энергия (Мэв)	Состояние	КТ	Энергия (Мэв)
K-I, K	4- 5-	1,5	K, K+I	7- 0-	0,9
K-I, K+I	1- 8-	1,5	K-I, K+I	5+ 2+	1,0
K, K+I	3+ 4+	1,5	K-I, K	2- 5-	1,4
K-I, K+2	6- 3-	1,5	K, K+2	4- 3-	1,5
K, K+2	2+ колл. 1+	1,6	K-I, K+2	2+ колл. 1+	1,5
K, K+3	5- 6-	1,6	K, K+3	1+ 8+	1,5
K+I, K+2	5+ 2+	1,6	K+I, K+2	3+ 4+	1,6
K+I, K+3	2- 9-	1,7	K+I, K+3	8- 1-	1,7
K+I, K+4	8+ 1+	1,7	K-2, K+I	1+ 6+	1,8
K+2, K+3	7- 4-	1,7	K+I, K+4	6+ 1+	2,0
K-2, K	4+ 3+	1,8			
K-2, K+I	7+ 0+ колл.	1,8			
K-2, K-I	8- 1-	1,8			
K-2=624↓, K-I=734↑, K=620↑, K+I=613↑, KI2=622↓, K+3=725↑, K+4=615↓			K-2=523↓, K-I=521↑, K=633↑, K+I=514↓, K+2=521↓, K+3=624↑, K+4=512↑		

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3597. Тираж 420. 1,2 уч.-изд. л.
Техн. редактор Н.Н. Зрелова. Февраль 1984 г.



46

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.В. Пашкевич

P-1563

МНОГОКРАТНОЕ КУЛОНОВСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ
ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ
НЕАКСИАЛЬНОГО ЧЕТНО-ЧЕТНОГО
АТОМНОГО ЯДРА

Дубна 1964

P-1563

Пашкевич В.В.

Многokратное кулоновское возбуждение вращательных состояний неаксиального четно-четного атомного ядра.

Исследуется зависимость дифференциального и полного сечения многократного кулоновского возбуждения четно-четного атомного ядра от параметра γ , характеризующего неаксиальность формы ядерной поверхности. Представленные результаты позволяют определить параметр γ , измеряя сечение возбуждения второго уровня спина 2, если эксперимент проводился в таких условиях, когда можно говорить о применимости приближения удара.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

Pashkevich V.V.

P-1563

Multiple Coulomb Excitation of the Rotational States of a Non-Axial
Even-Even Atomic Nucleus

The dependence is investigated of the differential and total cross section for the multiple Coulomb excitation of the even-even atomic nucleus on the parameter γ which characterizes the non-axial shape of the nuclear surface. The results we present here allow to determine the parameter γ by measuring the excitation cross section for spin 2 second level if the experiment was carried out under such conditions when one can speak about the applicability of the sudden approximation.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

В.В. Пашкевич

P-1563

МНОГОКРАТНОЕ КУЛОНОВСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ
ВРАЩАТЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ
НЕАКСИАЛЬНОГО ЧЕТНО-ЧЕТНОГО
АТОМНОГО ЯДРА

Направлено в журнал
"Известия АН СССР"

Дубна 1964

В в е д е н и е

В последнее время эксперименты по многократному кулоновскому возбуждению атомных ядер приобретают все большее значение. Они позволяют как изучать свойства ранее открытых уровней, так и обнаруживать новые уровни, возбуждение которых в первом порядке теории возмущения запрещено.

Теория многократного кулоновского возбуждения, развитая Альдером и Уинте-ром^{/1/}, применялась ими для исследования вращательных состояний аксиально-симметричных ядер и вибрационных возбуждений сферических ядер. В работе^{/2/} теория обобщается на случай неаксиальных четно-четных атомных ядер, для описания которых применяется модель Давыдова-Филиппова. В данной работе вероятности кулоновского возбуждения ядра при рассеянии назад налетающей частицы, вычисленные в^{/2/}, используются для вычисления дифференциального и полного сечения возбуждения вращательного спектра неаксиальных ядер.

Показано, что возбуждение основной вращательной полосы слабо зависит от параметра γ , характеризующего неаксиальность формы поверхности ядра. Дифференциальное и полное сечения возбуждения аномального уровня спина 2 существенно зависят от γ . Результаты сравниваются с предсказаниями теории возмущения^{/3/} и вычислениями полного сечения вращательных состояний аксиально-симметричного ядра, проведенными Граетзером, Хуверманом и Бернстейном^{/4/}.

Метод расчета дается в первом параграфе. Во втором параграфе приводятся численные результаты.

§ 1. Вычисление вероятности многократного кулоновского возбуждения неаксиального ядра при произвольном угле рассеяния налетающих частиц

Вращательные состояния неаксиального ядра описываются, согласно модели Давыдова-Филиппова, волновыми функциями

$$\Psi_M^{Jr} = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \text{ четное}}} a_k(Jr) \left[\frac{2J+1}{16\pi^2(1+\delta_{k0})} \right]^{1/2} [D_{Mk}^J + (-1)^k D_{M-k}^J], \quad (1)$$

где J - спин ядра, r - номер состояния со спином J , D_{Mk}^J - обобщенная сферическая функция. Коэффициенты $a_k(Jr)$ приведены в работах Давыдова и Филиппова^{/5/} и Давыдова и Ростовского^{/6/}.

В приближении удара, согласно ^{/2/}, вероятность перехода ядра из основного состояния спина 0 в возбужденное состояние с квантовыми числами J, r имеет вид:

$$P_{Jr} = (2J+1) \sum_M \left| \sum_K A_{MK}^J a_K(Jr) \right|^2. \quad (2)$$

Здесь интегралы A_{MK}^J представляют собой обобщение величин $A_{JM}^{/1/}$ на случай неаксиального ядра.

$$A_{MK}^J = \frac{\sqrt{2}}{8\pi^2(1+\delta_{K0})^{1/2}} (D_{MK}^J(\theta_1, \theta_2, \theta_3), S); \quad (3)$$

$$S = \exp \left\{ -2iq_{\text{эф}} \left[\cos^2 \theta_2 - 1/3 + \lambda \sin^2 \theta_2 \cos 2\theta_3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \nu \sin^2 \theta_2 \cos 2\theta_1 - \lambda \nu (\cos 2\theta_1 \cos 2\theta_3 (1 + \cos^2 \theta_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \sin 2\theta_1 \sin 2\theta_3 \cos \theta_2) \right] \right\}; \quad (4)$$

$$q = \bar{q}(\theta) \cos \gamma, \quad \bar{q}(\theta) = q J_{20}(\theta) / J_{20}(\pi), \quad (5)$$

$$\lambda = \text{tg } \gamma / \sqrt{3}, \quad \nu = J_{22}(\theta) / J_{20}(\theta), \quad (6)$$

где q - безразмерный параметр, зависящий как от внутренних свойств ядра, так и от условий возбуждения, J - орбитальные интегралы ^{/1/}, θ - угол отклонения налетающей частицы. Скалярное произведение берется в пространстве углов Эйлера, определяющих ориентацию системы координат, жестко связанной с ядром, относительно лабораторной системы:

$$(\Psi, \Phi) = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 \Psi^* \Phi.$$

Таким образом, вычисление вероятности перехода сводится к вычислению интегралов A_{MK}^J . Метод вычисления этих величин при $\theta = \pi$ (т.е. $\nu = 0$) изложен в ^{/2/}. Чтобы найти приближенное выражение для A_{MK}^J при $\theta \neq \pi$, разложим S в ряд по степеням ν . Предварительно представим (4) в форме:

$$S = S_0 \exp \left\{ i\sqrt{8/3} q_{\text{эф}} \nu \left[D_{20}^2 + D_{-20}^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{3/2} \lambda (D_{22}^2 + D_{-22}^2 + D_{2-2}^2 + D_{-2-2}^2) \right] \right\}, \quad (7)$$

где

$$S_0 = S|_{\nu=0}.$$

Теперь разложение A_{MK}^J в ряд принимает вид:

$$A_{MK}^J = \frac{\sqrt{2}}{8\pi^2(1+\delta_{K0})^{1/2}} \sum_{n=|M|/2}^{\infty} \frac{(i\sqrt{8/3} q_{\text{эфф}}^\nu)^n}{n!} \times \quad (8)$$

$$\times (D_{MK}^J, S_0 \{ D_{20}^2 + D_{-20}^2 + \sqrt{3/2}\lambda [D_{22}^2 + D_{2-2}^2 + D_{-22}^2 + D_{-2-2}^2] \}^n).$$

Суммирование в (7) начинается с $n = |M|/2$, ибо все слагаемые при $n < |M|/2$ пропадают в силу ортогональности D_{MK}^J и

$$S_0 \{ D_{20}^2 + D_{-20}^2 + \sqrt{3/2}\lambda [D_{22}^2 + D_{2-2}^2 + D_{-22}^2 + D_{-2-2}^2] \}^n.$$

Следовательно, при $\nu \rightarrow 0$ A_{MK}^J стремится к нулю не медленнее, чем $\nu^{|M|/2}$.

В приложении А показано, что

$$A_{MK}^J(\nu) = (-1)^{M/2} A_{MK}^J(-\nu), \quad (9)$$

поэтому в ряде (6) попадают слагаемые с четным (нечетным) n , если $M/2$ нечетно (четно). В связи с этим эффективным параметром разложения является

$$(\sqrt{8/3} q_{\text{эфф}}^\nu)^2.$$

В наиболее неблагоприятном случае, когда $J_{22}(\theta)$ достигает максимума, этот параметр приблизительно равен $0,004 q^2$. Отсюда видно, что вычисляя вероятности возбуждения при $q \lesssim 5$, можно ограничиться первым неисчезающим членом ряда. Относительная ошибка при этом максимальна при малых θ , ибо нулевое по ν приближенное стремится к нулю при $\theta \rightarrow 0$.

Вероятность возбуждения вращательных уровней с четным полным моментом J отлична от нуля в нулевом приближении по ν при $\theta \neq 0$. В этом случае $P_{J\pi}$ зависит от угла рассеяния θ только через $q_{\text{эфф}}$, что можно записать в следующем виде:

$$P_{J\pi}(q\theta) = P_{J\pi}(q(\theta), \pi). \quad (10)$$

Это так называемое " $q(\theta)$ -приближение".

Результаты вычислений дифференциального и полного сечений в этом приближении приводятся в следующем параграфе. Найдем явный вид поправки к $P_{J\pi}(q(\theta), \pi)$. Как следует из (2) и (9), $P_{J\pi}$ - четная функция ν и поэтому поправка квадратична по ν . В нее могут входить только A_{MK}^J и A_{MK}^J , ибо величины A_{MK}^J с $|M| > 2$ при малых ν дают вклад в $P_{J\pi}$, пропорциональный $|\nu^{|M|/2}|^2$, т.е. порядка выше второго. Таким образом, поправка к вероятности перехода принимает вид:

$$P_{Jr}(q\theta) - P_{Jr}(q(\theta), \pi) \cong \nu^2 \Delta_{Jr} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{Jr} = & (8/3)(2J+1)\sigma^2 \left[-2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{jkk'} A_{ok}^j(q(\theta), \pi) \right\} \times \right. \\ & \times \left. A_{ok}^j(q(\theta), \pi) a_k(Jr) C_{ok}^{jj}(Jr) \right\} + \\ & \left. + \left| \sum_{jk} A_{ok}^j(q(\theta), \pi) C_{2k}^j(Jr) \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины $C_{mk}^j(Jr)$, не зависящие от q , определены в приложении В.

Вероятность возбуждения уровней с нечетным J исчезает в "q(θ)-приближении". Это следует из того, что (D^J, S) обращается в нуль при нечетном J , если либо M , либо K равно нулю^{/2/МК}. Вероятность возбуждения уровня спина 3 в первом неисчезающем приближении поэтому квадратична по ν и имеет вид:

$$\begin{aligned} P_{31}(q\theta) \cong & (56/3)(q_{эф} \nu)^2 \left| \sum_{j=2,4} (2j+1) \binom{32j}{2-20} \right. \\ & \times \left[\sqrt{3} \lambda \binom{32j}{2-20} A_{00}^j(q(\theta), \pi) + \right. \\ & \left. + \binom{32j}{20-2} A_{02}^j(q(\theta), \pi) + \right. \\ & \left. + \sqrt{3/2} \lambda \binom{32j}{2-2-4} A_{04}^j(q(\theta), \pi) \right] \left. \right|^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где использованы обозначения Вигнера для коэффициентов Клебша-Жордана, приведенные в работе Эдмондса^{/7/}.

§ 2. Дифференциальное и полное сечения. Численные результаты

Найдем дифференциальное и полное сечения многократного кулоновского возбуждения, используя приближенное выражение (10) для вероятности перехода

$$d\sigma_{Jr}(q\theta) \cong P_{Jr}(q(\theta), \pi) d\sigma_R, \quad (14)$$

где $d\sigma_R$ - сечение Резерфордского рассеяния.

Полное сечение получаем интегрированием (14) по всем углам рассеяния налетающей частицы

$$\sigma_{jr}(q) = \pi a^2 \int_0^\pi \frac{P_{jr}(q(\theta), \pi)}{\sin^3 \theta/2} \cos \theta/2 d\theta. \quad (16)$$

Необходимые для вычисления $d\sigma$ значения $P_{jr}(q(\theta), \pi)$ получались интерполированием таблицы $P_{jr}(q\pi)$ ^{/2/}.

Результаты расчетов по формулам (14) и (15) представлены сплошными кривыми на рисунках 1-4 и 5-6 соответственно. Кроме того, на рисунках 3-4 пунктиром изображена зависимость дифференциального сечения возбуждения второго уровня спина 2, полученная в первом порядке теории возмущения (в приближении удара). Каскадное возбуждение через первый уровень спина 2 при этом не учитывалось.

Из представленных графиков видно, что при описании рассеяния на большие углы теория возмущения дает ошибку тем большую, чем больше неаксиальность ядра. При малых θ ошибка, вносимая "q(θ) -приближением", максимальна. В этой области углов при расчетах дифференциального сечения можно пользоваться теорией возмущения.

В полное сечение "q(θ) -приближение" не вносит большой ошибки, так как дифференциальное сечение дает вклад в полное сечение с весовым множителем $\sin \theta$, ослабляющим зависимость полного сечения от поведения дифференциального сечения при малых углах. Так, полное сечение, рассчитанное в теории возмущения с использованием "q(θ) -приближением", отличается не более, чем на 5% от полного сечения, вычисленного без использования этого приближения.

На рисунках 5-6, кроме полного сечения многократного кулоновского возбуждения неаксиального ядра, нанесены результаты аналогичных расчетов для аксиального ядра, выполненные Граетзером, Хуверманом и Бернстейном ^{/4/}. Кривые, представляющие сечения возбуждения первого уровня спина 4 на рис. 5 при $\gamma = 0^{o/4/}$ и $\gamma = 10^o$, совпадают в пределах точности чертежа. При $\gamma \rightarrow 0^o$ результаты теории для неаксиальных ядер переходят в соответствующие результаты теории аксиальных ядер.

Зависимость полного сечения от параметра q , даваемая теорией возмущения (в приближении удара), нанесена на рис. 5 и 6 пунктирной кривой. Для вычисления полного сечения возбуждения первого уровня спина 2 использовалась обычная формула теории возмущения ^{/3/}:

$$\begin{aligned} \sigma_{E_2}(0 \rightarrow 21) &= \left(\frac{Z_1 e}{\hbar v} \right)^2 a^{-2} B(E_2; 0 \rightarrow 21) f_{E_2}(0) = \\ &= 0,007 \pi a^2 q^2 b(E_2; 0 \rightarrow 21), \end{aligned} \quad (16)$$

где $b(E_2; J\tau \rightarrow J'\tau')$ - приведенная вероятность электромагнитного перехода из состояния $J\tau$ в состояние $J'\tau'$ в единицах $\frac{e^2 Q_a^2}{16\pi}$. Возбуждение первого уровня спина 4 рассчитывалось во втором порядке теории возмущения по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{E_2 B_2} (0 \rightarrow J\tau) &= 0,0272 a^2 \sigma_{E_2} (0 \rightarrow 21) \sigma_{E_2} (21 \rightarrow J) = \\ &= 0,000703 \pi a^2 q^4 b(E_2; 0 \rightarrow 21) b(E_2; 21 \rightarrow J\tau) \end{aligned} \quad (17)$$

при $J = 4, \tau = 1$.

Полное сечение возбуждения уровня $J = 2, \tau = 2$ в теории возмущения вычислялось как в первом порядке, т.е. по формуле (16) (пунктирные кривые на рис.6), так и с учетом каскадного перехода, сечение которого рассчитывалось по формуле (17) при $J = 2, \tau = 2$. Интерференционный член не учитывался. Зависимость суммы $\sigma_{E_2} + \sigma_{E_2 B_2}$ от q при $\gamma = 10^\circ$ и $\gamma = 20^\circ$ изображена штрих-пунктирной кривой на рис. 6.

Из представленных результатов видно, что границы применимости теории возмущения при описании возбуждения основной вращательной полосы неаксиального и аксиального ядер совпадают. Полное сечение возбуждения аномального уровня спина 2^+ , рассчитанное по теории возмущения, заметно расходится с теорией многократного кулоновского возбуждения при $q > (1,5-2)$.

З а к л ю ч е н и е

Можно отметить следующие особенности в поведении сечений многократного кулоновского возбуждения. Во-первых, уровни основной вращательной полосы слабо зависят от γ . Учет неаксиальности не дает заметных отклонений от предсказаний теории, развитой для аксиальных ядер. Во-вторых, сечение возбуждения аномальных уровней, в частности, уровня $J = 2, \tau = 2$ чувствительно к изменению γ . Измеряя это сечение экспериментально, можно определить неаксиальность ядра, если эксперимент проводился в таких условиях, когда с достаточной точностью можно говорить о применимости приближения удара. В-третьих, с изменением угла рассеяния при фиксированном q или с изменением q при фиксированном θ меняется характер зависимости сечения от γ . Это наиболее наглядно видно из рисунка 4. При малых θ сечение рассеяния, рассматриваемое как функция γ , имеет максимум при $\gamma \approx 20^\circ$, а при $\gamma \rightarrow 0^\circ$ и $\gamma \rightarrow 30^\circ$ стремится к нулю. Такая же зависимость следует из теории возмущения, которая справедлива в этой области углов рассеяния. С ростом θ зави-

симость меняется, что выражается в пересечении кривых, соответствующих разным γ . При $\theta \approx \pi$ максимум в сечении достигается при $\gamma \approx 30^\circ$. Таким образом, в указанных пределах сечение становится монотонной функцией γ и, следовательно, по известному сечению можно однозначно определить γ .

Следует отметить слабую зависимость от γ дифференциального сечения возбуждения уровня спина $J = 6$, $r = 1$ при $q = 2$. Кривые, соответствующие $\gamma = 10^\circ$, 20° и 30° , в пределах точности чертежа сливаются в одну.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность профессору А.С. Давыдову за постоянный интерес к работе и ценные критические замечания. Автор также благодарен кафедре математики Физического факультета МГУ и Вычислительному центру МГУ за содействие и помощь при работе на электронно-счетной вычислительной машине.

П Р И Л О Ж Е Н И Е А

Докажем, что

$$A_{MK}^J(q_{\text{эф}}, \lambda \nu) = (-1)^{M/2} A_{MK}^J(q_{\text{эф}}, \lambda, -\nu), \quad (1.A)$$

$$A_{MK}^J(q_{\text{эф}}, \lambda \nu) = (-1)^{K/2} A_{MK}^J(q_{\text{эф}}, -\lambda, \nu). \quad (2.A)$$

В работе^[2] показано, что величины A_{MK}^J отличны от нуля только при четных M и K и пропорциональны интегралу

$$\int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi d\theta_2 \sin \theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_3 e^{i(M/2)\theta_1} e^{i(K/2)\theta_3} f(\lambda \nu \theta_1 \theta_2 \theta_3), \quad (3.A)$$

где $f(\lambda \nu \theta_1 \theta_2 \theta_3) =$

$$\begin{aligned} &= d_{MK}^J(\theta_2) \exp \{ -2iq_{\text{эф}} [\cos^2 \theta_2 - 1/3 + \lambda \sin^2 \theta_2 \cos \theta_3 - \\ &- \nu \sin^2 \theta_2 \cos \theta_1 - \lambda \nu [\cos \theta_1 \cos \theta_3 (1 + \cos^2 \theta_2) - \\ &- 2 \sin \theta_1 \sin \theta_3 \cos \theta_2]] \}. \end{aligned}$$

Здесь было использовано то обстоятельство, что

$$D_{MK}^J(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = e^{iM\theta_1} d_{MK}^J(\theta_2) e^{iK\theta_3}.$$

Так как

$$f(\lambda \nu, \theta_1 + \pi, \theta_2, \theta_3) = f(\lambda, -\nu, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

и функция f имеет период 2π по аргументу θ_1 , то, производя в интеграле (3.A) замену

$$\theta_1 = \theta_1' + \pi,$$

получим соотношение (1.A). Аналогично, используя свойство функции f

$$f(\lambda \nu \theta_1 \theta_2, \theta_3 + \pi) = f(-\lambda \nu \theta_1 \theta_2 \theta_3)$$

и ее периодичность с периодом 2π по аргументу θ_3 , получаем (2A).

П Р И Л О Ж Е Н И Е В

Найдем приближенное выражение для $A_{2K}^J(q\theta)$ и разности $A_{оК}^J(q\theta) - A_{оК}^J(q\theta, \pi)$, необходимые для вычисления квадратичной по ν поправки к вероятности перехода (11). Используя (3) и (8), получим

$$\begin{aligned} & A_{оК}^J(q\nu) - A_{оК}^J(q\theta, \pi) = \\ & = -(3\sqrt{3})(q_{\text{эф}} \nu)^2 \sum_{j, j'} (2j+1)(2j'+1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & j' & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\lambda^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K & 0 & -K \end{pmatrix} A_{оК}^J(q\theta, \pi) + \\ & + \lambda \left[\frac{6}{1 + \delta_{K0}} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \left[(1 + \delta_{K,-2}) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K & 2 & -K-2 \end{pmatrix} A_{оК+2}^J(q\theta, \pi) + \\ & + (1 + \delta_{K2})^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K & -2 & -K+2 \end{pmatrix} A_{оК-2}^J(q\theta, \pi) + \\ & + \frac{3\lambda^2}{2(1 + \delta_{K0})^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \left[(1 + \delta_{K,-4}) \right]^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K-4 & -K-4 \end{pmatrix} A_{оК+4}^J(q\theta, \pi) + \\ & + (1 + \delta_{K4})^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K & -4 & -K+4 \end{pmatrix} A_{оК-4}^J(q\theta, \pi) \Big] \Big] , \end{aligned} \tag{1.B}$$

$$\begin{aligned} & A_{2K}^J(q\theta) = i\sqrt{8/3} q_{\text{эф}} \nu \sum_j (2j+1) \begin{pmatrix} J & 2 & j \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \left[\begin{pmatrix} J & 2 & j \\ K & 0 & -K \end{pmatrix} A_{оК}^J(q\theta, \pi) + \right. \end{aligned} \tag{2B}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \left[\frac{3(1+\delta_{K,-2})}{2(1+\delta_{K,0})} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} J & 2 & j \\ K & 2 & -K-2 \end{pmatrix} A_{0K+2}^j(q(\theta), \pi) + \\
 & + \lambda \left[\frac{3(1+\delta_{K2})}{2(1+\delta_{K,0})} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} J & 2 & j \\ K & -2 & -K+2 \end{pmatrix} A_{0K-2}^j(q(\theta), \pi) \}.
 \end{aligned} \tag{2B}$$

При $\gamma \rightarrow 0$ выражения (1.B) и (2.B) отличны от нуля только при $K=0$ и переходят в соответствующие выражения, полученные для аксиального ядра Альдером и Уинтером [1].

С помощью (1.B) и (2.B) легко показать, что

$$\sum_{\substack{K \geq 0 \\ K \text{ четное}}} A_{0K}^J(q\theta) a_K(Jr) = \sum_{\substack{K \geq 0 \\ K \text{ четное}}} A_{0K}^J(q(\theta), \pi) a_K(Jr) - \tag{3.B}$$

$$- (8/3) (q_{\text{эф}}^\nu)^2 \sum_{\substack{0 < K < J \\ K \text{ и } J \text{ четные}}} A_{0K}^J(q(\theta), \pi) C_{0K}^J(Jr)$$

$$\sum_{\substack{K \geq 0 \\ K \text{ четное}}} A_{2K}^J(q\theta) a_K(Jr) \approx \tag{4.B}$$

$$\approx i\sqrt{8/3} q_{\text{эф}}^\nu \sum_{\substack{0 < K < J \\ K \text{ и } J \text{ четные}}} A_{0K}^J(q(\theta), \pi) C_{2K}^J(Jr),$$

где C_{MK}^J определяются следующим образом:

$$C_{MK}^J = (\bar{C}_{MK}^J + \bar{C}_{M-K}^J) (1 + \delta_{K0})^{-1},$$

$$\bar{C}_{0K}^J(Jr) = \sum_{\substack{j' \\ j' \text{ четное}}} (2j+1)(2j'+1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & j' & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \{ \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\lambda^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \} \cdot \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K & 0 & -K \end{pmatrix} a_K(Jr) +$$

$$+ \sqrt{6} \lambda \left[\begin{pmatrix} J & j' & j \\ K-2 & 2 & -K \end{pmatrix} \frac{a_{K-2}(Jr)}{(1+\delta_{K2})^{1/2}} + \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K+2 & -2 & -K \end{pmatrix} \left(\frac{1+\delta_{K0}}{1+\delta_{K,-2}} \right)^{1/2} a_{K+2}(Jr) \right] \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{3\lambda^2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & j' \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} J & j' & j \\ K-4 & 4 & -K \end{pmatrix} \frac{a_{K-4}(Jr)}{(1+\delta_{K4})^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} J & j' & j \\ K+4 & -4 & -K \end{pmatrix} \left(\frac{1+\delta_{K0}}{1+\delta_{K,-4}} \right)^{1/2} a_{K+4}(Jr) \right],$$

$$\bar{C}_{2K}^J = (2j+1) \begin{pmatrix} J & 2 & j \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} J & 2 & j \\ K & 0 & -K \end{pmatrix} a_K(Jr) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \left(\frac{3}{2(1 + \delta_{K,2})} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} J & 2 & j \\ K-2 & 2 & -K \end{pmatrix} a_{K-2} (Jr) + \\
 & + \lambda \left(\frac{3(1 + \delta_{K0})}{2(1 + \delta_{K,2})} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} J & 2 & j \\ K+2 & -2 & -K \end{pmatrix} a_{K+2} (Jr) \} ,
 \end{aligned}$$

где всюду следует положить $a_K (Jr) = 0$ при $K < 0$. В случае $J = 2$ величины

$C_{0K}^J (2r)$ имеют вид:

$$C_{\infty 0}^0 = (2/35)(3\lambda^2 - 1) a_0 + (4\sqrt{3}/\sqrt{35}) \lambda a_2 ,$$

$$C_{00}^2 = (1/7)(1 + 6\lambda^2) a_0 - (\sqrt{3}/7) \lambda a_2 ,$$

$$C_{00}^4 = (6/385)(29\lambda^2 - 8) a_0 + (6\sqrt{3}/385) \lambda a_2 ,$$

$$C_{\infty 0}^6 = (3/154)(2 + \lambda^2) a_0 + (\sqrt{3}/77) \lambda a_2 ,$$

$$C_{02}^2 = (-\sqrt{3}/70) \lambda a_0 + (1/7)(2 + 3\lambda^2) a_2 ,$$

$$C_{02}^4 = (+12\sqrt{5}/77) \lambda a_0 + (12/77) \sqrt{3/5} (2\lambda^2 - 1) a_2 ,$$

$$C_{02}^6 = (2/11) \sqrt{6/35} \lambda a_0 + (1/22\sqrt{70}) (4 + 3\lambda^2) a_2 ,$$

$$C_{04}^4 = (-6/11\sqrt{35}) \lambda^2 a_0 + (18\sqrt{3}/11\sqrt{35}) a_2 ,$$

$$C_{04}^6 = (3\lambda^2/22\sqrt{7}) a_0 + (\sqrt{3}/11\sqrt{7}) a_2 ,$$

$$C_{06}^6 = (3\lambda^2/2\sqrt{154}) a_2 .$$

Л и т е р а т у р а

1. K.Alder, A.Winther. Math. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 32, N 8 (1960).
2. В.В. Пашкевич. "Вестник Московского университета", сер. физики, астрономии, № 6, 65, 1963.
3. K.Alder, A.Bohr, T.Huss, B.Mottelson, A.Winter. Revs. Mod. Phys., 28, 432 (1956).
(Перевод: см. сб. "Деформация атомных ядер". ИЛ, 1958 г.)
4. R.Graetzer, R.Hooverman, E.M.Bernstein, Nucl. Phys., 39, 124 (1962).
5. А.С. Давыдов, Г.Ф. Филиппов. ЖЭТФ, 35, 440 (1958).
6. А.С. Давыдов, В.С. Ростовский. ЖЭТФ, 38, 1788 (1959).
7. A.R.Edmonds. Angular Momentum in Quantum Mechanics, CERN, 55-26, Geneva.
(Перевод: см. сб. "Деформация атомных ядер". ИЛ, 1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 февраля 1964 г.

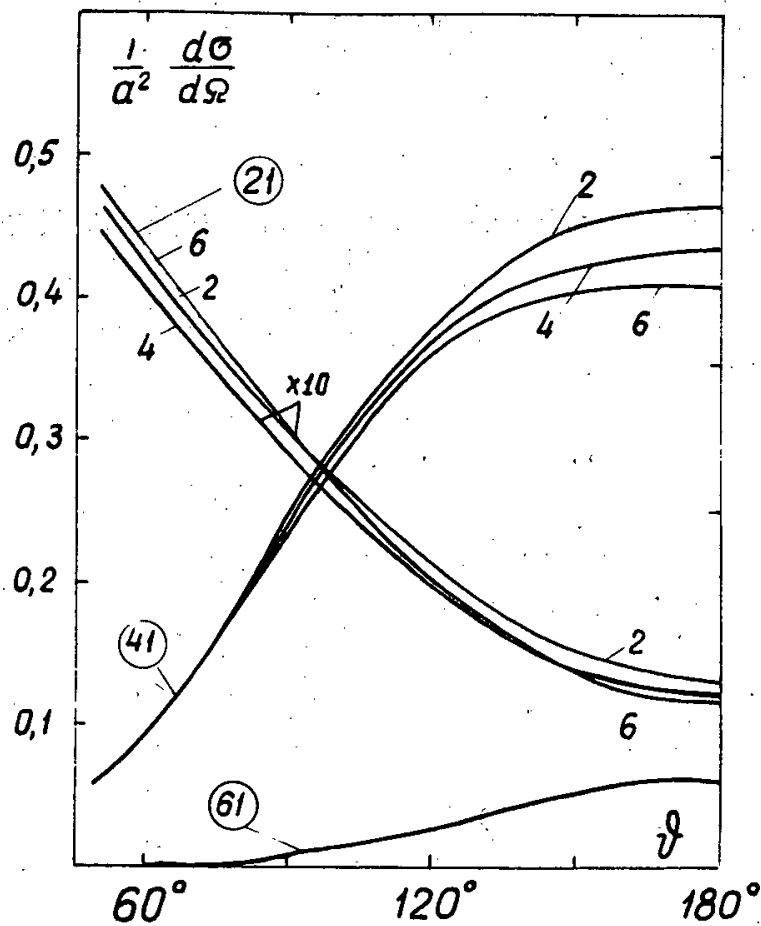


Рис. 1. Дифференциальное сечение многократного кулоновского возбуждения вращательного спектра неаксиального ядра в единицах a^2 в зависимости от угла рассеяния θ . В кружках даны значения J^π возбуждаемого уровня. Для каждого J^π приведены кривые при различных значениях параметра неаксиальности γ : 2- 10° , 4- 20° , 6- 30° . Параметр $q = 2$. Кривая $J = 2, \gamma = 1$ дана в относительном масштабе 10:1.

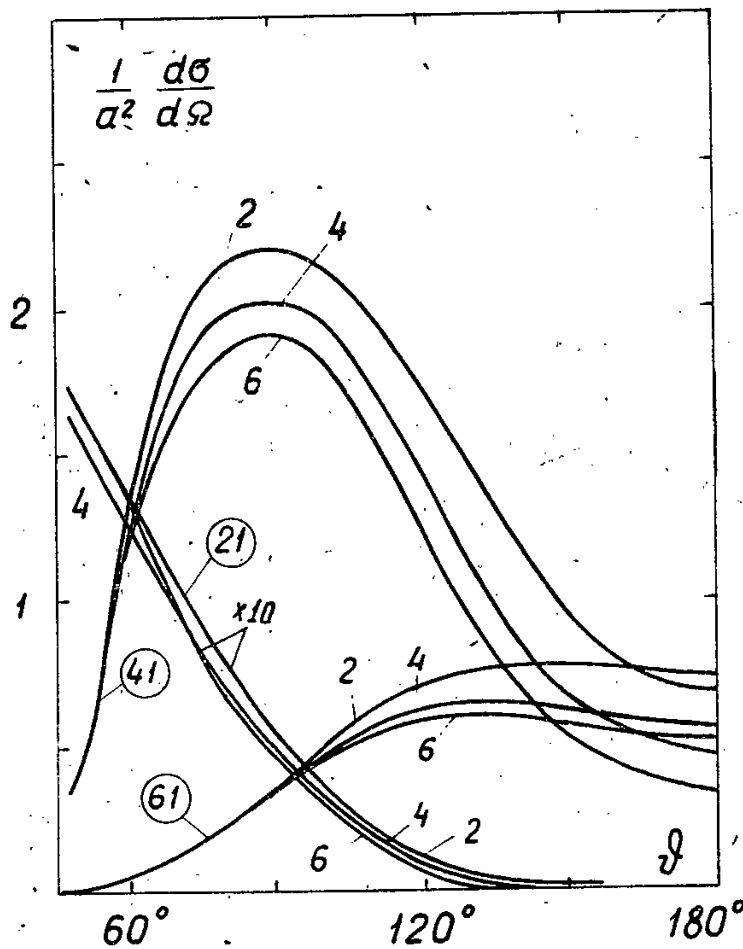


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, при $q=4$.

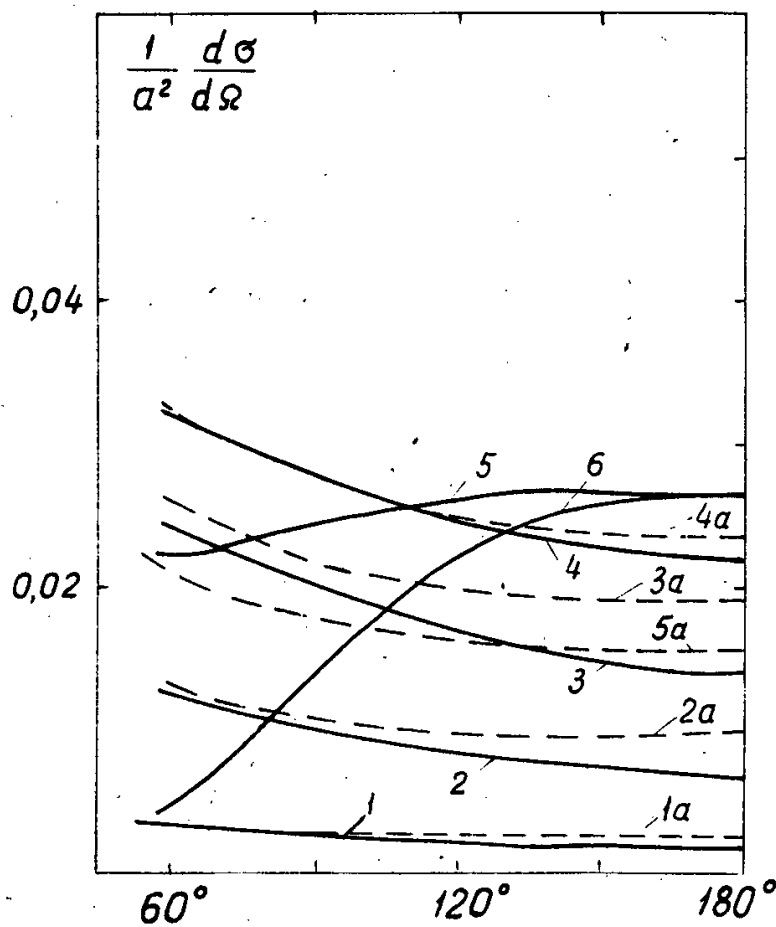


Рис. 3. Дифференциальное сечение многократного кулоновского возбуждения второго уровня спина 2^+ неаксиального ядра в единицах a^2 в зависимости от угла рассеяния θ . Приведены кривые при различных значениях параметра неаксиальности γ : 1- 5° , 2- 10° , 3- 15° , 4- 20° , 5- 25° , 6- 30° . Параметр $q = 2$. Пунктиром нанесены результаты теории возмущения.

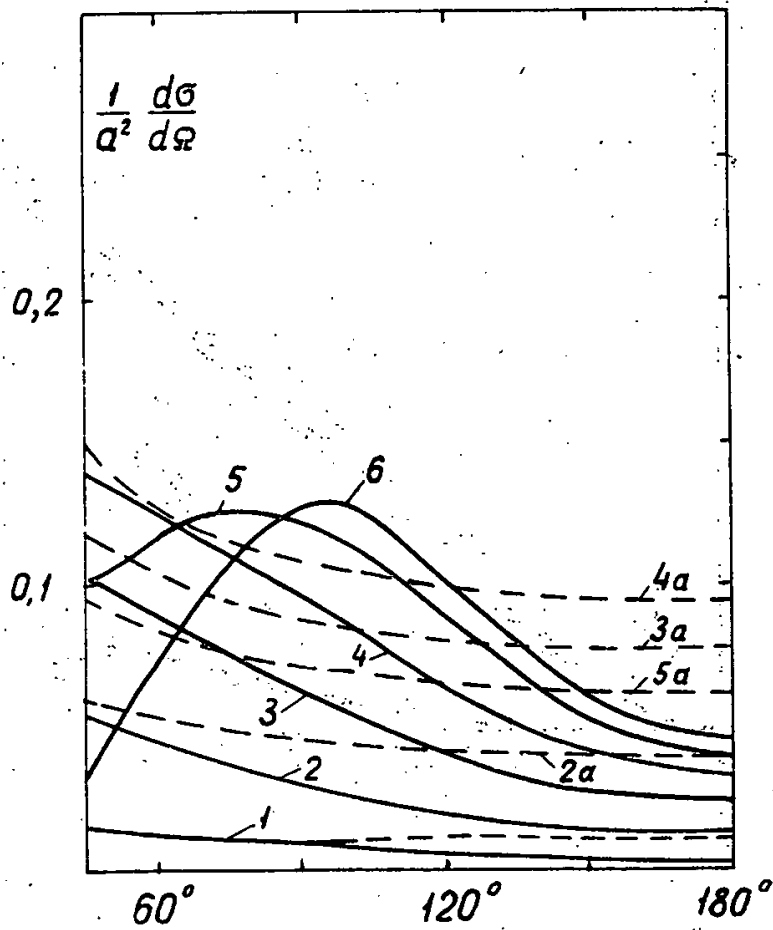


Рис. 4. То же, что и на рис. 1, при $q = 4$.

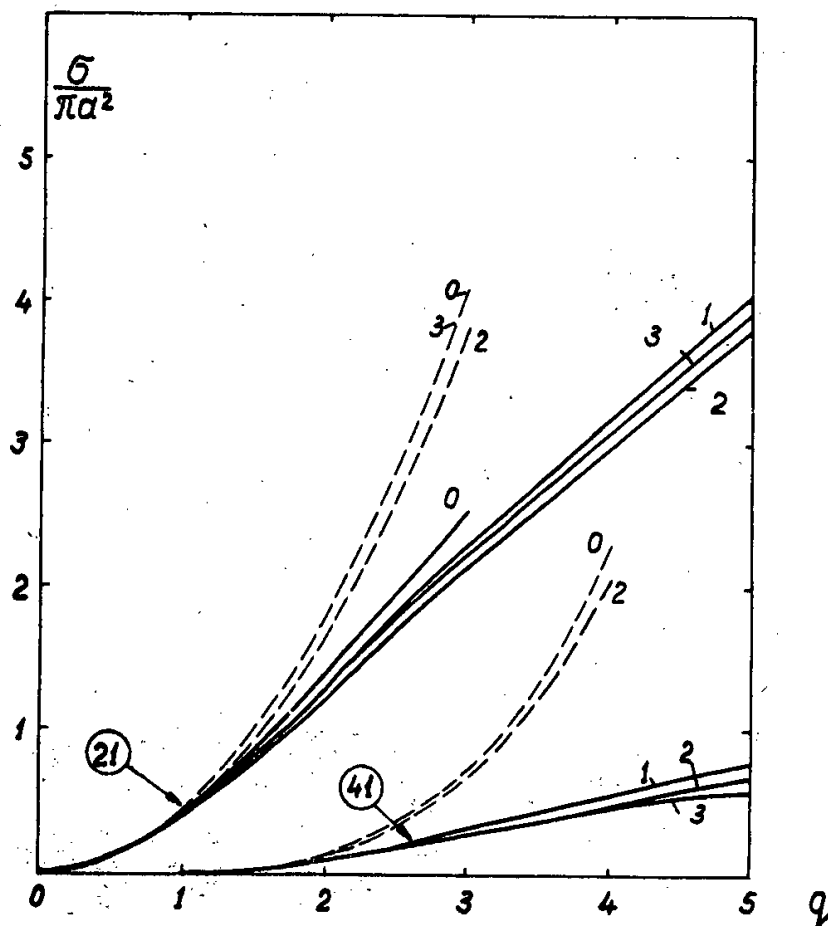


Рис. 5. Полное сечение многократного кулоновского возбуждения вращательного спектра неаксиального ядра в единицах πa^2 в зависимости от параметра q . В кружках даны значения J_r . Для каждого J_r приведены кривые при различных значениях параметра неаксиальности γ : 0- $0^\circ/4^\circ$, 1- 10° , 2- 20° , 3- 30° . Пунктиром нанесены результаты теории возмущения.

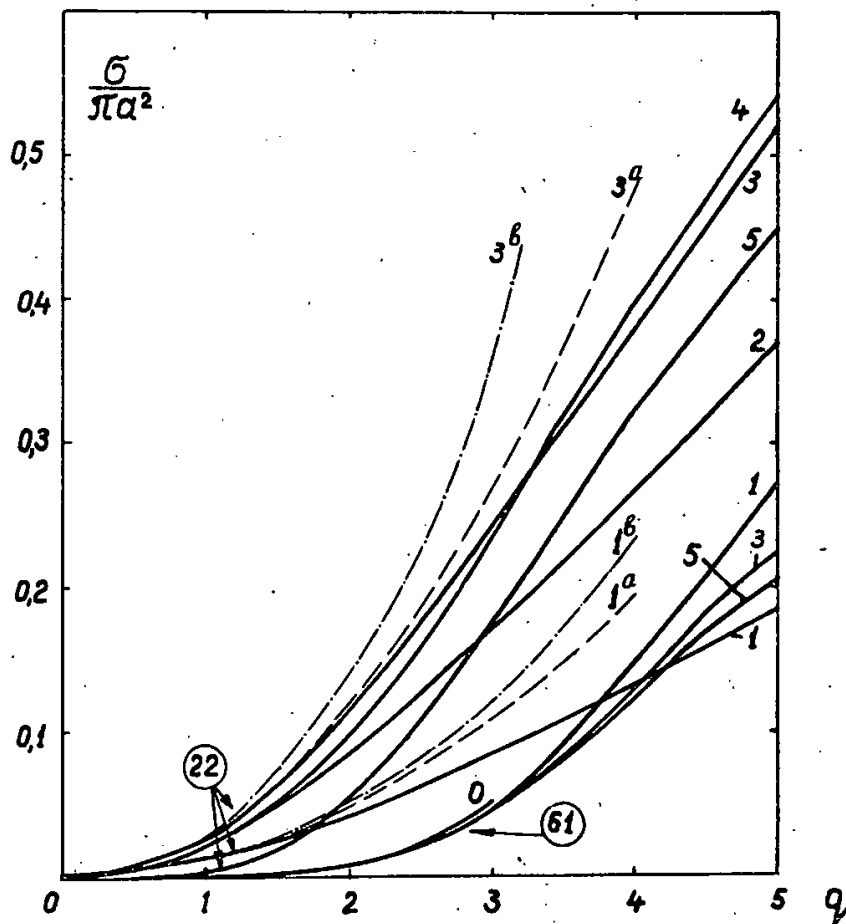


Рис. 6. Полное сечение многократного кулоновского возбуждения, вращательного спектра неаксиального ядра в единицах πa^2 в зависимости от параметра q . В кружках даны значения Jr . Приведены кривые при следующих значениях параметра неаксиальности γ : 0- $0^\circ/4$, 1- 10° , 2- 15° , 3- 20° , 4- 25° , 5- 30° . Пунктиром нанесены результаты в первом порядке теории возмущения: $\gamma = 10^\circ - 1a$ и $\gamma = 20^\circ - 3a$. Штрих-пунктир - сумма сечений прямого и каскадного возбуждения через первый уровень спина 2, вычисленных в теории возмущения, причем параметр γ равен 10° и 20° для кривых 1b и 3b, соответственно.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3602. Тираж 410. 1,3 уч.-изд. л.
Техн. редактор В.Р.Саранцева Февраль 1964 г.

5



47

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов.

STAT

P-1562

О ПЛОТНОСТИ РЕЗОНАНСОВ
ПРИ РАССЕЯНИИ
НА СВЯЗАННЫХ ЧАСТИЦАХ

Дубна 1964

P-1562

Захарьев Б.Н., Соколов С.Н.

О плотности резонансов при рассеянии на связанных частицах

Рассматривается эффект возникновения частых резонансов в простой модели, когда частицы рассеиваются на потенциальной яме, в которой находится одна частица. Полученный результат позволяет сделать вывод, что частые резонансы в сечении рассеяния медленных нейтронов на ядрах могут быть поняты на основе значительно более простого механизма реакции, чем передача энергии налетающей частицы всем нуклонам в ядре.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

P-1562

Sokolov S.N., Zakhariev B.N.

On Resonance Density in Scattering on Bound Particles

The emergence of frequent resonances is demonstrated on the simple model when a particle is scattered on the potential well occupied by another particle. The result obtained shows that the frequent resonances in the cross section for slow neutron scattering on nuclei can be understood on the basis of a considerably simpler mechanism of the reaction than the transfer of the energy of an incident particle to all the nucleons in the nucleus.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов

P-1562

О ПЛОТНОСТИ РЕЗОНАНСОВ
ПРИ РАССЕЯНИИ
НА СВЯЗАННЫХ ЧАСТИЦАХ

Дубна 1964

1. В в е д е н и е

Исследование систем трех тел представляет собой весьма трудную задачу. Вместе с тем три взаимодействующих частицы являются наиболее простым объектом, который позволяет нам изучить многие важные свойства, присущие системам многих тел. Привлекательность задачи состоит еще и в том, что многие свойства систем трех тел кажутся нам удивительными - можно ожидать качественно новых эффектов по сравнению с хорошо изученной задачей взаимодействия двух частиц. Так в работе /1/ было показано, что две связанные частицы (сложная частица) проходят сквозь потенциальные барьеры (внешнее поле - третье тело) существенно легче, чем одна простая, имеющая ту же скорость и массу, что и сложная частица.

В данной работе мы рассмотрим эффект возникновения частых резонансов в простой модели, когда частицы рассеиваются на потенциальной яме, в которой в связанном состоянии находится одна частица.

В настоящее время наши представления о строении ядер трудно совместить с классической картиной компаунд-ядра, когда налетающая частица отдает свою энергию равномерно всем нуклонам в ядре. Такому взаимодействию должно оказывать сильное противодействие влияние принципа Паули. Представляется более естественным, что налетающая частица в основном взаимодействует с нуклонами, близкими к энергетической поверхности Ферми. Возможно, что многие свойства ядерных реакций, например, частые и узкие резонансы в сечении рассеяния медленных нейтронов на ядрах, могут быть поняты на основе значительно более простого механизма реакции, чем компаунд-ядро.

В разделе 2 рассматривается система уравнений, описывающая одномерное движение двух взаимодействующих частиц во внешнем поле. В разделе 3 показана возможность возникновения резонансов в такой системе. В разделе 4 рассматривается средняя плотность резонансов. Оказывается, что она в N раз больше плотности одностичных уровней в потенциальной яме внешнего поля v (N - число одностичных уровней в поле v).

Тот факт, что в работе рассмотрена лишь одномерная модель, не мешает делать выводы относительно плотности резонансов в трехмерном случае, так как механизм возникновения квазистабильных состояний остается тем же.

В следующих работах авторы предполагают дать строгое обоснование метода,

пригодного не только для качественного рассмотрения явления (исследование общего числа резонансов, их средней плотности), но и для количественного описания свойств отдельных резонансов.

2. Основные уравнения

Рассмотрим две частицы, положение которых мы будем характеризовать координатами x_1 и x_2 . Пусть взаимодействие частиц осуществляется с помощью потенциала v_{12} . На обе частицы пусть действует внешнее поле $v(x)$. Гамильтониан системы H_{12} этих двух частиц имеет вид:

$$H_{12} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + v_{12}(x_1 - x_2) + v_1(x_1) + v_2(x_2). \quad (1)$$

При фиксированном положении первой частицы движение второй определяется гамильтонианом H_2 :

$$H_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} + v_{12}(x_1 - x_2) + v_1(x_1) + v_2(x_2). \quad (2)$$

Гамильтониану H_2 соответствует полный набор волновых функций Φ_n (пусть n пробегает как дискретные, так и непрерывные значения)

$$H_2 \Phi_n(x_2; x_1) = E_n(x_1) \Phi_n(x_2; x_1). \quad (3)$$

Функции Φ_n зависят от x_1 как от параметра, так как x_1 входит в H_2 . При любом значении x_1 мы можем разложить волновую функцию всей системы Ψ по полному набору функций Φ_n :

$$\Psi = \sum_n \phi_n(x_1) \Phi_n(x_2; x_1). \quad (4)$$

Подставим разложение (4) в уравнение Шредингера для Ψ :

$$H_{12} \Psi = E \Psi, \quad (5)$$

умножим затем (5) слева на Φ_m и проинтегрируем по x_2 . Учитывая ортонормированность функций Φ_n и соотношение (3), получим бесконечную систему уравнений для ϕ_m :

$$-\frac{1}{2m_1} \phi_m'' + [E_m(x_1) - K_{mm}(x_1)] \phi_m = E \phi_m + \sum_{n \neq m} (K_{mn} \phi_n + 2Q_{mn} \phi_n'). \quad (6)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по x_1 . Функции $E_m(x_1) - K_{mm}(x_1)$ играют роль эффективных потенциалов в уравнениях (6). Коэффициенты K_{mn} и Q_{mn} , осуществляющие зацепление уравнений (6), определяются следующими соотношениями:

$$K_{mn}(x_1) = \int \Phi_m \Phi_n'' dx_2, \quad (7)$$

$$Q_{mn}(x_1) = \int \Phi_m \Phi_n' dx_2. \quad (8)$$

Для дискретных значений m и n величину Q_{mn} можно представить в более удобном для расчетов виде. Продифференцируем для этого (3) по x_1 , умножим затем обе стороны полученного уравнения на Φ_m и проинтегрируем по x_2 . В результате получим:

$$-\frac{1}{2m_2} \int \Phi_m \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Phi_n' dx_2 + \int \Phi_m V' \Phi_n dx_2 + \int \Phi_m V \Phi_n' dx_2 - \int \Phi_m E_n(x_1) \Phi_n' dx_2 = 0. \quad (9)$$

Здесь для сокращения записи принято обозначение $V = v_{12}(x_1 - x_2) + v_1(x_1) + v_2(x_2)$. Проинтегрируем первый член в (9) дважды по частям, учитывая, что функции Φ_m с дискретным m исчезают при $x_2 \rightarrow \pm \infty$ и, используя (3), получим:

$$Q_{mn} = \int \Phi_m \Phi_n' dx_2 = \frac{\int \Phi_m V' \Phi_n dx_2}{E_n - E_m}. \quad (10)$$

Из (10) следует антисимметричность Q_{mn} относительно перестановки m и n . В общем случае свойство антисимметричности Q_{mn} следует, если продифференцировать по x_1 соотношение ортонормировки для функций Φ_m .

В том случае, когда потенциалы v_{12} и v_1, v_2 представляют собой прямоугольные ямы, интеграл в (10) легко вычислить, поскольку V - кусочно постоянная функция и производная от нее равна сумме δ -функций.

Между коэффициентами K_{mn} и Q_{mn} существует простая связь. Дифференцируя (8) по x_1 и используя разложение

$$\Phi_n' = -\sum_p Q_{np} \Phi_p, \quad (11)$$

получим

$$K_{mn} = (Q^2)_{mn} + Q'_{mn}. \quad (12)$$

Для диагональных K_{mm} имеем ($Q_{mm} = 0$)

$$K_{mm} = \sum_n Q_{mn} Q_{nm} = -\sum_n (Q_{mn})^2. \quad (13)$$

Коэффициенты K и Q не зависят от выбора внешнего поля v_1 , действующего на первую частицу. Потенциал $v_1(x_1)$ просто прибавляется к эффективным потенциалам в системе (6).

Определим граничные условия для Ψ так, чтобы из $-\infty$ падал единичный поток частиц 1, а частица 2 при $x_1 \rightarrow -\infty$ находилась в основном состоянии в потенциале v_2 . Пусть энергия системы E недостаточна для того, чтобы частица 2 находилась в возбужденном состоянии при удалении первой частицы на бесконечность:

$$E_1(+\infty) < E < E_2(+\infty). \quad (14)$$

3. Возникновение резонансов

Выделим в системе (6) первое уравнение (см. /2/) и запишем ее в виде

$$\left(-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_1 - K_{11} - E\right) \phi_1 = \sum_n \hat{O}_{1n} \phi_n, \quad (15)$$

$$\left(-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_n - K_{11} - E\right) \phi_n = \hat{O}_{n1} \phi_1 + \sum_m \hat{O}_{nm} \phi_m, \quad (m, n \neq 1) \quad (16)$$

Операторы \hat{O} определяются соотношением:

$$\hat{O}_{ij} \phi_j = K_{ij} \phi_j + 2Q_{ij} \phi_j'. \quad (17)$$

Введем функции $\vec{\chi}_\ell$ - вектора с компонентами $\chi_{n\ell}$ и собственные значения ξ_ℓ системы:

$$\left(-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_n - K_{nn}\right) \chi_{n\ell} - \sum_m \hat{O}_{nm} \chi_{m\ell} = \xi_\ell \chi_{n\ell}. \quad (18)$$

Разложим $\vec{\phi}$ в ряд по функциям $\vec{\chi}_\ell$

$$\phi_n = \sum_\ell c_\ell \chi_{n\ell}. \quad (19)$$

Подставим (19) в (16) и используя (18), получим:

$$\sum_\ell c_\ell (\xi_\ell - E) \chi_{n\ell} = \hat{O}_{n1} \phi_1. \quad (20)$$

Умножим (20) слева на $\tilde{\chi}_{n\ell}$ и проинтегрируем, получим. ($\tilde{\chi}$ - решение уравнения сопряженного (18))

$$c_\ell = \frac{\sum_n \int \tilde{\chi}_{n\ell} \hat{O}_{n1} \phi_1 dx_1}{\xi_\ell - E}. \quad (21)$$

Подставим теперь c_ℓ из (21) в (19), а затем ϕ_n из (19) в (15):

$$\left(-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_1 - K_{11} - E\right) \phi_1 = \sum_{m,n,\ell} \frac{\hat{O}_{1n} \chi_{n\ell} \int \tilde{\chi}_{m\ell} \hat{O}_{m1} \phi_1 dx_1}{\xi_\ell - E}. \quad (22)$$

Пусть энергия E системы близка к некоторому ξ_p . Определим два линейно-независимых решения $g_{1\pm}$ уравнения:

$$\left(-\frac{1}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_1 - K_{11} - E\right) g_{1\pm} - \sum_{m,m_i \neq p} \frac{\hat{O}_{1n} \chi_{n\ell} \int \tilde{\chi}_{m\ell} \hat{O}_{m1} \phi_1 dx_1}{\xi_p - E} = 0. \quad (23)$$

Пусть g_{1+} представляет собой решение, в котором справа от области рассеяния имеет только волна, идущая направо. С помощью функций $g_{1\pm}$ мы можем представить ϕ_1 в виде /3/ q - удовлетворяет уравнению (23) с $\phi_1 = 0$ /:

$$\phi_I = \left(q_{I+} \int_{-\infty}^{x_I} q_{I-n} \sum_{n_p} \hat{O}_{In} \chi_{np} dx_I + q_{I-} \int_{x_I}^{\infty} q_{I+n} \sum_{n_p} \hat{O}_{In} \chi_{np} dx_I \right) c_p + \epsilon_{I+}, \quad (24)$$

где для функций $q_{I\pm}$ принята нормировка $q_{I+}' q_{I-} - q_{I+} q_{I-}' = 1$, и где $\frac{1}{2}(q_{I+}' - i\sqrt{2m(E-E_p)}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_I} q_{I+} \Big|_{x_I \rightarrow -\infty} = 1$

$$c_p = \frac{\sum_m \int \bar{\chi}_{mp} \hat{O}_{mI} \phi_I dx_I}{\epsilon_p - E} \quad (25)$$

Подставляя ϕ_I из (24) в (25) и решая уравнение относительно c_p , получим:

$$c_p = \frac{\sum_m \int \bar{\chi}_{ml} \hat{O}_{mI} \epsilon_{I+} dx_I}{\epsilon_p - E - \sum_m \int \bar{\chi}_{ml} \hat{O}_{mI} P dx_I}, \quad (26)$$

где

$$P = q_{I+} \int_{-\infty}^{x_I} q_{I-n} \sum_{n_p} \hat{O}_{In} \chi_{np} dx_I + q_{I-} \int_{x_I}^{\infty} q_{I+n} \sum_{n_p} \hat{O}_{In} \chi_{np} dx_I. \quad (27)$$

Согласно (24) коэффициент прохождения D имеет вид:

$$D = \left| c_p \int q_{I-} \sum_{n_p} \hat{O}_{In} \chi_{np} dx_I + 1 \right|^2. \quad (28)$$

Если $\int \bar{\chi}_{mp} \hat{O}_{mI} \epsilon_{I+} dx_I$ и $\int \bar{\chi}_{ml} \hat{O}_{mI} P dx_I$ не сильно зависят от энергии вблизи ϵ_p и $\text{Im} \int \bar{\chi}_{mp} \hat{O}_{mI} P dx_I$ меньше, чем расстояние между ϵ_l , то зависимость c_p , а, следовательно, и D от E имеет резонансный характер вблизи ϵ_p . Действительная часть $\text{Re} \int \bar{\chi}_{mp} \hat{O}_{mI} P dx_I$ определяет сдвиг резонанса относительно ϵ_p , а его мнимая часть определяет ширину Γ резонанса. Можно ожидать^{14/}, что Γ будет малой, если выбрать v_1, v_2 с параметрами ядерного потенциала, а v_{12} с параметрами нуклон-нуклонного взаимодействия.

В существовании указанных резонансов можно легко убедиться, если мала связь между уравнениями в системе (6) (или (15), (16)).

Рассмотрим для простоты только два уравнения

$$(H_I - E) \phi_I = \hat{O}_{In} \phi_n, \quad (29)$$

$$(H_n - E) \phi_n = \hat{O}_{nI} \phi_I. \quad (30)$$

Разложим функцию ϕ_n по полному набору функций $\phi_{n\ell}$

$$H_n \phi_{n\ell} = E_\ell \phi_{n\ell}, \quad (31)$$

$$\phi_n = \sum_p c_{np} \phi_{np} \quad (32)$$

Подставляя (32) в (30), умножая слева на ϕ_{np} и интегрируя, получаем:

$$c_{np} = \frac{\int \phi_{np} \hat{O}_{n1} \phi_1 dx_1}{E_p - E} \quad (33)$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при малых коэффициентах K и Q правую часть уравнения (29) можно рассматривать как малое возмущение и функцию ϕ_1 при всех значениях E (см. (14)) можно приближенно заменять невозмущенной функцией $\phi_1^{(0)}$

$$H_1 \phi_1^{(0)} = E \phi_1^{(0)} \quad (34)$$

Для функций $\phi_1^{(0)}$ значения E_p — ничем не выделенные точки на оси энергий E . То же самое справедливо для $\int \phi_{np} \hat{O}_{n1} \phi_1^{(0)} dx_1$, так как в ϕ_{np} и \hat{O}_{n1} вообще не входит зависимость от энергии E . В общем случае $\int \phi_{np} \hat{O}_{n1} \phi_1^{(0)} dx_1$ отлично от нуля в точках $E = E_p$. Замена $\phi_1 \rightarrow \phi_1^{(0)}$ в (33) приводит к тому, что c_{np} обращаются в бесконечность в точках $E = E_p$, а, следовательно, в бесконечность обращается и правая часть уравнения (29). Мы пришли к противоречию. К тому же противоречию мы приходим, если заменим ϕ_1 на функцию, мало отличающуюся от $\phi_1^{(0)}$. Только значительным изменением ϕ_1 по сравнению с $\phi_1^{(0)}$ (~100%) в точках $E = E_p$ можно обратить $\int \phi_{np} \hat{O}_{n1} \phi_1 dx_1$ в этих точках в нуль, чтобы c_{np} оставались конечными.

При значениях энергии E вдали от E_p мы можем пользоваться невозмущенными функциями $\phi_1^{(0)}$. Таким образом, мы видим, что ϕ_1 должна резко меняться вблизи E_p , что приводит к резонансному поведению характеристик рассеяния (коэффициент прохождения, сечения рассеяния).

Случай больших коэффициентов связи в системе (6) потребует либо явного решения связанных уравнений, либо более последовательного анализа системы (6). Авторы предполагают посвятить этому следующую работу.

4. Частота резонансов

Положим $m_1 = m_2$. Выберем $v_1(x) = v_2(x)$ в виде прямоугольной потенциальной ямы:

$$v_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 \leq 0; \quad x_1 \geq R \\ -V_0 & \text{при } 0 < x_1 < R. \end{cases} \quad (35)$$

Пусть параметры R и V_0 выбраны таким образом, что в яме v имеется N одно-
 частичных дискретных уровней. Если ширина r потенциальной ямы

$$v_{12} = \begin{cases} 0 & \text{при } |x_1 - x_2| \geq r \\ -V_0 & \text{при } |x_1 - x_2| < r \end{cases} \quad (36)$$

такова, что в v_{12} имеется только одно связанное состояние с энергией, близкой к
 нулю, для двух частиц с массой m , то эффективные потенциальные энергии $E_m - K_{mm}$
 системы (6) имеют согласно (2) и (3) вид потенциальных ям с шириной $\approx R + r$
 и глубиной несколько большей, чем V_0 . Качественно зависимость потенциалов $E_m - K_{mm}$
 от x_1 изображена на рис. 1.

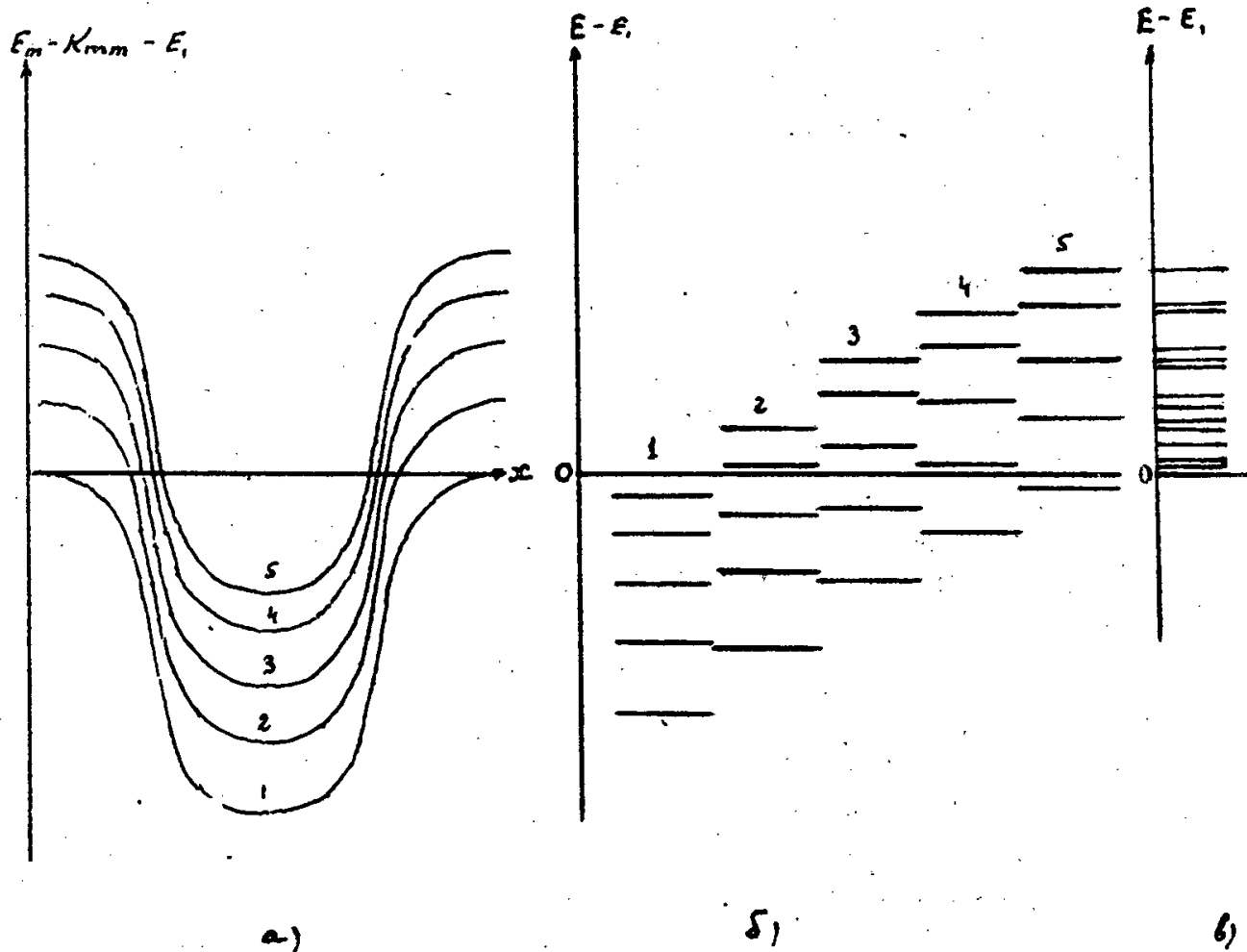


Рис. 1. а) Эффективные потенциалы. б) Уровни в эффективных потенциалах.
 в) Резонансные энергии.

В каждой из N потенциальных ям, изображенных на рис. 1, имеется N уров-
 ней. Резонанс в системе наступает, когда энергия E приближается к одному из

значений энергетических уровней в любой из потенциальных ям. Поскольку нас в данной работе интересует средняя плотность резонансов, то сдвиг энергии \mathcal{E}_l относительно положения этих уровней за счет связей между уравнениями в системе (18) а также сдвиг резонансов за счет $\text{Re} \int \chi_{l_m} \hat{O}_{m1} P dx_1$ для нас не очень существенны. Ясно, что средняя частота резонансов будет в N раз больше плотности одночастичных уровней в потенциале v . (Эффект наложения друг на друга N систем уровней см. рис.1). Все резонансы лежат в области энергий $E_1 < E < 0$.

Наличие непрерывной части в спектре состояний второй частицы не меняет количества резонансов и их средней плотности, а лишь сказывается на форме (явления интерференции) и положении отдельных резонансов.

Если рассмотреть модель, когда рассеяние происходит на потенциальной яме, в которой находятся две частицы, взаимодействующие с налетающими частицами, то плотность резонансов возрастает в N^2 раз по сравнению с плотностью одночастичных уровней в потенциале v и т.д.

В ядрах имеется несколько десятков одночастичных уровней, на которые могут переходить нуклоны, лежащие на энергетической поверхности ядра. Поэтому разумно предположить, что достаточно очень небольшого (порядка пяти) числа частиц, "активно" участвующих во взаимодействии с налетающими нейтронами, чтобы объяснить наблюдаемую на опыте частоту резонансов в сечении рассеяния медленных нейтронов на ядрах (см. /5/).

Авторы выражают благодарность Я.А.Сморозинскому за интерес к работе и Л.Г.Заставенко за полезные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. Б.Н.Захарьев, С.Н.Соколов. Препринт ОИЯИ Р-1473 (1963).
2. H.Feshbach. Ann. of Phys, 5, 357 (1958).
3. Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, стр. 136. ИИЛ, 1951, Москва.
4. Б.Н.Захарьев. Препринт ОИЯИ Р-1130 (1962).
5. A.K.Kerman, L.S.Rodberg, J.E.Young. Phys. Rev. Lett., 10, 9(1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 февраля 1964 г.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3805. Тираж 410. 0,5 уч.-изд. л.
Техн. ред. В.Р.Саранцева Февраль 1984 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

STAT
STAT

G. Domokos and P. Suranyi

E-1496

ON THE PROBLEM OF BOUND STATES
IN PION-PION INTERACTION

Дубна 1964

E-1496

Домокош Г., Шураньи П.

О проблеме связанных состояний в пион-пионном взаимодействии.

Исследована проблема полюсов связанных состояний для пион-пион взаимодействия в рамках теории Бете-Солпитера. Для исчезающе малой энергии при малой константе связи нет полюсов на физическом листе 4-мерной плоскости углового момента, тогда как имеется пара полюсов на первом нефизическом листе.

Работа издается только на английском языке.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

E-1496

G.Domokos and P.Suranyi

On the Problem of Bound States in Pion-Pion Interaction

The problem of bound state poles is investigated for pion-pion interaction in the framework of the Bethe-Salpeter theory. For vanishing energy and small coupling constant there are no poles on the physical sheet of the four dimensional angular momentum plane, while there is a pair of poles on the first unphysical sheet.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1964.

G. Domokos and P. Suranyi

E-1496

ON THE PROBLEM OF BOUND STATES
IN PION-PION INTERACTION

Submitted to Nuclear Physics

Дубна 1964

1. Introduction

In a previous work^{/1/} we have shown that the Bethe-Salpeter equation for the two-particle Green function can be solved even if the kernel in momentum representation does not belong to the Fredholm class.

The method proposed in ref.^{/1/} contained the following essential steps:

- 1) Put E the total energy equal to zero.
- 2) Go over to Euclidean metric in the space of relative momenta.
- 3) Expand the Green function according to four dimensional spherical harmonics.
- 4) Perform a Hankel transform on the radial Green function.

As a result of these operations we arrived at a local differential equation for the radial part of the Green function, provided the BS kernel was a generalized local one, as specified in ref.^{/1/}.

We have shown that in this manner the energy-independent singularities of the scattering amplitude can be found in a comparatively simple way, the latter being determined by the most singular part of the "potential" (the Hankel transform of the kernel) at $r \rightarrow 0$, where r was the corresponding radial coordinate.

In particular, we have found that the two-pion Green function possesses an infinite series of energy-independent cuts as a function of the angular momentum l , provided, we take the lowest, nonvanishing approximation to the kernel (Example 3 of ref.^{/1/}). In the present work we want to investigate the problem of bound states in the case of singular interactions, confining ourselves to the pion-pion interaction, in the approximation mentioned above.

Our method consists in the following. Taking the solutions of the radial BS equation for the singular part of the potential, we expand the total Green function according to these functions rather than the free ones.

In this way we arrive at an integral equation for the Green function, which is already of the Fredholm type, and so familiar methods can be applied for finding the bound state poles.

Sec. 2 is devoted to the derivation of the integral equation just mentioned, while in Sec. 3 we investigate the positions of the roots of the Fredholm determinant in the weak coupling approximation. We find that for $E=0$ and weak coupling there are no poles on the physical sheet of the angular momentum plane,

while on the first sheet we find a pair of poles.

The possible physical implications of this situation are discussed in sec. 4.

Throughout the present work extensive use will be made of the notations and results of ref. ^{1/}.

2. Derivation of the Integral Equation for the Green Function

In ref. ^{1/} we have found that the radial part of the two-pion Green-function at $E = 0$ satisfies the following equation:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - m^2 - \frac{n^2 - 1}{r^2} \right]^2 G(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r^3} + V(r) G(r, r') \quad (2.1)$$

where the "potential" $V(r)$ has been given by the following expression:

$$V(r) = \lambda^2 \int_{2m}^{\infty} d\mu \mu^3 \left(\frac{\mu^2 - 4m^2}{\mu^2} \right)^{1/2} \frac{K_1(\mu r)}{\mu r} \quad (2.2)$$

The potential can be split into a "singular" and a "regular" part: $V = V_s + V_r$, where

$$V_s = \lambda^2 \int_0^{\infty} d\mu \mu^3 \frac{K_1(\mu r)}{\mu r} = \frac{2\lambda^2}{r^4} \quad (2.3)$$

and

$$V_r = \lambda^2 \int_0^{\infty} d\mu \left[\Theta(\mu - 2m) \left(\frac{\mu^2 - 4m^2}{\mu^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \times \mu^3 \frac{K_1(\mu r)}{\mu} \quad (2.4)$$

Equation (2.1) with V_s only can be solved exactly. We found for the wave function $\psi(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} - m^2 - \frac{n^2 - 1}{r^2} \right]^2 \psi(r) = V_s(r) \psi(r) \quad (2.5)$$

with the four independent solutions:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}^1(r) &= I_{p_{\pm}}(mr) \\ \psi_{\pm}^2(r) &= K_{p_{\pm}}(mr) \\ (p_{\pm})^2 &= 1 + n^2 \pm (4n^2 + 2\lambda^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

The Green function with the singular part of the potential, can be constructed in the usual way; we obtain:

$$\begin{aligned}
 G_n^s(r, r') = & \frac{-1}{2\sqrt{4n^2 + 2\lambda^2}} \{ \Theta(r-r') [K_{p_+}(mr) I_{p_+}(mr') - \\
 & - K_{p_-}(mr) I_{p_-}(mr')] + \\
 & + \Theta(r'-r) [K_{p_+}(mr') I_{p_+}(mr) - \\
 & - K_{p_-}(mr') I_{p_-}(mr)] \}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Now we make use of the operator identity, already used in ref.^[1] in a different context.

Assuming that we have to solve the linear operator equation:

$$G = G_0 + G_0 (K_s + K_r) G$$

and the operator satisfying the equation

$$G^s = G_0 + G_0 K_s G^s$$

is known, we find that G satisfies the equation:

$$G = G^s + G^s K_r G \tag{2.8}$$

In the present case, if G^s is the solution vanishing at $r \rightarrow 0$ and $r' \rightarrow 0$ the equation (2.8) is an integral equation with a L kernel in momentum representation.

Transforming back to momentum representation, we find:

$$\begin{aligned}
 \langle p | G_n^s | p' \rangle = & \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\infty r'^3 dr' \times \\
 & \times \frac{n(pr)}{pr} G_n^s(r, r') \frac{n(p'r')}{p'r'}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

and

$$\langle p | G^s K_r | p' \rangle = \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\infty r'^3 dr' \times \tag{2.10}$$

$$\times \frac{J_n(p r)}{p r} V_r(r) G_n^{(s)}(r, r') \frac{J_n(p' r')}{p' r'} \quad (2.10)$$

where the expressions of V_r and $G_n^{(s)}$ are to be taken from eqs. (2.4) and (2.7), respectively.

Thus $\langle p | G | p' \rangle$ satisfies the integral equation:

$$\begin{aligned} \langle p | G_n | p' \rangle &= \langle p | G_n^{(s)} | p' \rangle + \\ &+ \int_0^\infty q^3 dq \langle p | G_n^{(s)} K | q \rangle \langle q | G_n | p' \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

In order to find the positions of the bound state poles of G_n we have to find the roots of the Fredholm determinant:

$$\begin{aligned} D_n &= \exp \int_0^\infty dp p^3 \langle p | \log(1 - G_n^{(s)} V_r) | p \rangle \\ &= 1 - \int_0^\infty dp p^3 \langle p | G_n^{(s)} V_r | p \rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

3. Poles of the Green Function

The Fredholm determinant (2.12) being independent of the representation, we need not go through the steps outlined in eqs. (2.9) - (2.11) but can insert the matrix elements in the r -representation directly.

Thus the Fredholm determinant (2.10) takes the form:

$$D_n = 1 - \int_0^\infty r^3 dr V_r(r) G_n^{(s)}(r, r') + O(\lambda^4) \quad (3.1)$$

Inserting the expressions (2.4) and (2.7), we find to an accuracy up to λ^2 :

$$D_n = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (4n^2 + 2\lambda^2)^{-1/2} \int_0^\infty r^2 dr F(r) \quad (3.2)$$

where

$$F(r) = \int_0^\infty \mu^2 d\mu \left[\Theta(\mu - 2m) \left(\frac{\mu^2 - 4E^2}{\mu^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \times \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \times K_{\nu}(\mu r) [K_{p_{-}}(mr) I_{p_{-}}(mr) - \\ & - K_{p_{+}}(mr) I_{p_{+}}(mr)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

One has to bear in mind that the Fredholm parameter of eq. (2.11) is the λ^2 standing before ν ; therefore one must not expand the expressions p_{\pm} and $(4n^2 + 2\lambda^2)^{-1/2}$ in powers of λ^2 . (By expanding these expressions, one would just lose what we were attempting at, namely, to build in explicitly the "dangerous" singularities into the solution).

It is clear that for small λ^2 , the right hand side of eq. (3.2) can vanish in the neighbourhood of a pole of $\int_0^{\infty} r^2 dr F(r)$ in the n -plane. As the Bessel functions in eq. (3.3) are integral functions of their indices, a pole can arise if the integral over r begins to diverge for some value of n .

Taking into account the well-known asymptotic expressions of the Bessel functions, we find that the integral over r at the upper limit converges independently of the value of n :

$$F(r) = O(r^{-5}) \quad (r \rightarrow \infty)$$

Therefore, poles can arise from the behaviour of $F(r)$ at $r \rightarrow 0$ only. Here we find:

$$F = O(r^{-a})$$

where

$$a = \max \{ 1, q - 2p_{-}, 1 - 2p_{+} \}$$

Thus the integral in (3.2) begins to diverge at $r=0$ if $a \geq 3$.

Thus a pole of $\int_0^{\infty} r^2 F(r) dr$ will arise at $\text{Re } p_{+} = -1$

If we choose the positive sign of the square root in the expression of p_{\pm} from eq. (2.6) the latter condition can never be satisfied. Hence on the sheet of the n -plane where p_{\pm} is defined with the positive sign, in the weak coupling limit there are no poles at all (at least for $\text{Re } n > 0$). On the other sheet we have poles, situated at the points:

$$n = \pm 2^{1/2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2}} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

We are thus faced with the problem of telling which is the "physical sheet" of the

n -plane. We know that for sufficiently large values of n , the iteration solution of eq. (2.11) must exist. This happens only in the case if we choose the positive sign in p_+ . (This result can be made plausible by the following argument as well. p_- plays the role of a "modified four dimensional angular momentum" just as the quantity $\bar{l} = -\frac{1}{2} + \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 + g}$ in the nonrelativistic Schrödinger equation with a potential $g r^{-2}$. Thus, if the coupling constant vanishes, p_- should go over to $n-1$ and not $1-n$).

Hence we conclude that in the weak coupling limit there are no poles on the physical sheet of the n -plane, for $E = 0$.

4. Discussion

In a superrenormalizable field theory, where the lowest order kernel of the BS equation is square integrable^{/2/}, one finds a result^{/3/}, familiar from non-relativistic quantum mechanics^{/4/}: the scattering amplitude as a function of the angular momentum has no other singularities but poles- and in view of the classical theorem of Schmidt, it has at least one pole. In our case, which is an example of a renormalizable (but not super-renormalizable) interaction, we came to a qualitatively different conclusion. The angular momentum plane has several sheets, and we have found that the physical sheet does not contain poles at all. Nevertheless, we have to bear in mind that our result has been found in the weak coupling limit and for $E = 0$. At present we cannot tell anything about the behaviour of the poles as the coupling constant increases or the energy is varied.

One can, however, imagine that with increasing λ^2 or some values of the energy the poles would move towards the cut and cross it, thus appearing on the physical sheet. If this happened, we would encounter the strange situation that a composite state (in the general sense) could be formed above a minimal value of the coupling constant or energy only.

An example for a similar behaviour of bound states has been indeed given in a recent paper of Bastai et al.^{/5/}.

The authors would like to express their sincere thanks to Prof. N.N.Bogolubov, for his constant interest in the present research.

R e f e r e n c e s

1. G.Domokos and P.Suranyi. Preprint E-1400, Дубна, 1963.
Nucl. Phys. (to be published).
2. G.Domokos and P.Suranyi Preprint. Дубна. (To be published).
Acta Phys. Hung. (to be published).
3. B.W.Lee and R.F.Sawyer. Phys. Rev., 127, 2266 (1962).
4. T.Regge. Nuovo Cim., 14, 951 (1959).
5. A.Bastai, L.Bertocchi, S.Fubini, G.Furlan, M.Tonin. Preprint CERN, 1963.

Received by Publishing Department
on December 17, 1963.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 9505. Тираж 400. 0,5 уч.-изд.л.
Январь 1964 г.

STAT 49



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

С.А. Бунятов

P - 1484

ПИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ

/Обзор экспериментальных данных/

Дубна 1964

Бунятов С.А.

P - 1494

Пионные резонансы:

В обзоре обсуждаются экспериментальные данные о пионных резонансах, дается таблица их основных свойств, приводится библиография работ, опубликованных до августа 1963 года.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна 1964.**

Bunyatov S.A.

P - 1494

Pion Resonances

The experimental data on pion resonances are discussed, the main properties of these resonances are tabulated. A list of references of the papers published by August 1963 is given.

**Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.**

С.А. Бунятов

Р - 1494

ПИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ
/Обзор экспериментальных данных/

Дубна 1964

О г л а в л е н и е

§ 1.	В в е д е н и е.....	3
	Квантовые числа пионных резонансов.....	3
	G - четность.....	
§ 2.	η - мезон.....	4
§ 3.	ρ - мезон.....	9
§ 4.	ω - мезон.....	12
§ 5.	φ - мезон.....	14
§ 6.	f ⁰ - мезон.....	18
§ 7.	ζ - пик.....	20
	Список литературы.....	23

§ 1. В в е д е н и е .

Одним из наиболее важных достижений в области сильных взаимодействий за последние несколько лет является открытие целого ряда резонансных состояний в различных системах элементарных частиц. Если всего десять лет назад было известно только одно резонансное состояние - так называемая /3,3/ изобара, то к настоящему времени число резонансов достигло уже тридцати трех; причем большинство из них открыто в последние несколько лет.

Теперь совершенно ясно, что существование резонансных состояний является общим свойством сильных взаимодействий. Поэтому все резонансы в соответствии с разделением сильновзаимодействующих элементарных частиц можно разбить на несколько групп в зависимости от значения барионного числа - B и странности - S . Это разделение приводится в следующей таблице:

Г р у п п ы р е з о н а н с о в	B	S
1. π - мезонные	0	0
2. K - мезонные	0	1
3. Барионные	1	0
4. Гиперонные	1	1,2

Последний обзор экспериментальных данных по пионным резонансам был сделан Пуппи в июле 1962 г. /15/ на XI конференции по физике высоких энергий в Женеве. За прошедший год появилось много данных как об известных, так и о новых пионных резонансах. В настоящем обзоре обсуждаются новые экспериментальные данные, дается таблица основных свойств пионных резонансов, приводится библиография работ, опубликованных до августа 1963 года.

Квантовые числа пионных резонансов, G -четность

Прежде всего нужно отметить, что совсем не обязательно, чтобы пионные резонансы распадались только на π - мезоны. Они могут распадаться, например, по электромагнитным каналам с участием γ - квантов или на пары K - мезонов.

CIA-RDP80-00247A002400260001-5 что пионные резонансы, кроме квантовых чисел, общих для всех резонансов, таких, как спин - J , четность - P , изотопический спин - I , характеризуются еще и специфическим квантовым числом G - четностью, которую иногда называют изотопической четностью. G - четность определяется оператором $G = CT_2$, где C - оператор зарядового сопряжения, а T_2 - поворот на 180° вокруг второй оси в изотопическом пространстве. Определенную G - четность могут иметь только частицы или системы частиц с равными нулю барионным числом и странностью. G - четность π - мезонов равна -1 . G - четности систем нуклон-антинуклон и бозон + антибозон равны соответственно $-1/^{L+S+I}$ и $-1/^{L+I}$, где L - угловой момент, S - спин, I - изотопический спин системы.

В дальнейшем пионные резонансы обсуждаются не в хронологическом порядке, а в порядке возрастания их масс.

§ 2. η - мезон^{x/}

Первое экспериментальное указание на существование η - мезона было получено Певзнером и др.^{/2.1/} при исследовании спектра масс 3-пионной системы от реакции $\pi^+ + d \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ в 72-дюймовой дейтериевой пузырьковой камере при импульсе первичных π^+ - мезонов 1,23 Гэв/с. В спектре был обнаружен пик при значении эффективной массы ≈ 550 Мэв. Позднее существование η - мезона было подтверждено в целом ряде других работ в различных реакциях. Ко времени конференции 1962 г. были хорошо установлены масса, изотопический спин η - мезона, был дан верхний предел ширины. Однако оставались некоторые вопросы, связанные с окончательным подтверждением предполагаемых спина - J , P - четности и G - четности соответственно $0, -1, +1 = 0^{+-}$. В работах, опубликованных после конференции, эти квантовые числа нашли дальнейшее подтверждение. В частности, серьезным подтверждением того факта, что спин η - мезона не равен 1, является обнаружение распада $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$. Дело в том, что для системы из двух фотонов с равной нулю суммой импульсов строго запрещено иметь момент количества движения, равный 1. Это правило запрета является следствием поперечности электромагнитных волн и впервые в общем виде было установлено Ландау^{/2.21/}. Оно основано на невозможности построения волновой функции двух фотонов с полным моментом, равным 1, которая одновременно удовлетворяла бы двум требованиям: 1/ волновая функция должна быть симметричной по отношению перестановки двух фотонов и 2/ вследствие поперечности

^{x/} Свойства η - мезона подробно рассмотрены в обзоре В.Г. Гришина и М.И. Подгоречного^{/2.20/}.

электромáгнитного поля векторы поляризации фотонов должны быть перпендикулярны к направлению их относительного импульса.

В работе ^{/2.6/}, выполненной во Фраскатти с помощью электроники и доложенной на конференции, были зарегистрированы γ -кванты от распада η -мезонов, образованных в реакции $\gamma + p \rightarrow \eta^0 + p$. Но, к сожалению, нельзя было различить две возможные ветви распада $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$ и $\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma$. В работе группы В.Б. Любимова ^{/2.15/} исследовался энергетический спектр γ -квантов, образованных в $\pi^- + p$ взаимодействиях при $E \approx 7$ Гэв в пропановой пузырьковой камере. Энергия γ -квантов определялась по магнитному отклонению e^+e^- -пар. Кроме максимума при $E_\gamma = \frac{m\pi^-}{2}$, был обнаружен второй максимум при

$E_\gamma = 250-300$ Мэв. Возможным источником этих γ -квантов могут быть распады

$$\eta \rightarrow \gamma + \gamma,$$

$$\eta^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma.$$

Первый из них дает γ -кванты с $E_\gamma = 274$, второй - с $E_\gamma = 259$ Мэв. Однако экспериментальная точность не позволяет, как и в предыдущем опыте, разделить эти две ветви. Вскоре после конференции появилась работа Кретина и др. ^{/2.13/} в которой также была предпринята попытка обнаружить распад $\eta \rightarrow 2\gamma$. С этой целью 50-л пузырьковая камера, наполненная смесью пропана, метил-иодида и этана /радиационная длина 8,2 см/ облучалась π^- -мезонами с импульсом 1140 Мэв/с. Регистировались случаи, соответствующие реакции $\pi^- + p \rightarrow X^0 + n$ с последующим распадом $X^0 \rightarrow 2\gamma$. Экспериментальная техника состояла в нахождении безлучевых взаимодействий π^- -мезонов, связанных с двумя конвертированными в камере фотонами. Направление движения каждого фотона трансформировали в систему центра инерции и строили распределение углов между двумя фотонами в этой системе. Наблюдались также случаи с большим числом конвертированных фотонов / до 6/. Эти события использовались для определения фона.

Распределение углов $\theta_{\gamma\gamma}$ можно подсчитать теоретически, предполагая, что X^0 распадается изотропно в собственной системе центра масс. Это угловое распределение имеет максимум вблизи минимального угла, который определяется массой X^0 -частицы и импульсом первичного π^- -мезона. Распределение углов между γ -квантами показано на рис. 1. На рисунке видны два максимума. Первый - при 25° соответствует массе $/144 \pm 16/$ Мэв. Это пик от π^0 -мезонов. Максимум при 100° соответствует массе $/545 \pm 30/$ Мэв. Это значение массы согласуется с массой η -мезона. Естественно предположить, что события в области второго максимума связаны с распадом $\eta \rightarrow 2\gamma$. Однако и этот эксперимент полностью не исключил возможности распада

$$\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma.$$

Как показали расчеты Квецоли и Силвестрини ^{/2.14/}, распределение углов меж-

ду двумя фотонами от распада $\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma$ также имеет максимум в районе 100° , и поэтому события с $\theta_{\gamma\gamma} = 100^\circ$ могли быть распадами $\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma$, в которых один из γ -квантов не конвертировал в камере. Это ставило под сомнение однозначность выводов работы Кретина и др.

В работе Бера и др.^{/2.17/} эта неоднозначность была преодолена, хотя число зарегистрированных распадов $\eta \rightarrow 2\gamma$ невелико: $/21 \pm 6/$. В этой работе исследовалась реакция $\pi^- + p \rightarrow n + / 2 \text{ или } 3\gamma /$ при энергии 1,15 Гэв/с на синхрофазотроне "Сатурн" в Сакле. Реакция изучалась в пузырьковой камере с тяжелым наполнением /50% смесь C_3H_8 и CF_3Br . Радиационная длина 22 см/. Камера была помещена в сильное магнитное поле $\approx 1,75$ тл, что позволяло с 30% точностью определять энергию e^+ и e^- по магнитному отклонению. Было построено распределение эффективных масс 3γ и 2γ . В распределении масс 3γ /24 события/ не было обнаружено заметного пика в области массы η -мезона. Распределение эффективных масс двух γ -квантов /рис. 2/ имеет два пика: первый соответствует π^0 -мезону /среднее значение массы $138,5 \pm 3,7$ Мэв/. Второй - η^0 -мезону /среднее значение массы $573 \pm 26/$. После вычитания фона от реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + n$ в области пика остается $/21 \pm 6/$ распадов $\eta \rightarrow 2\gamma$. Отсутствие пика в распределении 3γ и заметный пик в распределении масс 2γ является дополнительным аргументом в пользу наблюдения распада $\eta \rightarrow 2\gamma$. Таким образом, хотя статистическая точность каждого из рассмотренных экспериментов невелика, по совокупности экспериментов можно утверждать, что распад $\eta \rightarrow 2\gamma$ установлен.

Следовательно, спин η -мезона не равен 1. Минимальные значения спина 0 или 2. В пользу нулевого спина говорят тот факт, что угловое распределение π^0 -мезонов от распада $\eta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ в с.д.и. изотропно^{/2.11/}. Анализ распределения точек, соответствующих распаду $\eta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ по диаграмме Далитца, приводит к квантовым числам η -мезона 0^{-+} . Отсюда следует, что первоначально обнаруженный распад $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ происходит с нарушением G-четности / G-четность π -мезона отрицательна/ и является электромагнитным процессом второго порядка, в котором имеет место испускание и поглощение виртуального γ -кванта. Так как наблюдается распад, связанный с электромагнитным процессом второго порядка, то казалось, должны бы наблюдаться и распады, связанные с электромагнитным процессом первого порядка и, в частности, распад $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$. Напомним, что, по теоретическим оценкам Кобзарева и Окуня,^{/2.22/} этот распад должен быть преобладающим. Однако ко времени конференции экспериментально такой распад не наблюдался, и это вызывало некоторые сомнения в справедливости установленных квантовых чисел η -мезона 0^{-+} .

В опубликованной после конференции работе Фаулера и др. /2.16/ распад $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$ был наблюден. В водородной пузырьковой камере Альвареса изучалась реакция $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \eta$ с последующим распадом $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + X^0$, где X^0 - неизвестная нейтральная частица /или частицы/. Импульс первичных π^+ -мезонов в центре камеры был равен 1170 Мэв/с с очень небольшим разбросом ± 6 Мэв/с. Было отобрано 76 распадов $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + X^0$. Оказалось, что X^0 -частица всегда была либо фотоном, либо π^0 -мезоном /рис. 3/. Причем отношение $(\pi^+ + \pi^- + \gamma) / (\pi^+ + \pi^- + \pi^0) = 0,26 \pm 0,08$. Таким образом, распад $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$ сильно подавлен. Хотя Гелл-Манн и др. /2.24/ удалось объяснить столь низкую вероятность распада $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$ с помощью модели "двух промежуточных ρ^0 " с последующим распадом на γ и $\pi^+ + \pi^-$ ($\eta \rightarrow \rho^0 + \rho^0 \rightarrow \gamma + \pi^+ + \pi^-$), все-таки противоречие с обычными теоретическими оценками /2.22/ очень велико.

Причиной подавления распада $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$, возможно, является сильное взаимодействие между двумя π -мезонами в конечном состоянии 0^{++} и $I = 0$ в области небольших энергий /примерно до $M_{\pi\pi} = 400$ Мэв/. Существование такого взаимодействия в настоящее время хорошо установлено.

Это взаимодействие будет проявляться в распадах $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ между $\pi^+ + \pi^-$ и $\pi^0 + \pi^0$ парами и приведет к увеличению вероятности этих распадов. С другой стороны, оно не может проявляться в распаде $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$. Последнее следует из сохранения зарядовой четности. С-четность в начальном и конечном состояниях рассматриваемого распада равна $(-1)^{I_\eta} G_\eta$ и $(-1)^{I_{\pi\pi}+1} G_{\pi\pi}$. Так как $G_\eta = G_{\pi^+\pi^-} = 1$, то $I_\eta = I_{\pi\pi} + 1$ и изотопический спин двух π -мезонов в распаде $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$ равен 1. Подробнее вопросы, связанные с электромагнитными эффектами в распадах, рассмотрены в работе Файнберга и Пайса /2.23/.

Таким образом, можно считать, что в настоящее время нет экспериментов, противоречащих установленным для η -мезона квантовым числам 0^{-+} .

Соотношение между нейтральными модами распада η -мезона

Учитывая, что квантовые числа η -мезона 0^{-+} , следует ожидать, что одной из основных нейтральных схем распада, наряду с распадом $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$, будет распад $\eta \rightarrow 3\pi^0$. На конференции было известно лишь отношение между вероятностями распада η на нейтральные и заряженные. Распад η на нейтральные определялся по подсчету "недостающей массы". Под распадом на заряженные понимается распад $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + X^0$, где X^0 - π^0 -мезон или γ -квант. Среднее значение отношения вероятностей распадов по нескольким экспериментам равнялось $2,6 \pm 0,6$. В двух работах, выполненных после кон-

над $\eta \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$ и оценить отношение $R = \frac{\eta \rightarrow \gamma\gamma}{\eta \rightarrow 3\pi^0}$. В работе Кроуфорда и др. /2.18/ изучались реакция $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p + \eta$ в 72 д. водородной пузырьковой камере Альвареса при импульсе первичных π^+ - мезонов 1170 Мэв/с. Нейтральные моды распада η - мезона наблюдались в 1500 двухлучевых событиях, связанных с γ - квантом, конвертированным на электрон-позитронную пару. Мы остановимся подробнее на работе Васси и др. /2.19/, в которой с помощью электроники получены несколько более точные данные по соотношению нейтральных ветвей распада η - мезона. В этой работе наблюдалось фоторождение η - частиц при энергии γ - квантов 978 и 938 Мэв, используя электронный синхротрон на 1100 Мэв во Фраскати. Экспериментальная установка показана на рис. 4. Пучок γ - квантов падает на 7 см жидководородную мишень. Протоны отдачи с определенной энергией и под фиксированным углом регистрировались телескопом из искровых камер, который не регистрировал пионы. При этом направление и импульс η^0 однозначно определялись законами сохранения энергии и импульса. Вдоль линии полета η имелся черенковский счетчик полного поглощения из свинцового стекла для регистрации γ - лучей от распада η на совпадение с протоном отдачи. Энергия γ - квантов определялась по величине импульса анализатора. γ - лучи с энергией меньше 200 Мэв не запускали искровую камеру. Таким образом устранялся фон от фоторождения одиночного π^0 - мезона. С описанной установкой рождение и распад η - мезона можно было наблюдать двумя различными способами. Отметим, что в этом эксперименте нельзя было отличить распады $\eta \rightarrow 3\pi^0$ и $\eta \rightarrow \pi^0 + 2\gamma$, и на самом деле измерялось отношение $R = \frac{\eta \rightarrow \gamma + \gamma}{\eta \rightarrow 3\pi^0 + \eta \rightarrow \pi^0 + 2\gamma}$. Можно предположить, однако, что распад $\eta \rightarrow \pi^0 + 2\gamma$ будет маловероятным. Так как спин η - мезона 0, то распад $\eta \rightarrow \pi^0 + \gamma$ строго запрещен.

1 способ. По спектру γ - квантов. Эксперимент ставился в условиях, когда энергия первичных γ - квантов была либо ниже, либо выше порога образования η^0 . Факт существования η - мезона был установлен по наличию дополнительного числа γ - квантов по отношению к фону от множественного рождения, как только образование η становилось кинематически возможным. Определение отношения двух ветвей распада $\eta \rightarrow 2\gamma$ и $\eta \rightarrow 3\pi^0$ основано на резком различии спектров γ - квантов от этих распадов. Спектр γ - квантов от распада $\eta \rightarrow 2\gamma$ вдоль линии полета η - мезонов, образованных в процессе $\gamma + p \rightarrow p + \eta$ почти монохроматичен с центром около 560 Мэв. В то время, как распады $\eta \rightarrow 3\pi^0$ или $\eta \rightarrow \pi^0 + 2\gamma$ дают γ - кванты, которые имеют непрерывный спектр, обрывающийся около 500 Мэв. Как видно из рис. 5, при превышении порога рождения η^0 появляется дополнительный счет γ - квантов. Причем разность эффекта и фона ясно показывает наличие двух спектров. Отношение площадей под этими спектрами дает искомое отношение. R .

2. Метод ступеньки. Второй метод основан на том, что при появлении нового двухчастичного канала $\gamma + p \rightarrow p + \eta^0$ в спектре протонов должна появляться ступенька. При этом так как спектры от распадов $\eta \rightarrow 2\gamma$ и $\eta \rightarrow 3\pi^0$ сильно отличаются, то имеется возможность разделить эти распады. Если регистрировать γ -кванты с энергией $E_\gamma > 400$ Мэв, то ступенька будет вызвана распадом $\eta \rightarrow 2\gamma$, если же регистрировать $240 < E_\gamma < 400$ Мэв, то должна появиться ступенька от распада $\eta \rightarrow 3\pi^0$ или $\eta \rightarrow \pi^0 + 2\gamma$. Отношение высот этих ступенек и даст отношение ветвей распада η -частицы. Среднее значение $R = \frac{\eta \rightarrow \gamma + \gamma}{\eta \rightarrow 3\pi^0 + \eta \rightarrow \pi^0 + 2\gamma}$ определенное двумя методами, равно $0,8 \pm 0,25$. Путем комбинаций этой величины со всеми остальными данными /пренебрегая распадом $\eta \rightarrow \pi^0 + 2\gamma$ / получаются соотношения между вероятностями распадов, приведенные в таблице 1. Эти вероятности определены примерно с 30% точностью.

§ 3. ρ - мезон

Хронологически это был первый резонанс, обнаруженный в системе двух π -мезонов. После многочисленных попыток многих авторов найти резонанс, анализируя реакцию $\pi N \rightarrow \pi\pi N$, Эрвин и др. /3.6/ определили, наконец, то положение резонанса / $M_{\pi\pi} \approx 750$ Мэв/, которое считается в настоящее время общепринятым. На возможность существования резонанса с квантовыми числами $J=1, I=1$, впервые обратил внимание Дрелл, /3.34/ анализируя данные об электромагнитной структуре нуклона. Используя данные об изовекторной части формфакторов нуклона, Фрезер и Фулко /3.36/ количественно оценили параметры предполагаемого резонанса. Позднее эти параметры были оценены Баукоком и др. /3.37/, которые привлекли также данные о πN -фазовых сдвигах. Теоретические предсказания положения и ширины резонанса вместе с первыми экспериментальными оценками приводятся в таблице.

Первые данные о ρ - резонансе

№ п.п.	А в т о р ы	Положение резонанса		Ширина Γ / Мэв/	Заряд
		$M_{\pi\pi}$	/ Мэв/		
Теория					
1.	W.R.Frazer, J.R.Fulco /3.36/	3,16	440	80	
2.	F.J. Bowcock, W.N.Cottingham, D.Lurie /3.37/	4,7	660	110	
1.	J.Derado /3.1/	4,7	660		-
2.	E.Pickup, F. Ayer, E.O.Salant /3.2/	4,3	660		-
3.	J.G.Rushbrooke, D.Radojicic /3.3/	4,7	660		-
4.	J.S. Anderson et al. /3.4/	4,5 4,7	630-660	150	-
5.	D.Stonehill et al. /3.5/	5,0-5,5	700-770	90	+
6.	A.R.Erwin et al. /3.6/	5,37	750	150-200	-0
7.	E.Pickup, D.K.Rolinson, E.O.Salant /3.7/	5,4	754	130	-0
8.	J. Button et al. /3.16/	5,48	765	98	+-
9.	J. Button et al. /3.16/	5,5	768	112	0

На конференции было установлено, что ρ -мезон имеет квантовые числа $I = 1$, $J = 1^-$, $G = +1$. Правда, если предположить, что спин ρ -мезона равен 1, то сечение рассеяния $\pi\pi' \rightarrow \pi\pi$ при энергии, соответствующей резонансу, должно равняться $4\pi\lambda^2(2J+1) = 12\pi\lambda^2 \approx 120$ /здесь λ -комптоновская длина волны π -мезона в системе покоя ρ -мезона/. Однако сечение $\sigma_{\pi\pi}$, определенное методом Чу и Лоу^{/3.38/} из анализа реакции $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ в физической области переданных нуклону импульсов, систематически получается меньше этого предела. По-видимому, это связано с неоднозначностью метода Чу и Лоу. Тем более, что сечения $\sigma_{\pi\pi}$ определяются не с помощью экстраполяции в нефизическую область, а в физической области переданных импульсов. Недавно Селери^{/3.39/} модифицировал формулу Чу и Лоу, учетом виртуальности π -мезона в одномезонной диаграмме для процесса $\pi N \rightarrow \pi\pi N$. При этом используется функция F , связанная с пионными формфакторами нуклона, которая была определена в работе Феррари и Селери^{/3.40/} из анализа одиночного рождения мезонов в нуклон-нуклонных столкновениях. С помощью формулы Селери получается удовлетворительное согласие сечения $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ в области резонанса с ожидаемой величиной $12\pi\lambda^2$. Для иллюстрации на рис. 6 приводятся результаты расчетов сечения $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ по формулам Чу и Лоу и Селери, полученные в работе Аллети и др.^{/3.33/} из анализа реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + p$ при импульсе 1,59 Гэв/с. Однако, несмотря на то, что квантовые числа ρ -мезона были установлены достаточно хорошо, поведение ρ -мезона остается довольно непонятным. Это относится прежде всего к изменению формы пика и положения максимума при различных энергиях падающих частиц. Как образно говорилось в докладе Пуппи^{/1.5/}, "Профиль ρ -мезона очень похож на гору, приведенную в смятение землетрясением; профиль время от времени изменяется и на горе появляются протуберанцы". При этом причины сложного поведения пиков у заряженных и нейтрального ρ -мезона могут быть разные. Для заряженных ρ -мезонов причина, по-видимому, связана с тем, что время жизни ρ -мезона мало и он не успевает покинуть область взаимодействия до распада. Взаимодействие в конечном состоянии может привести к уширению резонанса и изменению положения пика. Для выяснения действительной ширины резонанса желательны точные эксперименты при больших энергиях $\sqrt{s} \sim 10$ Гэв/ - имеются в виду эксперименты $\pi N \rightarrow \pi\pi N$. После конференции опубликована всего одна работа, в которой исследовалось образование заряженных ρ -мезонов. Это работа Кармони и Ванде Валли,^{/3.27/} в которой изучались в водородной пузырьковой камере реакции $\pi^+ + p \rightarrow \rho^+ + p + \pi^0$ и $\pi^- + p \rightarrow \rho^- + p + \pi^0$ при импульсе первичных π -мезонов 1,25 Гэв/с. Сечения $\pi^+ + p \rightarrow \rho^+ + p + \pi^0$ оцениваются с помощью экстраполяционного метода Чу и Лоу. Отмечается, что из данных реакции с $\pi^- /$ в отличие от реакции с $\pi^+ /$ не видно преобладания одномезонного обмена в физической области

ти. Но величины $\sigma_{\pi^-\pi^0}$ и $\sigma_{\pi^+\pi^0}$, определенные с помощью линейной экстраполяции согласуются между собой и указывают на существование ρ^\pm -мезона с массой 725 ± 25 Мэв. Масса ρ^\pm -мезона в этом эксперименте несколько занижена, по-видимому, из-за того, что пик расположен на конце фазовой кривой.

Что касается неопределенности ширины и положения ρ^0 -мезона, то здесь помимо тех причин, о которых говорилось выше, существуют дополнительные причины: 1/ ω -мезон, масса которого близка к массе ρ^0 -мезона, может распадаться на $\pi^+\pi^-$ - с нарушением G-четности /такой распад наблюдался экспериментально и обсуждается в следующем параграфе/. Это может привести к дополнительной интерференции между двумя амплитудами с разными спинами. 2/ Кроме того, в системе $\pi^+\pi^-$ в отличие от $\pi^\pm + \pi^0$ два π -мезона могут взаимодействовать в состоянии с изотопическим спином $I = 0$, что также может вызвать дополнительную интерференцию между амплитудами с различными изотопическими спинами. Иллюстрацией более сложного поведения системы $\pi^+\pi^-$ по сравнению с системой $\pi^\pm\pi^0$ в области ρ -резонанса может служить величина асимметрии углового распределения одного из π -мезонов в системе центра масс дипиона относительно направления движения первичного пиона. Как видно из рисунка 7, если для систем $\pi^\pm\pi^0$ в области ρ -резонанса угловое распределение симметрично, что и должно наблюдаться для резонанса в чистом состоянии, когда интерференция мала, то для системы $\pi^+\pi^-$ имеется заметная асимметрия. Причем характер этой асимметрии меняется в зависимости от энергии первичного π -мезона.

Еще до конференции обсуждался вопрос о расщеплении пика ρ^0 -мезона, обнаруженного в работе J. Button и др. /3.16/, в которой изучалась реакция $\bar{p} + p \rightarrow 2\pi^+ + 2\pi^- + \pi^0$ при импульсе 1,61 Гэв/с, на два пика: ρ_1^0 с массой 720 Мэв и шириной 20 Мэв и ρ^0 с массой 780 и шириной 60 Мэв. Такой эффект не обнаружен в работе /3.22/, где ρ^0 -мезон наблюдался в лучших фоновых условиях /анализировались случаи аннигиляции остановившихся антипротонов в реакции $\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ /. Поэтому можно считать, что двойная структура, обнаруженная в работе J. Button и др. является статистической флуктуацией.

На конференции докладывалась работа Колдвелла и др. /3.25/, в которой с помощью искровых камер регистрировались распады ρ^0 -мезонов, образованных π^- -мезонами с импульсом 12 и 17 Гэв/с в реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$. Наблюдаемый при массе 725 Мэв пик имеет ширину 40 Мэв, то есть намного уже, чем в опытах при энергиях π -мезонов /1-3/ Гэв. Но это пока единственный опыт, и он должен быть безусловно уточнен. Интересно отметить, что из дисперсионных уравнений для рассеяния $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$ не удается получить ширину ρ -мезона больше, чем 40 Мэв. /3.41/

...сь работа *Allis* и др., /3.33/ в которой ис-
 следует реакция $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ в водородной пузырьковой камере при
 импульсе 1,59 Гэв/с. Положение и ширина максимума в сечении $\pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^-$,
 определенном по формуле Чу и Лоу и Селери равны: $M_\rho = 750$ Мэв и $\Gamma = 100$ Мэв.

Таким образом, проблема определения ширины и точного положения ρ -
 резонанса пока остается не решенной.

Схемы распада ρ -мезонов. Основные схемы распада $\rho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ и /3.26/
 $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Поиски 4-пионных распадов дают оценки меньше нескольких %.
 В работе Беякова и др. /3.31/ и Любимова и др. /2.15/ получены указания на воз-
 можность радиационного распада $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$.

§ 4. ω -мезон

В 1957 г. Намбу /4.21/ обратил внимание на то, что весьма трудно понять
 большой радиус изоскалярной части нуклонного формфактора в опытах Хофштадте-
 ра /3.35/ и предположил возможность существования мезона, сильно связанного с
 нуклоном и имеющего те же квантовые числа, что и фотон /спин 1, четность отри-
 цательная/. Намбу оценил, что для объяснения зарядового и магнитного формфак-
 тора масса такого мезона должна быть равной 670 Мэв. На этом основании пред-
 полагалось существование тяжелого векторного мезона с изотопическим спином

$T = 0$, который распадается по схемам: $\omega^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$
 $\rightarrow \pi^0 + \gamma$

и таким образом мог быть обнаружен в процессах соударения при высоких энергиях.

Экспериментально ω -мезон был открыт в работе *B.C. Maglic* и др. /4.1/.
 При анализе распределения масс $\pi^+ + \pi^0 + \pi^-$ в аннигиляции протон-антипротон
 $\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$
 с импульсом антипротона 1,51 Гэв/с был обнаружен пик при $M = 785$ Мэв и ши-
 риной $\Gamma \leq 12$ Мэв. В этой же работе были установлены квантовые числа ω -
 мезона $I = 0$; $J = 1^-$; $G = -1$. На конференции эти квантовые числа были
 подтверждены,

Оставался неясным вопрос о нейтральных модах распада и о распаде $\omega \rightarrow 2\pi$

Распад $\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Как впервые отмечал *Glashow*, /4.23/ ω
 может распадаться на 2π с нарушением G -четности по электромагнитному
 каналу. Бернштейн и Файнберг в работе под названием "Иголка в стоге сена" /4.20/

подсчитали спектр масс 2π от смеси ρ - и ω -мезонов. Этот спектр действительно имеет вид узкого, похожего на иглу пика ω -мезона на фоне широкого ρ -пика. В работе Fickinger и др. /4.16/, появившейся после конференции, сделана попытка дать оценку отношения $R = \frac{\Gamma(\omega \rightarrow 2\pi)}{\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)}$. С этой целью изучалась реакция $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ при импульсе 1,7 Гэв/с в водородной пузырьковой камере. Было зарегистрировано 2137 событий, из них примерно 800 событий /без фона/ в области ρ -пика. На рис. 8 /а/ показано распределение эффективных масс для всех Δ^2 . Распределение имеет широкий пик в области 650-850, но оно асимметрично относительно 750 Мэв /393 события между 750 и 800 Мэв и 298 событий между 750 и 700/. Если предположить, что ρ имеет ту же массу и симметричное распределение, как ρ^\pm ; то асимметрия может быть вызвана концентрацией событий в районе ω -пика - 780 Мэв. Для более отчетливого проявления ω -пика все события были разделены на три группы по величине Δ^2 : $\Delta^2 < 0,15$ Гэв/с, $0,25 \leq \Delta^2 \leq 0,70$ Гэв/с и $\Delta^2 > 0,70$ Гэв/с. В событиях с $\Delta^2 < 0,15$ Гэв/с ρ -наблюдается, а ω сильно подавлен /рис. 8 /б//. Авторы объясняют это тем, что в событиях с малой передачей импульса преобладает одномезонный обмен, в котором образование ω запрещено по G-четности. В событиях второй подгруппы /рис. 8 /в//, наоборот, отчетливо проявляется ω , а ρ подавлен. Наконец, в событиях с большой передачей импульса нуклоны /рис. 8 /д// не проявляется ни ω , ни ρ что связано, по мнению авторов, с влиянием 3,3 изобары. В группе событий с $0,25 \leq \Delta^2 \leq 0,70$ Гэв/с в интервале 780-800 Мэв наблюдается над фоном 27 событий. Следовательно, распределение масс $\pi^+ \pi^-$ имеет пик с массой, близкой к массе ω на 4 стандартных отклонения выше фона.

Отношение $R = \frac{\Gamma(\omega \rightarrow 2\pi)}{\Gamma(\omega \rightarrow 3\pi)}$ было найдено подбором параметров из работы Бернштейна и Файнберга /4.20/ таким образом, чтобы описать экспериментальное распределение $(\pi\pi)$ -масс. Принимая во внимание, что отношение $\sigma_\omega / \sigma_\rho = 1$ /макс./ были получены следующие оценки: $R \geq 0,05$, если ширина ω равна 10 Мэв, и $R \geq 0,07$, если ширина ω равна 1 Мэв. Это же отношение оценивалось в работе Shafer и др. /4.18/, в которой изучалась реакция $K^- + p \rightarrow \Lambda + \omega^0$ при импульсе K^- -мезонов 1,51 Гэв/с в 72-дюймовой водородной пузырьковой камере. Величина R , определенная по 15 событиям $\omega^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ оценивается $= 4,8 \pm 1,2\%$. В этой же работе дается по 5 случаям оценка отношения

$$\frac{\omega^0 \rightarrow e^+ + e^-}{\omega^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0} \leq 1\%$$

Обнаружение распада $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$. Существование распадов ω -мезона на нейтральные частицы было подтверждено экспериментально в нескольких работах /4.8, 11, 14/. Усредненное по результатам этих работ отношение вероятностей $\omega^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ / $\omega \rightarrow$ нейтр. = 5 ± 1 . Однако природа продуктов распада

ω^0 - мезона в этих работах не установлена. В работе Бармина и др. /4.19/ был обнаружен распад $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$ и показано, что эта мода распада является преобладающей среди распадов на нейтральные.

Для изучения распада $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$ исследовалась реакция $\pi^- + p \rightarrow n + \omega^0$ на пучке π^- -мезонов от протонного синхротрона ИТЭФ в 17 л. пузырьковой камере, наполненной смесью пропана C_3H_8 и ксенона. Опыты проводились при импульсах π^- -мезонов 1,25 Гэв/с, 1,55 Гэв/с и 2,8 Гэв/с. Было получено соответственно 11000, 20000 и 60000 стереоснимков. Искались случаи, когда три и больше e^+e^- - пар конверсии были направлены в точку остановки π^- -мезона, при условии, что остановка не сопровождается какими-либо следами ядерного взаимодействия /безлучевые звезды/. Фон в основном происходит от множественного рождения. Для выделения случаев распада $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma + 3\gamma$ использовался статистический кинематический метод, аналогичный методу, который был использован в работе Кретина и др. /2.13/ для обнаружения распада $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$. В случае распада $\omega^0 \rightarrow 3\gamma$ направления трех γ -квантов в с.п.и. расположены на поверхности кругового конуса. Причем раствор этого конуса имеет минимальный угол $-\beta_{min}$ зависящий только от массы ω^0 и от первичной энергии π^- -мезонов. Следовательно, при каждой фиксированной энергии π^- -мезонов имеется свой минимальный угол. На рис. 9 представлены распределения по углу β для событий, соответствующих реакции $\pi^- + p \rightarrow n + 3\gamma$ после вычитания фона. Стрелками указаны значения углов раствора β_{min} конуса распада для ω^0 -мезона с массой 782 Мэв. Как видно из рис. 9, большинство событий находится в интервале углов, больших β_{min} , что доказывает, что эти распределения являются следствием распадов $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma + 3\gamma$. Небольшое количество случаев при углах $\beta < \beta_{min}$ может быть следствием статистической флуктуации, фоном от реакции $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0 + \pi^0$ или неучтенными систематическими ошибками. Сравнение сечения образования $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$ с сечением $\omega^0 \rightarrow$ - нейтральные показывает, что распад $\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$ является основным среди нейтральных мод распада. Отношение вероятностей $\frac{\omega^0 \rightarrow 2\pi^0 + \gamma}{\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma}$, усредненное по трем сериям измерений, составляет $\leq 0,1$.

Время жизни ω^0 . На конференции в Сиене /Италия/ была доложена работа, /4.24/ в которой более точно определена ширина ω^0 . Она равна 195 ± 21 Мэв., что соответствует среднему времени жизни $\tau = 10,69 \pm 0,15 \cdot 10^{-22}$ сек.

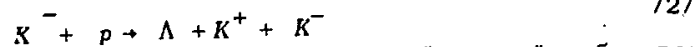
§ 5. ϕ - мезон

В предыдущих параграфах рассматривались свойства резонансов, о существовании которых было известно на Женевской конференции 1962 г. В этом и следующем параграфе обсуждаются работы, в которых открыты новые резонансы.

Ко времени конференции был известен только один векторный мезон с изотопическим спином $0-\omega$ - мезон.

Существование двух векторных мезонов с изотопическим спином 0 и отрицательной G-четностью впервые обсуждалось в рамках векторной теории сильных взаимодействий Сакураи^{/5.4/}. Один из них должен быть связан с барионным током / V_B - мезон/, а другой с гиперзарядным током / V_Y - мезон/.

Позднее Gell-Mann^{/5.5/} построил симметричную модель, основанную на унитарной группе $SU(3)$, в рамках которой оба векторных мезона находят место: V_Y - мезон как член унитарного октета, и V_B - мезон - как унитарный синглет. Первое сообщение о возможном существовании второго векторного мезона появилось в 1962 г. в работе L. Bertanza et al. Окончательно существование резонанса, получившего название ϕ - мезон, и его квантовые числа установлены в работах P.L. Connolly et al. /Брукхейвен-Сиракузы/,^{/5.3/} P. Schlein et al. /Калифорнийский университет/,^{/5.2/} В работе^{/5.3/} изучались реакции



в 20-дюймовой водородной пузырьковой камере Брукхейвенской лаборатории, облученной K^- - мезонами с импульсом 2,33 Бэв/с. Всего проанализировано 38 событий в нейтральном канале /1/ и 22 события в заряженном канале /2/. Фон в канале /1/ вызван главным образом реакцией $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0 + \bar{K}^0$ и оценивается в 10%. Кандидатами для канала /2/ считались случаи с распадом Λ^0 на заряженные. По этой причине заряженный канал свободен от фона.

На рис. 10 показан график Далица для квадратов эффективных масс $K\bar{K}$ и $\Lambda\bar{K}$ для 58 событий от обоих каналов. Превышение над статистическим распределением в области $M^2(K\bar{K}) = 1,04$ Гэв, очевидно. Вероятность случайного отклонения в этой области 10^{-6} . Для масс $M(K\bar{K})$ в области от 1000 до 1040 Мэв была построена идеограмма. Распределение имеет пик при значении массы 1019 ± 1 Мэв.

Спин и четность ϕ - мезона

Определение спина ϕ - резонанса основано на исследовании распадных свойств системы $K^0 \bar{K}^0$ ^{/5.8,7/}. Дело в том, что система K^0 и \bar{K}^0 , как и любая система бозон-антибозон, обладает важной особенностью: ее комбинированная четность CP равна $+1$. С другой стороны, экспериментально наблюдаются короткоживущие K_1^0 - мезоны / $\tau = 0,9 \cdot 10^{-10}$ сек./, обладающие $CP = +1$ и долгоживущие K_2^0 - мезоны / $\tau = 8 \cdot 10^{-8}$ сек./, имеющие $CP = -1$. Пары $K_1^0 K_1^0$ и $K_2^0 K_2^0$ в силу тождественности входящих в них частиц всегда находятся

в состояниях с четными моментами $l = 2m$ и обладают комбинированной четностью $CP = +1$. Комбинированная четность пары $K_1^0 K_2^0$ равна $(-1)^{l+1}$. Поэтому если эта пара образовалась из пары $K^0 \bar{K}^0$, обладающей $CP = +1$, то для нее возможны только нечетные орбитальные моменты $l = 2m + 1$. Таким образом, если система $K \bar{K}$ распадается по каналам $K_1^0 K_1^0$ и $K_2^0 K_2^0$, то она обладает четным спином, если по каналу $K_1^0 K_2^0$, то нечетным.

Имея ввиду эту связь, подсчитали для обеих гипотез-спин четный и спин нечетный /или что то же самое - четность положительную или четность отрицательную, т.к. $P = (-1)^J$), ожидаемое отношение ϕ -распадов к экспериментально наблюдаемым вариантам конечных состояний канала /1/, которые обозначаются по видимым вилкам так: $\Lambda K_1^0 K_1^0$, ΛK_1^0 и $K_1^0 K_1^0$. Ожидаемые относительные числа $\Lambda K_1^0 K_1^0$, ΛK_1^0 и $K_1^0 K_1^0$ даны в таблице.

Т а б л и ц а

Т и п ы канала /1/	Предсказываемые относительные ч и с л а		Наблюдаемые относительные числа для со- бытий в пике
	$P = -1$ $K_1^0 K_2^0$	$P = +1$ $K_1^0 K_1^0, K_2^0 K_2^0$	
$\Lambda K_1^0 K_1^0$	0	0,4	$0 \pm 0,04$
ΛK_1^0	1	0,4	$1 \pm 0,2$
$K_1^0 K_1^0$	0	0,2	$0 \pm 0,04$

Как видно из таблицы, в пике наблюдаются только $\Lambda + K_1^0$ и нет ни одного события $\Lambda K_1^0 K_1^0$ и $K_1^0 K_1^0$. Отсюда следует, что четность отрицательная и спин ϕ -мезона нечетный /наиболее вероятные значения $J = 1$ или 3 /. Дальнейшая информация о спине может быть получена из рассмотрения относительной вероятности распада

$$a = \frac{\phi \rightarrow K_1^0 K_2^0}{\phi \rightarrow K_1^0 K_2^0 + K^+ K^-}$$

При отсутствии разности масс K^+ и K^0 и кулоновских эффектов a не должно зависеть от J . Зависимость a_J от спина появляется из-за различия угловых моментов и кулоновского барьера систем $K_1^0 K_2^0$ и $K^+ K^-$. Теоретические оценки дают, что $a_{J=1} = 0,39$; $a_{J=3} = 0,26$.

Экспериментальное значение $a = 0,45 \pm 0,10$. Таким образом, наблюдаемое отношение K -мезонных мод распада находится в хорошем согласии с гипотезой $J = 1$ и противоречит гипотезе $J = 3$ на две стандартных ошибки.

Ширина резонанса. Ширина резонанса в работе /5.3/ определялась по модифицированной формуле Брейта-Вигнера с учетом экспериментального разрешения $\Gamma_{рез.} = /3 \pm 1/$ Мэв/. При этом использовались только заряженные пары.

Учитывая фон и статистические ошибки, $\Gamma = 1_{-1}^{+2}$, причем $\Gamma > 0$. Более точное значение ширины ϕ -мезона получено в работе Гелфанда и др. /5.10/, в которой изучалась аннигиляция остановившихся антипротонов в реакции $\bar{p} + p \rightarrow K^+ K^- + \pi^+ \pi^-$. По данным этой работы, $\Gamma = /3.1 \pm 1.0/ \text{ Мэв}$.

Изотопический спин и G - четность.

Так как G - четность системы $K^0 \bar{K}^0$ равна $/-1/^{J+1}$, где J - угловой момент, равный в рассматриваемом случае 1, а I - изотопический спин, то значение изотопического спина можно получить, зная G - четность ϕ -мезона. Если бы G - четность ϕ -мезона была +1, то был бы разрешен распад на 2π и этот распад из-за отношения фазовых объемов и прозрачности барьера должен быть преобладающим (в зависимости от принятого радиуса взаимодействия $\phi \rightarrow 2\pi / \phi \rightarrow K\bar{K} \approx 10 - 20$). Двухпионный распад исследовался по распределению $M(\pi^+ \pi^-)$ от реакции $K^- + p \rightarrow \Lambda + \pi^+ + \pi^-$. Верхний предел для отношения распадов

$$\frac{\phi \rightarrow 2\pi}{\phi \rightarrow K + \bar{K}} = \frac{5}{19+23} < 0,2.$$

Как видно, экспериментальная величина отношения на два порядка отличается от теоретической. Отсюда следует, что ϕ имеет отрицательную G - четность. Следовательно, $/-1/^{J+1} = -1$, и изотопический спин ϕ -мезона равен 0.

Таким образом, ϕ - векторный мезон с отрицательной G - четностью и I = 0. Все данные о ϕ -мезоне приводятся в таблице.

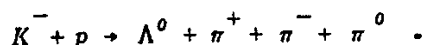
В работе P. Schlein и др. /5.2/ изучались те же реакции /1/ и /2/ при импульсе 1,95 Гэв/с. Было зарегистрировано 24 события, соответствующих реакции /1/, и 10 событий, соответствующих реакции /2/. Результаты полностью согласуются с работой P.L. Connely и др. /5.3/

Используя данные по угловым распределениям продуктов распада ϕ -мезона, авторы приводят дополнительные аргументы в пользу спина J = 1. Для случаев, когда ϕ -мезон вылетал в направлении, близком к направлению пучка $/\cos\theta > 0,5/$, строилось распределение распадов в зависимости от величины $\mu = \vec{i} \cdot \vec{k}$ /видоизмененный анализ Эдера /5.8/, где \vec{i} - направление первичного пучка, \vec{k} - направление K^- /или K^0 / в системе покоя ϕ . Для этих событий гипотеза J = 0 противоречит опыту на ≈ 4 стандартных ошибки, а сравнение с J = 1 и J = 3 показывает, что J = 1 в 4 раза более вероятно, чем J = 3.

Схемы распада ϕ -мезона.

Конкурирующей схемой распада ϕ -мезона с квантовыми числами 1^{--} на $K + \bar{K}$ должен быть распад $\phi \rightarrow 3\pi$ и, в частности, распад $\phi \rightarrow \rho + \pi$,

который может оказаться более вероятным из-за большей величины двухчастичного фазового объема по сравнению с трехчастичным. Распад $\phi \rightarrow \rho + \pi$ исследовался в реакции



Экспериментальное отношение $\beta = \frac{\phi \rightarrow \rho + \pi}{\phi \rightarrow k + k} \approx 0,35 \pm 0,2$. Теоретические оценки ^{/5.9/} дают для β величину 3-4, то есть на порядок больше экспериментального значения. Однако на самом деле противоречие может быть не столь сильным, так как теоретические оценки очень грубые.

§ 6. f^0 - мезон

Предположение о существовании мезона с квантовыми числами вакуума, кроме спина, то есть с изотопическим спином $I = 0$ и четностью $P = +1$, высказывалось в работе Чу и Фраучи ^{/6.9/}. Предполагая, что эта частица лежит на вакуумной траектории Редже и имеет спин $J = 2$, предсказывалось, что масса ее должна быть ≈ 1000 Мэв /траектория Редже в области больших масс не вычислялась, а получалась путем линейного продолжения/. Такая частица может распадаться на четное число π - мезонов.

Первые экспериментальные указания на возможность существования максимума в спектре масс $\pi^+ + \pi^-$ за пиком от ρ -мезона были получены в работе Шаламова и Грашина ^{/6.1/}, в которой изучалась реакция $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + n$ при импульсе первичного π^- -мезона 2,8 Гэв/с на свободных и квазисвободных протонах рабочей смеси $C_3H_8 + Xe$ в 17-литровой пузырьковой камере. Однако камера работала без магнитного поля, и энергия вторичных частиц не измерялась. Идентификация быстрых частиц не проводилась; считалось, что частицы с ионизацией $< 1,5 - 2$ от ионизации первичных π -мезонов являются π - мезонами. Идентифицировались только медленные частицы с ионизацией 1,5-2. Спектр масс $\pi^+ \pi^-$ вычислялся из углового распределения пар $\pi^+ \pi^-$ в лабораторной системе координат. При этом нужно было делать предположения об энергетическом спектре нейтронов и угловом распределении π -мезонов в их системе центра. В полученном таким образом спектре масс $\pi^+ \pi^-$ наблюдался максимум при значении $M_{\pi^+ \pi^-} = 1400$ Мэв; квантовые числа не определялись. Вскоре после этого Gniragossian и др. ^{/6.2/} сообщили об обнаружении резонанса в спектре масс $\pi^+ \pi^-$ от той же реакции при значении $M_{\pi^+ \pi^-} = 990$ Мэв^{x/} в точном соответствии с предсказаниями Чу и Фраучи. Реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ и $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + p$ изучались в водородной пузырьковой камере при энергии

x/ При увеличении статистики максимум сместился к 1250 Мэв в согласии с результатами Силова и др. ^{/6.3/}.

первичных π^- -мезонов 3,3 Гэв. Так как в спектре масс $\pi^- \pi^0$ аналогичного пика не наблюдалось, то отсюда следовало, что спин предполагаемого резонанса $I = 0$.

Принятое теперь значение положения пика /при 1250 Мэв/ впервые было получено в работе Силова и др. /6.3/. Реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ /264 события/ и $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^0 + n$ /349 событий/ изучались при импульсе первичного π^- -мезона 3 Гэв/с в водородной пузырьковой камере. Вывод о существовании пика при 1250 Мэв в системе $\pi^+ \pi^-$ основан на различии между распределениями масс $\pi^- \pi^0$ и $\pi^+ \pi^-$ /рис. 11/. Распределение масс $\pi^- \pi^0$ за ρ -пиком полностью согласуется с распределением фазового объема. Распределение масс $\pi^+ \pi^-$ сильно отличается от фазового распределения. Если сравнить числа случаев в интервалах от 50 до 100 Мэв, взятых из области 1000-1600 Мэв, с соответствующими числами случаев по статистическому распределению, то вероятность согласия данных с фазовым объемом примерно 1/1000. Пик находится при значении $M_{\pi^+ \pi^-} = 1250 \pm 25$ Мэв и имеет ширину $\Gamma = 100 \pm 50$ Мэв. Позднее пик наблюдался в работе Veillet и др. /6.4/ - $M_{\pi^+ \pi^-} = 1260 \pm 35$ Мэв, $\Gamma < 200$ Мэв, в которой реакция $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ /457 случаев/ изучалась при импульсе первичного π^- -мезона 6,1 Гэв/с в 300-литровой камере с тяжелым наполнением /смесь $CF_3 Br - C_3 H_8$ /. Bondar и др. /6.6/ наблюдали пик при $M_{\pi^+ \pi^-} = 1260$ и $\Gamma = 160$ Мэв, в реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ /630 случаев/ при импульсе 4 Бэв/с. Guiragossian /6.8/ в той же реакции /532 события при энергии 3,3 Гэв/ наблюдал пик при 1250 Мэв с шириной $\Gamma \approx 200$ Мэв. Дополнительный аргумент в пользу существования резонанса при 1250 Мэв основан на изучении асимметрии углового распределения π^- -мезона в системе центра масс $\pi^+ \pi^-$ относительно направления первичного π^- -мезона. На рис. 12 в показана зависимость коэффициента асимметрии $\frac{N_{\text{вп}} - N_{\text{н}}}{N_{\text{вп}} + N_{\text{н}}}$ от массы $\pi^+ \pi^-$. Как видно из рисунка в области массы f^0 -коэффициент асимметрии близок к нулю, что и должно наблюдаться в случае $\pi - \pi$ резонанса в отсутствии интерференции с фоном.

Изотопический спин f^0 -мезона

Во всех работах f^0 -мезон проявляется в спектре масс $\pi^+ \pi^-$ и не обнаружен в системе $\pi^- \pi^0$ /I=1 и 2/. Отсюда следует, что изотопический спин f^0 -мезона равен 0.

Спин и четность f^0 -мезона

f^0 -мезон имеет большую ширину и, следовательно, распадается по сильному каналу с сохранением четности и G-четности. Так как обнаружен распад f^0 на два π -мезона, то отсюда следует $G_{f^0} = +1$. Так как изотопический спин f^0 -четный, то спин f^0 -мезона должен быть четным, а т.к. четность

равна $-1/2$, то она должна быть положительной, то есть спин-четность может быть: 0^+ , 2^+ , 4^+ и т.д. В работе *Veillet* и др. ^{/6.4/} и Силова и др. ^{/6.3/} показано, что спин f^0 больше 0. Этот вывод следует из углового распределения π^- -мезонов в системе центра $\pi^+ \pi^-$ в области f^0 -мезона и из углового распределения π^- -мезонов относительно направления дилиона /анализ Эдера/. ^{/6.10/} Эти распределения не изотропны и имеют пики в переднем и заднем направлениях. Вероятность того, что изотропия может привести к такому распределению 1:500. Следовательно, нулевое значение спина противоречит угловым распределениям.

В работе *L. Bondar* и др. ^{/6.6/} приводятся аргументы в пользу спина 2. Они основаны на сравнении сечения $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ в области f^0 -мезона с геометрическим значением, которое в резонансе должно равняться $4\pi\lambda^2 (2J + 1)$, здесь λ - комptonовская длина волны π^- -мезона в системе центра f^0 , J - спин f^0 -мезона.

Сечение вычислялось по формуле Селери ^{/3.39/} /см. § 3/. На рис. 13 показаны сечения $\pi\pi$ и геометрические пределы для значений спина f^0 : 0, 2 и 4 /коэф. 4/9 учитывает распад $f^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ /. Как видно из рис., подсчитанные сечения противоречат спину 0 и 4 и согласуются со спином 2.

Таким образом, из имеющихся в настоящее время экспериментальных данных следует, что наиболее вероятные квантовые числа f^0 - 2^{++} .

В работах ^{/6.11,12/} обсуждался вопрос о том, лежит ли экспериментально обнаруженный f^0 мезон на вакуумной траектории. Вывод таков: f^0 может принадлежать вакуумной траектории, но, возможно, что существует еще одна вакуумная траектория с соответствующим ей еще одним мезоном с изотопическим спином 0. Масса этого мезона оценивается равной примерно 1800 Мэв ^{/6.11/}. Однако все эти расчеты выполнены в двухчастичном приближении, и надежность их в области масс 1000-2000 Мэв, по-видимому, невелика.

Схемы распада

До сих пор наблюдалась лишь одна ветвь распада $f^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, f^0 - мезон должен распадаться также на нейтральные мезоны $f^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$. В работе *Bondar* и др. ^{/6.6/} дается верхний предел для распада на $2\pi^+ + 2\pi^-$. Отношения ветвей

$$\frac{f^0 \rightarrow \pi^+ \pi^+ + \pi^- \pi^-}{f^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-} < 0,08 + 0,06.$$

Если квантовые числа f^0 равны 2^{++} , то он может распадаться также на пары $K^+ K^-$, $K^0 \bar{K}^0$ (K_s^0, K_l^0).

§ 7. ζ - пик

В этом параграфе обсуждается широко известный "резонанс", существование которого не подтвердилось в дальнейших экспериментах.

Об обнаружении ζ - мезона сообщалось в работах /7.1,11/, в которых изучалась реакция $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$ в водородной пузырьковой камере при энергиях первичного π^+ - мезона 820, 900 и 1050 Мэв (соответственно 347, 274 и 315 событий). По последним данным, /7.11/ спектр масс $\pi^+ \pi^0$ сравнивался с предсказаниями изобарной модели Штейнхаймера-Линденбаума /7.13/ и статистическим распределением. Общее поведение спектра находится в лучшем согласии с изобарной моделью. Однако в распределении масс $\pi^+ \pi^-$ имеется пик около 600 Мэв. Пик более отчетливо проявляется при первичной энергии π^+ - мезонов 900 Мэв, при энергии 820 Мэв пик становится много шире, а при 1050 Мэв почти исчезает, что объясняется влиянием ρ - мезона. Авторы рассмотрели влияние изобары на спектр $\pi^+ \pi^0$. Для этого было построено распределения $M_{\pi^+ \pi^0}$ отдельно для случаев, имеющих импульс π^+ или π^0 , равный импульсу мезона отдачи от распада /3,3/-изобары, и для остальных случаев /последние считались событиями не изобарного происхождения/. Для случаев не изобарного происхождения кажется, что пик проявляется более сильно и примерно при одинаковых значениях массы /590 \pm 20/ Мэв. Отмечалось также, что пик проявляется более отчетливо не в периферических столкновениях, а в столкновениях с большой передачей импульса нуклону. Полная ширина пика на полувысоте равна 40 Мэв. Так как экспериментальное разрешение такого же порядка, то, следовательно, действительная ширина ζ меньше 40 Мэв. В распределении масс $M_{\pi^+ \pi^+}$ от реакции $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + p$ при тех же энергиях нет никаких пиков. Отсюда делается вывод, что изотопический спин ζ - мезона равен 1. Однако нельзя было полностью отвергнуть возможность того, что наблюдаемый авторами пик является результатом статистических флуктуаций. Поэтому вывод авторов нуждался в дальнейшем подтверждении. Некоторым подтверждением выводов была работа B.S.Zom, в которой изучалась реакция $p + p \rightarrow d + \pi^+ + \pi^0$ в водородной пузырьковой камере и наблюдался узкий пик при $M_{\pi^+ \pi^0} = 560$ Мэв. Следует отметить, что эта реакция очень удобна для изучения $\pi - \pi$ взаимодействия, так как $\pi - N$ взаимодействие здесь сильно подавлено, а система $\pi^+ + \pi^0$ из-за того, что изотопический спин дейтона равен 0, образуется только в состоянии с изотопическим спином 1. Но в этой работе статистика была намного меньше, чем в предыдущей /всего 14 событий в пике/.

На конференцию был представлен ряд работ /7.6-8/, в которых ζ - мезон не был обнаружен. Следует отметить работу H. Foelsche и др. /7.7/ /см. также D.L. Stonehill /7.9/, в которой реакция $\pi^+ + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^0$ изучалась примерно в той же области энергий со статистикой в 3 раза большей, чем в работе /7.1/ Пик соответствующий ζ - мезону, не обнаружен ни в событиях с малой передачей импульса, ни в событиях с большой передачей импульса нуклону /импульс протона > 500 Мэв/с/. После конференции появились новые работы, в которых ζ - мезон

тоже не обнаружен. *F. Turkot* и др. ^{/7.10/} изучали образование пионных резонансов в реакции $p + p \rightarrow d + X$, измеряя с помощью счетчиков импульсный спектр дейтронов под 0° . Спектры измерялись при энергиях протонов 1,55; 1,93; 2,12 и 2,50 Гэв с разрешением по импульсу 2% и статистической точностью 3%.

X - частица могла иметь массу от $2 m_\pi$ до $7 m_\pi$. При энергии 2,5 Гэв обнаружен только ρ - мезон с массой 750 Мэв. Ни в одном из измеренных спектров не было найдено убедительных указаний на существование ζ - мезона с массой 560 Мэв.

Наконец, против существования ζ - мезона говорит тот факт, что спектр масс $\pi^+ \pi^0$ при энергиях ниже 1 Бэв может быть вполне удовлетворительно описан модифицированной изобарной моделью ^{/7.12/}, в которой учитывается только πN взаимодействие в состоянии $3/2, 3/2$. Как известно, главные предположения изобарной модели Линденбаума и Штейнхаймера ^{/7.13/} состоят в следующем:

1/ можно пренебречь интерференцией между двумя возможными каналами образования изобары с одним из двух π - мезонов;

2/ изобара образуется в S - состоянии;

3/ изобара распадается изотропно в собственной системе центра масс.

S. Bergia и др. ^{/7.14/} модифицировали эту модель, учтя интерференцию между двумя каналами образования изобары. *M. Olsson* и *G. B. Yodh* ^{/7.12/} учли еще P - волновой распад изобары. На рис. 14 показаны спектры масс $\pi^+ \pi^0$ в сравнении с предсказаниями модифицированной изобарной модели. Как видно, эксперимент удовлетворительно описывается теоретической кривой и нет статистически достоверных отклонений в области ζ - мезона.

Таким образом, в настоящее время нет статистически достоверных экспериментальных указаний на существование ζ - мезона ^{x/}.

Кроме работ, рассмотренных в этом обзоре, существует целый ряд сообщений, в которых делаются выводы об обнаружении новых пионных резонансов. Все эти выводы, на наш взгляд, нуждаются в уточнении и по этой причине не обсуждаются в обзоре.

^{x/} В недавно опубликованной работе *Alliti* и др. ^{/8.33/} обнаружено отклонение от фазового объема спектра масс $\pi^+ \pi^0$ в области 550 Мэв примерно на две стандартные ошибки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Обзоры

1. R.H. Dalitz. BNL-735. Three Lectures on Elementary Particle Resonances Brookhaven, 1961.
2. J.F. Detoeuf. The Aix-en-Provence Intern. Conf., p. 57, 1961. Les isobares des Nucleons et les Etats Resonnants des Sistems de Plusieurs Mesons.
3. G.R. Lynch. Proc. Phys. Soc., 80, 46, 1962. Experimental Data on New Resonances.
4. Сборник "Вопросы физики элементарных частиц", Ереван, 1962. Л.И.Лалидус. Резонансные состояния сильно взаимодействующих частиц, стр. 9. Я.М. Селектор. ρ и ζ - мезоны. Обзор экспериментальных данных, стр. 54. С.Я. Никитин. Трехпионные резонансы / ω и η мезоны/, стр. 77.
5. G. Puppi. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 713, 1962. Interactions of pions, nucleons and antinucleons.
6. M. Roos. Rev. Mod. Phys., 35, 314, 1963. Tables of Elementary Particles and Resonant States.

2. η - мезон

1. A. Pevsner, R. Kräemer, M. Nussbaum, C. Richardson, P. Schlein, R. Strand, and T. Toohig, M. Block, A. Engler, R. Gessaroli and C. Meltzer. Phys. Rev. Lett., 7, 421, 1961. Evidence for a three-pion resonance near 550Mev.
2. P.L. Bastien, J.P. Berge, O.L. Dahl, M. Ferro-Luzzi, D.H. Miller, J.J. Murray, A.H. Rosenfeld and M.B. Watson. Phys. Rev. Lett., 8, 114, 1962. Decay modes and width of the η - meson.
3. D.D. Carmony, A.H. Rosenfeld and R.T. Van de Walle. Phys. Rev. Lett., 8, 117, 1962. Evidence that the η - meson has isospin zero.

x/ Экспериментальные работы приведены в хронологической последовательности. Ссылки на цитированные в каждом разделе теоретические работы приводятся в конце списка литературы.

4. E. Pickup, D.K. Robinson and E.O. Salant. Phys. Rev. Lett., 8, 329, 1962. Three-pion mass distributions and the η meson.
5. A.H. Rosenfeld, D.D. Carmony and R.T. Van de Walle. Phys. Rev. Lett., 8, 293, 1962. Search for ρ meson decay into $\eta + \pi$.
6. C. Mencuccini, R. Ouerzoli, G. Salvini and V.G. Silvestrini. Proc. Intern. Conference at CERN, p. 33, 1962. A first evidence of a radiative decay mode of the intermediate pion resonance ($M = 550$ MeV).
7. H. Foelsche, E.C. Fowler, H.L. Kraybill, T.R. Sanford and D. Stonehill. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 36, 1962. $\pi^+ - p$ interactions near 1 GeV. Phys. Rev. Lett., 9, 223, 1962. Properties of the η meson.
8. C. Alff, D. Colley, N. Gelfand, U. Nauenberg, D. Riller, J. Steinberger, T. Tau, H. Brugger, P. Kramer and R. Plano. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 50, 1962. Preliminary results on the production and decay properties of the ω , η and ρ mesons and other resonances in π^+ proton collisions at 2.35, 2.6 and 2.9 GeV/c. Phys. Rev. Lett., 9, 322, 1962. Production of pion resonances in $\pi^+ p$ interactions. Phys. Rev. Lett., 9, 325, 1962. Decay of the ω and η mesons.
9. T. Toohig, R. Kraemer, L. Madansky, M. Meer, M. Nussbaum, A. Pevsner, C. Richardson, R. Strand and M. Block. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 99, 1962. An analysis of the production of η and ω mesons by the interactions of pions with deuterium.
10. M. Meer, R. Strand, R. Kraemer, L. Madansky, M. Nussbaum, A. Pevsner, C. Richardson, T. Toohig, M. Block, S. Orenstein and T. Fields. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 103, 1962. The decays of the η and the ω mesons.
11. M.C. Foster, M.L. Good, R.P. Matsen, M.W. Peters, G.W. Tauffest and R.B. Wilimann. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 108, 1962. Multiple pion production by 1275 MeV/c pions.
12. J. Button-Shafer, M. Ferro-Luzzi, J. Murray, M.L. Stevenson and F.T. Solmitz. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 307, 1962. $\Lambda \pi^+ \pi^- \pi^0$ and $\Lambda +$ neutral final states in $K^- + p$ interactions at K^- momenta of 1.22 and 1.51 GeV/c.
13. M. Chretien et al. Phys. Rev. Lett., 9, 127, 1962. Evidence for spin zero of the η from the two gamma-ray decay mode.
14. R. Ouerzoli and V. Silvestrini. Nuovo Cim., 27, 555, 1963. On the quantum numbers of the η particle.
15. V.B. Lybimov, Mu Jun, M.I. Podgoretsky, S.I. Portnova, V.N. Streltsov and Z. Trka. Physics Letters, 3, 287, 1963; JETP, 44, 760, 1963. γ - quanta production in the interaction of 7 GeV π^- mesons with nuclei.
16. E.C. Fowler, F.S. Crawford, Jr. L.J. Lloyd, R.A. Grossman and L. Price. Phys. Rev. Lett., 10, 110, 1963. Experimental determination of the branching ratio $\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \gamma) / \Gamma(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0)$.
17. L. Behr, P. Mittner and P. Musset. Physics Letters, 4, 22, 1963. Direct Measurement of the η decay into two γ .

18. F.S. Crawford, Jr. L.J. Lloyd and E.C. Fowler. Phys.Rev. Lett., 10, 546, 1963. Experimental determination of the neutral branching ratios of the η -meson.
19. C. Bacci, G. Penso, G. Salvini, A. Wattenberg, C. Mencuccini, R. Ouerzoli and V. Silvestrini. Phys. Rev. Lett., 11, 37, 1963. Photoproduction and neutral decay modes of the η particle.
20. В.Г. Гришин, М.И. Подгорецкий. Препринт ОИЯИ Р-1300, Дубна, 1963. Электромагнитные распады η -частиц.
21. Л.Д. Ландау. ДАН, 60, 207, 1948. О моменте системы из двух фотонов.
22. И.Ю. Кобзарев, Л.Б. Окунь. ЖЭТФ, 43, 1288, 1962. О возможных распадах новых мезонов.
23. G. Feinberg, A. Pais. Phys. Rev. Lett., 9, 45, 1962. Electromagnetic effects on decays of G. eigenstates.
24. M. Gell-Mann, D. Sharp, W.G. Wagner. Phys. Rev. Lett., 8, 261, 1962. Decay rates of neutral mesons.
25. R.H. Dalitz. Phil. Mag., 44, 1068, 1953. On the analysis of τ -meson data and the nature of the τ -meson.

3. ρ -мезон

1. I. Derado. Nuovo Cim., 15, 853, 1960. Experimental evidence for the pion-pion interaction at 1 GeV.
2. E. Pickup, F. Ayer and E.O. Salant. Phys. Rev. Lett., 5, 161, 1960. Single pion production in 0.96 BeV $\pi^- - p$ interactions.
3. J.G. Rushbrooke and D. Radojicic. Phys. Rev. Lett., 5, 567, 1960. Search for resonance in $\pi - \pi$ interaction in $\pi - N$ scattering at 0.96 BeV.
4. J.A. Anderson, V.X. Bang, P.G. Burke, D.D. Carmony and N. Schmitz. Rev. of modern Physics, 33, 431, 1961. Pion-pion Interactions. Phys. Rev. Lett., 6, 365, 1961. Experimental results of the $\pi - \pi$ cross section.
5. D. Stonehill, C. Baltay, H. Courant, W. Fickinger, E.C. Fowler, H. Kraybill, J. Sandweiss, J. Sanford and H. Taft. Phys. Rev., Lett., 6, 624, 1961. Pion-pion interaction in pion production by $\pi^+ - p$ collisions.
6. A.R. Erwin, R. March, W.D. Walker and E. West. Phys.Rev. Lett., 6, 628, 1961. Evidence for a $\pi - \pi$ resonance in the $l=1, j=1$ state.
7. E. Pickup. D.K. Robinson and E.O. Salant. Phys.Rev. Lett., 7, 192, 1961. $\pi - \pi$ resonance in $\pi^- - p$ interactions at 1.25 BeV.
8. D.Mc.Leod, S. Richert and A. Silverman. Phys. Rev. Lett., 7, 383, 1961. Evidence for a pion-pion resonance from photoproduction of pion pairs.
9. D.D. Carmony and R.T. Van de Walle. Phy.Rev. Lett., 8 73, 1962. Differential $\pi - \pi$ cross sections: evidence for the spin of the ρ -meson.

10. Я.Я. Шаламов, А.Ф. Грашин. ЖЭТФ, 42, 1115, 1962. Данные о $\pi-\pi$ взаимодействии из реакций рождения π -мезонов в πp соударениях I.
11. А.Ф. Грашин, Я.Я. Шаламов. ЖЭТФ, 42, 1140, 1962. О спине ρ -мезона.
12. М.С. Айнутдинов, С.М. Зомбковский, С.Я. Никитин, Я.М. Селектор, А.Ф. Грашин. ЖЭТФ, 42, 1413, 1962. $\pi-\pi$ взаимодействие в π^-p -столкновениях при энергии 7,2 Гэв.
13. Я.Я. Шаламов, А.Ф. Грашин. ЖЭТФ, 43, 21, 1962. Данные о $\pi-\pi$ взаимодействии из реакции рождения π -мезонов в π^-p соударениях II. Рождение ρ^0 -мезонов.
14. B.S. Zorn. Phys. Rev. Lett., 8, 282, 1962. Pion-pion resonances in a pure $T = 1$ state.
15. A.H. Rosenfeld, D.D. Carmony and R. T. Van de Walle. Phys. Rev. Lett., 8, 293, 1962. Search for ρ -meson decay into $\eta + \pi$.
16. J. Button, G.R. Kallfleisch, G.R. Lynch, B.C. Maglic, A.H. Rosenfeld and M.L. Stevenson. Phys. Rev., 126, 1858, 1962. Pion-pion interaction in the reaction $\bar{p} + p \rightarrow 2\pi^+ + 2\pi^- + \pi^0$.
17. J. Alliti et al. Nuovo Cim., 25, 365, 1962. Investigation of resonant $\pi-\pi$ interaction in the $J=1, T=1$ state.
18. H. Foelsche, E.C. Fowler, H.L. Kraybill, J. R. Sanford and D. Stonehill. Proc. Intern. Conf. at CERN, 36, 1962. $\pi^+ + p$ interactions near 1 GeV.
D.L. Stonehill and H.L. Kraybill. Rev. Mod. Physic, 34, 503, 1962. Pion-pion interactions in $\pi^+ - p$ collisions.
19. W.D. Walker, E. West, A.R. Erwin, R.H. March, Proc. Intern. Conf. at CERN, 42, 1962 ω and ρ production.
20. C. Alff, D. Colley, N. Gelfand, U. Nauenberg, D. Riller, J. Steinberger, T.H. Tau, H. Brugger, P. Kramer and R. Plano. Proc. Intern. Conf. at CERN, 50, 1962. Preliminary results on the production and decay properties of the ω, η and ρ mesons and other resonances in π^+ proton collisions at 2.35, 2.6 and 2.9 GeV/c. Phys. Rev. Lett., 9 322, 1962. Production of pion resonances in $\pi^+ p$ interactions.
21. C. Grote, J. Klabuhn, J. Klugow, U. Krecker, U. Kundt, K. Lanius, U.W. Meier, S. Nowak and R. Pose. Proc. Intern. Conf. at CERN, 64, 1962. Evidence for the ρ^0 -meson in $\pi^- - p$ interactions at 7.8 GeV/c.
22. G.B. Chadwick, W.T. Davies, M. Derrick, C.J.B. Hawkins, J.H. Mulvey, D. Radojčić, C.A. Wilkinson, M. Cresti, S. Limentani, and R. Santangelo. Proc. Intern. Conf. at CERN 69, 1962. Phys. Rev. Lett., 10, 62, 1962. A study of the annihilation of stopped antiprotons in hydrogen: the reaction $\bar{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$.
23. G.B. Chadwick et al. Proc. Intern. Conf. at CERN, 73, 1962. Production and decay of the ρ - and ω -mesons in antiproton annihilation.
24. T. Ferbel, J. Sandweiss, H.D. Taft, M. Gailloud, T. Morris, R. Lea and T.E. Kalogeropoulos. Proc. Intern. Conf. at CERN 76, 1962. Elastic scattering and multipion annihilations of 3.25 GeV/c antiprotons in hydrogen.

- CIA-RDP80-00247A002400260001-5 Elsner, L.W. Jones and B. Zacharow, Proc. Intern. Conf., at CERN 610, 1962. Results on peripheral pion-nucleon interactions at 12 and 17 GeV/c. Physics Letters 2, 253, 1962. Production of ρ^0 mesons at 12 and 17 GeV/c.
26. N.H. Xuong and G.R. Lynch. Nuovo Cim., 25, 923, 1962. Search for a four-pion resonance and some decay modes of the ρ^- and ω^- mesons. Phys. Rev., 128, 1849, 1962. Search for multipion resonances in the reaction $\bar{p} + p \rightarrow 3\pi^+ + 3\pi^- + n\pi^0$.
27. D.D. Carmony and R.T. Van de Walle. Phys. Rev., 127, 959, 1962. Determination of $\pi^- \pi^-$ Cross sections by the Chew-Low Extrapolation Method.
28. E. Pickup, D.K. Robinson and E.O. Salant. Phys. Rev. Lett., 9, 170, 1962. Departures from one-pion exchange in 1,25-BeV $\pi^- - p$ interaction.
29. L.B. Auerbach, T. Elioff, W.B. Johnson, J. Lach, C.E. Wiegand and T. Ypsilantis. Phys. Rev. Lett., 9, 173, 1962. Study of pion-pion interaction from pion production by pions.
30. J. Naiss. Physics Letters 1, 247, 1962. Experiment and the ρ^- meson.
31. В.А. Беляков, Ван Юн-чан, Н.М. Вирясов, Ду Юань-цай, Ким Хи Ин, Е.Н.Клодницкая, А.А. Кузнецов, Нгуен Дин Ты, В.Н. Пенев, Е.С. Соколова, М.И.Соловьев. ЖЭТФ, 44, 1474, 1963. Изучение свойств π^0 -мезонов, рождающихся со странными частицами в $\pi^- p$ и $\pi^- C$ - взаимодействиях.
32. V. Hagopian and W. Selove. Phys. Rev. Lett., 10, 533, 1953. Experimental evidence on $\pi^- \pi^-$ scattering near the ρ^- and f^0 resonances, from $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \text{nucleon}$, at 3 BeV/c.
33. Alliti et. al. Nuovo Cim., 29, 515, 1963. $\pi^- + p$. Interactions at 1, 59 GeV/c.
34. S.D. Drell. Proc. Intern. Conf. at CERN., p. 27, 1958. "Nucleon structure". Theoretical II.
35. Hofstadter, Bumiller, Yerian. Rev. Mod. Phys., 30, 482, 1958. Electromagnetic structure of the proton and neutron. Перевод в сборнике "Электромагнитная структура ядер и нуклонов".
36. W.R. Frazer and J.R. Fulco. Phys. Rev. Lett., 2, 365, 1959. Effect of a pion-pion scattering resonance on nucleon structure. Phys. Rev., 117, 1609, 1960. Effect of a pion-pion scattering resonance on nucleon structure - II.
37. F.J. Bowcock, D. Lurie. Nuovo Cim., 16, 918, 1960. Effect of a pion-pion scattering resonance on low energy pion-nucleon scattering. Nuovo Cim., 19, 142, 1961. The effect of a pion-pion interaction on low-energy meson-nucleon scattering - II.
38. C.F. Chew, F.E. Low. Phys. Rev., 113, 1640, 1959. Unstable particles as targets in scattering experiments.
39. F. Selleri. Physics Lett., 3, 76, 1962. Off-shell pion-pion scattering in the $T = J = 1$ state.
40. Ferrari and F. Selleri. Phys. Rev. Lett., 7, 387, 1961. Pionic form factor effects in peripheral nucleon-nucleon collisions.
41. В.В. Серебряков, Д.В. Ширков. Препринт ИМ. С.О. АН СССР. ТФ-5, 1962. Естественное объяснение узкого пион-пионного резонанса.

4. ω -meson

1. B.C. Maglic, L.W. Alvarez, A.H. Rosenfeld and M.L. Stevenson. Phys. Rev. Lett., 7, 178, 1961. Evidence for a $T = 0$ three-pion resonance.
2. N.H. Xuong and G.R. Lynch. Phys. Rev. Lett., 7, 327, 1961. Evidence confirming the $T = 0$ three-pion resonance.
3. A. Pevsner, R. Kramer, M. Nussbaum, C. Richardson, P. Schlein, R. Strand, T. Toohig, M. Block, A. Engler, R. Gessaroli and C. Meltzer. Phys. Rev. Lett., 7, 421, 1961. Evidence for a three-pion resonance near 550 MeV.
4. M.L. Stevenson, L.W. Alvarez, B.C. Maglic and A.H. Rosenfeld. Phys. Rev., 125, 687, 1962. Spin and parity of the ω -meson.
5. N.H. Xuong and G.R. Lynch. Nuovo Cim., 25, 923, 1962. Search for a four-pion resonance, and some decay modes of the ρ and ω mesons.
6. W.D. Walker, E. West, A.R. Erwin and R.H. March. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 42, 1962. ω and ρ production.
7. D.D. Carmony, F. Grand, R.T. Van de Walle and N.H. Xuong. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 44, 1962. Multipion production by 2.03 GeV/c in hydrogen.
8. C. Alff, D. Colley, N. Gelfand, U. Nauenberg, D. Riller, J. Steinberger, T.H. Tau, H. Brugger, P. Kramer and R. Plano. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 50, 1962. Preliminary results on the production and decay properties of the ω , η and ρ mesons and other resonances in π^+ proton collisions at 2.35, 2.6 and 2.9 GeV/c. Phys. Rev. Lett., 9, 322, 1962. Production of pion resonances in π^+p interactions. Phys. Rev. Lett., 9, 325, 1962. Decays of the ω and η mesons.
9. G.B. Chadwick et al. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 73, 1962. Production and decay of the ρ and ω mesons in antiproton annihilation.
10. T. Ferbel, J. Sandweiss, H.D. Taft, M. Gaillard, T. Morris, R.M. Lea and T.E. Kalogeropoulos. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 76, 1962. Elastic scattering and multipion annihilations of 3.25 GeV/c antiprotons in hydrogen.
11. R. Armenteros et al. Proc. Intern. Conf., at CERN, p. 90, 1962. Study of the ω -meson in annihilations $\bar{p} + p \rightarrow K + \bar{K} + \omega^0$.
12. T. Toohig, R. Kraemer, L. Madansky, M. Meer, M. Nussbaum, A. Pevsner, C. Richardson, R. Strand and M. Block. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 99, 1962. An analysis of the production of η and ω mesons by the interactions of pions with deuterium.
13. M. Meer, R. Strand, R. Kraemer, L. Madansky, M. Nussbaum, A. Pevsner, C. Richardson, T. Toohig, M. Block, S. Orenstein and T. Fields. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 103, 1962. The decays of the η - and the ω -mesons.
14. J. Button-Shafer, M. Ferro-Luzzi, J. Marray, M.L. Stevenson, and F.T. Solmitz. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 307, 1962. $\Lambda \pi^+ \pi^- \pi^0$ and Λ^+ neutral final states in $K^- - p$ interactions at K^- momenta of 1.22 and 1.51 GeV/c.

15. N.H. Xuong and G.R. Lynch, Phys. Rev., 128, 1849, 1962. Search for multi-pion resonances in the reaction $\bar{p} + p \rightarrow 3\pi^+ + 3\pi^- + n\pi^0$.
16. W.J. Fickinger, D.K. Robinson and E.O. Salant. Phys. Rev. Lett., 10, 457, 1963. Evidence for two-pion decay mode of the ω -meson.
17. В.А. Беляков, Ван Юн-чан, И.М. Вирясов, Ду Юань-цай, Ким Хи Ин, Е.Н. Кладницкая, А.А. Кузнецов, Нгуен Дин Ты, В.Н. Пенев, Е.С. Соколова, М.И. Соловьев. ЖЭТФ, 44, 1474, 1963. Изучение свойств π^0 -мезонов, рождающихся со странными частицами в π^-p и π^-C взаимодействиях.
18. J.B. Shafer, J.J. Murray, D.O. Huwe, F. Solmitz and M.L. Stevenson. Bull. Am. Phys. Soc., 8, 22, 1963. Rare decay modes of the ω^0 -meson.
19. В.В. Бармин, А.Г. Долголенко, Ю.С. Крестников, А.Г. Мешковский Ю.П. Никитин, В.А. Шебанов. Препринт ИТЭФ, № 161, 1963. Обнаружение распада $\omega + \pi^0 + \gamma$. ЖЭТФ 45, 1879, 1963 г.
20. J. Bernstein, G. Feinberg. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 170, 1962. A Needle in a Haystack.
21. Y. Nambu. Phys. Rev., 106, 1366, 1957. Possible Existence of a Heavy Neutral Meson.
22. Г.И. Копылов и В.И. Огиевецкий. Препринт ОИЯИ Р-1161, Дубна, 1962. Запрещенные конфигурации мезонов в многомезонных распадах.
23. S. Glashow. Phys. Rev. Lett., 7, 469, 1961. Is isotopic spin a good quantum number for new isobars?
24. N. Gelfand, D. Miller, M. Nussbaum, J. Ratau, J. Schultz, J. Steinberger, T.H. Tan, L. Kirsch, R. Plano. Phys. Rev. Lett, 11 , 436, 1963. Lifetime of the ω -meson.

5. ϕ - мезон

1. L. Bertanza, V. Brisson, P.L. Connolly, E.L. Hart, I.S. Mitra, G.C. Moneti, R.R. Rau, N.P. Samios, I.O. Skillicorn, S.S. Yamamoto, M. Goldberg, L. Gray, J. Leitner, S. Lichtman and J. Westgard. Phys. Rev. Lett, 9, 180, 1962. Possible resonances in the $\Xi + \pi$ and $K + K$.
2. P. Schlein, W.E. Slater, L.T. Smith, D.H. Stork and H.K. Ticho. Phys. Rev. Lett., 10, 368, 1963. Quantum numbers of a 1020 MeV $K K$ resonance.
3. P.L. Connolly, E.L. Hart, K.W. Lai, G. London, G.C. Moneti, R.R. Rau, N.P. Samios, I.O. Skillicorn, S.S. Yamamoto, M. Goldberg, M. Gundzik, J. Leitner and S. Lichtman. Phys. Rev. Lett., 10, 371, 1963. Existence and properties of the ϕ -meson.
4. J.J. Sakurai, Ann. Phys. 11 , 1, 1960. Theory of strong Interactions.
5. M. Gell-Mann. Phys. Rev., 125, 1067, 1962. Symmetries of Baryons and Mesons.
6. M. Goldhaber, T. Lee, C. Yang. Phys. Rev., 112, 1796, 1958. Decay modes of a $(\theta + \theta)$ system.

8. S.B. Treiman. Phys. Rev., 128, 1342, 1962. Adair spin analysis with parity nonconservation.
9. J.J. Sakurai. Phys. Rev. Lett., 9, 472, 1962. Possible existence of a $T = 0$ Vector Meson at 1020 Mev.
10. N. Gelfand, D. Miller, M. Nussbaum, J. Ratau, J. Schultz, J. Steinberger, T. H. Tan, L. Kirsch, R. Plano. Phys. Rev. Lett., 11, 438, 1963. Width of the ϕ meson. 1962.

6. f^0 - мезон

1. Я.Я. Шаламов, А.Ф. Грашин. ЖЭТФ, 43, 21, 1962. Данные о $\pi\pi$ - взаимодействии из реакции рождения π -мезонов в $\pi\rho$ соударениях. Рождение ρ^0 - мезонов.
2. Z.G.T. Guiragossian, W.H. Powel, H.S. White. Bull. Am. Phys. Soc., 7, 281, 162. Evidence for new $\pi-\pi$ Resonances.
3. W. Selove, V. Hagopian, H. Brody, A. Baker and E. Leboy. Phys. Rev. Lett., 9, 272, 1962. Evidence for a $T=0 (\pi^+-\pi^-)$ resonance at 1250 MeV.
4. J.J. Veillet, J. Hennessy, H. Bingham, M. Bloch, D. Drijard, A. Lagarrigue, P. Mittner, A. Rousset, G. Bellini, M. di Corato, E. Fiorini and P. Negri. Phys. Rev. Lett., 10, 29, 1963. Existence and spin of the proposed $f^0(\pi^+-\pi^-)$ resonance.
5. N.H. Xuong, R. Lander and P. Yager. Bull. Am. Phys. Soc. Ser. II, v. 8, 342, 1963. Production of multipion resonances by π^+ at 3.43 BeV/c in hydrogen.
6. L. Bondar et all. Physics Lett., 5, 153, 1963. Further evidence for the f^0 -meson, and a determination of its spin.
7. V. Hagopian and W. Selove. Phys. Rev. Lett., 10, 533, 1963. Experimental evidence on $(\pi^+\pi^-)$ -scattering near ρ and f^0 resonances from $\pi^-+p \rightarrow \pi^++\pi^-$ nucleon, at 3 BeV/c.
8. Z.G.T. Guiragossian. Phys. Rev. Lett., 11, 85, 1962. Study of Pion-Pion Resonances in 3.3 BeV π^--p interaction.
9. G.F. Chew and S.C. Frautschi. Phys. Rev. Lett. 8, 41, 1962. Regge trajectories and principle of maximum strength for strong interactions.
10. R.K. Adair. Phys. Rev., 100, 1540, 1955. Angular distribution of Λ^0 and θ^0 decays.
11. A. Pignotti. Phys. Rev. Lett., 10, 416, 1963. Does the f^0 particle lie on the Pomanchuk trajectory?
12. A. Ahmadzadeh and I.A. Sakmar. Phys. Lett., 5, 145, 1963. An approximation method for Regge trajectories and its implication on the spin - 2 particle of the Chew-Frautschi diagram.

1. Barloutand, J. Heughebaert, A. Levegue, J. Meger and R. Onmes. Phys. Rev. Lett., 8, 32, 1962. Evidence for a $T = 1$ pion-pion resonance of 575 MeV.
2. B.S. Zorn. Phys. Rev. Lett., 8, 282, 1962. Pion-pion resonances in a pure $T = 1$ state.
3. V.P. Kenney, W.D. Shephard and C.D. Gall. Phys. Rev. 126, 736, 1962. Single Neutral Pion Production by Pions of 1100 MeV.
4. C.C. Peck, L.W. Jones and M.L. Perl. Phys. Rev., 126, 1836, 1962. Evidence concerning pion-pion interactions below the 765 MeV pion-pion resonance.
5. C. Richardson, R. Kraemer, M. Meer, M. Nussbaum, A. Pevsner, C. Richardson, R. Strand and M. Block. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 96, 1962. Two pion resonances below mass 900 MeV.
6. G.B. Chadwick, W.T. Davies, M. Derrick, C.J.B. Hawkins, P.B. Jones, J.H. Mulvey, D. Radojicic, C.A. Wilkinson, M. Cresti, A. Grigoletto, S. Limentani, A. Limentani, A. Loria, L. Peruzzo and R. Santangelo. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 73, 1962. Production and decay of the ρ - and ω -mesons in antiproton annihilation.
7. H. Foelsche, E.C. Fowler, H.L. Kraybill, J.R. Sanford and D. Stonehill. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 36, 1962. $\pi^+ + p$ in interaction near 1 GeV.
8. C. Alff, D. Colley, N. Gelfand, U. Nauenberg, D. Riller, J. Steinberger, and R. Plano. Proc. Intern. Conf. at CERN, p. 50, 1962. Preliminary results on the production and decay properties of the mesons and other resonances in π^- -proton collisions at 2.35, 2.6 and 2.9 GeV/c. Phys. Rev. Lett., 9, 322, 1962. Production of pion resonances in $\pi^+ p$ interactions.
9. D.H. Stonehill and H.L. Kraybill. Rev. Mod. Physics, 34, 503, 1962. Pion-pion interactions in $\pi^+ p$ collisions.
10. F. Turkot, G.B. Collins, T. Fujii, M.A.R. Kemp, J. Menes, J. Oostens, R.A. Carrigan, R.M. Edelman, N.C. Hien. Bull. of the Amer. Phys. Soc. Ser II, 7, 620, 1962. Search for $T = 1$ pion resonances in deuteron production.
11. Barloutaud, J. Heughebaert, A. Levegue, C. Louedec, J. Meyer and D. Tycho. Nuovo Cim., 27, 238, 1963. Single-pion production in Collisions at 820 and 1050 MeV.
12. M. Olsson and G.B. Yodh. Phys. Rev. Lett., 10, 353, 1963. Isobar model analysis of single pion production in pion-nuclear collisions below 1 BeV.
13. R.M. Sternheimer and S.J. Lindenbaum. Phys. Rev., 109, 1723, 1958. Pion production in pion-nucleon collisions.
14. S. Bergia, F. Bonsignori and A. Stanghellini. Nuovo Cim., 16, 1073, 1960. Pion production and the "Isobaric" model.

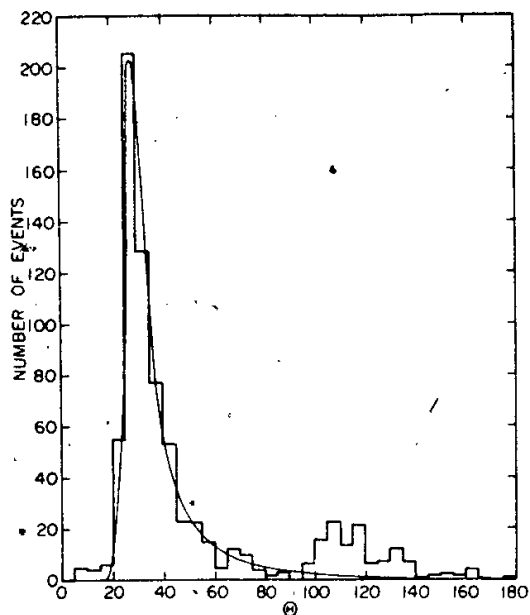


Рис. 1. Распределение углов между двумя γ -квантами после вычитания фона. Плавная линия соответствует теоретическому расчету для π^0 -мезона с учетом разрешения прибора.

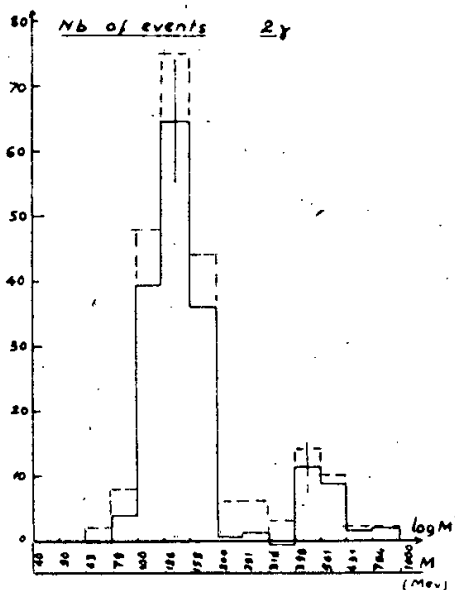


Рис. 2. Спектр эффективных масс двух γ -квантов: пунктир - без вычитания фона; сплошная линия - спектр после вычитания фона.

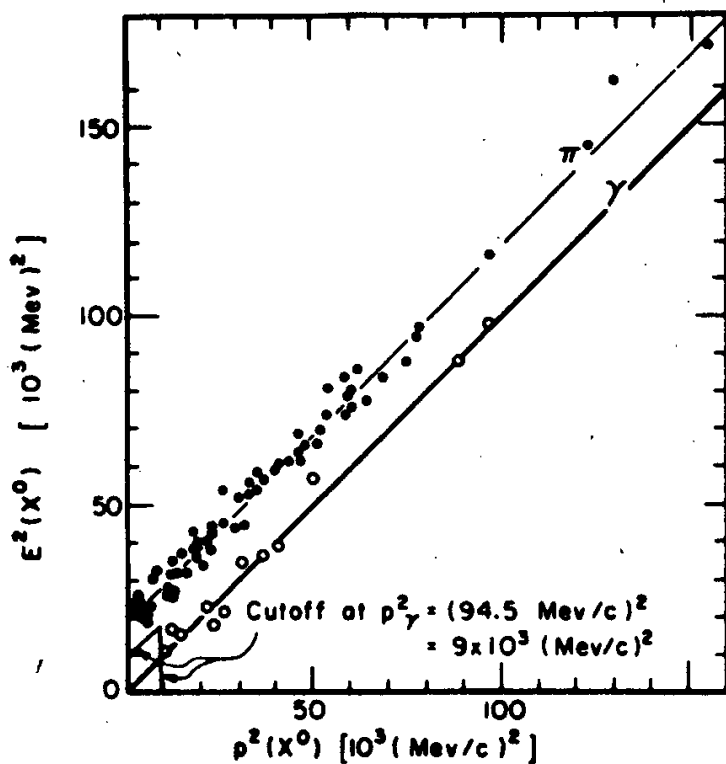


Рис. 3. Зависимость $E^2(X^0)$ от $p^2(X^0)$. Светлые точки - события, соответствующие распаду $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma$. Темные точки - события, соответствующие распаду $\eta \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$.

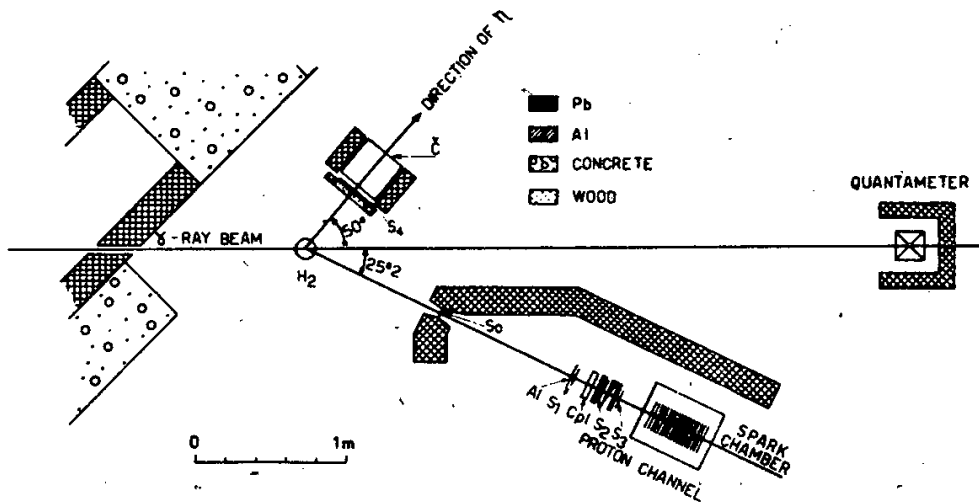


Рис. 4. Экспериментальная установка для регистрации фоторождения и нейтральных мод распада η -частиц.

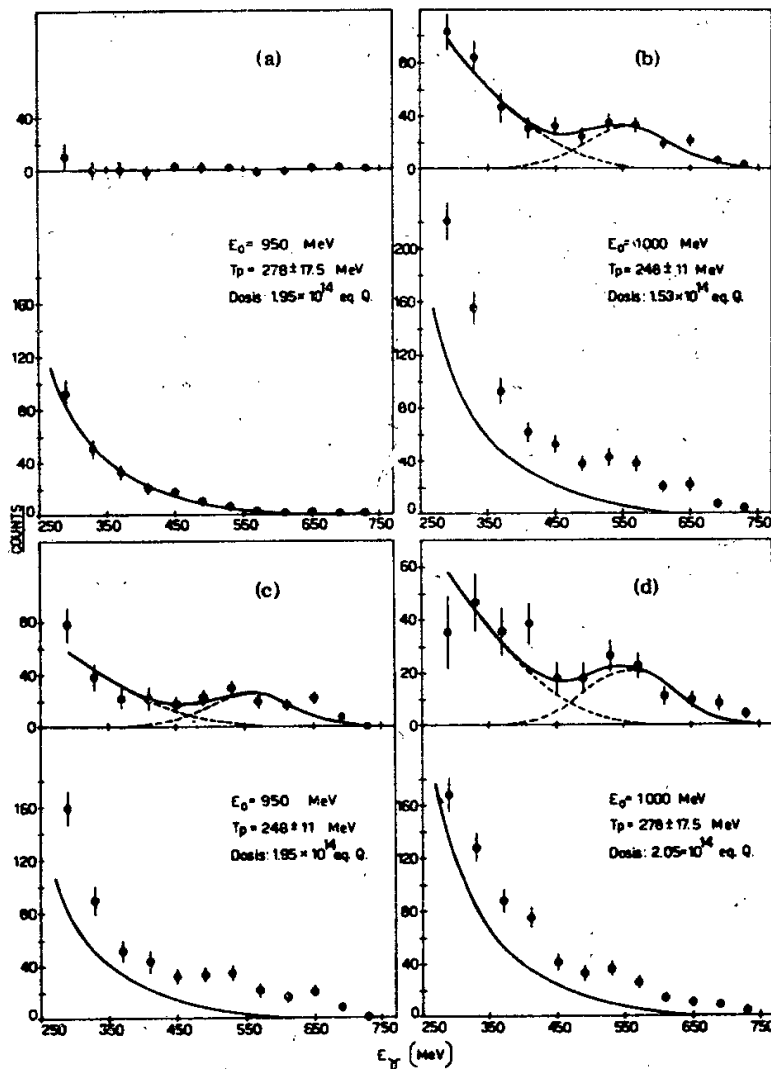


Рис. 5. Спектры γ -квантов от распада X^0 , образованной в реакции $\gamma + p \rightarrow p + X^0$. /a/ - ниже порога образования η -частицы. /b/, /c/, /d/ - выше порога. Сплошная линия в нижней части каждой фигуры - вклад от процессов множественного рождения мезонов. В верхней части показана разность между экспериментальными точками и сплошной линией.

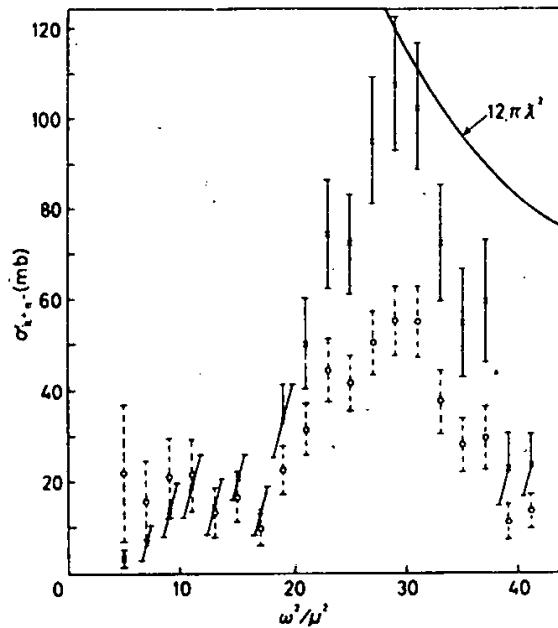


Рис. 6. Сечение $\pi^- + \pi^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+$ в зависимости от $M_{\pi\pi}^2$.
 Сплошная линия соответствует сечению для резонансного рассеяния в состоянии $J = 1$. \circ - формула Чу и Лоу, \times - формула Селлери.

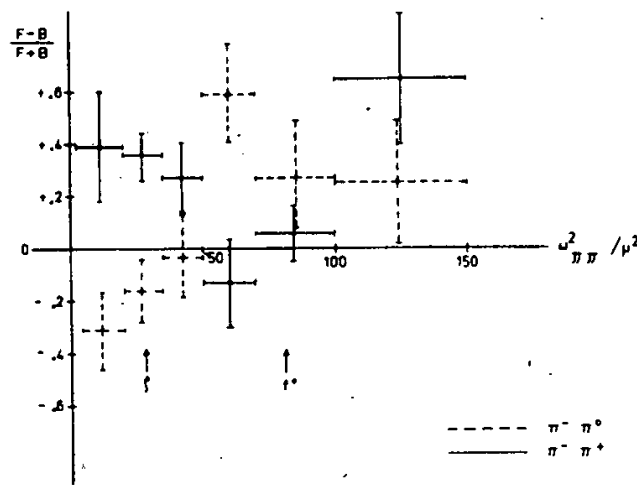


Рис. 7. Зависимость коэффициента асимметрии углового распределения π^- -мезонов в системе центра масс ($\pi^- \pi^0$) и ($\pi^- \pi^+$) относительно направления первичного π^- -мезона от квадрата полной энергии системы.

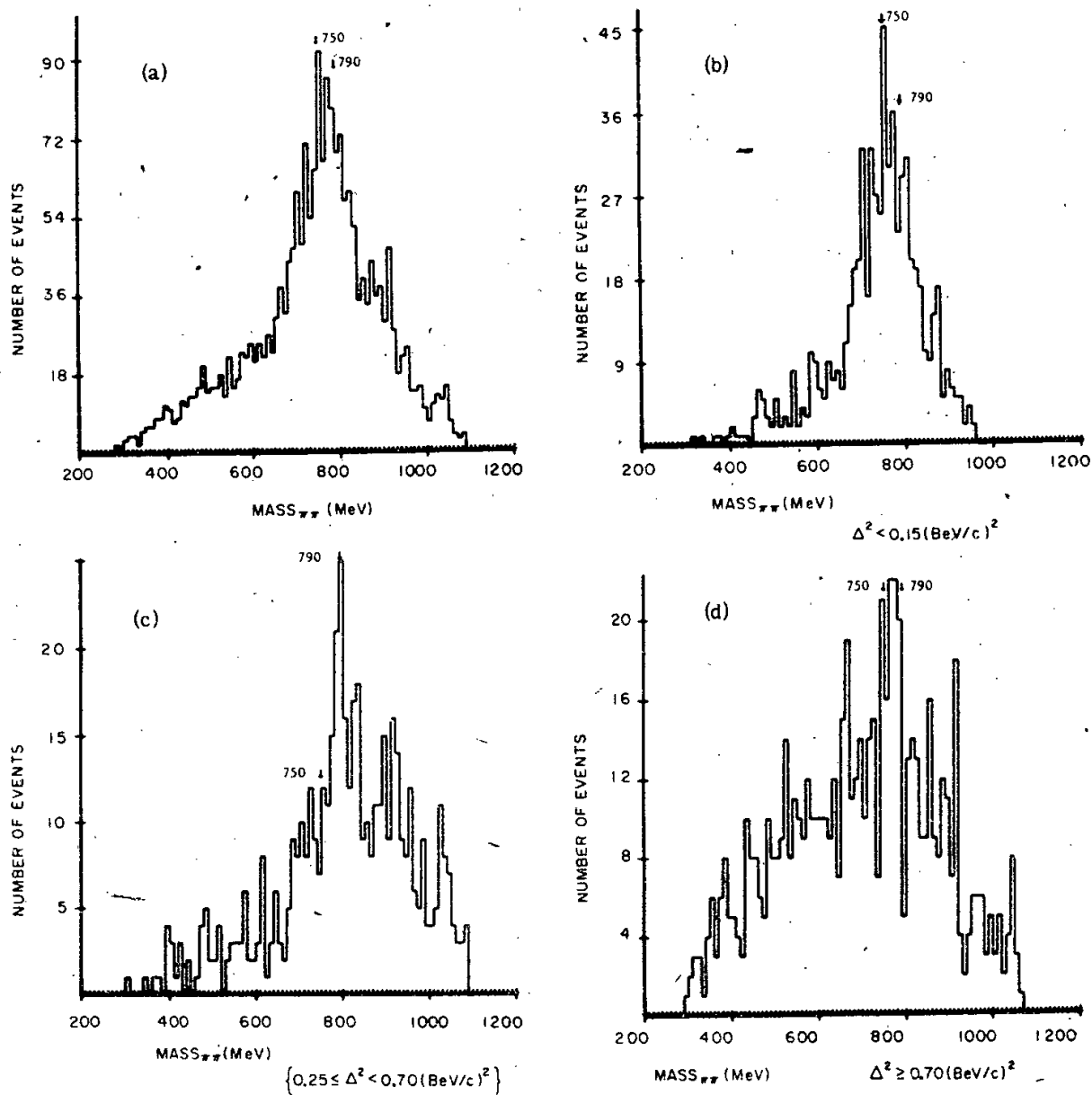


Рис. 8. Распределение эффективных масс $\pi^+ \pi^-$ системы. Стрелки указывают положение ρ / 750 Мэв/ и ω / 790 Мэв/. /а/ Все Δ^2 , /в/ $\Delta^2 < 0,15$ /Гэв/с², /с/ $0,25 \leq \Delta^2 \leq 0,70$ /Гэв/с², /д/ $\Delta^2 \geq 0,70$ /Гэв/с².

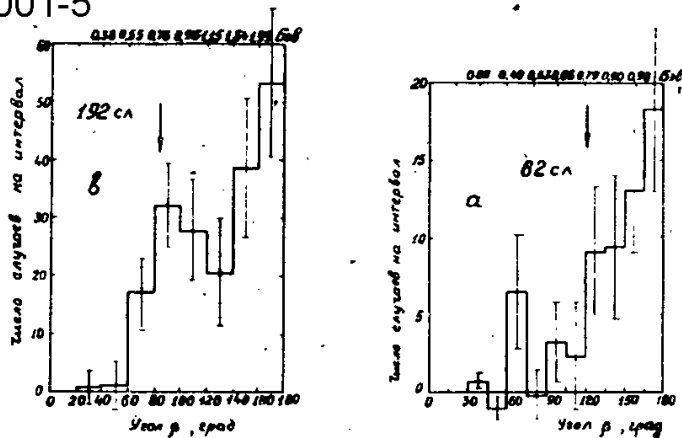


Рис. 9. Гистограмма событий, соответствующих реакции $\pi^- + p \rightarrow n + 3u$ после вычитания фона. а - 1,55 Гэв/с, в - 2,8 Гэв/с.

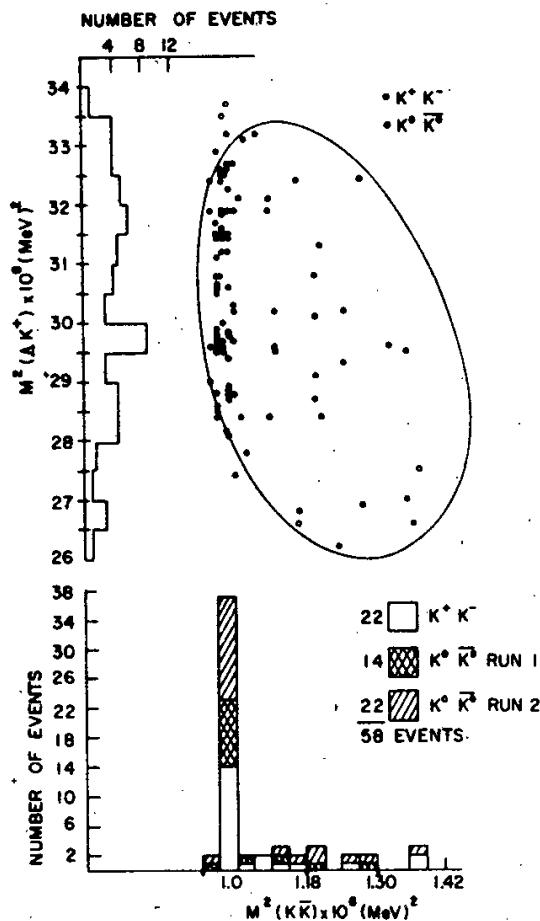


Рис. 10. Распределения событий, соответствующих реакции $K^- + p \rightarrow \Lambda + K + \bar{K}$ на графике Далитца. Импульс K^- -мезонов 1,95 Гэв/с.

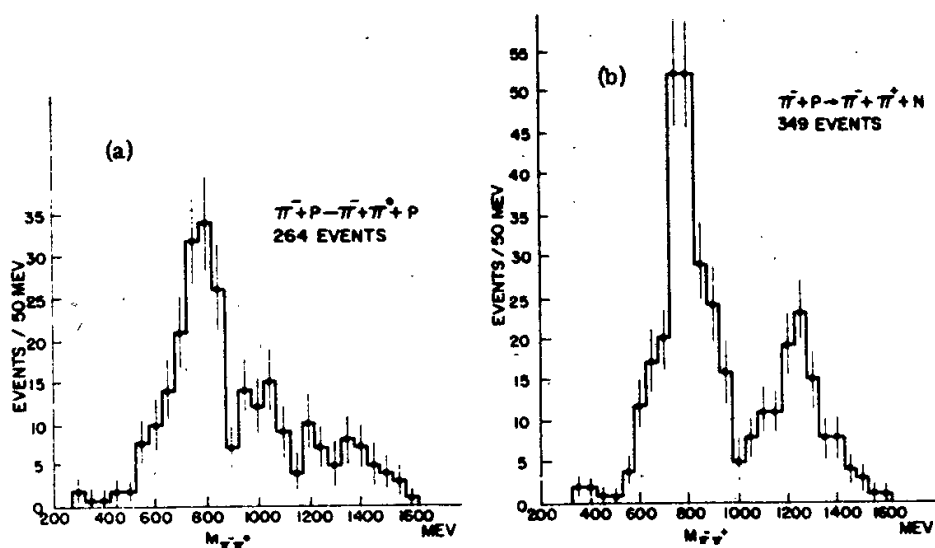


Рис. 11. /а/ Распределение масс $\pi^-\pi^0$,
 /б/ Распределение масс $\pi^+\pi^-$.

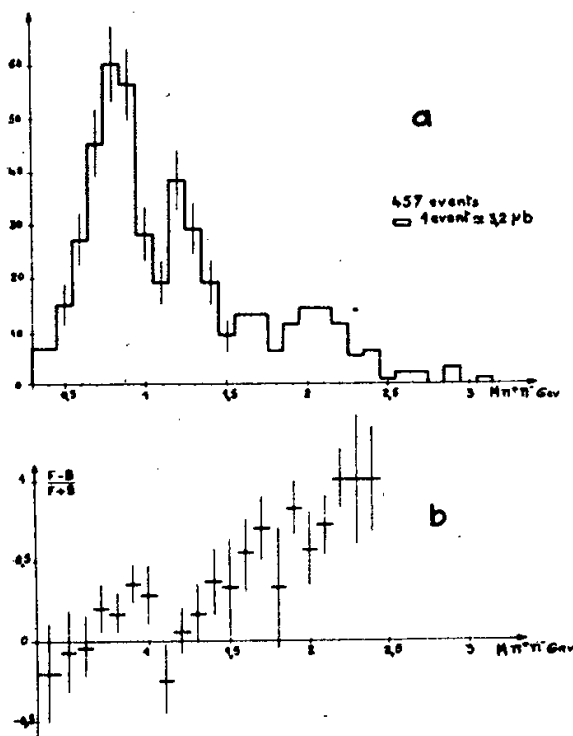


Рис. 12. /а/ Распределение масс $\pi^-\pi^0$ от реакции $\pi^- + p \to \pi^+ + \pi^- + n$
 /в/ Асимметрия углового распределения π^- в с.ц.и. ($\pi^+\pi^-$) относи-
 тельно направления первичного π^- -мезона.

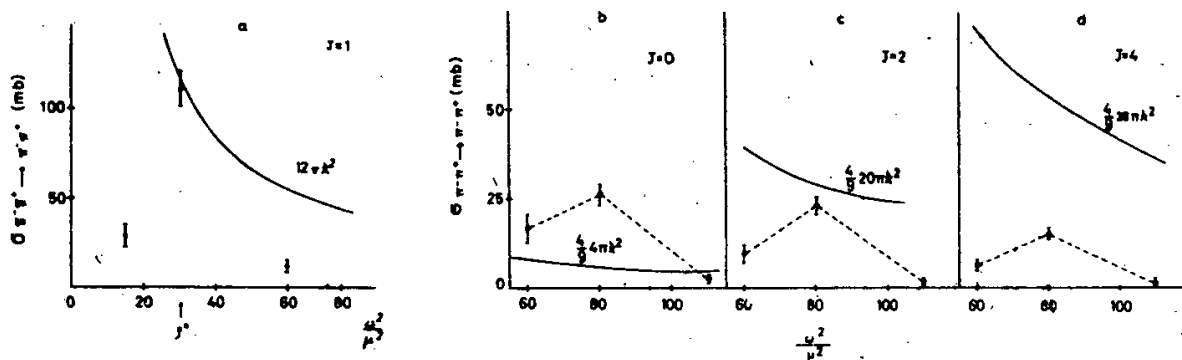


Рис. 13. Сечения $\pi^+ \pi^-$ рассеяния в реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + p$
 а/ в области ρ - резонанса,
 б/ в области f^0 -резонанса для спина 0,
 в/ в области f^0 - резонанса для спина 2,
 г/ в области f^0 - резонанса для спина 4.

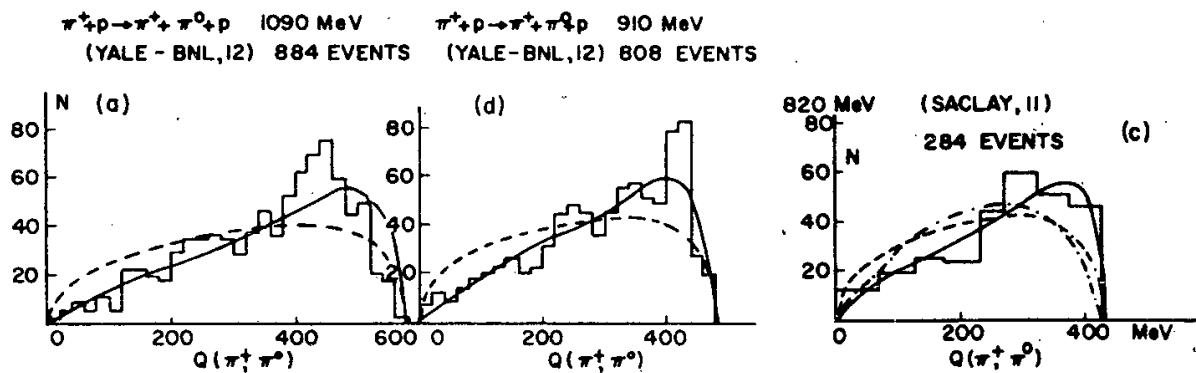


Рис. 14. Спектры Q -величин системы $\pi^+ \pi^0$ от реакции $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p$
 Сплошная кривая рассчитана по изобарной модели Олсона и Йодха.
 Пунктир - изобарная модель Линденбаума и Штейнхеймера. Энергия
 первичных π^+ -мезонов: а/ 1090 Мэв, б/ 910 Мэв, в/ 820 Мэв.

Таблица I Пионные резонансы

Обозначения		Электрич. заряд Q	Масса Мэв м	Ширина Мэв Г	Изотоп спин I	Спин и четность J	ψ -чет- ность ψ	Распад	
								Установлен- схемы распада	Соотно- шения ветвей%
Эта	η	0	548 ± 1	≤ 7	0	0^-	+	$\pi^+ \pi^- \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \gamma$ $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ $\gamma \gamma$	~ 23 ~ 6 ~ 39 ~ 31
rho	ρ^+	+1	750 ± 10	100 ± 10	1	1^-	+	$\pi^+ \pi^0$	~ 100
	ρ^0	0	750 ± 10	100 ± 10	1	1^-	+	$\pi^+ \pi^-$	~ 100
	ρ^-	-1	750 ± 10	100 ± 10	1	1^-	+	$\pi^- \pi^0$	~ 100
Омега	ω	0	783 ± 1	$9,5 \pm 2,1$	0	1^-	-	$\pi^+ \pi^+ \pi^0$ $\pi^0 \gamma$ $\pi^+ \pi^-$	~ 84 ~ 12 ~ 4
phi	φ	0	1019 ± 1	$3,1 \pm 1,0$	0	1^-	-	$K^+ \bar{K}^- \begin{cases} K^+ K^- \\ K_1^0 K_2^0 \end{cases}$ $\rho^+ \pi^-$ $K^+ \bar{K}^-$	$\sim 35 \pm 20$
эф	f^0	0	1250 ± 25	100 ± 50	0	2^+	+	$\pi^+ \pi^-$ $\frac{\pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^-}{\pi^+ \pi^-}$	$\leq 8 \pm 6$

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3528. # Тираж 350 2,7 уч.-изд. л.
Техн. ред. Н.Н.Зрелова. Январь 1964 г.

STAT
50



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

V.G. Soloviev, P. Vogel, A.A. Korneichuk

E - 1561

STUDY OF THE OCTUPOLE STATES
OF EVEN-EVEN STRONGLY
DEFORMED NUCLEI

Дубна 1964

E - 1561

Соловьев В.Г., Фогель П., Корнейчук А.А.

Исследование октупольных состояний четно-четных сильно деформированных ядер.

В работе систематически исследованы октупольные состояния с $\lambda = 3$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ четно-четных ядер в областях деформации $150 \leq A \leq 186$ и $228 \leq A \leq 254$.

Расчитаны энергии, и исследована структура состояний. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Работа издается только на английском языке.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна. 1964.

E - 1561

Soloviev V.G., Vogel P., Korneichuk A.A.

Study of the Octupole States of Even-Even Strongly Deformed Nuclei.

In the paper octupole states of even-even nuclei with $\lambda = 3$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ in the regions $150 \leq A \leq 186$ and $228 \leq A \leq 254$ are systematically investigated. The energies of states are calculated and the structure is studied. The comparison with experimental data is made.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1964.

V.G. Soloviev, P. Vogel, A.A. Korneichuk

E - 1561

STUDY OF THE OCTUPOLE STATES
OF EVEN-EVEN STRONGLY
DEFORMED NUCLEI

Submitted to "Izv. Akad. Nauk SSSR "

Дубна 1964

In investigating the collective, but non-rotational, excited states of even-even nuclei attention was first focussed on the quadrupole states with $\lambda = 2$ and $\mu = 0$ and 2 for which the most complete experimental data are available. The next term of expansion in multipoles of nucleon-nucleon interaction in a nucleus is a term corresponding to the octupole-octupole interaction. This interaction leads to collectivization of the excited states with $\lambda = 3$, $\mu = 0, 1, 2$ and 3 and negative parity. The experimental data on such states are systematized in ref.^{1/} They point out that in a number of cases the octupole states have a clear-cut collective nature. The octupole excited states were studied in refs.^{2,3/} both on the basis of the unified and the superfluid nuclear models. Main attention was paid to the investigation of the probabilities of electromagnetic transitions.

Calculations of the energies of the octupole states with $I\pi K = 1-0$ on the basis of the superfluid nuclear model were made in^{4/} in the framework of the method of approximate second quantization. Close agreement has been obtained between the results of calculations and the corresponding experimental data. The investigation accounted for the lowering of the energies of the states with $K\pi = 0-$ in the isotopes of Th, U and Pu below the beta and gamma excited state energies.

The present paper is devoted to systematic investigation of the octupole excited states with $\lambda = 3$, $\mu = 0, 1, 2$ and 3 of even-even nuclei. The energies were calculated and the structure of these states were studied in both regions of strongly deformed nuclei on the basis of the superfluid nuclear model in the framework of the method of approximate second quantization.

1. Secular Equations and Wave Functions

The energies of the collective states will be calculated on the basis of the superfluid nuclear model. In this model the interaction Hamiltonian between nucleons in a nucleus is written in the form of three terms:

$$H = H_{av} + H_{pair} + H_{coll} \quad (1)$$

describing average nuclear field, interactions leading to pairing correlations of

reactions responsible for collective effects. The properties of even-even strongly deformed nuclei were studied in the model with the Hamiltonian $H_{av} + H_{pair}$. It is shown^[5] that this model rather well describes all the excited nuclear states but the quadrupole and, in some cases, the octupole states. In calculating the energies of the octupole collective states H_{coll} is taken in the form

$$H_{coll} = - \sum_{\mu=0,1,2,3} \left\{ \frac{\kappa_n^{(3)}}{2} Q_{3\mu}^+(n) Q_{3\mu}(n) + \frac{\kappa_p^{(3)}}{2} Q_{3\mu}^+(p) Q_{3\mu}(p) + \frac{\kappa_{np}^{(3)}}{2} (Q_{3\mu}^+(n) Q_{3\mu}(p) + Q_{3\mu}^+(p) Q_{3\mu}(n)) \right\} \quad (2)$$

where

$$Q_{3\mu}(n) = \sum_{\substack{\sigma\sigma' \\ \sigma\sigma'}} f_{\sigma\sigma'}^{3\mu}(ss') a_{\sigma\sigma'} a_{\sigma'\sigma}$$

$$f_{30} = r^3 Y_{30}, \quad f_{31} = \frac{r^3}{\sqrt{2}} (Y_{31} - Y_{3-1}) \quad (2^1)$$

$\kappa_n^{(3)}$, $\kappa_p^{(3)}$, $\kappa_{np}^{(3)}$ are the octupole-octupole interaction constants.

According to the superfluid nuclear model the wave functions of the collective states in the microscopic treatment are the superposition of wave functions of two-quasi-particle states of different type. The collective states are considered side by side with the two-quasi-particle ones, there being no restrictions to the collective state energies. In studying states with $\mu \neq 0$ in addition to the matrix elements $f_{\sigma\sigma'}^{3\mu}(\rho_1, \rho_2) \equiv f^{\mu}(\rho_1, \rho_2)$ where $K_1 \pm \mu = K_2$ the matrix elements $f_{\sigma-\sigma}^{3\mu}(\rho_1, \rho_2) = \bar{f}^{\mu}(\rho_1, \rho_2)$ with $K_1 + K_2 = \pm \mu$ are taken into account. Here K_1 and K_2 are the projections of moments on the nuclear symmetry axis, and ρ, ρ' are the quantum numbers characterising the average field levels both of neutron and proton systems. Further, by s we denote the quantum numbers of the neutron system states and by ν those of the proton ones.

Basing on the variational principle, in the framework of the method of approximate second quantization we get a secular equation defining the energies ω_λ of the excited states with $\lambda=3$, $\mu=0, 1, 2$ and 3 of even-even strongly deformed nuclei which is of the form

$$1 = 2\kappa_n^{(3)} \sum_{ss'} \frac{(f_\mu(ss') + \bar{f}_\mu(ss')) U_{ss'}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} + 2\kappa_p^{(3)} \sum_{vv'} \frac{(f_\mu(vv') + \bar{f}_\mu(vv')) U_{vv'}^2}{\epsilon(v) + \epsilon(v') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(v) + \epsilon(v')}} + \quad (3)$$

$$+ 4(\kappa_{np}^{(3)})^2 - \kappa_n^{(3)} \kappa_p^{(3)} \sum_{ss'} \frac{(f_\mu(ss') + \bar{f}_\mu(ss')) U_{ss'}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} \sum_{vv'} \frac{(f_\mu(vv') + \bar{f}_\mu(vv')) U_{vv'}^2}{\epsilon(v) + \epsilon(v') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(v) + \epsilon(v')}}.$$

the summation of $ss'(vv')$ being made over the average field single particle levels, $\epsilon(s) = \sqrt{C_n^2 + \{E(s) - \lambda_n\}^2}$, $\epsilon(v) = \sqrt{C_p^2 + \{E(v) - \lambda_p\}^2}$ $U_{ss'} = u_{s'} v_s + v_{s'} u_s$,

the index i in ω_i denotes the first, second and so on roots of the secular equation. Notice that for $\mu = 0$ $\bar{f}(\rho\rho') = 0$.

In case $\kappa_n^{(3)} = \kappa_p^{(3)} = \kappa_{np}^{(3)} \equiv \kappa^{(3)}$, which we shall restrict to in what follows the secular equation takes simpler form, namely

$$\frac{1}{2\kappa} = \sum_{ss'} \frac{(f_\mu(ss') + \bar{f}_\mu(ss')) U_{ss'}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} + \sum_{vv'} \frac{(f_\mu(vv') + \bar{f}_\mu(vv')) U_{vv'}^2}{\epsilon(v) + \epsilon(v') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(v) + \epsilon(v')}} \equiv F(\omega). \quad (4)$$

The wave function of the i -th octupole state is $Q_i^+ \Psi$ where the operator is Q_i

$$Q_i = \frac{1}{2} \{ \sum_{ss'} (\psi_{ss'}^i A(ss') - \phi_{ss'}^i A^+(ss') + \bar{\psi}_{ss'}^i \bar{A}(ss') - \bar{\phi}_{ss'}^i \bar{A}^+(ss')) + \sum_{vv'} (\psi_{vv'}^i A(vv') - \phi_{vv'}^i A^+(vv') + \bar{\psi}_{vv'}^i \bar{A}(vv') - \bar{\phi}_{vv'}^i \bar{A}^+(vv')) \} \quad (5)$$

where

$$Q_i \Psi = 0$$

in this case

$$A(\rho\rho') = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \sigma a_{\rho'\sigma} a_{\rho-\sigma}, \quad \bar{A}(\rho\rho') = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} a_{\rho\sigma} a_{\rho'\sigma}$$

here $a_{\rho\sigma}$ is the quasi-particle absorption operator. The functions $\psi_{\rho\rho'}^i, \phi_{\rho\rho'}^i, \bar{\psi}_{\rho\rho'}^i, \bar{\phi}_{\rho\rho'}^i$ are written in the form

$$\psi_{\rho\rho'}^i = \frac{1}{2} (g_{\rho\rho'}^i + w_{\rho\rho'}^i), \quad \bar{\psi}_{\rho\rho'}^i = \frac{1}{2} (\bar{g}_{\rho\rho'}^i + \bar{w}_{\rho\rho'}^i), \\ \phi_{\rho\rho'}^i = \frac{1}{2} (g_{\rho\rho'}^i - w_{\rho\rho'}^i), \quad \bar{\phi}_{\rho\rho'}^i = \frac{1}{2} (\bar{g}_{\rho\rho'}^i - \bar{w}_{\rho\rho'}^i),$$

where

$$w_{\rho\rho'}^i = \frac{\omega_i}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')} \xi_{\rho\rho'}^i, \quad \bar{w}_{\rho\rho'}^i = \frac{\omega_i}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')} \bar{\xi}_{\rho\rho'}^i \quad (6)$$

$$\xi_{\rho\rho'}^i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Y_n^i + \bar{Y}_n^i + Y_p^i + \bar{Y}_p^i}} \frac{f_{\mu}(\rho\rho') U_{\rho\rho'}^i}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')}} \quad (7)$$

$$\bar{\xi}_{\rho\rho'}^i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Y_n^i + \bar{Y}_n^i + Y_p^i + \bar{Y}_p^i}} \frac{\bar{f}_{\mu}(\rho\rho') U_{\rho\rho'}^i}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')}}$$

in this case

$$Y_n^i + \bar{Y}_n^i = \sum_{ss'} \frac{(f_{\mu}(ss') + \bar{f}_{\mu}(ss')) U_{ss'}^2 (\epsilon(s) + \epsilon(s')) \omega_i}{[\epsilon(s) + \epsilon(s')]^2 - \omega_i^2}$$

After solving secular equations (3) or (4) we find the energies of the octupole states and the corresponding wave functions.

We discuss the particularities of eq. (4). As an example one gives in Fig. 1 the values of $F(\omega)$ as the function of ω for the states of U^{234} with $K\pi = 0-, 1-, 2-, 3-$, (i.e. with $\mu = 0, 1, 2,$ and 3) The points of intersection of the curves $F(\omega)$ with the straight line $1/\kappa^{(3)}$ for each μ are the first and second roots of the corresponding secular equation. Fig. 1 gives the values of the first and second poles for $\mu = 0, 1, 2, 3$. In those nuclei where the octupole-octupole interaction is effective it leads to the values of the first root being significantly smaller than that of the first pole and the curve $F(\omega)$ intersects the line $1/\kappa^{(3)}$ at a small angle. In this case the octupole state possesses the pronounced collective properties what is the case for $\mu=0$. If the state is not collective then the value of the first root ω_1 practically coincides with that of the first pole $\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')$ and the curve $F(\omega)$ intersects the line $1/\kappa^{(3)}$ at an angle close to 90° . A good example may be the case $\mu = 3$ (Fig. 1). The values of the second roots lie between the values of the first and second poles. If the state corresponding to the second root is close to the two-quasi-particle one, then the value of the root is close to that of the second pole.

The frequencies of the octupole oscillations ω_i are found by numerical solution of secular equations (3) with the aid of the electronic computer. The first root ω_1 is sought in the interval

$$0 < \omega_1 < \min_{s, s'; v, v'} ((\epsilon(s) + \epsilon(s')), (\epsilon(v) + \epsilon(v')))$$

halving successively the interval. The second and subsequent roots are sought between the successive poles in the righthand side of (3). The first root may be absent if $\kappa^{(3)} > \kappa_{\max}^{(3)}$ what will happen, e.g., for $\mu = 0$ (Fig. 1) if $i/\kappa^{(3)} < 1,6 \cdot 10^3$. The second and subsequent roots exist for any $\kappa^{(3)}$.

2. The Average Field Levels and the Values of $\kappa^{(3)}$

The calculations of the energies of the octupole states with $K\pi = 0-, 1-, 2-, 3-$ and the reduced probabilities of electromagnetic transitions were made in both regions of strongly deformed nuclei: $150 \leq A < 190$ and $228 \leq A \leq 254$. Use was made of the wave functions and the schemes of the Nilsson potential single-particle levels^{/6/}. All the calculations in the region $150 \leq A < 190$ were performed with the wave functions at the deformation $\delta = 0,3$ and in the region $228 \leq A \leq 254$ at $\delta = 0,2$ and for the same scheme of the single-particle levels in the neutron (proton) system for each nucleus in each region. In order to clear up how strongly the results of calculations depend on the change in the wave functions with increasing deformation δ the energies ω_1 of the states with $K\pi = 0$ were calculated in the region $228 \leq A \leq 254$ with the wave functions at $\delta = 0,3$ but with unchanged values of the energies $E(\rho)$ of the average field one-particle levels. The obtained values of ω differ little from those calculated with the wave functions for $\delta = 0,2$ but with renormalized $\kappa^{(3)}$. To make the calculations most unambiguous the changes in the nuclear deformation were not taken into account, i.e. the same set of $E(\rho)$ was used for all nuclei in each region. Therefore near the boundaries of the regions of nuclei with a large deformation the calculations became somewhat worse, since the equilibrium deformation of nuclei changed, while the behaviour of the average field single-particle levels was unaffected.

As the average field one-particle levels we took the Nilsson scheme levels with the parameters rather close to the data in ref.^{/7/}. The energies of the average field one-particle levels (in units $\hbar\omega_0^0$) the correlation functions and the chemical potentials calculated in^{/8,9/} are given in Tables 1-4. The correctness of the location of the average field levels in the regions $61 < Z \leq 79$, $89 \leq N \leq 115$ and $87 \leq Z \leq 99$, $137 \leq N \leq 155$ is justified by the available experimental data on the single quasi particle levels of odd A nuclei. In addition to these levels account was taken of all levels of those

subshells in which the location of, at least, one single-particle state was proved experimentally. As to the behaviour and the account of the other levels there is a certain arbitrariness related after all to the choice of the parameters of the Nilsson scheme.

The one-particles levels given in Tables 1,2 and 3 are fairly close to the levels used in ^{4/} in calculating the energies of states with $K\pi = 0^-$ while the neutron level scheme given in Table 4 differs by that the states 761⁺ with $N = 153$ and 752⁺ with $N = 157$ are replaced by the states 620⁺ and 622⁺ respectively. We note that in the present calculations we took into account greater number of the average field one-particle levels as compared to the calculations in ^{4/}. Calculating the energies of the quadrupole states ^{10/} use has been made of the schemes of the levels given in Tables 1-4.

The calculated values of ω_i depend on the wave functions and the eigenvalues of the average field potential and on the octupole-octupole interaction constants. The terms in (4) corresponding to the particle and hole states for all considered nuclei with $|E(\rho) - \lambda| \gg C$ and $|E(\rho') - \lambda| \gg C$ lead to the renormalization of $\kappa^{(3)}$. For example, when $\mu = 0$ the term corresponding to states 651⁺ - 761⁺ given in Table 4 leads only to the renormalization of $\kappa^{(3)}$ for all nuclei in the region $228 \leq A \leq 254$. The same terms in (4) which in some nuclei correspond to particle and hole states and in others only to particle (or hole) states lead to a change of ω_i in some nuclei as compared to others. For example, when $\mu = 0$ the term 660⁺ - 530⁺ (see Table 3) for the isotopes of Th corresponds to the matrix element between particle and hole states. This term gives a large contribution to the secular equation. For the isotopes of Pu this term 660⁺ - 530⁺ corresponds to the matrix element between hole states and in (4) it became far less important due to the factor $U_{\nu\nu'}^2$ as well as to increasing $\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu')$. We notice that the average field single-particle levels which were disregarded in the calculations made, will not affect noticeably ω_i but will merely lead to the renormalization of $\kappa^{(3)}$.

The octupole-octupole interaction constant $\kappa^{(3)}$ is chosen to obtain the best agreement of the calculated energies for the states with $K\pi = 0^-$ with the corresponding experimental data. The states with $K\pi = 0^-$ are most strongly collectivized of all the octupole states and therefore their energies are most sensitive to $\kappa^{(3)}$. The constant $\kappa^{(3)}$ in the region $150 \leq A \leq 190$ was assumed to be $\kappa^{(3)} = 0,00101 h\omega_0^0$, in the region $228 \leq A \leq 254$

$\kappa^{(3)} = 0,00057 \hbar \omega_0^0$. $\kappa^{(3)}$ was unaffected inside each region. If by analogy with the quadrupole states we assume that

$$\kappa^{(3)} = \frac{k^{(3)}}{A^{4/3}} \hbar \omega_0^0$$

then $k^{(3)}$ takes the following values $k^{(3)} = 0,8 - 1,0$. The value $k^{(3)} \approx 1$ is about 10-12 times as small as the quadrupole-quadrupole interaction constant $k^{(2)}$ for the identical systems of the average field level $^{10/}$. The value of $\kappa^{(3)}$ assumed by us is about 1,5 times as small as the values of $\kappa^{(3)}$ used in ref. $^{4/}$ due to a considerable increase of the number of terms in (4). The same values of $\kappa^{(3)}$ were taken in calculating the energies of all the octupole states with $K\pi = 0-, 1-, 2-, 3-$.

Notice that we have made calculations for the most general case $\kappa_n^{(3)} \neq \kappa_p^{(3)} \neq \kappa_{np}^{(3)}$. However, the results of these calculations do not lead to a significant improvement of the agreement between theory and experiment as compared with the case $\kappa_n^{(3)} = \kappa_p^{(3)} = \kappa_{np}^{(3)} = \kappa^{(3)}$. The equal octupole-octupole interaction constants were used by us so the number of the parameters applied should be minimal.

The values of the matrix elements $f(ss')$ and $f(vv')$ change between 0.01 and 8 (in dimensionless units used in $^{6/}$) the most important of them for U^{234} are given in Tables 5-8 for all μ . To illustrate the decrease of the collective properties of the octupole states with increasing μ we give the sums of all the squared matrix elements used in our calculations. For the region $150 \leq A < 190$ these sums are $\mu = 0 - 287$, $\mu = 1 - 165$, $\mu = 2 - 173$, $\mu = 3 - 143$. For the region $228 \leq A \leq 254$ the sums of the squared matrix elements are $\mu = 0 - 427$, $\mu = 1 - 230$, $\mu = 2 - 249$, $\mu = 3 - 173$. The increase of these sums in the region $228 \leq A \leq 254$ as compared with $150 \leq A < 190$ is compensated by the decrease $\kappa^{(3)} \approx A^{-5/3}$.

In making calculations the conservation of the number of particles, on an average, was controlled, i.e. the Δn_i quantities were calculated

$$\Delta n_i = \langle Q_i \sum_{\rho\sigma} a_{\rho\sigma}^+ a_{\rho\sigma} Q_i^+ \rangle - \langle \sum_{\rho\sigma} a_{\rho\sigma}^+ a_{\rho\sigma} \rangle \quad (8)$$

i.e. the difference of the number of neutrons (protons) in the excited and ground states. In most cases one has obtained $\Delta n_i \leq 0,2$, however, there are cases when $\Delta n_i \approx 1$. The values $\Delta n_i \approx 1$ occur when the root is close to the

pole and the blocking effect should be taken into account and in case of very small ω_1 too.

3. Energies of the Octupole Excited States

The first and second roots of secular equations (4) for the states with $K\pi = 0-, 1-, 2-, 3-$ were calculated and the energies of the octupole excited states and the corresponding wave functions were found thereby. The calculated energies of the octupole states ω_1 and ω_2 , the values of the first and second poles as well as the available experimental data are given in Figs. 2-9. The experimental values of the energies are denoted by the continuous line, the first and second poles by the dashed lines. The first and second roots of the secular equations are denoted by the dark circles joined by the straight lines.

The first roots of secular equations (4) for the case $\mu = 0$ in both regions of strongly deformed nuclei lie far lower than the energies of the first poles. The discussion of the location of the energies of the states with $K\pi = 0-$ and the comparison between theory and experiment has been made in ref.^[4]. The agreement between theory and experiment is in this case rather good. It should be noted that a fairly important result is the explanation of the lowering of the states with $K\pi = 0-$ below the energies of the beta and gamma vibrational states in some isotopes of *Th*, *U* and *Pu*. Note that the changes made, as compared with^[4], in the neutron scheme of single particle levels and the large increase of the general number of terms in (4) do not lead to any significant changes in the energies of the states with $K\pi = 0-$. This shows that the average field single-particle levels which are disregarded by us will not change all the more the quantity ω_1 and if they will be taken into account this will lead to the renormalization of $\kappa^{(s)}$.

If the octupole state in its structure is close to the two-particle one then the blocking effect is of importance and its influence should be taken into account. In calculating the energies of the states with $K\pi = 1-, 2-, 3-$, secular equations (4) were solved and the blocking effect was not taken into account. If the first root is close to the first pole then the influence of the blocking effect on the given octupole state is equal to the lowering of the energy of the appropriate two-quasi-particle state due to the blocking effect. In this case additional calculations are not needed and use should be made of the results obtained in^[8,9,11]. In Fig. 4-9 the arrows denote the lowering of the octupole state energies due to the change in the values of the secular equation poles due to blocking effect.

The comparison of the calculated energies of the lowest states with the corresponding experimental data shows that if the blocking effect is taken into account then the agreement between calculations and experiment is rather good. It should be noted that there are at present not many experimental data on the states with $K\pi = 1-, 2-, 3-$ and a significant growth of the experimental material is very desirable. The energies of the first octupole states with $K\pi = 1-, 2-$ are lowered by 100-300 KeV as compared to the first poles. The values of ω_1 for the states with $K\pi = 3-$ are practically the same as the energies of the first poles. Therefore in most cases the effect of the octupole-octupole interactions on the energies of states with $K\pi = 1-$ and $2-$ should be taken into account while this effect should be neglected for states with $K\pi = 3-$.

It is necessary to note that the correctness of the results of our calculations is proved not only by the available experimental data on octupole states but also by the experimental evidence for the fact, that up to certain energies in some nuclei there are no octupole states with a given $K\pi$. We consider, e.g., states with $K\pi = 2-$ in the region $150 \leq A \leq 186$. In the isotopes of Dy and W state with $K\pi = 2-$ is the lowest proton two-quasi-particle state whose energy is somewhat lowered by the octupole-octupole interactions. In the nuclei Dy^{160} and W^{182} best investigated experimentally, states with $K\pi = 2-$ are found, there is evidence for the existence of such a state in W^{184} . These data are in close agreement with calculations. The spectra of other isotopes of Dy and W are badly investigated. On the other hand, the available experimental data point out that in Yb^{172} , e.g., there are no levels with $K\pi = 2-$ lower than (1.7 - 1.8) MeV, which agrees also with our calculations.

Figs. 2-9 show that the values of the second roots ω_2 lie between the values of the first and second poles. If the first root of (4) is close to the first pole then the second one is usually close to the second pole. If the first root is lowered by 100 KeV and more with respect to the first pole, then the second one may practically lie at any point between the first and second poles and near the first pole, too.

4. Structure of Octupole Excited States

In considering the behaviour of the functions $F(\omega)$ and the energies of the octupole excited states it has been noted that states whose energies are far lower than the first poles possess the pronounced collective properties,

whose states whose energy coincide with the poles are, with sufficiently good accuracy, two-quasi-particle states. Now we look at the study of the structure of octupole states the other way round. Let us consider the contribution of each separate term in the secular equation. These terms of eq. (4) are denoted by

$$X_i(\rho\rho') = 2\kappa^{(3)} \frac{(f(\rho\rho')^2 + \bar{f}(\rho\rho')^2) U^2}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')}} \quad (9)$$

Further we shall treat the problem as to with what weights separate two-particle states enter the given collective state. To this end we shall use the normalization condition of the collective state $\varrho_i^+ \Psi$ which is written in the form:

$$\frac{1}{Y_n^i + \bar{Y}_n^i + Y_p^i + \bar{Y}_p^i} \left\{ \sum_{ss'} y_i(ss') + \sum_{\nu\nu'} y_i(\nu\nu') \right\} = 1 \quad (10)$$

$$y_i(ss') = \frac{(f(ss')^2 + \bar{f}(ss')^2) U^2 \omega_i (\epsilon(s) + \epsilon(s'))}{[(\epsilon(s) + \epsilon(s'))^2 - \omega_i^2]^2}$$

As an example we shall consider the structure of the octupole states of U^{234} . In Tables 5-8 are summarized data relative to the first and second roots of the secular equation with $K\pi = 0-, 1-, 2-, 3-$. One gives the most important two-quasi-particle states^{x/} in the neutron and proton systems, the values of the matrix elements $f(\rho\rho')$ (in dimensionless units^{6/}), the values of the first and second poles $\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')$ (in MeV). Further one gives the contribution of certain terms of secular equation (4) for the first $X_1(\rho\rho')$ and the second $X_2(\rho\rho')$ roots. For the sake of convenience these terms are multiplied by 100. And, finally, one gives the contribution (in percent) of certain two-quasi-particle states to the wave function $y_1(\rho\rho')$ of the first octupole state and $y_2(\rho\rho')$ of the second state with a given $K\pi$. From these tables it is seen that in the secular equations the matrix elements corresponding to the states particle-hole with large $\epsilon(\rho) + \epsilon(\rho')$ are very important, so e.g., the term corresponding to states 651+ - 761+ in Table 5, while in the wave functions such states are less important. The two-quasi-particle states corresponding to nearest poles give much larger contribution

^{x/} $Nn_2 \Lambda \uparrow$ denotes the state $K\pi [Nn_2 \Lambda]$ of the Nilsson potential with $K = \Sigma + \Lambda$ and $Nn_2 \Lambda \downarrow$ is the state $K\pi [Nn_2 \Lambda]$ with $K = \Lambda - \Sigma$.

to the wave functions as compared with the secular equations.

From Table 5 it is seen that the first excited state with $K\pi = 0^-$ in U^{234} is a collective one since three two quasi-particle states give to the wave function a contribution more than 10% each two states - more than 5% and four states - more than 3% each and so on. The energy of this state is by 0.8 MeV lower than that of the first pole. The properties of the first state with $K\pi = 0^-$ in U^{234} is not an exception. The overwhelming majority of the first states with $K\pi = 0^-$ are collective, the exception appears to be the isotopes of Fm . Especially clearly the collective properties are displayed about the isotopes of Th , U , Pu , what is seen from Table 9. From Figs. 2 and 3 it is seen that the energies of most first states with $K\pi = 0^-$ are lowered by more than 0.5 MeV as compared to the first poles. In the wave functions of the second octupole states with given $K\pi$ the summary contribution from the first and second poles amounts usually to more than 90%, and in some case it reaches (95-98%). This particularity of the wave functions structure corresponding to the values of the second roots is well manifested by the example for the state with $K\pi = 0^-$ in Table 5 and with $K\pi = 2^-$ in Table 7.

In most cases the lowest states with $K\pi = 1^-$ are rather close in their properties to the two-quasi-particle states. For example, in U^{234} the contribution of the neutron state $633^+ - 743^+$, as is seen from Table 6, is 83.8%, the contribution of the neutron state $622^+ - 743^+$ in Pu^{240} is 87% and so on. However, in Th^{230} the lowest state with $K\pi = 1^-$ is collective what is seen from Table 10. The energy of this state is lowered by 0.23 MeV as compared to the first pole. Table 11 gives the contributions of various two-quasi-particle states to the lowest states of Er^{166} with $K\pi = 0^-$ and $K\pi = 1^-$. While the state with $K\pi = 0^-$ is collective, the state with $K\pi = 1^-$ is fairly close to the two-quasi-particle one, since the contribution of the neutron state $633^+ - 523^+$ is 97.6%. This roughly proves the correctness of the interpretation of state with $K\pi = 1^-$ in Er^{166} given in /11/.

We notice that in some cases the second states with a given $K\pi$ possess the collective properties while the first states have the structure close to that of the two-quasi-particle states. An example, may be the states of U^{234} with $K\pi = 1^-$ what it seen from Table 6.

The lowest states with $K\pi = 2^-$, on the average, appear to be more collectivized as compared to the first states with $K\pi = 1^-$. However, both

states with $K\pi = 1-$ and $2-$ are considerably less collectivized as compared with the states with $K\pi = 0-$ what is clearly seen from Fig. 1.

From Table 7 it is seen that the first state of U^{234} , with $K\pi = 2-$ contains the contribution from the two-quasi-particle states equal to 77.7%, 15%, 1.4%, 1.1% and so on, i.e. the collective properties of this state are clearly seen. It should be noted that the region of the isotopes of Th , and U is the most favourable for the existence of low-lying collective octupole states. This is related to states with $K\pi = 0-$ as well and to a somewhat smaller degree to states with $K\pi = 1-, 2-$. Table 12 gives the structure of the most low-lying states with $K\pi = 2-$ in Dy^{160} , Yb^{174} , W^{182} . In these nuclei the contribution from the most important two-quasi-particle states is 87.6%, 90.8% and 94.8% respectively. The interpretation of states with $K\pi = 2-$ in Dy^{160} , Yb^{174} , and W^{182} given in /11/ as two-quasi-particle led to a certain overestimation of their energies in Dy^{160} and Yb^{174} whereas in W^{182} the effect of the octupole-octupole interaction on the energy of state with $K\pi = 2-$ is rather small.

All the states with $K\pi = 3-$ in their structure are close to the two-quasi-particle ones. This is seen from Tables 8, 13 and Figs. 8 and 9. We notice that the energies of the first and second states with $K\pi = 3-$ are the same as those corresponding to the first and second poles. The fact that the octupole-octupole interactions for states with $K\pi = 3-$ are of little importance is a consequence of the increase of the number of terms in (4) as well as, in the main, the increase of the number of terms with large matrix elements $f(\rho\rho')$ and $\bar{f}(\rho\rho')$ what was mentioned earlier. The nearness of the structure of states with $K\pi = 3-$ to the two-quasi-particle one is demonstrated in Fig. 1. From Fig. 1 it is seen that a comparatively small increase of $\kappa^{(3)}$ leads to significant increase of the collectivization of states with $K\pi = 1-, 2-$ while for states with $K\pi = 3-$ the increase of must be larger. We notice that in case $K\pi = 3-$ the interval of values of $\kappa^{(3)}$ where these states are collective and the first roots of (4) exist is extremely small. We note that the apparent collectivization of the second state with $K\pi = 3-$ in U^{234} , as is seen from Table 4, is due to the energies of the second and third poles being practically equal to each other. From the investigations made it follows that the interpretation of both states with $K\pi = 3-$ in Er^{168} given in /11/ is true since the admixtures of other states, as is seen from Table 13, do not exceed 0.5%.

Thus, the lowest states with $K\pi = 0-$ in most nuclei possess the clear-cut collective properties. The lowest states with $K\pi = 1-, 2-$ in some nuclei

are collective, however, in most cases these states are rather close in their properties to the two-quasi-particle states. So, for them the admixture of the remaining states to the two-quasi-particle one corresponding to the first pole is (2-20)%. The states with $K\pi = 3^-$ are practically two-quasi-particle ones since the admixture of other states do not usually exceed 1%.

As was already mentioned, the structure of the octupole states with a given $K\pi$ but $K\pi = 3^-$, is different, i.e. some states are collective and others are two-quasi-particle. The average nuclear field defines if the structure of the states will be collective or two-quasi-particle one.

From the investigation made it follows that if the contribution of single two-quasi-particle state to the octupole state exceeds 95% then the energy of such a state should be calculated on the basis of the superfluid nuclear model taking into account the blocking effect, but disregarding the octupole-octupole interaction. In this case the blocking effect is more important as compared with the octupole-octupole interaction.

We have calculated the reduced probabilities of electromagnetic transitions, which will be analysed in other paper. However, it should be noted that the obtained values of the reduced probabilities do not contradict the available experimental data. So, the ratio $B(E3)/B(E3)_{c.p.}$ with $e_{eff} = 0,5$ is 2 - 4 for the collective states and is significantly smaller than the unity for states close to the two-quasi-particle ones.

In conclusion we express our gratitude to N.N. Bogolubov for interesting discussion and to K.M. Zhelesnova, L.V. Korneichuk and G. Jungklaussen for help in making numerical calculations.

References

1. E.K. Hyde. Preprint UCRL, 9148 and 9458 (1961);
G.W. Farwell. Proc. Rutherford Jubilee Int. Conf., 321 (1962);
M. Sakai. Phys.Lett., 3, 338 (1963).
2. A.M. Lane, E.D. Pendlebury. Nucl. Phys., 15, 39 (1960);
P.O. Lipas, J.P. Davidson. Nucl.Phys., 26, 80 (1961);
P.O. Lipas. Nucl. Phys., 40, 629 (1963);
Д.П. Лепер. Изв. АН СССР сер. Физ. (in print).
J.P. Davidson. Nucl.Phys., 33, 664 (1962).
3. T. Tamura, T. Udagawa. Nucl. Phys., 35, 382 (1962);
А.Ф. Зарецкий, М.Г. Урин. ЖЭТФ, 42, 304 (1962).
4. V.G. Soloviev, P. Vogel. Phys.Lett., 6, 126 (1963);
В.Г. Соловьев, П. Фогель, А.А. Корнейчук. ДАН СССР, 154, 72 (1964).

Э. В. Л. Соловьев. Влияние парных корреляций сверхпроводящего типа на свойства
атомных ядер. Госатомиздат, 1963.

6. S. Nilsson. Mat.Fys.Medd. Dan.Vid.Selsk., 29, No. 16 (1955);
B.Mottelson, S. Nilsson, Mat.Fys.Skr.Dan.Vid.Selsk., 1, No. 6 (1959).
7. S. Nilsson, O. Prior. Mat. Fys. Medd. Vid. Selsk., 32, No. 16 (1960).
8. Н.И. Пятов, В.Г. Соловьев. Изв. АН СССР, сер. физ. (in print).
9. V.G.Soloviev, T.Siklos. Nucl.Phys. (in print).
10. Лю Юань, В.Г. Соловьев, А.А. Корнейчук. ЖЭТФ (in print).
11. C.J. Gallagher, V.G. Soloviev. Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 2, No. 2
(1962).

Received by Publishing Department
on February, 12, 1964.

TABLE 1

Single-particle levels of the average field, proton system

Z	I τ [$N_0 \Lambda$]	$E(\omega)$	C_p	λ_p
	5/2 + 422	0,674		
	1/2 + 431	0,816		
	1/2 - 550	0,978		
	7/2 + 413	0,987		
	1/2 + 420	1,06		
	9/2 + 404	1,08		
	3/2 - 541	1,10		
59	3/2 + 422	1,20	0,124	1,252
61	5/2 - 532	1,31	0,127	1,325
63	5/2 + 413	1,36	0,129	1,391
65	3/2 + 411	1,42	0,127	1,458
67	7/2 - 523	1,48	0,123	1,528
69	1/2 + 411	1,56	0,121	1,601
71	9/2 - 514	1,66	0,123	1,671
73	7/2 + 404	1,69	0,121	1,737
75	5/2 + 402	1,76	0,118	1,808
	3/2 + 402	1,86		
	1/2 + 400	1,90		
	1/2 - 541	1,97		
	11/2 - 505	2,04		
	3/2 - 532	2,18		
	5/2 - 523	2,46		
	7/2 - 514	2,70		

TABLE 2

Single-particle levels of the average field, neutron system

N	I π [$N_{\pi}A$]	E (s)	C_n	λ_n
	I/2 - 54I	0,405		
	7/2 + 404	0,580		
	I/2 + 400	0,597		
	3/2 + 402	0,655		
	I/2 - 530	0,825		
	II/2 - 505	0,850		
	3/2 - 532	0,910		
89	I/2 + 660	0,950	0,137	0,968
91	3/2 + 65I	1,00	0,136	1,018
93	3/2 - 52I	1,04	0,131	1,068
95	5/2 + 642	1,08	0,120	1,123
97	5/2 - 523	1,11	0,104	1,195
99	7/2 + 633	1,26	0,106	1,273
101	I/2 - 52I	1,30	0,104	1,341
103	5/2 - 512	1,36	0,99	1,419
105	7/2 - 514	1,48	0,111	1,497
107	9/2 + 624	1,55	0,124	1,559
109	I/2 - 510	1,62	0,135	1,613
III	3/2 - 512	1,66	0,142	1,660
II3	7/2 - 503	1,71	0,146	1,703
	9/2 - 505	1,74		
	3/2 - 50I	1,75		
	I/2 + 65I	1,78		
	I/2 + 640	1,79		
	I/2 - 770	1,83		
	II/2 + 615	1,97		
	5/2 - 503	2,15		

TABLE 3

Single-particle levels of the average field,
 proton system

Z	I $\pi [N_p, \Lambda]$	E (v)	C _v	λ_p
	7/2 - 523	0,230		
	9/2 - 514	0,475		
	3/2 + 402	0,490		
	1/2 - 541	0,500		
	1/2 + 660	0,550		
	11/2 - 505	0,600		
	1/2 + 400	0,620		
	3/2 - 532	0,650		
89	3/2 + 651	0,680	0,141	0,753
91	1/2 - 530	0,750	0,130	0,803
93	5/2 + 642	0,830	0,120	0,859
95	5/2 - 523	0,855	0,110	0,921
97	3/2 - 521	0,985	0,109	0,987
99	7/2 + 633	0,990	0,104	1,045
	7/2 - 514	1,07		
	1/2 - 521	1,16		
	9/2 + 624	1,17		
	5/2 - 512	1,22		
	1/2 - 510	1,33		
	9/2 - 505	1,36		
	11/2 + 615	1,48		
	3/2 - 512	1,50		
	7/2 - 503	1,54		
	1/2 + 651	1,59		
	13/2 + 606	1,61		

TABLE 4

Single-particle levels of the average field,
 neutron system

N	$I \pi [Nn_2A]$	$E(s)$	C_n	λ_n
	9/2 + 624	0,270		
	1/2 + 651	0,410		
	3/2 - 501	0,435		
	5/2 - 503	0,450		
	11/2 + 615	0,475		
	1/2 - 770	0,520		
	1/2 + 640	0,550		
	1/2 - 501	0,560		
	3/2 + 642	0,590		
	13/2 + 606	0,625		
	3/2 - 761	0,660		
I37	3/2 + 631	0,715	0,119	0,734
I39	5/2 - 752	0,725	0,112	0,778
I41	5/2 + 633	0,780	0,104	0,826
I43	7/2 - 743	0,850	0,099	0,880
I45	1/2 + 631	0,900	0,097	0,936
I47	5/2 + 622	0,970	0,099	0,994
I49	7/2 + 624	1,03	0,107	1,048
I51	9/2 - 734	1,10	0,117	1,094
I53	1/2 + 620	1,17	0,126	1,133
	7/2 + 613	1,19		
	3/2 + 622	1,20		
	11/2 - 725	1,22		
	9/2 + 615	1,23		
	1/2 - 761	1,33		
	1/2 - 750	1,35		
	9/2 + 604	1,41		
	3/2 - 752	1,47		

TABLE 5

Structure of the states U^{234} with $K_{\pi} = 0^{-}$
 $\omega_1 = 0,9 \text{ MeV}$, $\omega_2 = 1,8 \text{ MeV}$

Neutron states	$f(\eta\eta')$	$\varepsilon(\eta) + \varepsilon(\eta')$	$\chi_1(\eta\eta')$	$\gamma_1(\eta\eta')$	$\chi_2(\eta\eta')$	$\gamma_2(\eta\eta')$
65I↓ - 76I↓	7,2	6,4	12,8	3,7	13,6	0,08
642↓ - 76I↑	3,2	3,0	1,2	1,6	1,7	0,06
642↓ - 752↓	4,0	6,1	4,0	1,2	4,2	0,03
63I↑ - 76I↑	-2,5	2,3	1,7	4,2	3,6	0,3
633↓ - 752↑	2,3	1,7	4,5	22,9	-48,2	49,4
622↑ - 752↑	-2,1	2,2	3,7	10,9	9,9	1,4
624↓ - 743↑	1,6	2,3	1,3	3,4	2,9	0,3
615↑ - 725↑	-4,1	5,2	5,1	2,2	5,7	0,05
606↑ - 716↑	-4,6	5,7	5,9	2,2	6,4	0,05
640↑ - 750↑	-5,7	5,6	9,1	3,5	9,9	0,08
<hr/>						
Proton states						
660↑ - 530↑	-4,1	2,9	5,5	8,6	8,2	0,4
400↑ - 630↑	-1,5	2,5	1,0	2,3	1,9	0,1
400↑ - 510↑	3,1	5,2	2,9	1,3	3,2	0,03
65I↑ - 532↓	-1,5	2,6	0,7	1,4	1,2	0,08
65I↑ - 52I↑	-3,1	2,7	6,0	10,6	9,6	0,5
642↑ - 523↓	-1,3	1,8	1,6	6,9	29,7	46,7
624↑ - 514↑	-3,0	5,0	2,9	1,4	3,3	0,03

TABLE 6

Structure of the states of U^{234} with $K_{\pi} = 1^-$
 $\omega_1 = 1.4 \text{ MeV}$, $\omega_2 = 1.7 \text{ MeV}$

Neutron states	$f(qq')$	$\epsilon(q) + \epsilon(q')$	$X_1(qq')$	$\gamma_1(qq')$	$X_2(qq')$	$\gamma_2(qq')$
63I \downarrow - 76I \uparrow	0,9	2,2	0,8	0,3	1,4	1,1
642 \downarrow - 752 \uparrow	-2,2	2,7	1,2	0,2	1,5	0,5
63I \uparrow - 752 \uparrow	2,6	2,0	4,9	2,4	10,5	14,9
633 \downarrow - 743 \uparrow	-1,8	1,5	24,0	83,8	-8,7	14,9
622 \uparrow - 743 \uparrow	2,5	1,9	7,6	4,5	20,4	43,4
615 \uparrow - 734 \uparrow	-2,7	4,4	2,8	0,2	3,0	0,2
633 \downarrow - 76I \uparrow	1,2	2,1	1,1	0,5	2,0	2,2

Proton states	$f(qq')$	$\epsilon(q) + \epsilon(q')$	$X_1(qq')$	$\gamma_1(qq')$	$X_2(qq')$	$\gamma_2(qq')$
400 \uparrow - 52I \uparrow	4,7	3,0	2,2	0,3	2,6	0,6
402 \downarrow - 523 \downarrow	-1,6	3,2	1,2	0,1	1,4	0,3
633 \uparrow - 523 \downarrow	0,8	2,5	0,3	0,08	0,4	0,2
642 \uparrow - 52I \uparrow	3,0	2,4	5,9	1,6	8,2	4,2
65I \uparrow - 530 \uparrow	3,1	2,2	8,2	3,1	13,8	12,0
660 \uparrow + 530 \uparrow	-2,3	2,8	1,9	0,3	2,3	0,01
400 \uparrow + 52I \downarrow	1,8	4,1	1,3	0,09	1,4	0,1

TABLE 7

Structure of the states of U^{234} with $K\pi = 2^-$

$$\omega_1 = 1,55 \text{ MeV} \quad \omega_2 = 1,80 \text{ MeV}$$

Neutron states	$f(\eta\eta')$	$\varepsilon(\eta\eta') + \varepsilon(\eta\eta')$	$\chi_1(\eta\eta')$	$\gamma_1(\eta\eta')$	$\chi_2(\eta\eta')$	$\gamma_2(\eta\eta')$
63I \downarrow - 752 \uparrow	-0,5	1,8	0,7	0,9	8,5	6,2
642 \downarrow - 743 \uparrow	1,9	2,4	3,0	1,1	3,9	0,08
63I \uparrow - 743 \uparrow	-3,0	1,75	37,1	77,7	-87,1	18,2
615 \downarrow - 503 \downarrow	-2,8	5,4	2,5	0,1	2,6	0,005
624 \uparrow - 716 \uparrow	3,4	8,0	2,3	0,05	2,4	0,002
613 \uparrow - 501 \uparrow	-3,3	5,2	3,6	0,2	3,7	0,008
611 \uparrow + 500 \uparrow	-3,5	6,2	3,1	0,1	3,2	0,005
<hr/>						
Proton states						
<hr/>						
400 \uparrow - 512 \uparrow	2,8	4,4	3,0	0,2	3,2	0,01
402 \downarrow - 514 \downarrow	2,5	4,3	2,5	0,2	2,7	0,01
633 \uparrow - 521 \uparrow	-3,2	3,0	2,4	0,5	2,8	0,03
402 \uparrow - 510 \uparrow	2,4	6,3	1,5	0,05	1,5	0,002
642 \uparrow - 530 \uparrow	2,0	1,8	11,3	15,0	122,5	75,2
400 \uparrow + 512 \downarrow	-5,6	6,2	1,9	0,07	2,0	0,003
651 \uparrow + 530 \uparrow	1,5	2,1	2,3	1,4	3,9	0,2

TABLE 8

Structure of the states of U^{234} with $K\pi = 3^-$
 $\omega_1 = 1,6 \text{ MeV}$, $\omega_2 = 1,8 \text{ MeV}$

Neutron states	$f(\epsilon\epsilon')$	$\epsilon(\epsilon') + \epsilon(\epsilon')$	$\chi_1(\epsilon\epsilon')$	$\gamma_1(\epsilon\epsilon')$	$\chi_2(\epsilon\epsilon')$	$\gamma_2(\epsilon\epsilon')$
640↑- 753↑	1,55	2,7	3,8	0,01	2,0	0,02
631↑- 743↑	0,1	1,6	19,2	99,8	-0,02	0,001
642↓- 734↑	-1,3	3,7	2,1	0,002	1,0	0,004
631↑- 734↑	2,5	3,0	9,8	0,02	4,9	0,04
622↑- 725↑	3,5	4,0	2,4	0,002	1,1	0,004
604↑- 501↑	5,4	6,7	16,7	0,005	7,4	0,008
631↑+ 752↑	-0,4	1,8	0,8	0,01	15,4	34,6

Proton states	$f(\epsilon\epsilon')$	$\epsilon(\epsilon') + \epsilon(\epsilon')$	$\chi_1(\epsilon\epsilon')$	$\gamma_1(\epsilon\epsilon')$	$\chi_2(\epsilon\epsilon')$	$\gamma_2(\epsilon\epsilon')$
400↑- 503↑	4,2	6,5	9,7	0,03	4,3	0,005
402↓- 505↓	3,8	6,1	9,2	0,003	4,1	0,005
633↑- 530↑	1,8	2,5	7,4	0,03	4,2	0,07
400↑+ 523↓	0,5	2,4	0,5	0,002	0,3	0,005
642↑+ 530↓	0,8	1,8	4,4	0,06	48,9	65,2

TABLE 9

Contribution of two-quasi-particle states to the
 collective states ω_1
 with $K\pi = 0^-$ (in percent)

Neutron system	Th ²³⁰	U ²³²	Pu ²⁴⁰
65I \downarrow - 76I \uparrow	3,4	3,4	4,0
642 \downarrow - 76I \uparrow	4,0	4,1	0,2
642 \downarrow - 752 \downarrow	1,1	1,1	1,4
63I \uparrow - 76I \uparrow	9,7	10,7	0,4
633 \downarrow - 752 \uparrow	27,4	30,3	1,4
622 \uparrow - 752 \uparrow	6,0	6,1	9,3
615 \uparrow - 725 \uparrow	2,0	2,0	2,4
606 \uparrow - 716 \uparrow	1,9	1,8	2,4
624 \downarrow - 743 \uparrow	1,0	1,0	17,6
640 \uparrow - 750 \uparrow	3,1	3,0	3,8
<hr/>			
Proton system			
660 \uparrow - 530 \uparrow	13,6	8,1	3,3
400 \uparrow - 630 \uparrow	3,3	1,8	0,8
400 \uparrow - 510 \uparrow	1,0	1,2	1,5
65I \uparrow - 532 \downarrow	2,6	1,2	0,5
65I \uparrow - 52I \uparrow	6,6	8,8	13,3
642 \uparrow - 523 \downarrow	1,8	4,9	16,2
624 \uparrow - 514 \uparrow	1,2	1,3	1,5

TABLE 10

Contribution of two-quasi-particle states to the
 collective states ω_1 with $K_{\pi} = 1^-$ (in percent)

Neutron states	Th ²³⁰	Pu ²⁴⁰
63I↓ - 76I↑	0,6	0,06
642↓ - 752↑	1,8	0,02
63I↑ - 752↑	39,0	0,1
633↓ - 743↑	30,4	0,8
622↑ - 743↑	1,7	87,0
615↑ - 734↑	0,3	0,2
633↓ - 76I↑	3,8	0,02
<hr/>		
Proton states		
400↑ - 52I↑	0,6	0,4
402↓ - 523↓	0,4	0,1
633↑ - 523↓	5,10 ⁻²	0,4
642↑ - 52I↑	1,0	6,9
65I↑ - 530↑	13,6	0,9
660↑ - 530↑	1,4	0,1
400↑ - 52I↓	0,2	0,1

TABLE 11

Contribution of two-quasi-particle states to the
 collective states of $E_{r^{166}}$ with $K_{\pi} = 0^{-}$ and
 with $K_{\pi} = 1^{-}$ (in percent).

Neutron system	$K_{\pi} = 0^{-}$	Neutron system	$K_{\pi} = 1^{-}$
400 \uparrow - 510 \uparrow	1,4	640 \uparrow - 521 \uparrow	0,03
660 \uparrow - 770 \uparrow	13,7	651 \uparrow - 522 \uparrow	0,05
651 \uparrow - 541 \downarrow	2,7	624 \uparrow - 505 \uparrow	0,02
640 \uparrow - 530 \uparrow	1,4	633 \uparrow - 523 \downarrow	97,6
402 \uparrow - 512 \downarrow	1,5	633 \uparrow - 512 \uparrow	0,9
651 \uparrow - 521 \uparrow	4,0	642 \uparrow - 521 \uparrow	0,6
642 \uparrow - 523 \downarrow	34,5	651 \uparrow - 521 \downarrow	0,04
642 \uparrow - 512 \uparrow	15,9	400 \uparrow + 521 \downarrow	0,02
404 \downarrow - 514 \downarrow	1,9	660 \uparrow + 521 \downarrow	0,03
615 \uparrow - 505 \uparrow	1,5	640 \uparrow + 541 \downarrow	0,01

Proton system		Proton system	
431 \downarrow - 541 \downarrow	1,9	411 \uparrow - 532 \uparrow	0,1
411 \downarrow - 541 \downarrow	1,4	412 \uparrow - 523 \uparrow	0,1
411 \uparrow - 541 \uparrow	0,5	402 \uparrow - 523 \uparrow	0,1
402 \uparrow - 532 \uparrow	0,8	404 \uparrow - 505 \uparrow	0,01
404 \downarrow - 523 \uparrow	2,7	413 \downarrow - 532 \downarrow	0,02
404 \uparrow - 514 \uparrow	6,2	402 \uparrow - 550 \uparrow	0,02

TABLE 12

Contribution of two-quasi-particle
 states to the collective states ω_1
 with $K\pi = 2^-$ (in percent)

Neutron system	D_y^{160}	Yb^{174}	W^{182}
400 \uparrow - 5I2 \uparrow	0,3	0,04	$4 \cdot 10^{-3}$
402 \downarrow - 5I4 \downarrow	0,2	0,1	0,01
624 \uparrow - 5I2 \uparrow	0,04	90,8	4,3
633 \uparrow - 52I \uparrow	6,3	0,2	0,01
642 \uparrow - 530 \uparrow	2,5	0,06	10^{-3}
660 \uparrow + 52I \uparrow	0,2	$2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$
<hr/>			
Proton system			
420 \uparrow - 532 \uparrow	0,1	0,01	$2 \cdot 10^{-3}$
410 \uparrow - 523 \downarrow	0,02	0,08	0,07
422 \downarrow - 523 \uparrow	0,1	$8 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$
411 \uparrow - 523 \uparrow	87,6	1,9	0,05
413 \downarrow - 5I4 \uparrow	0,1	0,2	$8 \cdot 10^{-3}$
402 \uparrow - 5I4 \uparrow	0,1	5,3	94,8

TABLE 13

Contribution of two-quasi-particle states to the first
 and second states of Er_{168} with $k_{\pi} = 3-$
 (in percent)

Neutron system	First state	Second state
400 \uparrow - 503 \uparrow	$3 \cdot 10^{-3}$	$4,6 \cdot 10^{-3}$
402 \downarrow - 505 \downarrow	$3 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$
6I5 \uparrow - 5I2 \uparrow	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-3}$
624 \uparrow - 52I \uparrow	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$
633 \uparrow - 52I \downarrow	99,82	$2,0 \cdot 10^{-2}$
642 \uparrow + 52I \downarrow	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$8,6 \cdot 10^{-3}$
402 \uparrow + 50I \downarrow	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$
<hr/>		
Proton system		
420 \uparrow - 523 \uparrow	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
4II \downarrow - 523 \uparrow	$1,1 \cdot 10^{-3}$	99,53
4II \uparrow - 5I4 \uparrow	0,13 ³	0,38
402 \uparrow - 505 \uparrow	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$

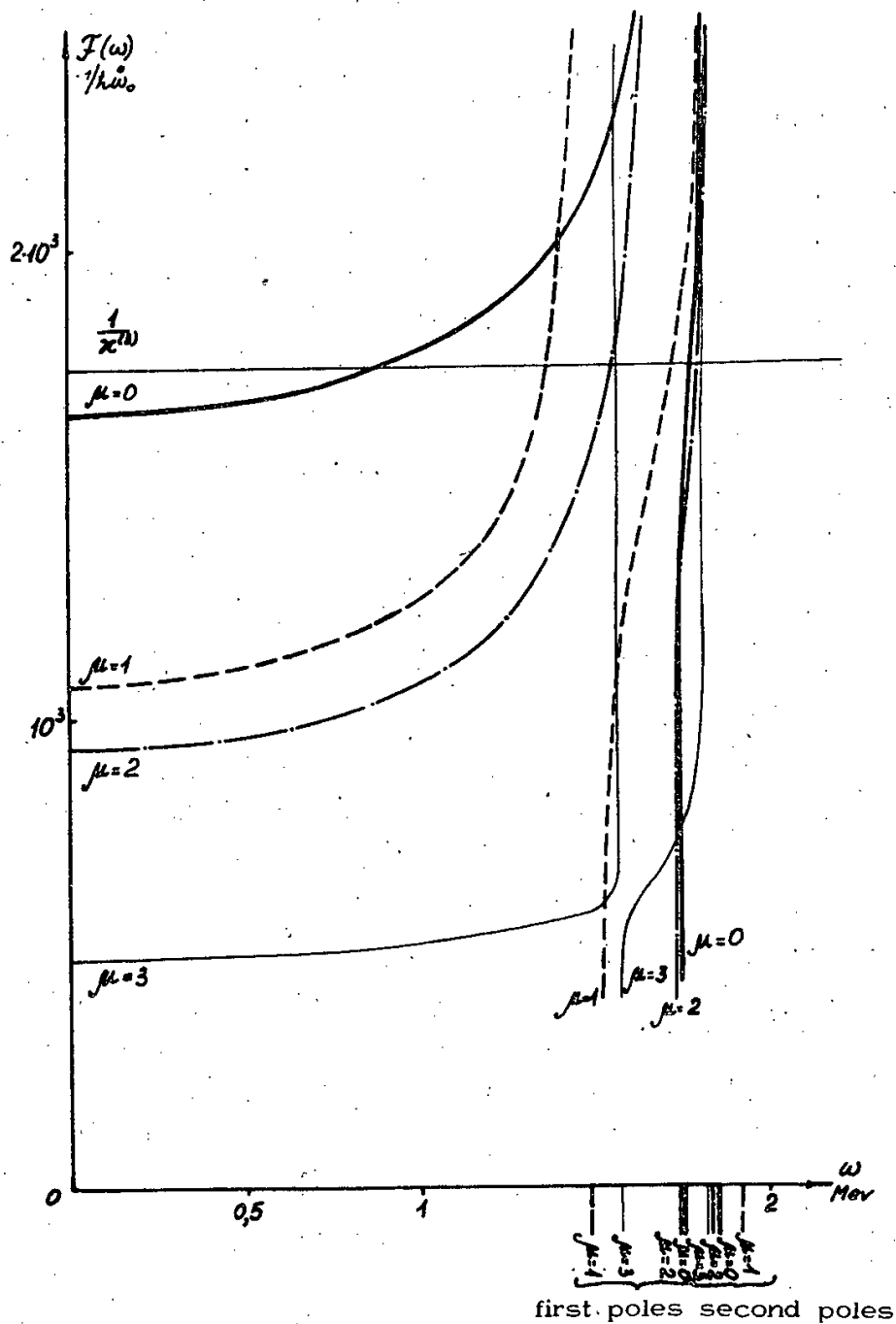


Fig. 1. The behaviour of functions $F(\omega)$ of octupole states of U^{234} with $\mu = 0, 1, 2, 3$.

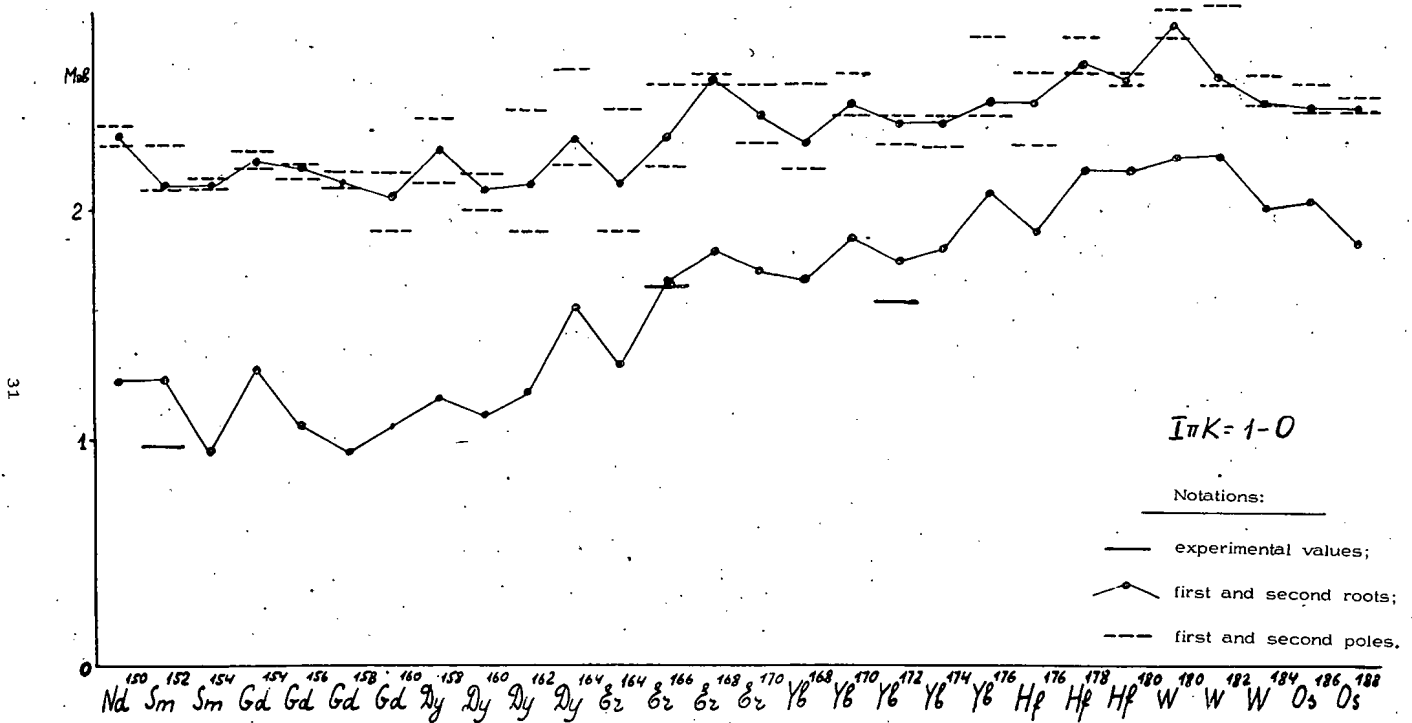


Fig. 2. Energies of states with $K\pi=0-$

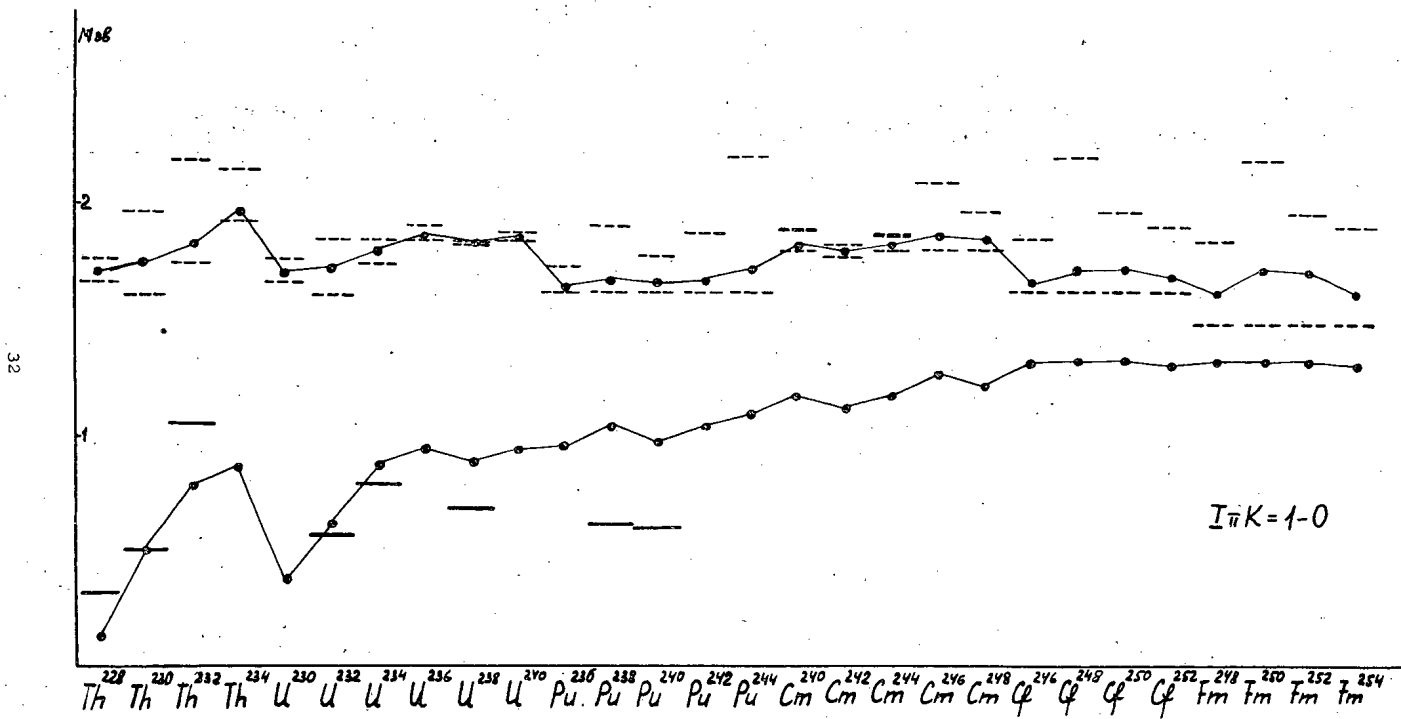


Fig. 3. Energies of states with $K\pi=0-$. (For notations see Fig. 2).

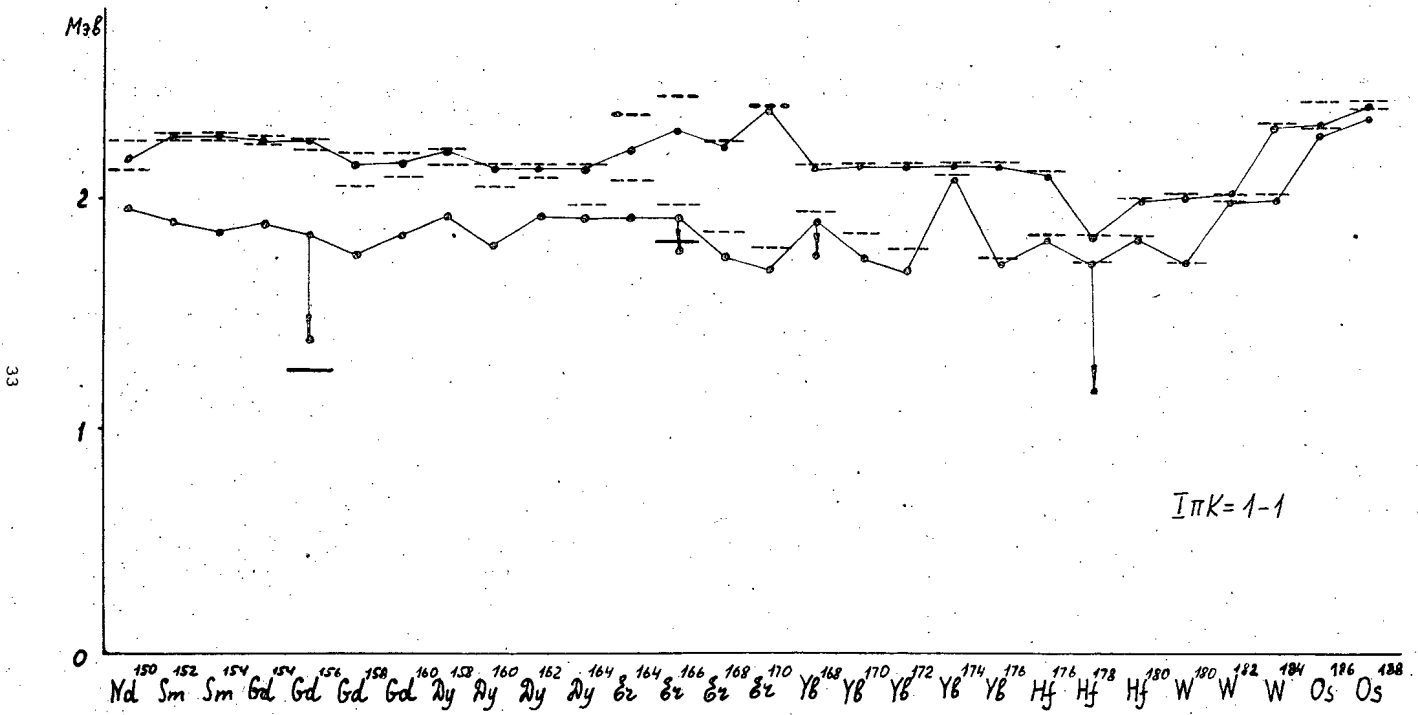


Fig. 4. Energies of states with $K\pi=1-$. (For notations see Fig. 2).

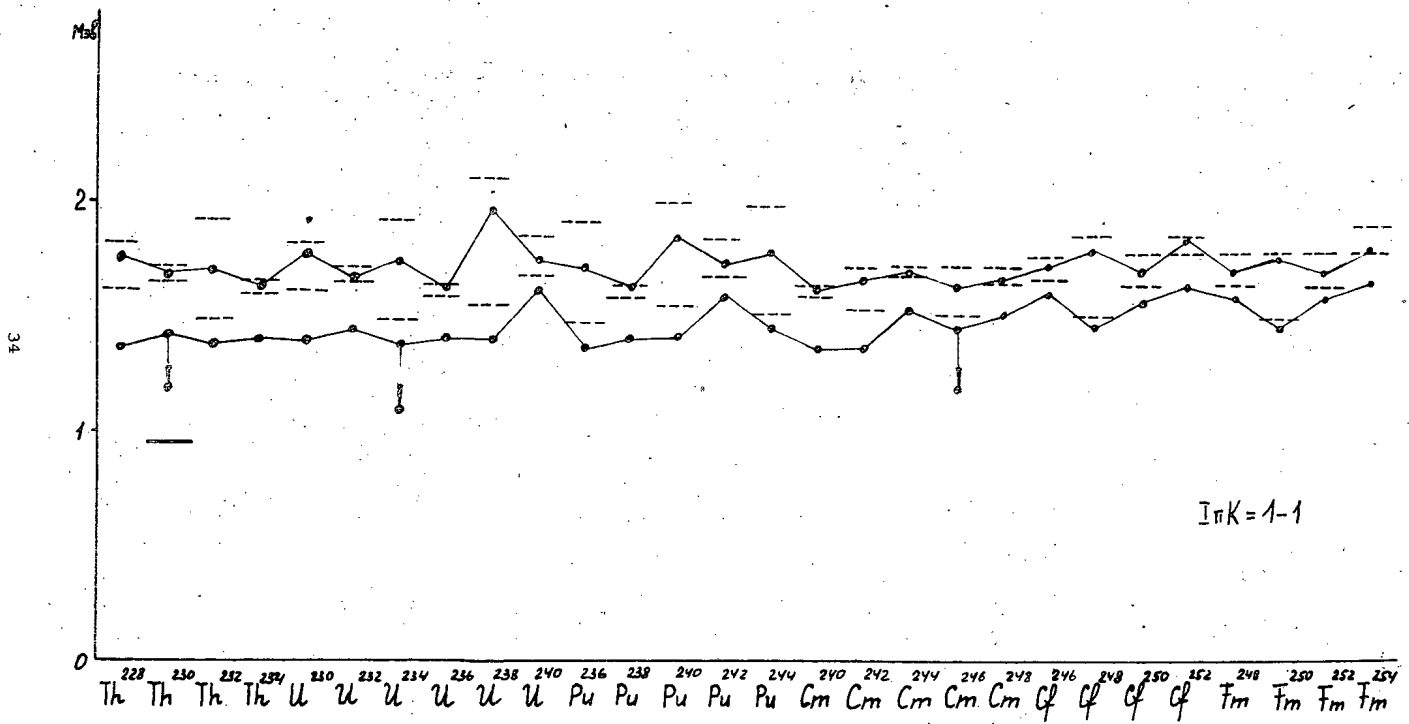


Fig. 5. Energies of states with $K\pi = 1-$. (For notations see Fig. 2).

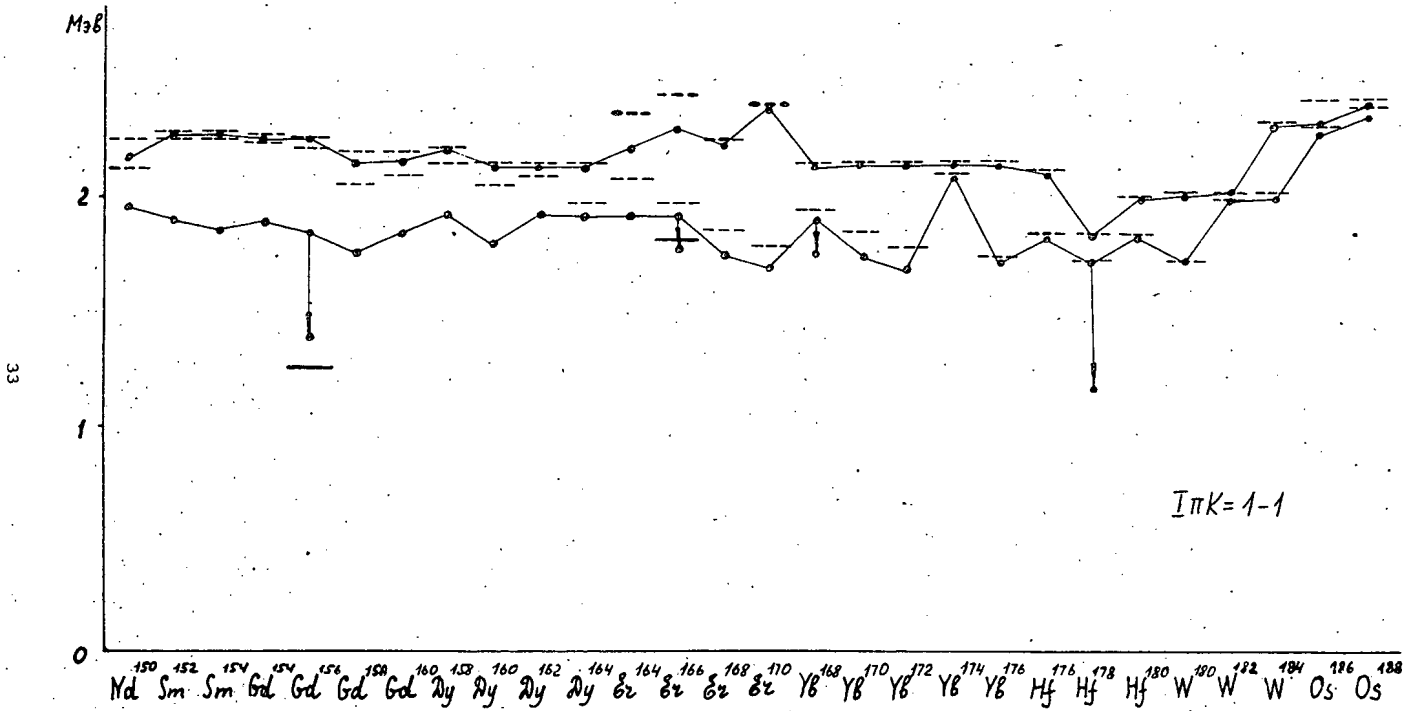


Fig. 4. Energies of states with $K\pi=1-$. (For notations see Fig. 2).

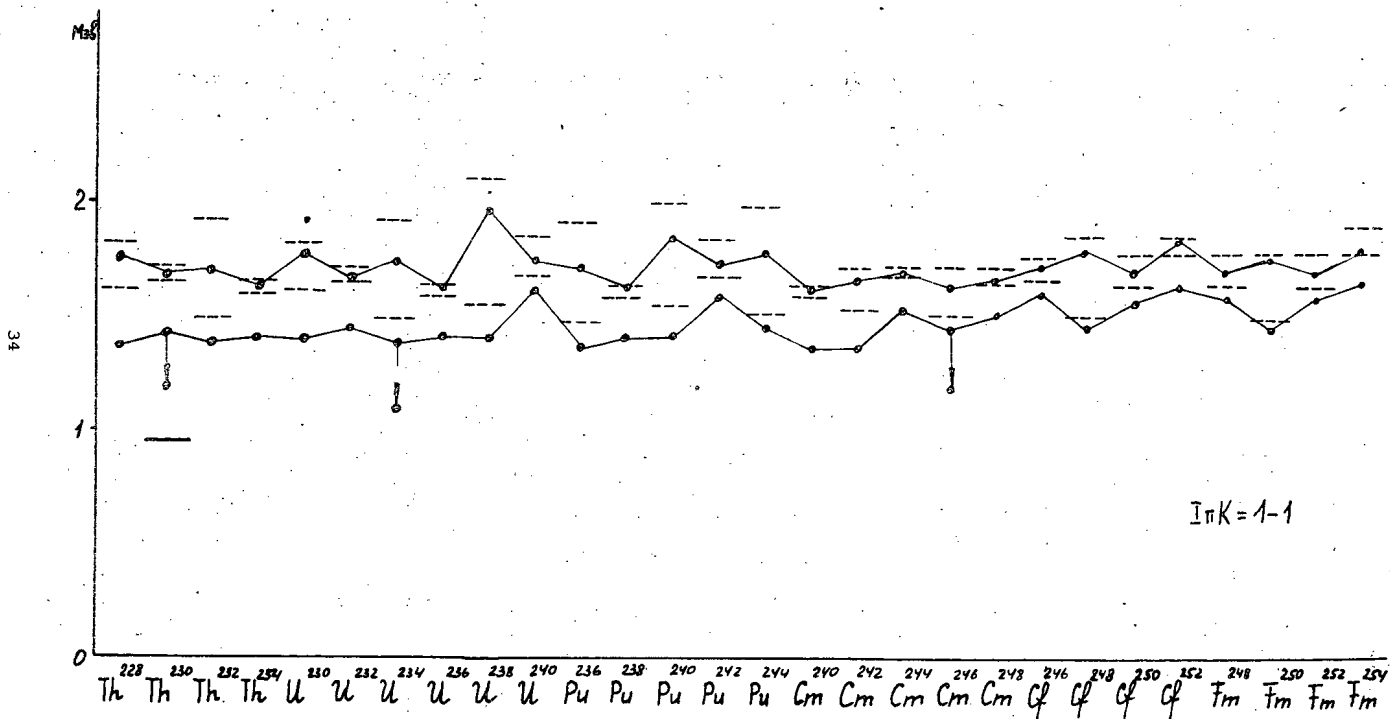


Fig. 5. Energies of states with $K\pi = 1-$. (For notations see Fig. 2).

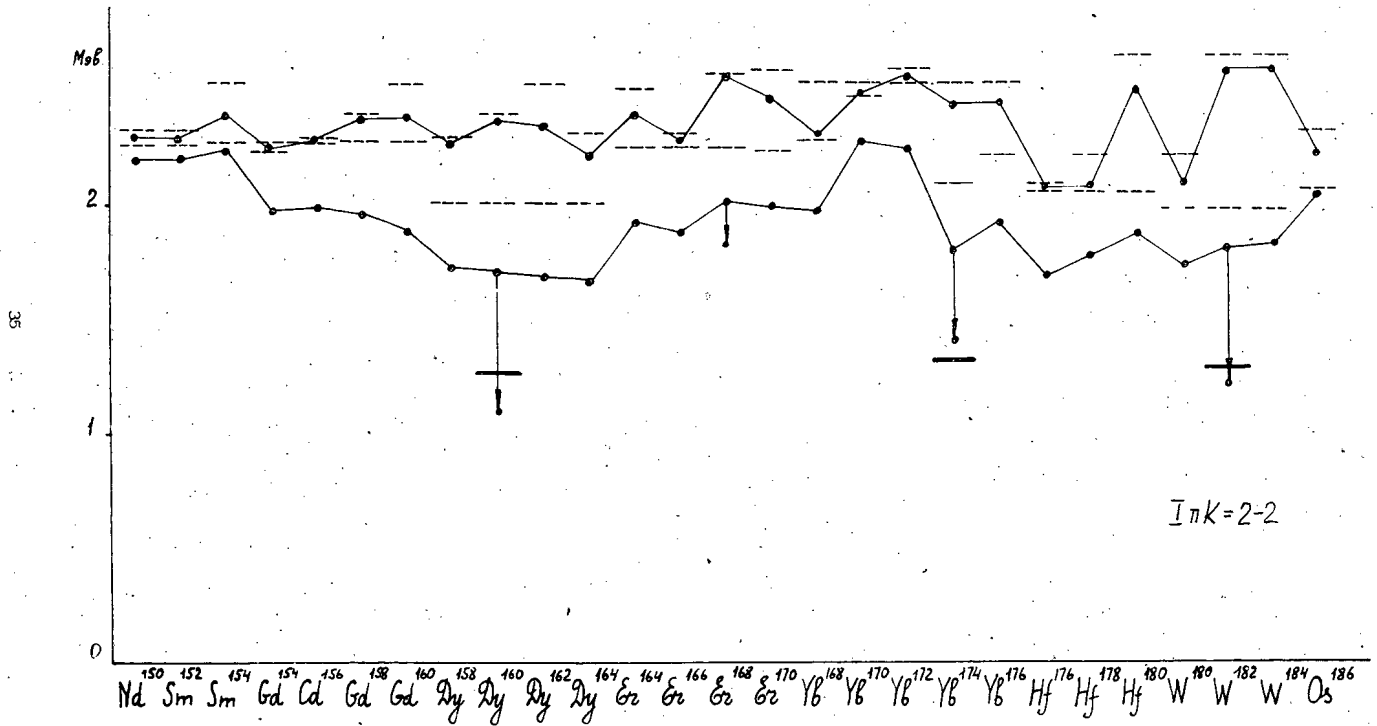


Fig. 6. Energies of states with $K\pi=2-$. (For notations see Fig. 2).

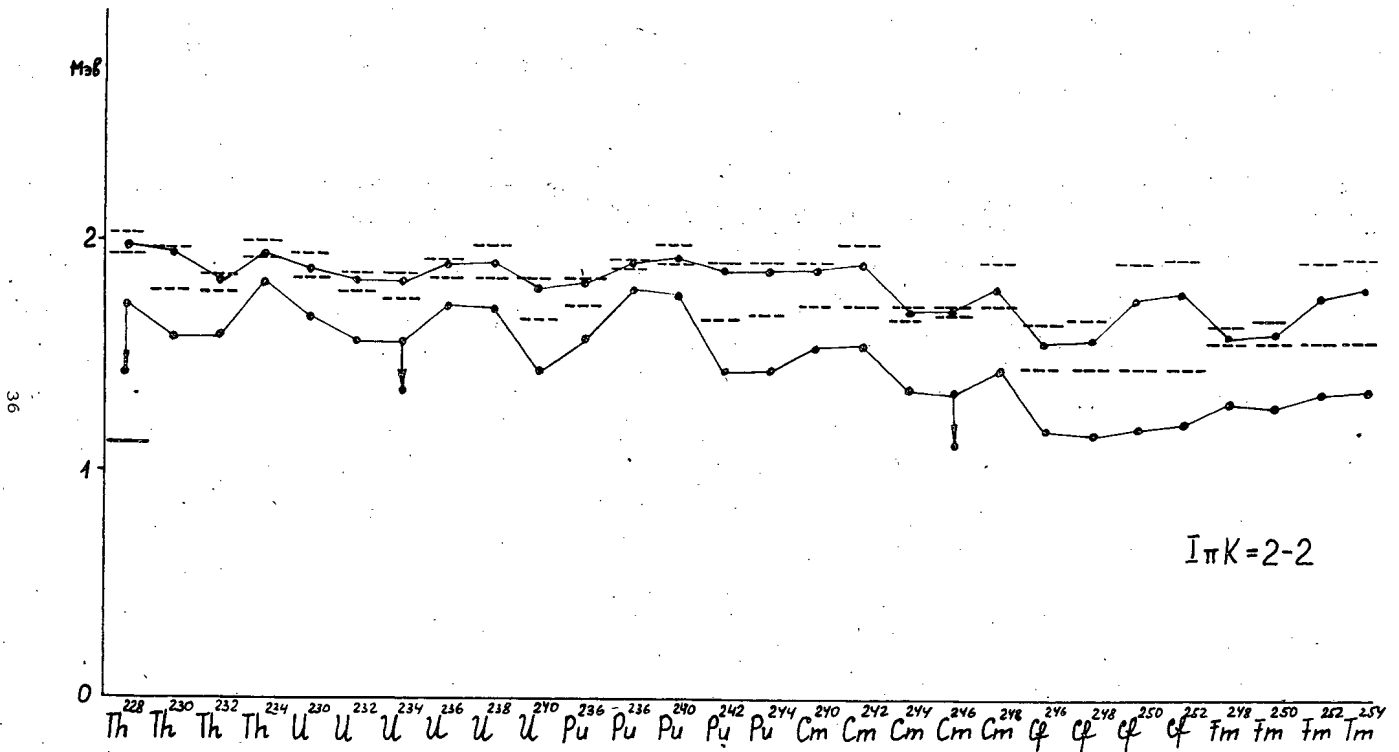


Fig. 7. Energies of states with $K\pi = 2^-$. (For notations see Fig. 2).

37

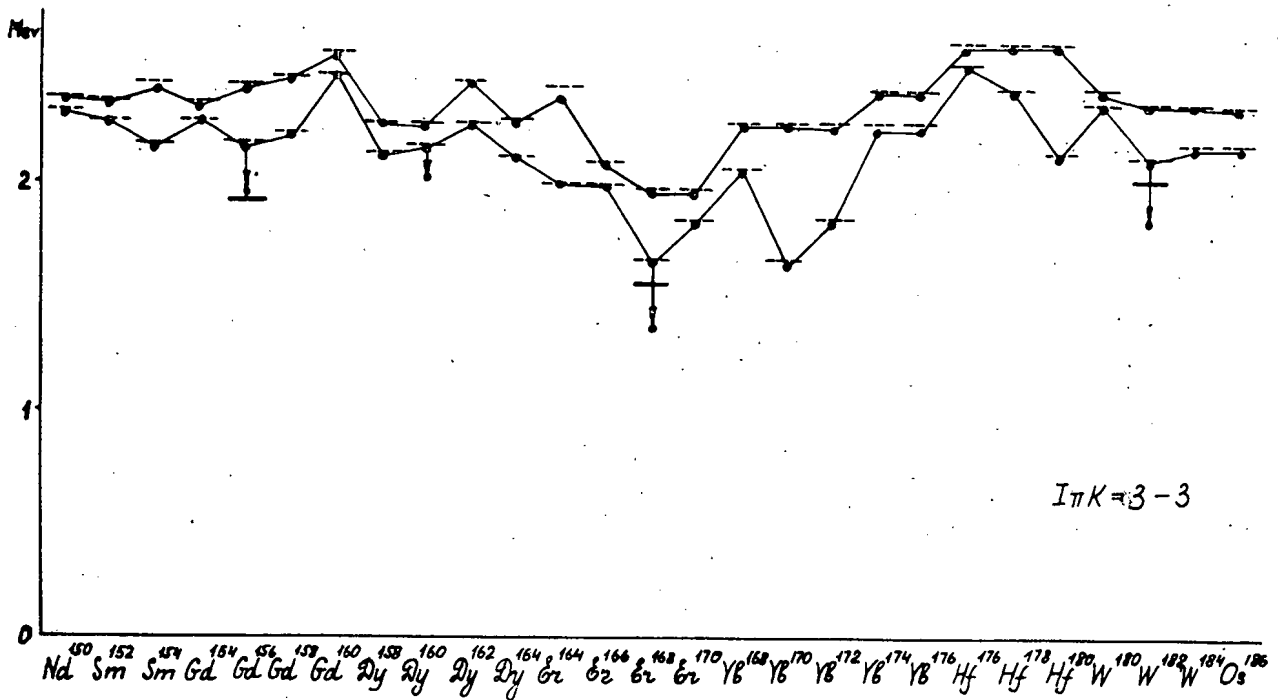


Fig. 8. Energies of states with $K\pi=3-$. (For notations see Fig. 2).

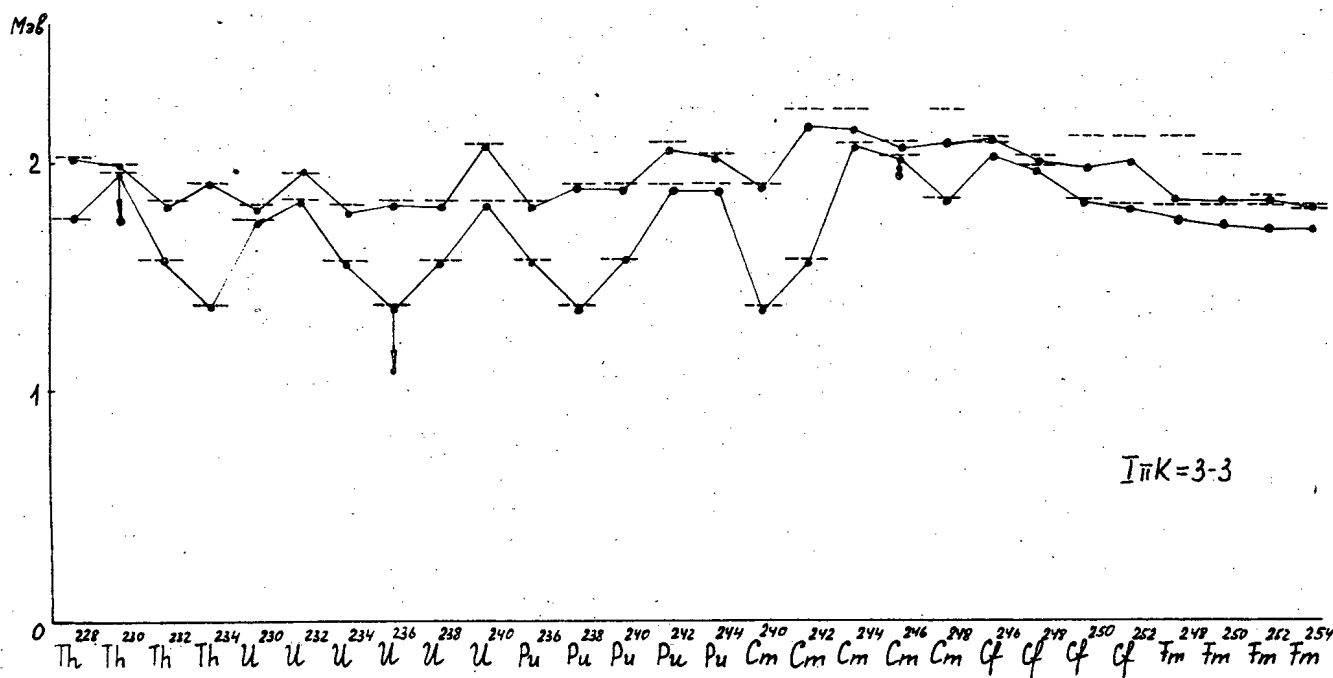


Fig. 9. Energies of states with $K\pi=3-$. (For notations see Fig. 2).

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3601. Тираж 410. 2,5 уч-изд.л.
Перевод Н.С. Зарубиной. Февраль 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

LABORATORY OF THEORETICAL PHYSICS

Lu Yuang, V.G. Soloviev, A.A. Korneichuk

E- 1534

ENERGIES OF THE QUADRUPOLE STATES
OF STRONGLY DEFORMED EVEN-EVEN NUCLEI

Дубна 1964

E- 1534

Лю Юань, Соловьев В.Г., Корнейчук А.А.

Энергии квадрупольных состояний четно-четных сильно деформированных ядер.

Работа издается только на английском языке.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна 1964.**

Lu Yuang, Soloviev, V.G., Korneichuk A.A. E- 1534

ENERGIES OF THE QUADRUPOLE STATES
OF STRONGLY DEFORMED EVEN-EVEN
NUCLEI.

**Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.**

Lu Yuang, V.G. Soloviev, A.A. Korneichuk

E- 1534

ENERGIES OF THE QUADRUPOLE STATES
OF STRONGLY DEFORMED EVEN-EVEN NUCLEI

Submitted to JETP

Дубна 1964

A b s t r a c t

The energies of the beta and gamma vibrational states of even-even strongly deformed nuclei are calculated in the region $152 \leq A \leq 186$ and $228 \leq A \leq 254$. A satisfactory agreement is obtained between the calculated and the corresponding experimental data in case $\kappa_n = \kappa_p = \kappa_{np} = \kappa$ with $\kappa = \frac{10}{A^{4/3}} h\omega_0^0$ in the first region and $\kappa = \frac{12}{A^{4/3}} h\omega_0^0$ in the second one. It is shown that for the isotopes of Dy and Er the energies of the gamma vibrational states lie below the energies of the beta vibrational states in correspondence with the experimental data. It is noted that in the majority of cases the lowest states with $K\pi = 2+$ and $K\pi = 0+$ possess the pronounced collective properties and their energies are considerably less than the energies of the nearest poles in the secular equations. In some cases the energies of the quadrupole states are near the poles and their wave functions are very close to the two-quasi-particle ones. The calculated probabilities of the $E2$ transitions do not contradict the experimental data.

А н н о т а ц и я

Рассчитаны энергии β и γ вибрационных состояний четно-четных сильнодеформированных ядер в областях $152 \leq A \leq 186$ и $228 \leq A \leq 254$. Получено удовлетворительное согласие между расчетами и соответствующими экспериментальными данными в случае $\kappa_n = \kappa_p = \kappa_{np} = \kappa$ с $\kappa = \frac{10}{A^{4/3}} h\omega_0^0$ в первой области и $\kappa = \frac{12}{A^{4/3}} h\omega_0^0$ - во второй. Показано, что для изотопов Dy и Er энергии γ -вибрационных состояний лежат ниже энергий β -вибрационных состояний в соответствии с опытными данными. Отмечено, что в большинстве случаев наименьшие состояния с $K\pi = 2+$ и $K\pi = 0+$ обладают ярко выраженными коллективными свойствами и энергии их значительно меньше энергий ближайших полюсов в секулярных уравнениях. В ряде случаев энергии квадрупольных состояний лежат вблизи полюсов, и волновые функции их весьма близки к двухквазичастичным. Вычисленные вероятности $E2$ - переходов не противоречат экспериментальным данным.

1. Many theoretical and experimental works are devoted to the investigation of the collective excited states of even-even nuclei. Rather rich experimental information on the energies of beta and gamma vibrational states in even-even strongly deformed nuclei and on the reduced probabilities of the electromagnetic transition has been accumulated. The method of approximate second quantization suggested by N.N. Bogolubov in 1947^{/1/} and the mathematical methods developed in constructing the theory of superconductivity^{/2/} are the basis of the theoretical investigations of the microscopic nature of the collective states. The most completely studied are the collective states of spherical nuclei^{/3-5/}. In the region of strongly deformed nuclei the investigations^{/6/} carried out before 1963 are restricted to obtaining the basic equations and to investigation of the problem of elimination of a spurious state. In refs.^{/7,8/} the energies of the octupole states of strongly deformed even-even nuclei have been calculated and a rather close agreement with the corresponding experimental data has been obtained. In ref.^{/9/} the energies of gamma vibrational states and the probabilities of the electromagnetic $E2$ -transitions have been calculated. However in this paper the energies of beta vibrations are not calculated and the energies of gamma vibrations calculated using the asymptotic wave functions of the Nilsson potential are about 1,5 time as high as the experimental ones.

It is interesting to calculate the energies of the beta and gamma vibrational states for the same value of the constants of a quadrupole-quadrupole interaction using the exact wave functions of the Nilsson potential and to compare theory with experiment. This is just the aim of the present paper.

2. The collective state energies are calculated on the basis of the superfluid nuclear model. In this model the Hamiltonian of interaction between nucleons in a nucleus is written in the form of three terms

$$H = H_{av} + H_{pair} + H_{coll} \quad (1)$$

describing the average nuclear field, interactions leading to pairing correlations of the superconducting type and interactions responsible for the collective effects. In calculating the energies of the quadrupole collective states H_{coll} is taken in the form

$$H_{coll} = - \sum_{\mu=0,2} \left\{ \frac{\kappa_n^{(2)}}{2} Q_{2\mu}^+(n) Q_{2\mu}(n) + \frac{\kappa_p^{(2)}}{2} Q_{2\mu}^+(p) Q_{2\mu}(p) + \frac{\kappa_{np}^{(2)}}{2} (Q_{2\mu}^+(n) Q_{2\mu}(p) + Q_{2\mu}^+(p) Q_{2\mu}(n)) \right\}, \quad (2)$$

where

$$Q_{2\mu}(n) = \sum_{\substack{\sigma\sigma' \\ ss'}} f_{\sigma\sigma'}^{2\mu}(ss') a_{\sigma}^+ a_{\sigma'}^{s'}$$

$$f^{20} = r^2 Y_{20}, \quad f^{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} r^2 (Y_{22} + Y_{2\bar{2}}),$$

$\kappa_n^{(2)}, \kappa_p^{(2)}, \kappa_{np}^{(2)}$ are the constants of the quadrupole-quadrupole interaction.

In the microscopic treatment of the superfluid nuclear model the wave functions of the collective states are the superposition of the wave functions of the two-quasi-particle states. The collective states are considered side by side with the two-quasi-particles ones, any restrictions to the collective state energies being absent. The terms beta-vibrational and gamma vibrational states should be considered as conventional. The beta vibrational states are the lowest excited states with $K\pi = 0+$ i.e. with the projection of the momentum of the axis of the nuclear symmetry being zero and the positive parity (different from the rotational states), and the gamma vibrational states are the lowest states with $K\pi = 2+$.

3. Consider the gamma vibrational states. In investigating these states we should bear in mind that in addition to the matrix elements $f_{\sigma\sigma'}^{22}(s_1, s_2) \equiv f(s_1, s_2)$,

where $K_1 \pm 2 = K_2$ (K_1 and K_2 are the projections of the momenta of two states) we must take into account the matrix elements $f_{\sigma, -\sigma}^{22}(s_1, s_2) \equiv \bar{f}(s_1, s_2)$ with $K_1 + K_2 = \pm 2$ disregarded in some papers.

On the basis of the variational principle, in the framework of the method of approximate second quantization we get a secular equation defining the energies ω_i of the excited states with $K\pi = 2+$ in the form

$$1 = 2\kappa_n^{(2)} \sum_{ss'} \frac{(f(ss')^2 + \bar{f}(ss')^2) u_{ss'}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} + 2\kappa_p^{(2)} \sum_{\nu\nu'} \frac{(f(\nu\nu')^2 + \bar{f}(\nu\nu')^2) u_{\nu\nu'}^2}{\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu')}} + \quad (3)$$

$$+ 4((\kappa_{np}^{(2)})^2 - \kappa_n^{(2)} \kappa_p^{(2)}) \sum_{ss'} \frac{(f(ss')^2 + \bar{f}(ss')^2) u_{ss'}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} \sum_{\nu\nu'} \frac{(f(\nu\nu')^2 + \bar{f}(\nu\nu')^2) u_{\nu\nu'}^2}{\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu')}} ,$$

the summation $ss'(\nu\nu')$ being made over one-particle levels of the average field of the neutron (proton) system,

$$\epsilon(s) = \sqrt{C_n^2 + \{E(s) - \lambda_n\}^2}, \quad \epsilon(\nu) = \sqrt{C_p^2 + \{E(\nu) - \lambda_p\}^2},$$

$$u_{ss'} = u_{s'v_s} + u_{s'v_s} ;$$

The index i in ω_i denotes the first, second and so on roots of the secular equation.

In case $\kappa_n^{(2)} = \kappa_p^{(2)} = \kappa_{np}^{(2)} \equiv \kappa$ to which we shall restrict ourselves in what follows, the secular equation will be of simpler form, namely:

$$\frac{1}{2\kappa} = \sum_{ss'} \frac{(f(ss')^2 + \bar{f}(ss')^2) u_{ss'}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} + \sum_{\nu\nu'} \frac{(f(\nu\nu')^2 + \bar{f}(\nu\nu')^2) u_{\nu\nu'}^2}{\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu')}} \quad (4)$$

The wave function of the i -th state with $K\pi = 2+$ is $Q_i^+ \Psi$ where the operator Q_i is equal to

$$Q_i = \frac{1}{2} \{ \sum_{ss'} (\psi_{ss'}^i, A(ss') - \phi_{ss'}^i, A(ss')^+ + \bar{\psi}_{ss'}^i, \bar{Q}(ss') - \bar{\phi}_{ss'}^i, \bar{Q}(ss')^+) + \sum_{\nu\nu'} (\psi_{\nu\nu'}^i, A(\nu\nu') - \phi_{\nu\nu'}^i, A(\nu\nu')^+ + \bar{\psi}_{\nu\nu'}^i, \bar{Q}(\nu\nu') - \bar{\phi}_{\nu\nu'}^i, \bar{Q}(\nu\nu')^+) \} , \quad (5)$$

in this case

$$A(ss') = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} \sigma a_{s'\sigma} a_{s-\sigma}, \quad \bar{Q}(ss') = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\sigma} a_{s\sigma} a_{s'\sigma} ,$$

Here $\alpha_{\nu\sigma}$, $\alpha_{\nu\tau}$ are the quasi-particle operators. The functions $\psi_{\nu\sigma}^i$, $\phi_{\nu\sigma}^i$, $\bar{\psi}_{\nu\sigma}^i$, $\bar{\phi}_{\nu\sigma}^i$ are written in the form:

$$\psi_{\nu\sigma}^i = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\nu\sigma}^i + w_{\nu\sigma}^i), \quad \bar{\psi}_{\nu\sigma}^i = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\nu\sigma}^i + \bar{w}_{\nu\sigma}^i),$$

$$\phi_{\nu\sigma}^i = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\nu\sigma}^i - w_{\nu\sigma}^i), \quad \bar{\phi}_{\nu\sigma}^i = \frac{1}{2}(\bar{g}_{\nu\sigma}^i - \bar{w}_{\nu\sigma}^i),$$

where

(6)

$$w_{\nu\sigma}^i = \frac{\omega_i}{\epsilon(s) + \epsilon(s')} \bar{g}_{\nu\sigma}^i,$$

$$\bar{w}_{\nu\sigma}^i = \frac{\omega_i}{\epsilon(s) + \epsilon(s')} \bar{g}_{\nu\sigma}^i,$$

$$\bar{g}_{\nu\sigma}^i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Y_n^i + \bar{Y}_n^i + Y_p^i + \bar{Y}_p^i}} \frac{f(ss') u_{\nu\sigma}^i}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}},$$

$$\bar{g}_{\nu\sigma}^i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Y_n^i + \bar{Y}_n^i + Y_p^i + \bar{Y}_p^i}} \frac{\bar{f}(ss') u_{\nu\sigma}^i}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} \quad (7)$$

in this case

$$Y_n^i + \bar{Y}_n^i = \sum_{\nu\sigma} \frac{(f(ss')^2 + \bar{f}(ss')^2) u_{\nu\sigma}^2 \omega_i (\epsilon(s) + \epsilon(s'))}{[(\epsilon(s) + \epsilon(s'))^2 - \omega_i^2]^2}.$$

Thus, after solving the secular equations (3) or (4) we find the energies of the states with $K\pi = 2+$ and the corresponding wave functions.

4. We consider beta vibrations, i.e. the excited states with $I\pi K = 0 + 0$.

In this case there are diagonal and non-diagonal matrix elements from the operator of the quadrupole momentum and $\bar{f}(ss') = 0$. Thus, for a system consisting of particles of the same kind the secular equation can be written in the form:

$$\frac{1}{2K} = \sum_{\nu\sigma \neq \nu'\sigma'} \frac{f(ss')^2 u_{\nu\sigma}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} + \sum_{\nu\sigma} \frac{f(ss')^2 c^2}{(4\epsilon(s)^2 - \omega_i^2) \epsilon(s)}, \quad (8)$$

the contribution of the diagonal terms being as large as (50-70)%.

Let us show that the diagonal elements should not be so important. Indeed,

we consider the case when all the diagonal terms are equal to one another, i.e. $f(ss) = f_0$ then the corresponding part of H_{coll} reads

$$-\frac{\kappa}{2} f_0^2 N^2,$$

where N is the operator of the number of particles. As far as the number of particles in the ground and excited states is the same, hence, it follows that this term does not lead to the change in the energy difference between the beta vibrational and ground states. If $f(ss) \neq f_0$ then the diagonal terms can lead to the decrease as well as to the increase of the energies of the excited states with $K\pi = 0^+$. Thus, the coherent effect leading to the decrease of the energies of the states with $K\pi = 0^+$ with respect to the nearest pole of the secular equation is, in the main, due to the non-diagonal matrix elements of the quadrupole momentum operator. From these considerations it is seen that the calculations of ω_i from (8) are very inaccurate.

In [4] one has suggested the method of elimination of spurious states, which allows one to improve essentially the approximation considered above. The secular equation is in this case of more complicated form, namely: (for $\kappa_n^{(2)} = \kappa_p^{(2)} = \kappa_{np}^{(2)} \equiv \kappa$)

$$\left(\begin{array}{cccc} X_n^I + X_p^I - \frac{1}{2\kappa} & V_n^I & V_p^I & W_n^I & W_p^I \\ V_n^I & \sum \frac{1}{(2\epsilon(s))(4\epsilon(s)^2 - \omega_i^2)} & 0 & \sum \frac{u_s^2 - v_s^2}{4\epsilon(s)^2 - \omega_i^2} & 0 \\ V_p^I & 0 & \sum \frac{1}{2\epsilon(v)(4\epsilon(v)^2 - \omega_i^2)} & \sum \frac{u_v^2 - v_v^2}{4\epsilon(v)^2 - \omega_i^2} & 0 \\ W_n^I & \sum \frac{u_s^2 - v_s^2}{4\epsilon(s)^2 - \omega_i^2} & 0 & \sum \frac{\omega_i^2 - 4C_n^2}{2\epsilon(s)(4\epsilon(s)^2 - \omega_i^2)} & 0 \\ W_p^I & 0 & \sum \frac{u_v^2 - v_v^2}{4\epsilon(v)^2 - \omega_i^2} & 0 & \sum \frac{\omega_i^2 - 4C_p^2}{2\epsilon(v)(4\epsilon(v)^2 - \omega_i^2)} \end{array} \right) = 0 \quad (9)$$

where

$$X_n^I = \sum_{s,s'} \frac{f(ss')^2 u_{ss'}^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_i^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}}.$$

$$V_n^i = \sum_n \frac{f(ss) C_n}{\epsilon(s) (4\epsilon(s)^2 - \omega_1^2)}$$

$$W_n^i = \sum_n \frac{f(ss) 2C_n (E(s) - \lambda_n)}{\epsilon(s) (4\epsilon(s)^2 - \omega_1^2)}$$

We notice that in case $f(ss')=f_0$ the diagonal terms fall out from eq. (9). Thus in this case the energy of the excited state with $K\pi = 0+$ does not depend on the diagonal terms what agrees with the above considerations. The diagonal matrix elements in (9) became less important as compared with (8).

The wave functions for the states with $K\pi = 0+$ can be easily obtained using the following expressions for $g_{ss'}^i$ and $w_{ss'}^i$

$$g_{ss'}^i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Z_n^i + Z_p^i}} \left\{ \frac{f(ss') u_{ss'}}{\epsilon(s) + \epsilon(s') - \frac{\omega_1^2}{\epsilon(s) + \epsilon(s')}} - \delta_{ss'} \frac{2C_n}{4\epsilon(s)^2 - \omega_1^2} \frac{\Gamma_n^i(s)}{\gamma_n^i} \right\}, \quad (10)$$

$$w_{ss'}^i = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Z_n^i + Z_p^i}} \left\{ \frac{f(ss') u_{ss'} \omega_1}{(\epsilon(s) + \epsilon(s'))^2 - \omega_1^2} - \delta_{ss'} \frac{\omega_1 C_n}{\epsilon(s) (4\epsilon(s)^2 - \omega_1^2)} \frac{\Gamma_n^i(s)}{\gamma_n^i} - \delta_{ss'} \frac{C_n}{\epsilon(s) \omega_1} \frac{\xi_n^i}{\gamma_n^i} \right\} \quad (11)$$

and analogous expressions for the proton system where

$$Z_n^i = Y_n^i + 2 \frac{\omega_1 C_n^2}{\gamma_n^i} \sum_n \frac{(\Gamma_n^i(s))^2}{\epsilon(s) (4\epsilon(s)^2 - \omega_1^2)} - 4 \frac{\omega_1 C_n^2}{\gamma_n^i} \sum_n \frac{f(ss) \Gamma_n^i(s)}{\epsilon(s) (4\epsilon(s)^2 - \omega_1^2)}$$

$$\Gamma_n^i(s) = \sum_{s_2} \frac{f(s_2 s_2)}{\epsilon(s_2) (4\epsilon(s_2)^2 - \omega_1^2)}$$

$$\frac{4(E(s'_2) - \lambda_n)(E(s_2) - \lambda_n) - 4(E(s) - \lambda_n)(E(s_2) - \lambda_n) + 4(E(s) - \lambda_n)(E(s'_2) - \lambda_n) + 4C_n^2 - \omega_l^2)}{\epsilon(s'_2)(4\epsilon(s'_2)^2 - \omega_l^2)}$$

$$\gamma_n^l = \sum_{ss'} \frac{4(E(s) - \lambda_n)(E(s') - \lambda_n) + 4C_n^2 - \omega_l^2}{\epsilon(s)(4\epsilon(s)^2 - \omega_l^2)\epsilon(s')(4\epsilon(s')^2 - \omega_l^2)}$$

$$\xi_n^l = \sum_{ss'} \frac{f(ss)}{\epsilon(s)(4\epsilon(s)^2 - \omega_l^2)} \frac{4C_n^2 - \omega_l^2 + 4(E(s) - \lambda_n)(E(s') - \lambda_n)}{\epsilon(s')(4\epsilon(s')^2 - \omega_l^2)}$$

The roots of the secular equation (9) as well as (4) were found with the aid of the electronic computer. The determinant of the 6-th order was expanded (the program was compiled for the general case of any values of κ_n , κ_p and κ_{np}) and transformed to such a form in which the dependence on κ_n , κ_p and κ_{np} is clearly seen. Then, the first root was searched in the interval from $\omega=0$ to the nearest pole $X_n(\omega)$ and $X_p(\omega)$, the second one-between the first and the second poles and so on. The roots were found by the bisection, about eleven iterations were used to find the root with the accuracy 10^{-4} .

5. The calculations of the energies of the beta and gamma vibrational states and the reduced probabilities of electromagnetic transitions have been performed in both regions of strongly deformed nuclei: $152 \leq A \leq 186$ and $228 \leq A \leq 254$. The wave functions and the schemes of the Nilsson potential one-particle levels have been used^{/10/}. All the calculations in the region $152 \leq A \leq 186$ were made using the wave functions with the deformation $\delta = 0.3$ and in the region $228 \leq A \leq 254$ with $\delta = 0.2$ and for the same scheme of the one-particle levels in the neutron (proton) system for each nucleus in each region. In order that the calculations be most unambiguous, the change in the nuclear deformation is not taken into account. Therefore near the boundaries of the regions of strongly deformed nuclei the accuracy of the calculations becomes worse because the equilibrium deformation changed but the behaviour of the one-particle levels of the average field was unaffected. The schemes of the one-particle levels of the average field, the values of the correlation functions and the chemical potentials which were used in the calculations are given in ref.^{/8/} Notice that the correlation functions and the chemical potentials were obtained earlier in refs./11,12/.

Declassified in Part - Sanitized Copy Approved for Release 2014/04/25 :
 CIA-RDP80-00247A002400260001-5

The constant κ of the quadrupole-quadrupole interaction is chosen so that the calculated energies of the states with $I\pi K = 2+$ will be in good agreement with the corresponding experimental data. The values of κ depend on the number of transitions in eqs. (4). We have taken into account all the transitions between one-particle states given in [8], about 100-120 transitions. If following [3] we assume that

$$\kappa = \frac{k}{A^{4/3}} h \omega_0^0 = \frac{k^1}{A^{5/3}}$$

then we do not succeed in choosing the same value of k for both regions of strongly deformed nuclei. So, in the region $152 \leq A \leq 186$ $k = 10$ and in the region $228 \leq A \leq 254$ $k = 12$. It is obvious that by increasing the number of transitions in the region $228 \leq A \leq 254$ we may obtain the same value of k for both regions of strongly deformed nuclei. Note that for $\kappa = \frac{1.8}{A} h \omega_0^0$ a rather good agreement is obtained between the calculated energies of the collective states and the experimental data in both regions.

If the energies of the beta vibrational states are calculated by (8) then to obtain even rough agreement with experiment it is necessary to introduce two values of κ , one for the description of the beta vibration energies and another for the description of the gamma vibrational energies.

6. Now we discuss the results of calculations of the energies of the lowest states with $I\pi K = 0+0$ and $I\pi K = 2+2$. The results of calculations and the corresponding experimental data are given in Fig. 1 and 2. The experimental values of the energies are taken from [11,13,14] and others.

In the region $154 \leq A \leq 182$ the calculated energies of the states with $K\pi = 2+$ are in a rather good agreement with the experimental data. The exception is W^{182} what is due to the change in the deformation. However, if we take $\kappa = \frac{8}{A^{4/3}} h \omega_0^0$ then we obtain the energy of the state with $K\pi = 2+$ in W^{182} equal to 1.2 MeV and in W^{184} about 1 MeV. If we choose $\kappa = \frac{11}{A^{4/3}} h \omega_0^0$ then we obtain very close agreement between theory and experiment for Er^{166} , Er^{168} and for all the isotopes of Yb , however, for the isotopes of Dy the calculated values of the energies of the states $2+$ will be considerably lower than the experimental ones.

The agreement between the calculated energies of the states $0+$ with the experimental data is rather satisfactory with the exception of the isotopes of Hf and W . In these isotopes the energies of the states are very close to those of the corresponding poles and the blocking effect should therefore be taken into

account which is in this case very important. Taking into account the blocking effect we may obtain a good agreement with experiment in the isotopes of *Hf* and *W*.

The problem of the relative behaviour of the energies of beta and gamma vibrational states is of interest. According to our calculations the energies of the states with $K\pi = 2+$ are considerably lower than those for the states with $K\pi = 0+$ for the isotopes *Dy* and *Er*. The lowering of the energies of the gamma vibrational states lower than the energies of the beta vibrational states is defined by the behaviour of the average field levels and the appropriate wave functions. This lowering is in total agreement with experimental data and theoretically is first explained in the present paper.

The next paper will be devoted to the study of the structure of the collective states. However, we note that the majority of low energy states with $K\pi = 2+$ possess the pronounced collective properties. So, in *Er*¹⁶⁶ the four two-quasi-particle states give contribution to the collective state with $K\pi = 2+$ from 16% to 32% each. In a number of cases the low energy states with $K\pi = 2+$ are close to the two-quasi-particle ones. So, in *Yb*¹⁷² the wave function of the lowest state with $K\pi = 2+$ contains contribution as large as 97,6% from the two-quasi-particle neutron state $5/2 + [512] - 1/2 + [521]$. Since the admixtures of other states are less than 3% then this state is very close to the two-quasi-particle one, which bears out the results obtained earlier in ^{11/}. However, in *Yb*¹⁷² there must be the second state with $K\pi = 2+$ which is by 200-400 KeV higher than the first one and possesses the collective properties.

The results of calculations of the energies of beta and gamma vibrational states in the region $228 \leq A \leq 254$ and the corresponding experimental data are given in Fig. 2. The calculated energies of the states with $K\pi = 2+$ are in rather good agreement with the corresponding experimental data. The disagreement in *Pu*²⁴⁰ is due to the fact that the blocking effect was not taken into account. Whereas according to ^{12/} where the blocking effect was taken into account the two-quasi-particle state with $K\pi = 2+$ in *Pu*²⁴⁰ has the energy 0.9 MeV. A very large lowering of the states with $K\pi = 2+$ in *Cf*²⁵⁰ and in *Fm*²⁵⁴ is due to a large matrix element of transition between states $7/2 + [613]$ and $3/2 + [611]$. If the number of transitions increases then the location of the levels $2 +$ in *Cf*²⁵⁰, *Fm*²⁵⁴ and the behaviour of the energies of the states with $K\pi = 0+$ must be improved. In Fig. 2 the cross denotes the energies of the states with $K\pi = 2+$ for *Cf*²⁵⁰, *Fm*²⁵² and *Fm*²⁵⁴ calculated with

$$\kappa = \frac{11}{A^{4/3}} h \omega_0^0$$

the experimental data can be improved if we renounce the condition $\kappa_n = \kappa_p = \kappa_{np}$.

7. The reduced probabilities of the $E2$ transitions from states $K\pi = 2+$ to the ground ones are calculated by the formula:

$$B(E2) = 1,024A^{2/3} \cdot 10^{-59} \left(e_{\text{eff}} \frac{\sum \frac{(f(ss')^2 + \bar{f}(ss')^2) u_{ss'}^2 (\epsilon(s) + \epsilon(s'))}{(\epsilon(s) + \epsilon(s'))^2 - \omega_l^2}}{\sqrt{Y_n + \bar{Y}_n + Y_p + \bar{Y}_p}} + \right. \\ \left. + (e + e_{\text{eff}}) \frac{\sum \frac{(f(\nu\nu')^2 + \bar{f}(\nu\nu')^2) u_{\nu\nu'}^2 (\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu'))}{(\epsilon(\nu) + \epsilon(\nu'))^2 - \omega_l^2}}{\sqrt{Y_n + \bar{Y}_n + Y_p + \bar{Y}_p}} \right)^2 \quad (12)$$

The reduced transition probabilities $B(E2)$ are calculated with $e_p = e + e_{\text{eff}}$ and $e_n = e_{\text{eff}}$ and $e_{\text{eff}} = 0,8e$. In cases for which the experimental data are available^{/14/} the ratio $B(E2)/B(E2)_{\text{s.p.}}$ is equal to 1 - 4. So, for example, for Dy^{160} $B(E2)/B(E2)_{\text{s.p.}}$ it is 2,8 for Dy^{162} - 3,2 for Th^{230} 1,7 for U^{238} - 1,4 and so on. However, for the state 2+ with an energy 1468 KeV in Yb^{172} $B(E2)/B(E2)_{\text{s.p.}} = 0,04$ i.e. 30-50 times less than in the neighbourhood nuclei. This fact stresses once more the two-quasi-particle nature of this state. The experimental determination of $B(E2)$ as well as the finding of the second state with $K\pi = 2+$ in Yb^{172} would be very desirable.

The difference between the energies of the states with $K\pi = 2+$ and the ratios $B(E2)/B(E2)_{\text{s.p.}}$ obtained by us and those calculated in^{/9/} are accounted for by the fact that our calculations are carried out successively on the basis of the superfluid nuclear model while in^{/9/} the phenomenological treatment of the unified model is combined with the microscopic approach of the superfluid model.

This difference in the approaches was brought out, for example, in choosing the value of the constant of the quadrupole-quadrupole interaction. Then, the difference is due to the fact that in^{/9/} the asymptotic wave functions of the Nilsson potential has been used, while in the present paper the exact wave functions of the Nilsson potential have been used. Here the difference is due not only to the fact that the matrix elements with the asymptotic wave functions are calculated insufficiently accurately but mainly to the fact that a large number of

poles in (4) is lost in working with the asymptotic wave functions. Note that in some cases near poles even with comparatively small values of matrix elements $f(ss')$ and $\bar{f}(ss')$ are very important. The difference in the values of $B(E2)/B(E2)_{e.p.}$ is mainly due to the fact that in^{9/} the calculations were made by the formula following from the phenomenological theory.

8. Thus, the calculated energies of the beta and gamma vibrational states agree rather well with the corresponding experimental data for the same values of the constants of the quadrupole-quadrupole interaction. The calculations show that in some cases the energies of the gamma vibrational states lie lower than the beta vibrational ones, so, e.g., in the middle of the region $154 \leq A \leq 182$. The behaviour of the energies of the quadrupole states is determined by the average nuclear field. In most cases the lowest states with $K\pi = 2+$ and $K\pi = 0+$ possess clearly pronounced collective properties and their energies become considerably low with respect to the nearest poles in the secular equations. In some cases the energies of the states with $K\pi = 2+$ and $K\pi = 0+$ are near the lowest poles and their wave functions are close to the two-quasi-particle ones. This fact has been noted earlier in^{7/} in studying the behaviour of the energies of the octupole states with $K\pi = 0-$.

It should be noted that the results of calculations essentially depend on the wave functions of the Nilsson potential. It is quite possible that some errors of calculations are due to the disadvantages characterising the wave functions of the Nilsson potential. However, a rather good general agreement between theory and experiment as to the energies of the states with $K\pi = 2+$ and $K\pi = 0+$ is one more evidence for the fact that the Nilsson potential allows one to describe rather well the average field of strongly deformed nuclei.

In conclusion we express our gratitude to N.N. Bogolubov and P. Vogel for interesting discussions and also K.M. Zhelesnova and L.V. Korneichuk for the aid in making the numerical calculations.

References

1. Н.Н. Боголюбов. Лекции по квантовой статистике. Издательство Радянська Школа, Киев, 1947.
2. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schriffer, Phys. Rev., 108, 1175 (1957);
Н.Н. Боголюбов, В.В. Толмачев, Д.В. Ширков. Новый метод в теории сверхпроводимости. Изд. АН СССР /1958/.

3. S.T. Belyaev. Selected Topics in Nucl. Theory, 291 (1963). Mat.Fys.Medd. Dan.Vid.Selsk., 31, No. 11 (1959).
4. M. Baranger. Phys. Rev., 120, 957 (1960).
5. T. Tamura, T. Udagawa. Progr. Theor. Phys., 26, 947 (1961). Nucl. Phys., 35, 382 (1962).
S. Yoshida. Nucl.Phys., 38, 380 (1962).
- Б.Л. Бирбраир, К.И.Ерохина, И.Х. Лемберг, Известия АН СССР, серия физическая, 27, 1501 (1963).
6. Д.Ф. Зарецкий, М.Г. Урин, ЖЭТФ, 41, 898 (1961); 42, 304; 43, 102 (1962).
7. В.Г. Соловьев, П. Фогель Phys.Lett., 6, 126 (1963); В.Г. Соловьев, П.Фогель, А.А.Корнейчук.ДАН СССР, 154, № 1, 72 /1964/.
8. В.Г. Соловьев, П. Фогель, А.А. Корнейчук. Изв. АН, Серия физ. ДАН СССР, (in print). 154, № 1, 72 /1964/.
9. E.R. Marshalek, J.O. Rasmussen. Nucl. Phys., 43, 438 (1963).
10. S. Nilsson. Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 29, No. 16 (1955); B. Mottelson, S. Nilsson. Mat. Fys.Skr.Dan.Vid.Selsk., 1, No. 6 (1959).
11. C.J. Gallagher, V.G. Soloviev. Mat.Fys.Skr.Dan.Vid.Selsk., 2, No. 2 (1962).
12. Т. Вереш, В.Г. Соловьев, Т. Шиклош. Изв. АН СССР, серия физ., 26, 1045 (1962).
13. S. Bjornholm, M. Lederer, F. Asaro, I. Perlman. Phys.Rev., 130, 2000 (1963).
14. Y. Yoshizawa, B. Herskind, M.C. Olesen, B. Elbek (in print).
R. Graetzer, K.A. Hagemann, B. Elbek (in print).

Received by Publishing Department
on January 6, 1964.

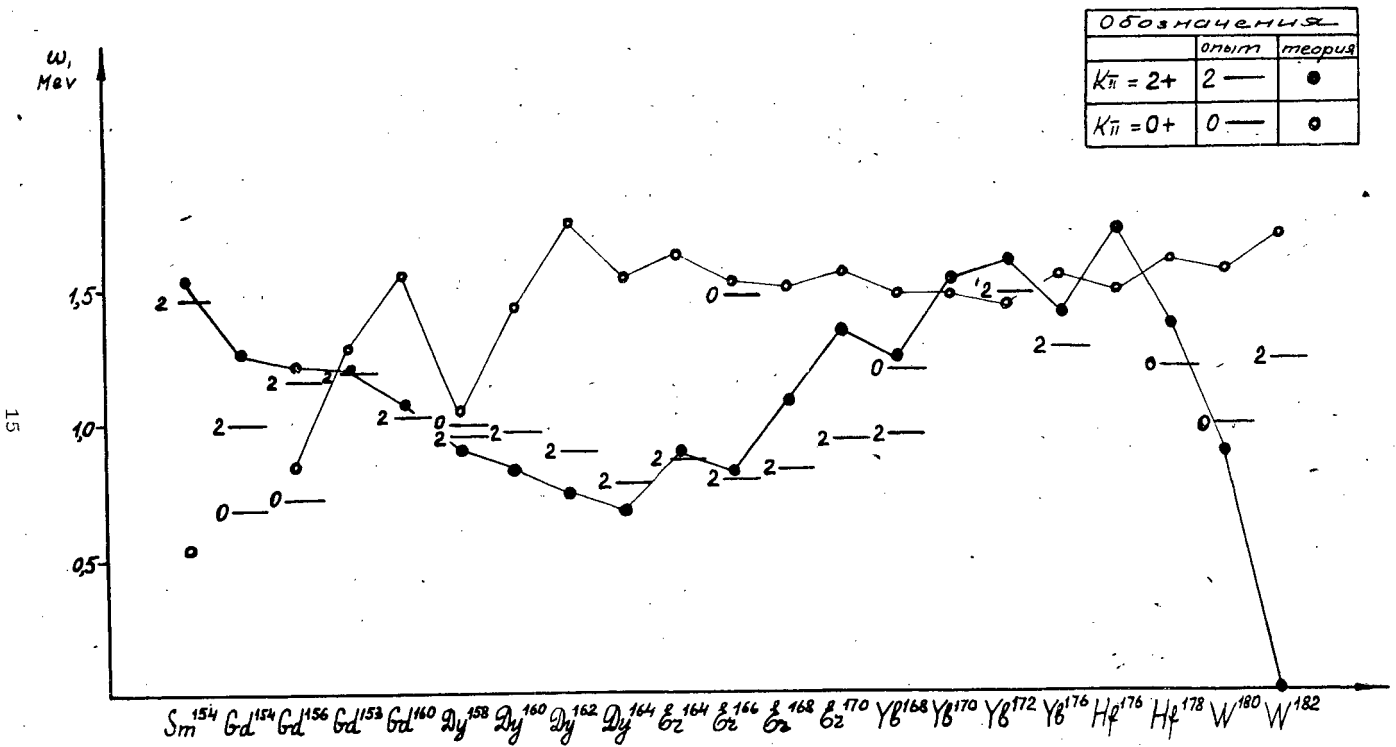


Рис. 1.

Энергии β и γ вибрационных состояний при $\chi^{(2)} = \frac{10}{A^{1/3}} \hbar \omega_0 = \frac{410}{A^{2/3}} \text{ MeV}$

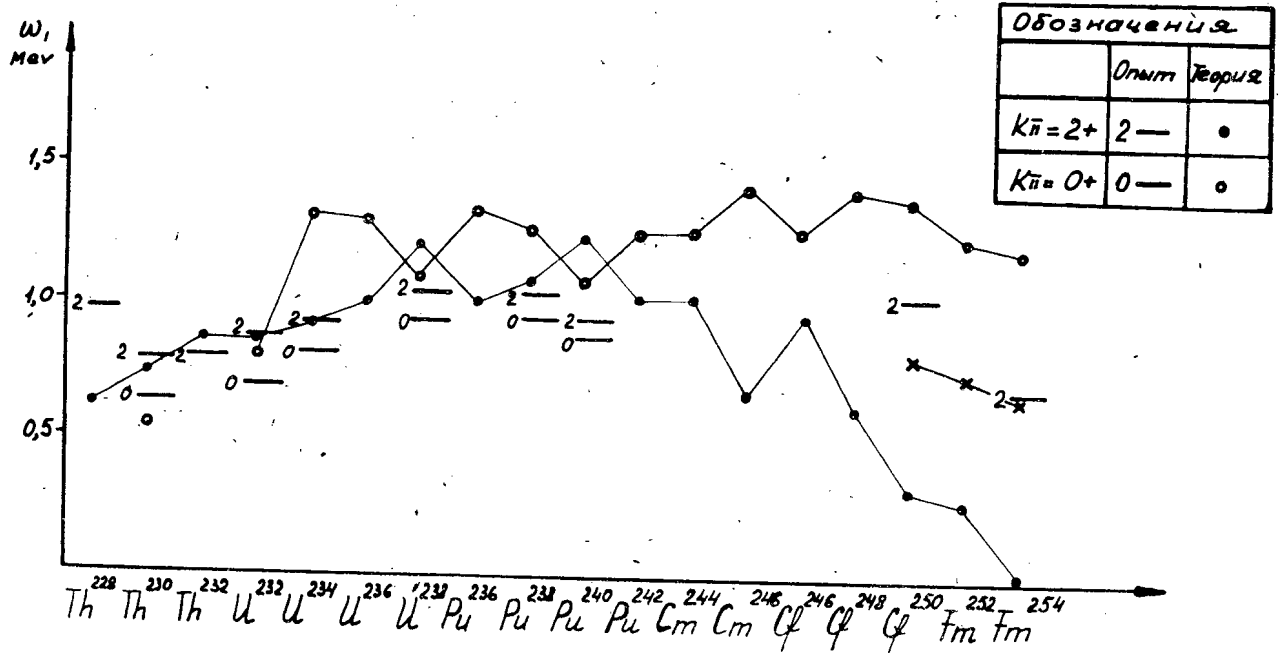


Рис. 2.

Энергии β и γ вибрационных состояний при $\chi^{(2)} = \frac{12}{A^{2/3}} \hbar \omega_0 = \frac{480}{A^{2/3}}$ Mev.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3536. Тираж 420. 1,0 уч.-изд. л.
Перевод И.С.Зарубиной. Февраль 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Ф. Легар, В.И. Никаноров, Г. Петер, А.Ф. Писарев

P-1499

КАМЕРА С ТОНКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ
И ИЗУЧЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ
СПРЯМЛЕНИЯ ИСКРЫ

Дубна. 1964

Легар Ф., Никаноров В.И., Петер Г., Писарев А.Ф. P-1499

Камера с тонкими электродами и изучение положения точки спрямления искры

Описана технология изготовления фольговых электродов с двухсторонней рабочей поверхностью для искровых камер, и приводятся некоторые характеристики искровых камер с тонкими электродами.

Изучено изменение расстояния от отрицательного электрода до точки спрямления искры в зависимости от энергии регистрируемых частиц и угла их прохождения через камеру. Показано, что с увеличением начальной плотности ионизации газа в камере коэффициент Таунсенда α растет за счет взаимодействия зарядов отдельных лавин.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

Lehar F., Nikanorov V.I., Peter H., Pisarev A.F. P-1499

A Spark Chamber with Thin Electrodes and a Study of the Position of the Alignment Point.

A technique for making the foil electrodes with two-sided working surface for spark chambers is described. Some characteristics of spark chambers with thin electrodes are given. The variation of the distance from the negative electrode to the alignment point of a spark with the energy of the detected particles and the angle of their passage through the chamber has been studied. It is shown that with the increasing initial density of the gas ionization in the chamber the Townsend coefficient α becomes greater due to the charge interaction of avalanches.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

Ф. Легар, В.И. Никаноров, Г. Петер, А.Ф. Писарев

P-1499

КАМЕРА С ТОНКИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ
И ИЗУЧЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ
СПРЯМЛЕНИЯ ИСКРЫ

Направлено в ПТЭ

Дубна 1964

Когда частица проходит через многослойную искровую камеру под некоторым углом, то образуется ступенчатый трек, в котором каждая искра располагается перпендикулярно электродам. Применительно к отдельной искре возникает вопрос, какой электрон или группа электронов из наклонного участка следа, заключенного между двумя соседними электродами, образует искру вдоль поля. Другими словами, из какой точки наклонного следа частицы возникает искра. Данную точку называют точкой спрямления искры (это определение введено Ратергленом и Патерсоном^{/1/}).

Положение точки спрямления искры изучалось ранее в работах^{/1,2/}, однако полученные результаты относились к случаю регистрации в камерах космических частиц с неопределенной энергией. В связи с этим представлялось интересным исследовать эту характеристику для известных значений энергии заряженных частиц. С этой целью были использованы протоны с энергией 25 Мэв и 280 Мэв, для которых начальная плотность ионизации газа в камере различалась примерно в 6 раз.

Для проведения опыта были изготовлены две искровые камеры с электродами из алюминиевой фольги толщиной 7 мкм. В отличие от описанных методов изготовления электродов из тонких фольг^{/3,4,5/}, в которых каждый электрод имел лишь одну рабочую поверхность, была осуществлена иная технология натяжения фольги, позволявшая получить электроды с двухсторонней рабочей поверхностью, что дало возможность удвоить число рабочих промежутков камеры.

Конструкция камер

Каждый электрод изготовлялся из двух стеклянных пластин толщиной 1,8 мм и алюминиевой фольги толщиной 7 мкм. Пластины квадратной формы размером 220 x 220 мм имели в середине круглое отверстие диаметром 180 мм. Перед склеиванием детали электродов тщательно обезжиривались бензином и прополаскивались в спирте. Технология склеивания отдельного электрода была следующей. В печи, нагретой до температуры 80-100°C, на гладкую поверхность (толстое стекло) настилалась фольга, и после прогрева на нее накладывалась одна из стеклянных пластин с нанесенным слоем эпоксидной смолы эпокси-1200. Смола наносилась на поверхность пластины лишь у внутреннего края в виде полоски шириной около 5 мм. После этого температуру в печи поднимали до 150°C и выдерживали ее 30-40 минут. После охлаждения электрода фольга по всей площади круга имела ровное и хорошее натяжение. Края фольги затем отрезались с таким расчетом, чтобы ее размер по каждому краю был меньше размера пластины на 10 мм. Таким же путем наклеивалась и вторая пластина, но место склейки проходило по наружному краю электрода. Для ликвидации острых краев угол между фольгой и краем стекла по окружности заливался эпоксидной смолой. Изготовленный таким способом электрод (см. рис.1) имел хорошую механическую жесткость, гладкую поверхность и надежную изоляцию по краям фольги.

Конструкция крепления электродов в камере и подвод напряжения к ним показаны на рис. 2. Как видно из этого рисунка, электроды закреплены в пазах специального каркаса, сделанного из листового оргстекла толщиной 18 мм. Глубина пазов была взята равной 10 мм, чтобы обеспечить вывод края фольги за пределы рабочего объема камеры. Подвод напряжения к каждому электроду осуществлен с помощью упорного винта и переходной клеммы с вакуумным уплотнением из резиновой прокладки.

Общий вид камеры с тремя секциями по одиннадцать электродов показан на рис. 3. Эта камера использовалась в опыте по рассеянию протонов с энергией 280 Мэв. Другая камера имела аналогичную конструкцию, но содержала две секции по 7 электродов и работала в пучке протонов с энергией 25 Мэв.

Проведение эксперимента

Перед началом каждого опыта камеры откачивались до давления 10^{-1} мм рт.ст. и затем наполнялись газовой смесью, состоящей из 99,6% неона и 0,4% аргона, до давления 760 мм рт.ст. (101325 н/м^2). Фотография типичного случая pp -рассеяния в камере показана на рис. 4. Амплитуда импульсов, подаваемых на камеры, составляла 10 кв, а величина очищающего поля была выбрана равной 30 в. Импульсы имели экспоненциальный спад с постоянной времени $\tau = 2 \cdot 10^{-7}$ сек.

В разрядной цепи генератора, работавшего на камеру с 33 электродами, стояла ёмкость с номинальным значением 11,1 т.пф, а во втором генераторе, питающем другую камеру с 14 электродами - 8,6 т.пф. На образование одной искры в треке первой камеры затрачивалась энергия около $12 \cdot 10^{-3}$ дж, во второй - $23 \cdot 10^{-3}$ дж.

После регистрации около $5 \cdot 10^5$ случаев рассеяния протонов во второй камере стали появляться ложные пробои. Особенно много пробоев возникало на внутреннем крае электрода (на границе фольги со стеклом). После 10^6 срабатываний второй камеры число ложных разрядов стало еще больше, а эффективность регистрации частиц снизилась. Для ее восстановления потребовалось увеличить амплитуду импульсов до 11 кв. В первой же камере за все время работы никаких изменений не наблюдалось.

После выполнения программы физических исследований камеры были демонтированы для выяснения причин возникновения пробоев.

Результаты опыта и их обсуждение

Повреждение электродов искрами и снижение эффективности регистрации частиц.

После разборки камер было обнаружено, что электроды второй камеры, в которой наблюдались ложные разряды и на образование одной искры в которой затрачивалась энергия $23 \cdot 10^{-3}$ дж, имели большое число локальных повреждений, вызванных прожиганием фольги искрами. Особенно много повреждений было сосредоточено вблизи середины электродов, где регистрировалась основная масса частиц. На рис. 5 представлена фотография одного из таких электродов. В его центре виден темный квадрат, который образовался из-за большой плотности дырок, прожженных в фольге (квадратная форма соответствует форме определяющего счетчика, стоявшего в схеме отбора частиц). У электродов, имевших большое число поврежденных участков, были обнаружены мелкие "сборки" фольги у круглого края. Их длина не превышала 3-4 см, а амплитуда прогиба составляла 1-2 мм. В точках максимального прогиба имелись прожженные искрой отверстия диаметром до 0,5 мм. Некоторые участки поверхности стекла и эпоксидного слоя оказались покрытыми распыленным металлом, вследствие чего они имели небольшую проводимость.

Электроды первой камеры, на образование одной искры в которой затрачивалось $12 \cdot 10^{-3}$ дж, находились в хорошем состоянии. Они не содержали сборок фольги и имели небольшое число дырок.

Из сопоставления состояния электродов двух камер, изготовленных по одной технологии и проработавших одинаковое время, можно заключить, что появление повреждений в центре электродов второй камеры было вызвано чрезмерно мощными разрядами ($W = 23 \cdot 10^{-3}$ дж). Образование же большого числа прожиганий в фольге привело к частичному ослаблению ее натяжения и появлению сборок у круглого края электродов. В результате расстояние между электродами в местах сборок уменьшилось и появились ложные пробои. Этот процесс затем прогрессировал из-за металлизации поверхности стекла и, следовательно, еще большего сокращения междуэлектродного зазора. Увеличение числа ложных разрядов, естественно, снижало эффективность регистрации частиц. Из этих данных следует вывод, полезный для практики, - в случае использования фольги толщиной до 7 мк для электродов описанной конструкции энергия, выделяемая в искре, не должна превышать 10^{-2} дж.

Определение точек спрямления искр. В ранее выполненных опытах на космических частицах было показано^{1,2}, что в случае отсутствия очищающего поля точка спрямления отстоит от отрицательного электрода (по отношению к полярности импульса) на расстоянии δ , равном $0,2d$, где d - величина междуэлектродного зазора. В опыте, описанном в ¹, промежуток между электродами равнялся 6,4 мм. При наложении на камеру очищающего поля напряженностью 100 в/0,64 см величина δ возрастала до $0,75d$.

Инициирование искры электронами, находящимися вблизи отрицательного электрода, не является удивительным, так как для этих электронов наиболее полно выполняется условие Ретера $\alpha x_0 > 20^{1/6}$, где α - коэффициент Таунсенда, x_0 - путь, проходимый лавиной до возникновения стримера. Однако представлялось интересным выяснить вопрос о том, зависит ли величина δ от угла наклона следа частицы и начальной плотности ионизации газа. Для решения этого вопроса были измерены средние расстояния между соседними искрами в треках частиц. Эти измерения были выполнены для энергий протонов 25 Мэв и 280 Мэв и для различных интервалов углов наклона треков. Из полученных данных затем определялись значения величины δ .

Расстояние между двумя соседними искрами, как видно из рис. 6, зависит от четырех моментов: положения точек спрямления в этих искрах, угла наклона трека частицы, величины смещения начальных электронов под действием очищающего поля и полярности электрода, на поверхностях которого заканчиваются анализируемые искры.

Связь между параметрами, характеризующими точку спрямления, смещение электронов и угол наклона трека легко устанавливается из анализа схемы расположения искр в треке (см. рис. 6). Откуда следует:

$$\Delta_1 = 2(S + \delta) \operatorname{tg} \theta, \quad (1)$$

$$\Delta_2 = 2[d - (S + \delta)] \operatorname{tg} \theta. \quad (2)$$

Обозначения, использованные в этих выражениях, пояснены в тексте под рис. 6.

Заметим, что величина смещения электронов S под действием очищающего поля не зависит от угла наклона следа частицы и плотности ионизации. Поэтому зависимость δ от энергии регистрируемых частиц и угла, под которым они пересекают камеру, будет такой же, как и у величины $S + \delta$. Назовем эту величину параметром эффективного спрямления и обозначим через $\delta_{\text{эф}}$. Тогда соотношения (1) и (2) могут быть записаны в следующей форме:

$$\Delta_1 = 2\delta_{\text{эф}} \operatorname{tg} \theta, \quad (3)$$

$$\Delta_2 = 2(d - \delta_{\text{эф}}) \operatorname{tg} \theta. \quad (4)$$

Из этих равенств получается выражение для $\delta_{\text{эф}}$.

$$\delta_{\text{эф}} = d \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}. \quad (5)$$

В выражении (5) величины $\delta_{\text{эф}}$ и Δ_1 являются функциями угла θ . Таким образом, измеряя для каждого значения угла Δ_1 и Δ_2 , можно определить $\delta_{\text{эф}}$.

Измерения Δ_1 и Δ_2 были выполнены для протонов с энергией 25 Мэв в интервале углов от 0° до 60° , а для 280 Мэв - от 10° до 40° .

Результаты измерений представлены в таблице. Там же указаны значения стандартных ошибок измерений. Умножая данные последней строчки таблицы на величину междуэлектродного зазора $d = 10$ мм, получаем зависимость для $\delta_{\text{эф}}$ от энергии частицы и угла наклона треков. Эта зависимость представлена кривыми 1 и 2 на рис. 7.

Таблица величин Δ_1 , Δ_2 ; $\Delta_1/(\Delta_1 + \Delta_2)$

Энергия, Мэв	25						280			
	Углы, град.	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	10-20	20-30	30-40
Δ_1 мм		0,8±0,10	1,8±0,10	2,9±0,13	3,9±0,17	6,3±0,20	8±0,40	1,6±0,10	3,0±0,20	4,0±0,30
Δ_2 мм		1,4±0,10	3,4±0,18	6,0±0,16	8,0±0,25	12,1±0,70	17±1,0	4,0±0,25	7,1±0,50	9,1±0,50
$\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$		0,36±0,05	0,35±0,02	0,33±0,01	0,33±0,01	0,34±0,02	0,32±0,02	0,29±0,02	0,30±0,02	0,30±0,03

Из рассмотрения этих кривых видно, что величина $\delta_{эф}$, найденная для протонов с энергией 25 Мэв, во всем интервале углов больше, чем для протонов с энергией 280 Мэв. Это свидетельствует о том, что условие Ретера $\alpha x_0 > 20$ в первом случае выполняется при меньших значениях x_0 , чем во втором (здесь $x_0 = d - \delta_{эф}$). Отсюда следует, что коэффициент α (25 Мэв) $>$ α (280 Мэв). Физически это может означать, что при повышенной плотности начальных электронов в следе частицы происходит интенсивное взаимодействие отдельных лавин друг с другом, которое приводит к эффективному росту коэффициента α . И, наоборот, при пониженной плотности начальных электронов (как это имеет место при $E = 280$ Мэв) коллективное взаимодействие лавин будет выражено слабо, и величина α будет определяться в основном величиной внешнего поля. Об этом факте говорит и незначительное уменьшение коэффициента α (25 Мэв) с ростом угла наклона трека. Плотность начальных электронов, естественно, не зависит от угла наклона трека частицы, однако интенсивность взаимодействия отдельных лавин друг с другом ослабляется с ростом угла θ , так как результирующий вектор внешнего и внутреннего поля становится меньше, чем в случае расположения цепочки электронов вдоль внешнего поля.

Кривые 3 и 4 на рис. 7 выражают зависимость δ (расстояние между отрицательным электродом и точкой спрямления искры) от энергии регистрируемых частиц и угла наклона трека. Эти кривые получены путем параллельного переноса кривых 1 и 2 на величину S .

Значение величины S было найдено по формуле

$$S = u \cdot T, \quad (6)$$

где u - скорость дрейфа электронов под действием очищающего поля, а T - время задержки высоковольтного импульса.

Для использованной аппаратуры время T составляло $(0,8 \pm 0,01) \cdot 10^{-6}$ сек. Величина скорости дрейфа электронов u была взята из данных работы^{/1/}. Для очищающего поля, равного 30 в/см, $u = (2,2 \pm 0,1) \cdot 10^5$ см/сек. Подставляя эти данные в формулу (5), получим $S = (1,76 \pm 0,08)$ мм.

Усреднение δ (25 Мэв) и δ (280 Мэв) (кривые 3 и 4 рис.7) по всему интервалу углов приводит к величинам $(1,54 \pm 0,08)$ мм и $(1,24 \pm 0,08)$ мм соответственно. В работе^{/1/} величина δ , найденная в опыте с космическими частицами, равнялась 1,28 мм. Таким образом, результаты, полученные в настоящей работе и в работе^{/1/}, хорошо согласуются друг с другом.

Необходимо заметить, что полученная зависимость δ от энергии частиц и угла наклона трека характеризует физический процесс развития искры в камере и не являет-

ся характеристикой камеры. Использование камер с тонкими электродами дало возможность регистрировать протоны с низкой энергией и выявить эту зависимость.

В заключение отметим, что наиболее простая и точная обработка треков частиц, рассеянных в камере под большими углами, получается в том случае, когда отдельно измеряются углы только по "четным" и только "нечетным" искрам и полученные результаты усредняются. Этот вывод следует из анализа схемы расположения искр в треке частицы (см. рис. 6).

Авторы благодарны А.А.Тяпкину, Ю.М.Казаринову, К.М.Фальбруху и М.Мали за полезные дискуссии и помощь в работе.

Л и т е р а т у р а

1. J.G.Rutherglen, I.M.Paterson. Rev. Sci. Instr., 32, 519, 522 (1961).
2. В.А. Михайлов, В.Н.Ройнишвили, Г.Е. Чиковани. ПТЭ, 1, 39 (1961).
3. F.Fischer, G.T.Zorn. Spark Chamber Symposium, Rev. Sci. Instr., 32, 480 - 531 (1961).
4. А.А.Тяпкин, Цзоу Чжу-лянь. Препринт ОИЯИ Д-870, Дубна, 1962.
5. Ю.Д.Баяков, Г.А.Лексин, Д.А.Сучков, В.В.Теленков. ПТЭ, 2, 45 (1963).
6. H.Raether Ergebnisse der exakten Naturwiss, 22 (1949).
7. I.C.Bowe. Phys. Rev., 117, 1411 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
20 декабря 1963 г.

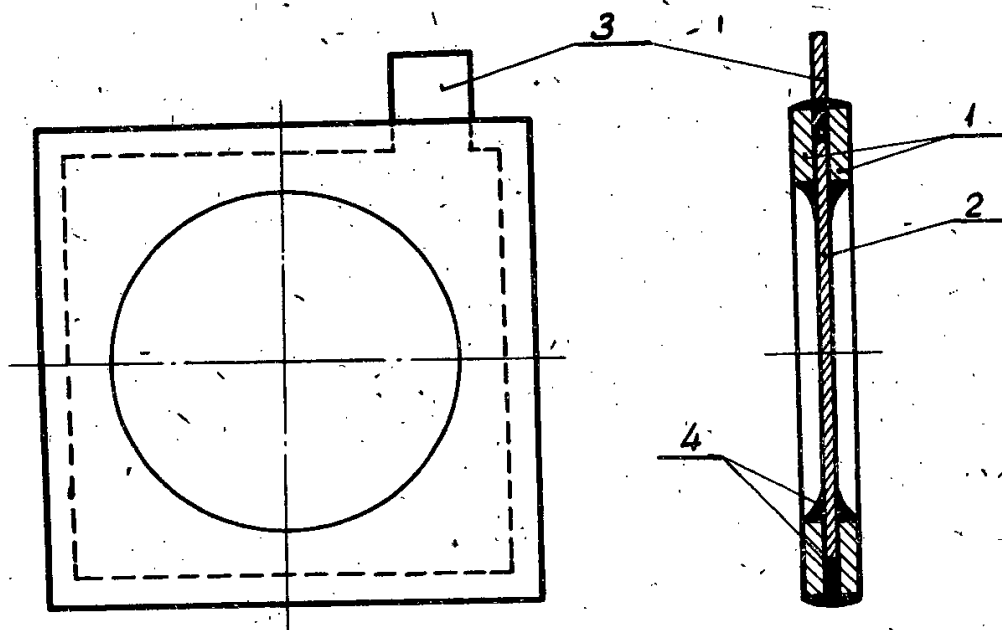


Рис. 1: Общий вид электрода.
1 - стеклянные пластины, 2 - фольга, 3 - лепесток для подвода
напряжения, 4 - эпоксидная смола.

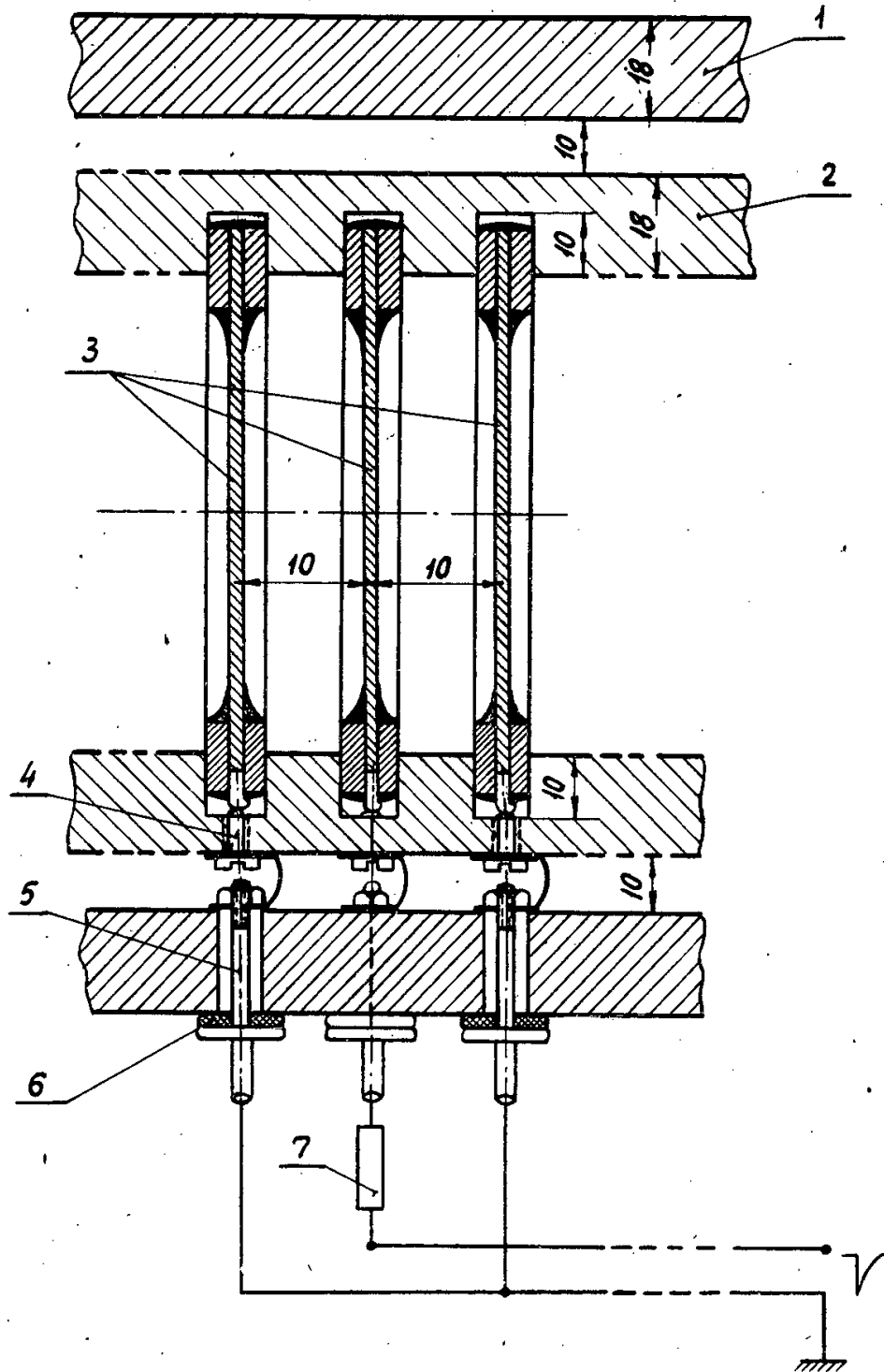


Рис. 2. Схема сборки электродов и подвода напряжения.

1 - наружный кожух, сделанный из оргстекла; 2 - внутренний короб,
3 - электроды, 4 - упорный винт, 5 - проходная клемма.

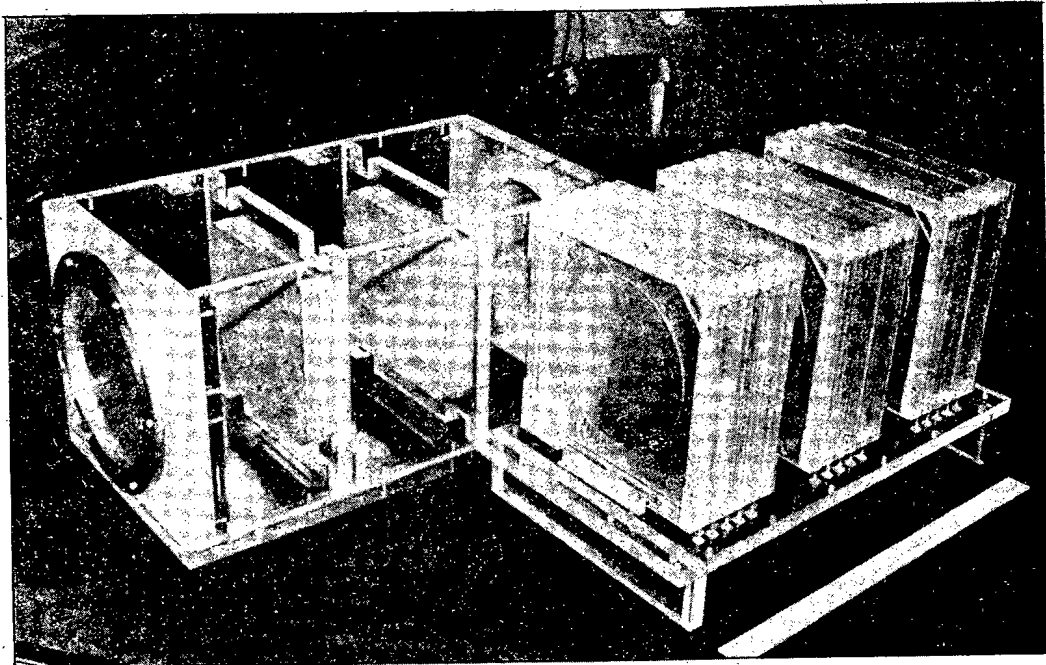


Рис. 3. Камера со снятым кожухом.

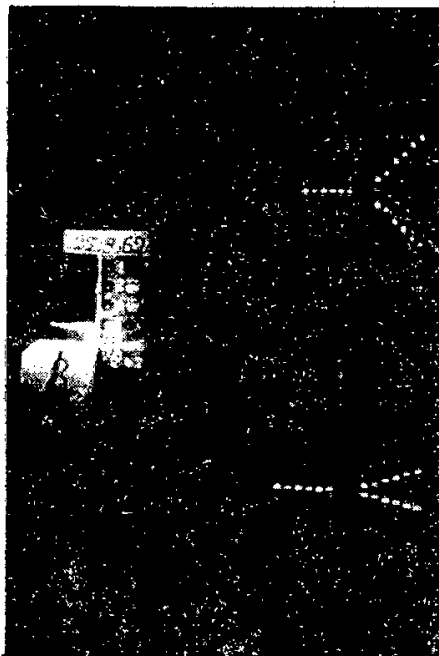


Рис. 4. Фотография треков для протонов,
проваимодействовавших в камере.
Вверху - проекция треков на гори-
зонтальную плоскость, внизу - на
вертикальную.

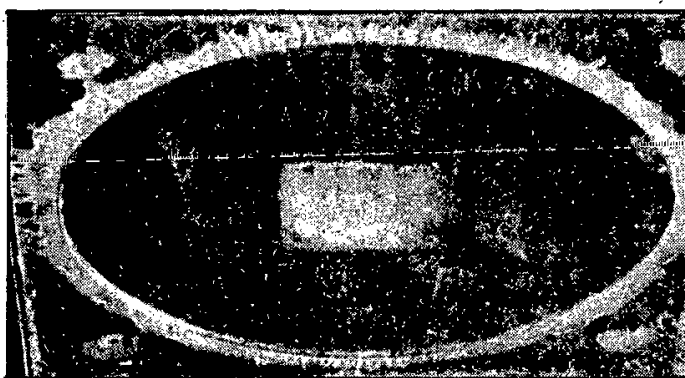


Рис. 5. Фотография электрода, поврежденного искрами.

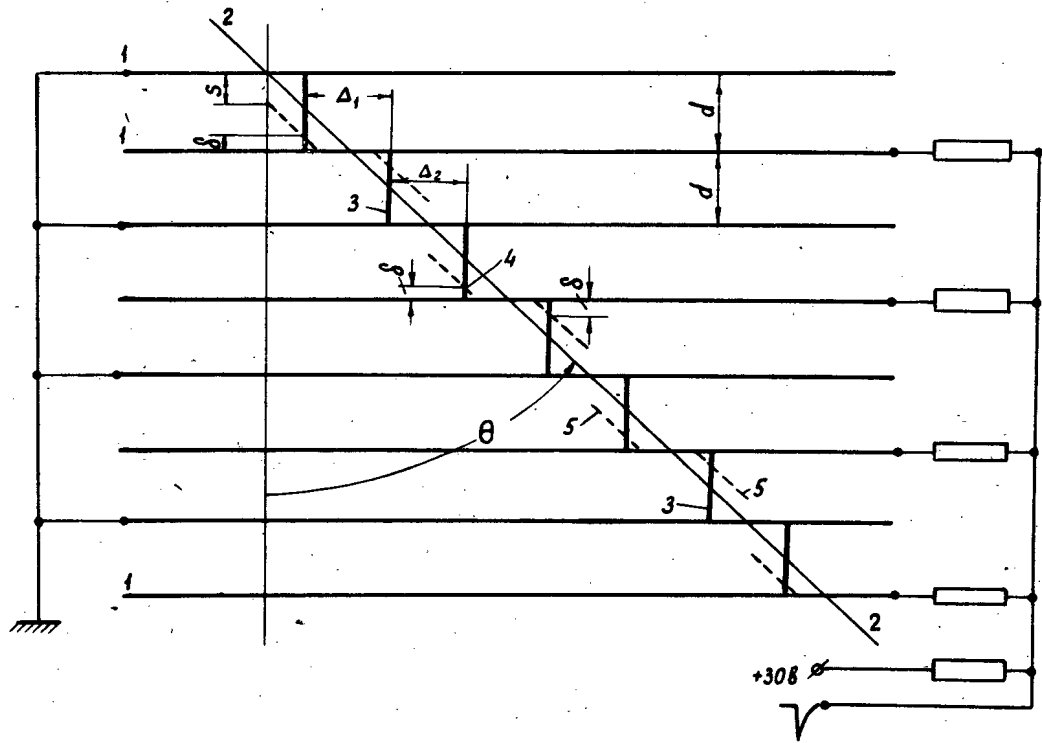


Рис. 6. Схема расположения искр, образующих треки в камере при наличии очищающего поля.
1 - электроды, 2 - след частицы, 3 - искра, 4 - точка спрямления, 5 - положение электронов в момент подачи импульса, S - величина сноса электронов под действием очищающего поля, θ - угол наклона трека частицы относительно вертикали, d - расстояние между электродами.

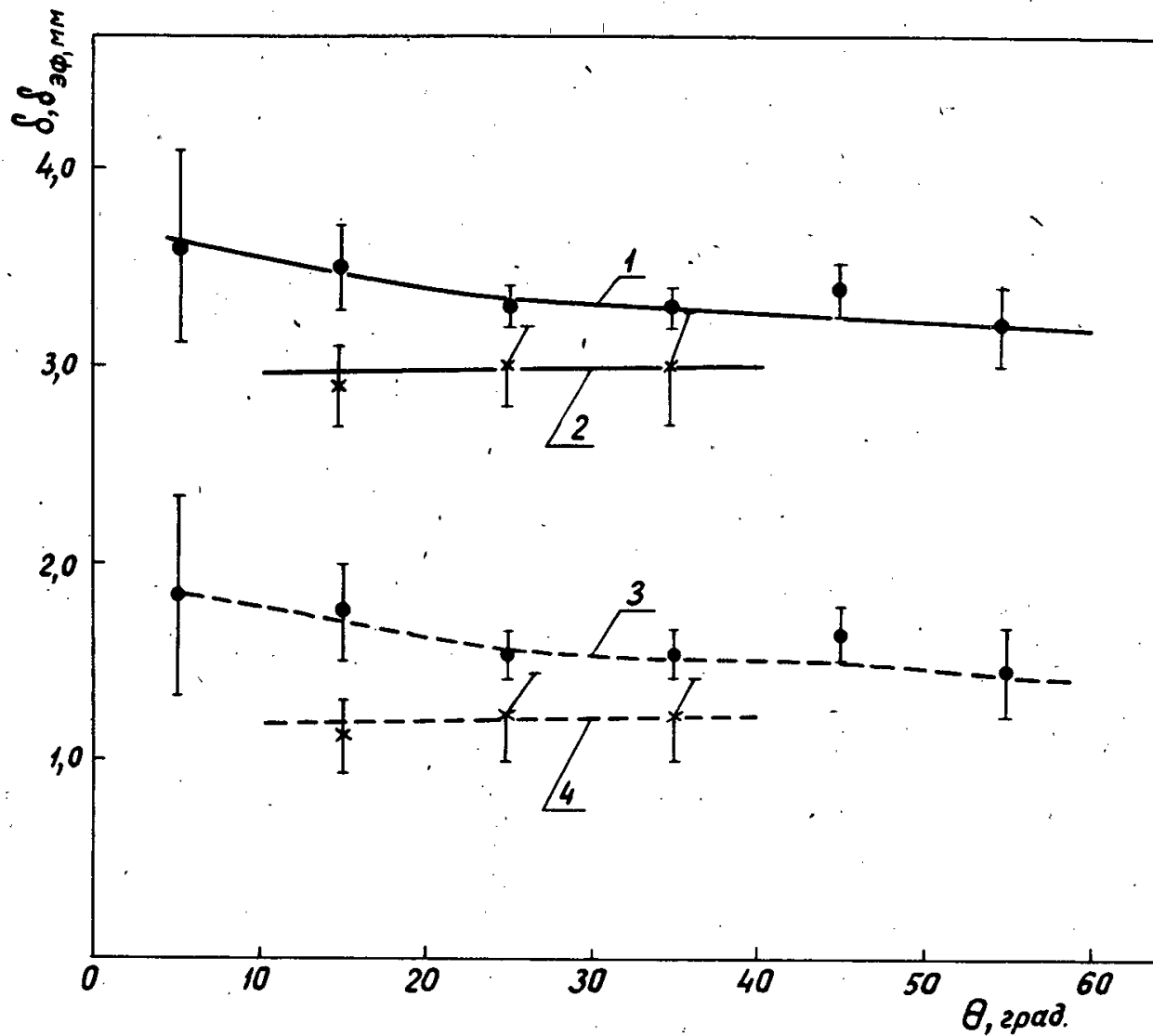


Рис. 7. Зависимость δ и $\delta_{\text{эф}}$ от угла наклона трека частицы.
1 и 3 - $\delta_{\text{эф}}$ и δ для $E = 25$ Мэв, соответственно, 2 и 4 - то же
для $E = 280$ Мэв.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3497. Тираж 320. 0,8уч.-изд. л.
Техн. ред. Н.Н.Зрелова. Январь 1964 г.

STAT



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

V.S.Evseev

E-1457

ON COUPLING CONSTANTS IN
 μ^- -CAPTURE

Дубна, 1963.

О константах взаимодействия в μ^- -захвате

В работе на основе качественных положений, содержащихся в работе М.Л.Иовновича и В.С.Евсеева (Дубна, препринт E-1373, (1963)) производятся количественные расчеты основных эффектов в μ^- -захвате.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна.1963 .**

Evseev V.S.

E-1457

On Interaction Constants in μ^- -Capture

On the basis of qualitative assumptions containing in a paper by M.L.Iovnovich and V.S.Evseev (Dubna, preprint E-1373 (1963)) the quantitative calculations of the main effects in the μ^- capture are made.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Дубна 1963

V.S.Evseev

E-1457

ON COUPLING CONSTANTS IN
 μ^- -CAPTURE

Submitted to Physics Letters

Дубна 1963.

In Ref.^[1] a qualitative attempt was made to interpret a large experimental value of the asymmetry coefficient \bar{a} in the angular distribution of neutrons from μ^- -capture in Ca.^[2] Assuming the constant of induced pseudoscalar coupling g_p to have a large value and introducing the constant of scalar induced coupling g_s , one can explain a large value of \bar{a} . According to Weinberg^[3] g_s belongs to the "second class" interactions. However, numerical calculations have shown that the set of constants proposed in^[1] gives a poor description of some processes in μ^- -capture. The matter is that the authors of^[1] estimated the probability of μ^- -capture in hydrogen by Adams's formulae listed in Ref.^[7]. These formulae pretend to be more accurate due to the account of relativistic effects. Primakoff's and Adams's formulae give different results in the presence of g_s : according to Adams's formulae the addition $g_s \sim -g_v$ increases the probability $\Lambda_{\uparrow\downarrow}$ of μ^- -capture from the singlet state of the hydrogen meso-atom while a large value of g_p decreases it and this results in getting a value for $\Lambda_{\uparrow\downarrow}$ (see Table), close to that obtained experimentally. If in Adams's formula for $\Lambda_{\uparrow\downarrow}$ we change the sign before g_s for the opposite one, the result will be about the same as given by Primakoff's ones.

The present article suggests a new set of coupling constants with increased values of g_A and g_p and including g_s .

As is shown by numerical calculations, the new set of constants describes satisfactorily all the main processes in the He μ^- -capture.

The calculation was carried out on the basis of the effective Hamiltonian as suggested by Primakoff^[4] with five constants; for G_v , G_A and G_p , the following expressions were used^[4,5]:

$$\begin{aligned} G_v &= g_v (1+\gamma) + g_s \\ G_A &= g_A - (g_v + g_M) \gamma \\ G_p &= (g_p - g_A - g_v - g_M) \gamma \end{aligned}$$

$$\gamma = 0,055 \text{ (for light nuclei).}$$

Table 1 gives the results of the calculations of the main effects for the usual set of constants (in the $g_v^{(\beta)}$ units):

$$\begin{aligned} g_v &= 0,97 \\ g_A &= -1,22 \\ g_M &= 3,58 \\ g_p &= -9,80 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} g_v \\ g_A \\ g_M \\ g_p \end{aligned}} \right\} (a)$$

$$\begin{array}{ll} \xi_V = 0,97 & \xi_P = -20,7 \\ \xi_A = -1,50 & \xi_S = -1,00 \quad \} (\beta) \\ \xi_M = 3,58 & \end{array}$$

The author would like to thank Professor L. Wolfenstein for valuable discussions and critical remarks.

Table 1

Effects	Theoretical values		Experimental values
	(α)	(β)	
Probability of μ^- -capture in liquid hydrogen, Λ_{μ}^{-1} , sec $^{-1}$	$610_{-?}^{+?}$ xx/ (4,6,7) $565_{-?}^{+?}$ x/	$470_{-?}^{+?}$ xxx/ $420_{-?}^{+?}$ x/	445_{-35}^{+35} xxxx/
Angular distribution of neutrons from μ^- -capture in Ca 40	(for $\gamma_{Ca} = 0,044$ xxxxx/) $-(0,32_{-?}^{+0})$ / 1,2/	(for $\gamma_{Ca} = 0,044$) $-(0,86_{-?}^{+?})$	$-(1,00_{-0,15}^{+0,15})$ / 2/
$\mu^- + He^3 \rightarrow H^3 + \nu$ Probability sec $^{-1}$ $\Lambda_{He^3 \rightarrow H^3} = R \equiv G_F^2 + 3G_A^2$	(R = 5,92) from 1400_{-140}^{+140} / 18/ to 1500_{-150}^{+150} / 17/	(R = 6,30) from 1490_{-150}^{+150} to 1600_{-160}^{+160}	1500_{-60}^{+60} / 9,10/
$\mu^- + C^{12} \rightarrow B^{12} + \nu$ Probability sec $^{-1}$ $\Lambda_{C^{12} \rightarrow B^{12}} = G_G^2$	($G_G^2 = 1,63$) from 6900_{-1400}^{+1400} / 18/ to 7300_{-1500}^{+1500} / 11,12/	($G_G^2 = 2,10$) from 8600_{-1700}^{+1700} to 9400_{-1900}^{+1900}	from 6310_{-240}^{+240} / 13,14/ to 9180_{-500}^{+500}
Hyper-fine structure effect $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} F$	$0,71_{-?}^{+?}$ / 4,15/	$0,38_{-?}^{+?}$	$0,60_{-0,07}^{+0,07}$ / 16/
Shapiro-Blokhintsev effect (19) $\frac{\Lambda_{\mu}^{-1} - K}{\Lambda_I^{-1}} \equiv \frac{(G_P - G_A)^2}{G_V^2 + 2G_A^2}$	(K = 0,104) $(0,66_{-0,095}^{+0,095})$ / 18,20/	(K = 0,032) $(0,20_{-0,029}^{+0,029})$	$0,38_{-0,07}^{+0,07}$ / 18/

x/ According to Primakoff's formulae / 14/ .
 xx/ According to Adams's formulae / 7/ with a changed sign before ϵ_s .
 xxx/ Weighted mean for all experiments (L.Wolfenstein, Proc. of the International Conf. on High Energy Physics, Geneva, 1962, p.821 (1962)).
 xxxx/ An average neutron energy recorded in experiment / 1,2/ at the threshold $E_n \approx 20$ MeV, close to $\bar{E} \approx 20$ MeV and neutrino energy $E_\nu \approx 80$ MeV, i.e. $\gamma_{Ca} = 0,044$.

R e f e r e n c e s

1. M.L.Iovnowich, V.S.Evseev. Dubna, preprint E-1373, 1963.
Phys. Lett., 6, 333 (1963).
2. V.S.Evseev, V.S.Roganov, V.A.Chernogorova, Chang Run-Hwa,
M.Szymczak. Dubna, preprint E-1372, 1963; Phys. Lett. 6, 331 (1963).
3. S.Weinberg. Phys. Rev., 112, 1375 (1958).
4. H.Primakoff. Rev. Mod. Phys., 31, 802 (1959).
5. H.A.Tolhoek. "Selected Topics in Nuclear Theory", IAEA, Vienna, 1963,p.344.
6. S.Weinberg. Phys. Rev. Lett., 4, 575 (1960).
7. L.Adams. Phys. Rev., 126, 1567 (1963).
8. L.Wolfenstein. Proc. of the 1960 Annual Intern. Conf. on High-Energy
Phys. on Rochester, 529 (1960).
9. I.V.Falomkin, A.I.Filippov, M.M.Kulyukin, E.Pontecorvo, Yu.A.Scherbakov,
R.M.Sulyaev, V.M.Tsupko-Sitnikov, O.A.Zaimidoroga. Phys. Lett., 3, 229(1963)
10. L.B.Auerbach, R.Y.Esterling, R.E.Hill, D.A.Jenkins, J.T.Lach, N.H.Lipman.
Phys. Rev. Lett., 11, 23 (1963).
11. G.Flammand, K.Ford. Phys. Rev., 116, 1591 (1959).
12. L.Wolfenstein. Nuovo Cimento (10), 13, 319 (1959).
13. E.J.Maier, B.L.Bloch, R.M.Edelstein, R.T.Seigel, Phys. Rev. Lett.,
6, 417 (1961).
14. I.O.Durgman, J.Fisher, B.Leontic, A.Lundby, R.Mennier, J.P.Stroot, J.D.Teja.
Phys. Rev. Lett., 1, 469 (1958).
15. H.Überall; Phys. Rev., 121, 1219 (1961).
16. G.Gulligan, J.F.Lathrop, V.L.Telegdi, R.Winston, R.A.Lundy.
Phys. Rev. Lett., 7, 458 (1961).
17. L.Wolfenstein. Proc. of the Intern. Conf. on High-Energy Phys., Geneva,
1962, p. 821 (1962).
18. L.Wolfenstein. private comm. (1963).
19. I.S.Shapiro, L.D.Blokhintsev. JETP, 39, 1112 (1960).
20. Ericson T., Sens Y.C., preprint (1961).

Received by Publishing Department
on November 16, 1963,

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3366. Тираж 300, Техн. редактор В. Р. Саранцева
Ноябрь 1963 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

G.Heber and H.J.Kaiser

E- 1500

FUNCTIONAL SOLUTION SCHEME FOR RELATIVISTIC
STRONG COUPLING THEORY.I.

Дубна 1964

Хебер Г., Кайзер Г.

Функциональная схема решения для релятивистской теории сильной связи I.

Величина вакуумного ожидания S -матрицы представлена как функциональный интеграл и факторизована в соответствии с формулой $S_{vac} = \exp(-iW) \int D\phi \exp(-i \int dx L_w)$. В результате функциональный интеграл включает только часть Лагранжиана L_w без производных и может быть легко вычислен в дискретном пространстве. Мы предлагаем графическую схему, которая иллюстрирует действие оператора $W = \int dx dy \delta(x-y) (\delta/\delta\rho(y)) \square_x (\delta/\delta\rho(x))$. Схема разработана детально для вычисления двухточечной функции нейтральных бозонных полей с взаимодействием $\lambda\phi^M$ для четного M . Предлагается метод, который при некоторых предположениях относительно сходимости должен давать после конечного числа шагов наименьшие собственные значения массы и соответствующие матричные элементы. Метод показывает характерные различия между ренормализуемыми и неренормализуемыми теориями.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна. 1964.

G.Heber and H.J.Kaiser

E-1500

Functional Solution Scheme for Relativistic
Strong Coupling Theory I.

The vacuum expectation value of the S -matrix is represented, following Hori, as a functional integral and separated according to $S_{vac} = \exp(-iW) \int D\phi \exp(-i \int dx L_w)$. Now, the functional integral involves only the part L_w of the Lagrangian without derivatives and can be easily calculated in lattice space. We propose a graphical scheme which formalizes the action of the operator $W = \int dx dy \delta(x-y) (\delta/\delta\rho(y)) \square_x (\delta/\delta\rho(x))$. The scheme is worked out in some detail for the calculation of the two-point-function of neutral Bose fields with the self-interaction $\lambda\phi^M$ for even M . A method is proposed which under certain convergence assumptions should yield in a finite number of steps the lowest mass eigenvalues and the related matrix elements. The method exhibits characteristic differences between renormalizable and nonrenormalizable theories.

Preprint, Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna 1964.

G.Heber^x and H.J.Kaiser^{xx}

E- 1500

FUNCTIONAL SOLUTION SCHEME FOR RELATIVISTIC
STRONG COUPLING THEORY. I.

Submitted to "Zeitschrift für Naturforschung"

- x) On leave from Universität Leipzig, DDR
- xx) On leave from Technische Universität Dresden, D DR.

1. Introduction

The aim of this paper is to present an approximation method for the practical calculation of the 2-point-function of a quantum system which is defined by its Lagrangian. The method should work especially well for strong interactions (or strong nonlinearities) and be Lorentz invariant. We started from Hori's method^{/1/}. The main idea of Hori is the following: The 2-point-function can be represented formally as

$$\chi(x_1, x_2) = - S_{vac}^{-1} \frac{\delta^2 S_{vac}}{\delta \rho(x_1) \delta \rho(x_2)} \Big|_{\rho=0} \quad (1)$$

with

$$S_{vac} = \langle T \exp(-i \int dx L) \rangle_{vac} \quad (1)$$

S_{vac} can be written in the form of a functional integral

$$S_{vac} = \int D\phi \exp(-i \int dx L) \quad (2)$$

where ϕ is the classical field quantity of the system. The integral (2) could be evaluated in lattice-space if L would not contain derivatives of ϕ . Therefore, Hori proposes the decomposition

$$S_{vac} = e^{-iW} \Omega \quad (3)$$

with

$$\Omega = \int D\phi \exp(-i \int dx L_w) \quad (4)$$

where L_w is the part of L without derivatives, so Ω can be calculated in lattice-space. The operator W stems from the difference of L and L_w . If we have e.g. $L - L_w = \phi(x) \square \phi(x)$ it follows

$$W = \int dx dy \delta(x-y) \frac{\delta}{\delta \rho(y)} \square_x \frac{\delta}{\delta \rho(x)} \quad (5)$$

In order to calculate S_{vac} from (3), (4) and (5) in practice one of us proposed^{/2/} to expand S_{vac} and Ω into Volterra-series with respect to the external source:

$$S_{vac}[\rho] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T_n(x_1 \dots x_n) e_n(x_1 \dots x_n) \quad (6)$$

$$\Omega[\rho] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \phi_n(x_1 \dots x_n) e_n(x_1 \dots x_n) \quad (7)$$

with $e_n(x_1 \dots x_n) = \rho(x_1) \dots \rho(x_n) \quad (2)$.

We have then 3)

$$\chi(x_1, x_2) = - \frac{T_2(x_1, x_2)}{T_0}$$

$$T_2(x_1, x_2) = \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{i^{n-2}}{(n-2)!} \int dx_3 \dots dx_n G(3,4)G(5,6)\dots G(n-1,n) \phi_n(x_1 \dots x_n) \quad (8)$$

where $G(i,j) = \delta(x_i - x_j) \square_{ij}$.

The main difficulty in evaluating (8) was (see [2]) that one must sum the whole infinite series (8) to get a two-point-function which is different from zero for $x_1 \neq x_2$. The aim of this article is to show how to extract some interesting information concerning the two-point-function from the knowledge of a (properly chosen) finite number of terms from (8). In order to develop the formalism we shall discuss as model case systems with the Lagrangian

$$L = \phi(x) \square \phi(x) + \lambda \phi^M(x) - \rho(x) \phi(x) \quad (9)$$

where λ is a (real) parameter and M is some positive even integer. The variable x may be a vector in either Minkowski-space or in another space of less than four dimensions. For example, we shall find it interesting to discuss also the special case in which x represents simply the ordinary time. t [4].

2. The ϕ_n -functions

The functions ϕ_n are defined by the integrals

$$\phi_n(x_1 \dots x_n) = \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-i \int dx L'_w} \quad (10)$$

where $L'_w = L_w + \rho \phi - \lambda \phi^M(x)$. These integrals can be calculated in lattice space. They reduce to infinite products of integrals of the type

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^k e^{-i\lambda \epsilon y^M} = \begin{cases} \frac{2}{M} (i\lambda \epsilon)^{\frac{k+1}{M}} \Gamma(\frac{k+1}{M}) \equiv M_k M_0 & k \text{ even} \\ 0 & k \text{ odd} \end{cases} \quad (11)$$

$$M_0 = \int dy e^{-i\lambda \epsilon y^M}$$

for even M . ϵ is the cell volume in the lattice space. The ϕ_n can now be expressed in the form

space representation of the δ -function, because our functions result from the limiting processes "lattice space \rightarrow continuous x -space" (8).

3. Graphical Representation and evaluation of the two-point-function

The insertion of the ϕ_n into the series (8) for T_2 yields so many terms that a graphical representation proves very useful for classification and calculation of the various contributions. We introduce the graph scheme by the example of the function

$$\delta(x_1 - x_3) \delta(x_4 - x_5) \delta(x_6 - x_7) \dots \delta(x_n - x_2)$$

contributing to ϕ_n . From (8) we see that we have to calculate

$$\int dx_3 dx_4 \dots dx_n \delta(x_3 - x_4) \delta(x_5 - x_6) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \int \dots \int \delta(x_1 - x_3) \delta(x_4 - x_5) \dots \delta(x_n - x_2). \quad (15)$$

Using the well-known properties of the derivatives of δ -functions (15) becomes

$$\int \dots \int \delta(x_1 - x_2) \quad (15a)$$

To get the graphical representation of (15) we depict temporarily each variable x_i by one point; then we fuse those points which appear in the ϕ_n -function as arguments of the same δ -function to $n/2$ double-points (see Fig. 1a).

Next we connect by lines all those points which share the same δ -function in the operator W (eq.5) (see Fig.1b). Finally, we indicate the "free" points 1 and 2 (over which there is no integration) by short lines. Now we can drop the numbers and arrive at Fig. 1c.

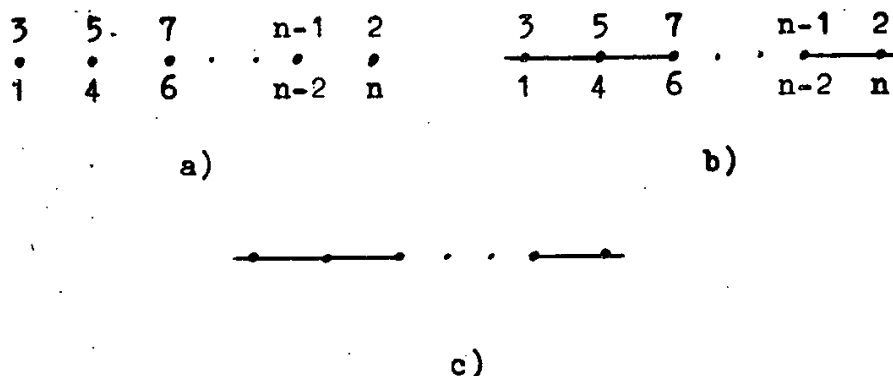


Fig. 1. Steps in deriving the graph scheme.

To illustrate the prescription further, we compile in Figs. 2-4 all terms of T_2 which arise from ϕ_2 , ϕ_4 and ϕ_6 .

$$f'' \delta(12)$$

Fig. 2. Contribution from ϕ_2 to T_2 .

$$2f''^2 \square \delta(12)$$

a)

$$f''' \square \delta(0) \delta(12)$$

b)

Fig. 3. Contributions from ϕ_4 to T_2 .

$$8f''^3 \square^2 \delta(12)$$

a)

$$4f''' f'' \square \delta(0) \square \delta(12)$$

b)

$$4f''' f'' \square \delta(0) \square \delta(12)$$

c)

$$f^{(6)} (\square \delta(0))^2 \delta(12)$$

d)

$$4f''' f'' \square^2 \delta(0) \delta(12)$$

e)

Fig. 4. Contributions from ϕ_6 to T_2 .

We must add some remarks on these figures.

1) The loop in Figs. 3b, 4b and 4c represents the expression

$$\int dx_3 dx_4 \delta(34) \square_4 \delta(34) \delta(42) \delta(13).$$

2) Similarly the double loop in Fig. 4d has the value

$$\int dx_3 \dots dx_6 \delta(34) \delta(56) \square_4 \square_6 \delta(13) \delta(35) \delta(64) \delta(42).$$

3) We have omitted here all graphs which consist of two or more disconnected parts. It can be shown (see Appendix B) that they are vacuum terms which cancel with similar contributions from T_0 (eq. 8).

4) It is important to note that most of the graphs appear more than once in T_2 . This gives the weight factors multiplying the expressions in Figs. 3 and 4. (see Appendix C). Furthermore, we must multiply by the factor $i^{n/2-1} \sqrt{(n/2-1)!}$ appearing in (8).

5) Terms like $\square \delta(0)$, of course, have only symbolic meaning. They must be always interpreted as limits of the corresponding expression in lattice space (cf. remark at the end of 2). For example, the derivative $(\frac{\partial}{\partial t})^{2k} \delta(t)$ reads in lattice space

$$\delta^{(2k)}(t) = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (\Delta t)^{2k+1}} \begin{cases} (-1)^m \binom{2k}{k+m} & \text{for } t = 2m \Delta t \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (16)$$

Therefore, we have to put

$$\delta^{(2k)}(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (\Delta t)^{2k+1}} \binom{2k}{k} \quad (16a)$$

The graphical representation, just introduced, has the further advantage to yield even the results of a good deal of the integrations in (8):

Each line between two points generates one \square . The number k of lines between the points 1 and 2 therefore, gives the exponent of \square operating in the result on $\delta(12)$. Multiple "bounds" like Fig. 5a or branchings like Fig. 5b are easily recognized as $[\square \delta(12)]^3$ and $[\square^2 \delta(12)]^3$ respectively.

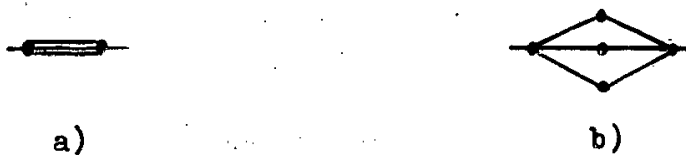


Fig. 5. Some graph elements; a) triple bound, b) branching.

"Loops" i.e. structures sharing only one point with the skeleton graph (Figs. 3b, 4b, c, d) yield constant factors of the type $\square^k \delta(0)$. Another important aspect of our graphical representation is that we can state a rule for the generation of all terms which contribute to T_2 from a given ϕ_n (for large n there are very many terms, so such a rule has great value): Draw first the graph with the highest derivative possible for the given n ,⁹⁾ (Of this type are, e.g., the graphs Figs. 1c, 2, 3a, 4a).

Then you can generate all further graphs belonging to the same n by "folding" that basic graph to fuse points in all possible ways. Fig. 6 demonstrates the procedure for the case $n = 6$.¹⁰⁾ (cf. fig. 4).

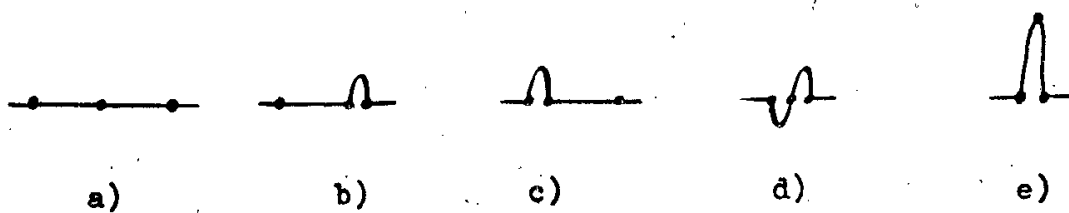


Fig. 6. Construction of the graphs fig. 4 by fusion of points.

A closer inspection of the contributions to T_2 shows that they differ in their origin (characterized by the index n of ϕ_n) and that they lead to different powers k of \square operating on $\delta(12)$.¹¹⁾ Therefore, it proves useful to arrange the various contributions to T_2 into a scheme sketched in Fig. 7. Only at the places marked by crosses we have contributions (of course, the

	0	1	2	3	4	k
2	x					
4	x	x				
6	x	x	x			
8	x	x	x	x		
10	x	x	x	x	x	
n						

Fig. 7. Arrangement of the contributions (crosses) to T_2 according to order n of graph and power k in result $\square^k \delta(12)$.

figure must be continued to infinity). We remark that all "basic graphs" appear on the diagonal $k = (n - 2) / 2$. It must be noted, however, that there exist "split-

ing" graphs which contribute to more than one point of the scheme Fig.7 (e.g. graphs containing the elements Fig. 5 a,b). They must be treated by expanding the involved powers of derivatives of δ -functions into a sum of simple derivatives.

Fig.7 is most important for the discussion of the dependence of the diverse contributions to T_2 on the lattice-constant ϵ which appears in the functional integrals and expressions like $\square \delta(\rho)$. It can be proved (see Appendix D) that to each point of Fig. 7 there belongs a quite definite power of ϵ . Fig.10 (see Appendix D) shows an example. We see that the ϵ power depends on the interaction exponent M (see eq. (9)) and on the number N of dimensions we consider. Fig.10 leads to interesting consequences to be discussed in the next paragraph.

4. Properties and consequences of our representation of T_2

It is now clear that we arrive at a representation of T_2 in the form

$$T_2(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \square^k \delta(x_1 - x_2). \quad (17)$$

Here, each a_k is an infinite series of the contributions of the k -th vertical of Fig. 7 or 10. The meaning of the series (17) becomes clear after a Fourier transformation¹²⁾:

$$T_2(x) = \int dp e^{ip^\nu x_\nu} T_2(p)$$

The result is

$$T_2(p) = - \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p^2)^k \quad , \quad p^2 \equiv p^\nu p_\nu \quad (17a)$$

That is, we have got an expansion of the Fourier transform of the two-point-function into powers of p^2 .

At this point it is quite natural to look at the well-known case $M = 2$ (where we do not have any interaction, and the exact T_2 -function is of course $T_2(p) = \text{const.}/(p^2\lambda)$). It turns out that the sum of the "basic graphs" (which always form the diagonal in Figs. 7 or 10) gives exactly this result. All other contributions to the a_k vanish for $M = 2$ as they are all proportional to some $f^{(\nu)}$ with $\nu > 2$ and these derivatives are zero because $f(\rho)$ has here simply the form $f(\rho) = \rho^2/4\lambda$.

In all other cases ($M \neq 2$) we have non-zero contributions throughout Fig. 7. Now, the sign of the coefficient $(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{M})$ of n in (D8) is decisive for the behaviour of the solutions. We have to consider the three cases

$$M \begin{cases} < \\ > \end{cases} \frac{2N}{N-2} \quad (18)$$

which can be identified by standard method as those of super-renormalizable, renormalizable, and non-renormalizable theory respectively (degree of divergence decreasing, constant, and increasing respectively with rising number of vertices in perturbation theory).

In case of super-renormalizability there exists as in Fig. 10 a straight line Λ which separates those contributions to T_2 which are proportional to a positive power of ϵ from those with a negative one. The terms on Λ itself are independent of ϵ . Each a_k of (17) then appears as an infinite series of the form:

$$a_k(\epsilon) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{k\ell} \epsilon^{\beta - \gamma \ell} \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{k+1}{M} (M-2) \\ \gamma &= 1 - \frac{2}{N} - \frac{2}{M} \end{aligned} \quad (19)$$

Our interest lies in the value $a_k(0)$ which could be determined in principle by analytic continuation of the function $a_k(\epsilon)$ defined by the series (19) in its region of convergence. We make no attempt to tackle the convergence problem. But if (19) converge for all non-zero ϵ then it must be possible to compute $a_k(\epsilon)$ for different values of ϵ from a finite number of terms and then to extrapolate to $a_k(0)$.

Using the approximate values of $a_k(0)$ calculated in this way for several k , it is not too difficult to extract some information about $T_2(p)$, even if one is restricted in practice to rather small k .

We assume the existence of the Lehmann-Kallen spectral representation ¹³⁾

$$T_2(p) = \int_0^{\infty} d\kappa^2 \frac{b(\kappa^2)}{p^2 - \kappa^2} \quad (20)$$

with the spectral function $b(\kappa^2)$. To compare this formula with (17a) we write it in the form

$$T_2(p) = - \int_0^{\infty} d\kappa^2 \frac{b(\kappa^2)}{\kappa^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p^2}{\kappa^2} \right)^k \quad (20a)$$

and find ¹³⁾

$$a_k = - \int_0^{\infty} d\kappa^2 \frac{b(\kappa^2)}{\kappa^{2+2k}} \quad (21)$$

Our a_k can thus be recognized as moments of the spectral function. Assuming a non-degenerate, discrete mass- (resp. for $N=1$ energy -) spectrum we can determine from the spectral moments a_k the lowest eigenvalues and the corresponding matrix elements: for we must only take k sufficiently large to suppress the second lowest eigenvalue in order to determine κ_0^2 from

$$\kappa_0^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} \quad \text{for } b(\kappa^2) = \sum_i b_i \delta(\kappa^2 - \kappa_i^2) \quad (22)$$

If a fair number of the a_k is known with sufficient accuracy it is not difficult to go on with the determination of subsequent eigenvalues κ_i^2 . In the case of a theory on the verge of renormalizability ($M = 2N/(N-2)$) the ϵ -power remains constant and positive throughout each vertical of Fig. 7. The immediate consequence is that T_2 vanishes in the limit $\epsilon \rightarrow 0$ leading to the statement that the S -matrix is unity (other T_p show similar behaviour as can be seen by generalization of the argument in Appendix D). In order to avoid that result one could combine the ϵ -power of each vertical with the (p^2) to get

$$T_2(p) = \frac{M-2}{\epsilon^{M-2}} \sum_k \bar{a}_k (\frac{M-2}{\epsilon^{M-2}} p^2)^k = \sum_i \frac{\bar{b}_i}{p^2 - \frac{\bar{\kappa}_i}{\epsilon^{1-2/M}}} \quad (23)$$

defining renormalized \bar{a}_k by

$$a_k = \bar{a}_k \epsilon^\beta \quad (24)$$

Then it turns out that all eigenvalues can be renormalized with the same constant

$$\epsilon^{(2-M)/M} \quad (25)$$

such that this constant is only an (unobservable) scale factor. In the case of non-renormalizable theories, the ϵ -powers in Fig.7 remain positive but can no more united with the (p^2) . Then each eigenvalue is to be renormalized by another constant such that the spectrum becomes essentially ϵ -dependent.

It seems to demand only minor alterations to treat the case of a general n point-function. We would like to postpone that generalization as well as numerical calculations until we have incorporated the much more interesting case of Fermi fields. We hope to return to the subject later.

A c k n o w l e d g e m e n t

It is a pleasure for us to thank the direction and the staff of the Joint

Institute for Nuclear Research for the kind hospitality, for the interest in this work, and for some helpful discussions.

APPENDIX A. Relation between the $f_0^{(\nu)}$, M_k and ϕ_n

On the one hand, we have

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \phi_n(x_1 \dots x_n) \rho(x_1) \dots \rho(x_n) \quad (A1)$$

on the other, we expand

$$\Omega = e^{\int dx f(\rho(x))} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f_0^{(\nu)} \int dx \rho^\nu(x) \right]^m \quad (A2)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots} \frac{a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \dots}{\nu_1! \nu_2! \dots}$$

with $\sum \nu_j = m$ and $a_j = \frac{f_0^{(j)}}{j!} \int dx \rho^j(x)$.

Comparison yields

$$\int dx_1 \dots dx_n \phi_n(x_1 \dots x_n) \rho(x_1) \dots \rho(x_n) = \frac{n!}{i^n} \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots} \prod \frac{1}{\nu_j!} \left[\frac{f_0^{(j)} \int dx \rho^j(x)}{j!} \right]^{\nu_j} \quad (A3)$$

with $\sum_{j=1}^{\infty} j \nu_j = n$.

Explicit evaluation of (A3) leads just to the above (14) mentioned and used structure of the ϕ_n - functions as sums over products of δ - functions with derivatives of f at the point $\rho=0$ as factors. For practical calculations we need further the explicit relationship between the M_k from eqs. (11) and (12) and the $f_0^{(\nu)}$. To derive it we put

$$e^{\epsilon f(\rho)} = J. \quad (A4)$$

then we have simply

$$M_k = \left. \frac{\partial^k J}{\partial \rho^k} \right|_{\rho=0} \quad (A5)$$

Let us write

$$\epsilon f = \ln J = \ln(J_0 + R) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{R^n}{n}$$

with $R = J - J_0$, $J_0 = J[\rho=0] = 1$

(by definition). Further we notice that

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} J^{(k)}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} M_k.$$

So we get

$$\epsilon f(\rho) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots \\ \sum j_i = n}} n! \frac{(\frac{\rho M_1}{1!})^{j_1} (\frac{\rho^2 M_2}{2!})^{j_2} \dots}{i_1! i_2! \dots}$$

Comparing this with

$$f(\rho) = \sum \frac{\rho^\nu}{\nu!} f_0^{(\nu)}(0)$$

we arrive at

$$f_0^{(\nu)} = \frac{\nu!}{\epsilon} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{i_1}^{\ell-1} (-1)^{\ell-1} (\ell-1)! \prod_{j=1}^{\ell} \frac{1}{i_j!} \left(\frac{M_j}{j!} \right)^{i_j} \quad (A6)$$

with $\sum i_j = \ell$, $\sum j i_j = \nu$.

That means, e.g. for $\nu=1$: $f_0^{(1)} = M_1$ and for $\nu=2$: $f_0^{(2)} = M_2 - M_1^2$.

APPENDIX B. Vacuum Effects and T_0

If one collects all terms in the expansion (8) one finds that each of the graphs discussed above is only the simplest one of an infinite series. The first term of this series is represented by a graph without completely separated parts. All other terms correspond to disconnected graphs. Symbolically we can write

$$T_2 = T_2^{(c)} (1 + \text{loop} + \text{disconnected} + \text{disconnected} + \dots) \quad (B1)$$

Fig. 8

where $T_2^{(c)}$ contains no disconnected graphs. It is clear that all the contributions in the bracket are simply vacuum effects as they are without any free ends.

Now we remark that T_0 from (8) has the structure

$$T_0 = \phi + i \int d_{12} G \phi_2 + \frac{i^2}{2!} \int d_{1234} G G \phi_4 + \dots$$

This can be written symbolically in the form

$$T_0 = \phi_0 (1 + \text{loop} + \text{disconnected} + \text{disconnected} + \dots) \quad (B2)$$

Fig. 9

It follows that - apart from a factor- T_0 is exactly the same series as that multiplying $T_0^{(c)}$. Therefore, we can cancel not only ϕ_0 but also all disconnected graphs; they do not contribute to the two point function $\chi = - T_2 / T_0$.

APPENDIX C. Weight factors

To determine the weight of a particular n -th order graph we imagine each of its $n/2 - 1$ lines endowed with direction and individuality. Then we have to count all turnings and permutations of the lines which result in new realizations of the given graph.

The weight is given as

$$G = (n-2)!! \frac{Z^S}{\prod p_i! \prod g_i!} \quad (C1)$$

Here $(n-2)!! = 2^{n/2-1} (n/2-1)!$ is the weight of the corresponding basic graph. It arises from the $2^{n/2-1}$ turnings and the $(n/2-1)!$ permutations of the $n/2-1$ single lines.

The factor 2^{-s} in (C1) accounts for s symmetric loops. A loop is defined as a structure connected to only one point of the residual graph. A symmetric loop can be run without change in either of two directions thus halving the possibilities of new cases.

The factor $\prod p_i!$ arises from the permutations of lines within each p -fold bound.

The factor $\prod g_j!$ takes account of g_j identical loops connected to the same point.

The right combination of $f_0^{(k)}$ - factors for a given graph is easily found by the rule that each k -fold point (resulting from the fusion of $k/2$ double-points) yields one $f_0^{(k)}$.

APPENDIX D. ϵ -Dependence

Simple dimensional reasoning is sufficient to determine the distribution of the powers of $\epsilon = \Delta V$ over the scheme Fig.7. This is so because we have for theories with the Lagrangian (9) in the limit $\rho \rightarrow 0$ only three dimension-bearing quantities, namely \square , ϵ , and λ . The powers of \square and λ are easily determined for each point of Fig. 7. The abscissa scales already the power k of \square and from (11) (14) and (A6) it follows that the index at the ordinate determines uniquely the λ -dependence of all graphs derived from ϕ_n .

$$\phi_n \propto \lambda^{n/M} \quad (D1)$$

To find out the ϵ -power of a particular point in Fig. 7 we have still to determine the dimensionalities of the T_2 -function and of λ . To do this, we remember that in our system ($\hbar = c = 1$) all quantities take the dimension of a power of length ℓ . Of course, the dimensionalities of δ , \square and ϵ are in N -dimensional space-time:

$$[\delta(x)] = \ell^{-N} \quad [\square] = \ell^{-2} \quad [\epsilon] = \ell^N \quad (D2)$$

The commutation relation $[\phi(t, r), \phi(t, r')] = \delta(r - r')$ yields

$$[\phi] = \ell^{1-N/2}$$

Now, all terms in (9) must share the same dimensionality. It follows

$$[\lambda] = \ell^{\frac{MN}{2} - M - N} \quad [\rho] = \ell^{-1 - N/2} \quad (D4)$$

The symbol of functional differentiation has the dimensionality

$$\left[\frac{\delta}{\delta \rho(x)} \right] = \left[\frac{1}{\rho} \right] [\delta(x)] = l^{1-N/2} \quad (D5)$$

so that the two-point function (1) takes

$$[T_2(x)] = l^{2-N} \quad (D6)$$

This suffices to determine the power α of ϵ at the point (n,k) of Fig. 7 from

$$[T_2(x)] = [\epsilon^\alpha] [\lambda^{-n/M}] [\square^k] [\delta(x)] \quad (D7)$$

as

$$\alpha = \frac{2(k+1)}{N} + n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right). \quad (D8)$$

The determination of the ϵ - powers for a general p - point-function can be accomplished completely analogously. Fig. 10 shows the distribution of ϵ - powers for the two-point function in the case $N=1, M=4$.

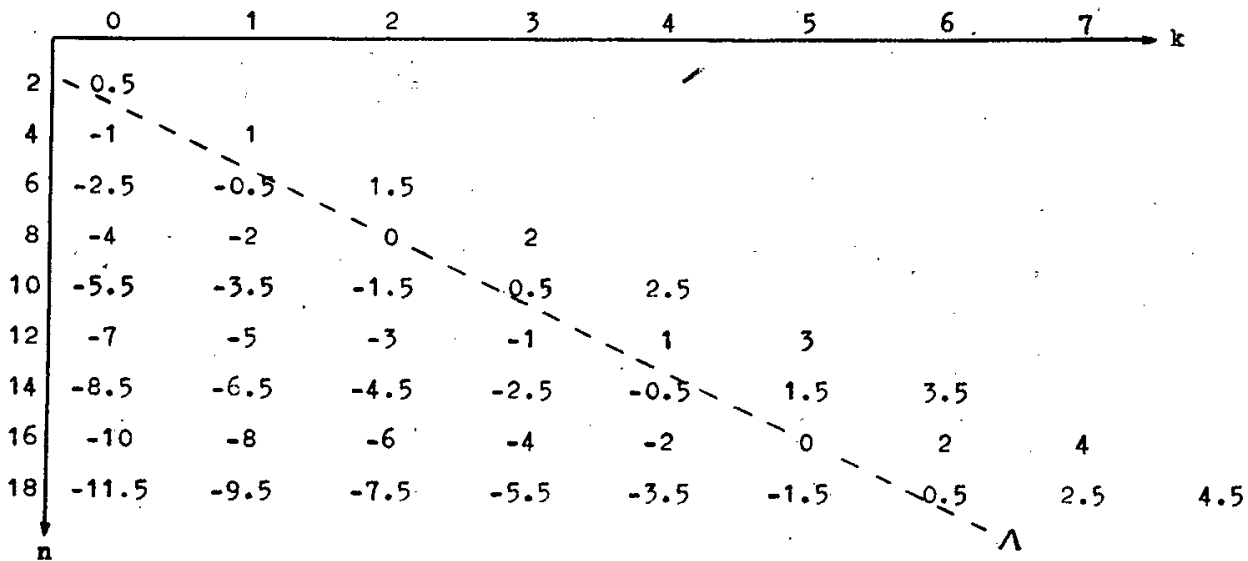


Fig. 10. Distribution of powers of lattice cell volume ϵ throughout fig. 7 for case $N=1, M=4$. Dashed line Λ connects ϵ - independent points.

Footnotes

- 1) L is the Lagrangian of the system including the interaction with the external source $\rho(x)$.
- 2) It is important to remark that the functions T_n and ϕ_n in (6) and (7) are symmetric with respect to all n variables.

- 3) T_0 has similar structure (see Appendix B).
- 4) In this case we have, of course, $\square \rightarrow \partial^2 / \partial t^2$ and our model is no longer a field theory but simply quantum mechanics.
- 5) The constant ϕ_0 is of no interest; it appears in all T_n and therefore cancels in χ .
- 6) By setting $f_0 = 0$ we have put $\phi_0 = 1$ (cf. footnote 5).
- 7) We remark that for even M all odd derivatives of f vanish at the point $\rho = 0$ (see Appendix A). This simplifies considerably the formulae; we shall exploit this fact in the following considerations.
- 8) In ref. ¹² it was stressed that products of δ -functions are inherently ambiguous. This ambiguity is here lifted by the restriction to the particular representation of all δ -functions in lattice space.
- 9) We shall call graphs of this type "basic graphs".
- 10) It is, however, not allowed to cut the graph (otherwise one would get vacuum graphs, see Appendix B), and free ends must stay free.
- 11) The ℓ in constants like $\square^\ell \delta(0)$ is of course not to be counted as contribution to k .
- 12) Having calculated all ambiguous products of δ -functions in lattice space we are now free to use any representation of the remaining linear expression (17) in δ -functions. The Fourier representation seems most suitable.
- 13) The b_i are related to the matrix elements by $b_i = |\langle 0 | \phi | i \rangle|^2 \kappa_i$.

References

1. S. Hori. Nucl. Phys. 30, 644 (1962).
2. G. Heber. Acta Phys. Hungar., in press.
3. H. Lehmann. Nuovo Cim. 11, 342 (1954).

Received by Publishing Department
on December, 20, 1963.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3484. Тираж 410. 1,15 уч.-изд.л.
Январь. 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

З. Галясевич

Р - 1517

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА
В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ДЛЯ СВЕРХТЕКУЧИХ БОЗЕ-СИСТЕМ**

Дубна 1964

Галясевич З.

P-1517.

Асимптотическое вычисление функции Грина в приближении вязкой жидкости для сверхтекучих бозе-систем.

При использовании нового метода, предложенного Н.Н.Боголюбовым для вычисления функций Грина в "приближении идеальной жидкости", на основе уравнений гидродинамики вязкой сверхтекучей жидкости как усредненных уравнений движения систем бозе-частиц и связи между средними значениями и запаздывающими функциями Грина в работе получены функции Грина в "приближении вязкой жидкости". Это приближение позволяет учесть эффекты затухания. Коэффициенты затухания выражаются через кинетические коэффициенты /обычной и второй вязкости и теплопроводности/.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна 1964.**

Galasiewicz Z.

P-1517

Asymptotic Calculation of the Green Function
in Viscous Liquid Approximation for Superfluid
Bose-Systems

The new method suggested by N.N.Bogolubov for calculating the Green functions in the "ideal liquid approximation" was used to obtain the Green functions in the "viscous liquid approximation". These functions have been obtained on the basis of hydrodynamic equations for viscous superfluid liquid as averaged equations of motion of Bose particle systems and on the basis of a relation between the mean values and the retarded Green functions. This approximation allows us to take into account the damping effects. The damping coefficients are expressed in terms of the kinetic coefficients (of the usual and second viscosity and thermal conductivity).

**Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1964.**

3. Галяевич^{x/}

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА
В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ДЛЯ СВЕРХТЕКУЧИХ БОЗЕ-СИСТЕМ

^{x/} Постоянный адрес: Институт теоретической физики, Вроцлавский университет, Вроцлав /Польша/.

§ I. Введение

В работе^{/1/} Н.Н. Боголюбов вывел уравнения гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости при наличии внешних источников, исходя из усредненных уравнений движения для бозе-систем. В случае малого отклонения от состояния статистического равновесия уравнения гидродинамики решаются. В частности, получена скорость движущегося конденсата. Как показано в^{/2/}, при наличии конденсата (случай сверхтекучей жидкости) среднее значение бозе-оператора $\langle \psi(t, \vec{r}) \rangle$ отлично от нуля. Фаза этого среднего значения является потенциалом скоростей движения конденсата. Кроме того, известны формулы, связывающие вариацию среднего значения, происходящую из-за адиабатического включения возмущения (в данном случае возмущением является член гамильтониана с внешними источниками) с запаздывающими функциями Грина. Отсюда получаются формулы для компонент скорости движения конденсата. Они выражаются через фурье-образы запаздывающих функций Грина. Сравнивая их с решением уравнений гидродинамики для системы одинаковых частиц, получаем фурье-компоненты запаздывающих функций Грина. Это приближение названо Н.Н. Боголюбовым "гидродинамическим приближением" для функций Грина.

Целью настоящей работы является получение уравнений гидродинамики вязкой сверхтекучей жидкости и на основе их вычисления фурье-компонент запаздывающих функций Грина. В отличие от случая идеальной жидкости это дает возможность учесть эффекты затухания.

В § 2 будут выведены формулы, связывающие запаздывающие функции Грина с вариациями средних. В § 3 на основе тождеств,

полученных в^{1/2}, находятся уравнения гидродинамики вязкой сверхтекучей бозе-жидкости. В § 4 получается акустическое приближение уравнений гидродинамики. § 5 посвящен вычислению функции Грина в приближении вязкой жидкости. Использование некоторых свойств реальной бозе-жидкости (гелия II) приводит к упрощению полученных формул. В опубликованной в последнее время статье^{1/3/} рассмотрена связь гидродинамических уравнений с корреляционными функциями. Как пример этого было рассмотрено уравнение диффузии спина и явления переноса в нормальной жидкости.

§ 2. Связь запаздывающих функций Грина с вариацией средних значений

Связь запаздывающих функций Грина с вариацией средних значений была получена (см., например,^{1/4/}) при рассмотрении реакции квантово-механической системы на адиабатическое включение возмущения, другими словами, при рассмотрении влияния включения возмущения на средние значения динамических переменных.

Двухвременные запаздывающие температурные функции Грина $\langle\langle A(t); B(\tau) \rangle\rangle^r$ определяются следующим образом:

$$\langle\langle A(t); B(\tau) \rangle\rangle^r \equiv G_{\tau}(t-\tau) = -i\theta(t-\tau) \langle [A(t), B(\tau)] \rangle, \quad (2.1)$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по большому каноническому ансамблю Гиббса:

$$\langle \dots \rangle = \frac{\text{Sp} (e^{-\frac{H_0}{\theta}} \dots)}{\text{Sp} (e^{-\frac{H_0}{\theta}})}, \quad \theta = kT, \quad (2.2)$$

$A(t), B(t)$ -гейзенберговское представление операторов A, B .

Фурье-компонента (2.1) имеет вид:

$$\langle\langle A; B \rangle\rangle_E^\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\langle A(t), B(\tau) \rangle\rangle^\tau e^{iE(t-\tau)} d(t-\tau) \quad (2.3)$$

Пусть A - оператор, явно не зависящий от времени, $\mathcal{D}(t)$ - статистический оператор. Тогда среднее значение A равно

$$\overline{A(t)} = \text{Sp} \{ \mathcal{D}(t) A \} \quad (2.4)$$

Оператор \mathcal{D} находится из уравнения движения

$$i \frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} = [H_0 + \delta H_t, \mathcal{D}(t)] \quad (2.5)$$

где H_0 - не зависящий от времени гамильтониан системы, δH_t - адиабатическое включение возмущения, такое, что

$$\delta H_{t=-\infty} = 0 \quad (2.6)$$

Начальное условие для статистического оператора ($t = -\infty$) имеет вид:

$$\mathcal{D}(-t) = \mathcal{D} = \frac{e^{-\frac{H_0}{\theta}}}{\text{Sp}(e^{-\frac{H_0}{\theta}})} \quad (2.7)$$

Это означает, что при $t \rightarrow -\infty$ система находится в состоянии статистического равновесия. Предполагая, что отклонение от статистического равновесия мало, будем искать $\mathcal{D}(t)$ в виде:

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D} + \delta\mathcal{D}(t) \quad (2.8)$$

Из (2.7) видно, что

$$\delta\mathcal{D}(-\infty) = 0$$

Подставим (2.8) в (2.5) и пренебрежем произведением $(\delta\mathcal{D}, \dot{H}_t)$. Чтобы решить (2.5), вводим вспомогательный оператор

$$\delta\mathcal{D}_1 = e^{iH_0 t} \delta\mathcal{D} e^{-iH_0 t} \quad (2.9)$$

удовлетворяющий, как легко проверить, уравнению

$$i \frac{d}{dt} \delta\mathcal{D}_1 = e^{iH_0 t} [\delta H_x, \mathcal{D}] e^{-iH_0 t} \quad (2.10)$$

с начальным условием

$$\delta\mathcal{D}_1(-\infty) = 0 \quad (2.11)$$

Интегрируя (2.10) при условии (2.11), находим

$$\delta\mathcal{D}(t) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^t e^{iH_0(z-t)} [\delta H_x, \mathcal{D}] e^{-iH_0(z-t)} dz \quad (2.12)$$

Теперь, подставляя (2.8) в (2.4) (с учетом (2.12)) и используя тот факт, что под знаком $\text{Sp}\{\}$ возможна циклическая перестановка операторов, получаем

$$\bar{A} = \text{Sp}\{A\} - i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Sp}\{e^{-\frac{H_0}{\theta}} [A(t), \delta H_{\tau}(\tau)]\}}{\text{Sp}\{e^{-\frac{H_0}{\theta}}\}} d\tau = \quad (2.13)$$

$$= \langle A \rangle - i \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau) \langle [A(t), \delta H_{\tau}(\tau)] \rangle d\tau,$$

где $A(t)$, δH_{τ} - гейзенберговское представление операторов A , δH_{τ} .

Если принять, что вариация гамильтониана периодически зависит от времени

$$\delta H_{\tau} = \sum_{\Omega} e^{-i\Omega\tau + \epsilon\tau} V_{\Omega}, \quad (\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0), \quad (2.14)$$

где V_{Ω} - оператор, не зависящий явно от времени, то для вариаций $\delta \bar{A} = \bar{A} - \langle A \rangle$ получаем следующее выражение:

$$\delta \bar{A}(t) = -i \sum_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau) \langle [A(t), V_{\Omega}(\tau)] \rangle e^{-i(\Omega + i\epsilon)\tau} d\tau = \quad (2.15)$$

$$= \sum_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\langle A(t); V_{\Omega}(\tau) \rangle\rangle e^{-i(\Omega + i\epsilon)\tau} d\tau.$$

Принимая во внимание (2.3), получаем окончательно:

$$\delta \bar{A}(t) = 2\pi \sum_{\Omega} e^{-i\Omega t + \epsilon t} \langle\langle A; V_{\Omega} \rangle\rangle_{E = \Omega + i\epsilon}^{\tau} \quad (2.16)$$

В частном случае одной частоты, когда $\Omega = \pm \omega$, имеем:

$$\delta \bar{A}(t) = 2\pi e^{-i\omega t + \epsilon t} \langle\langle A; V_{\omega} \rangle\rangle_{E = \omega + i\epsilon}^{\tau} + \quad (2.17)$$

$$+ 2\pi e^{i\omega t + \epsilon t} \langle\langle A; V_{\omega} \rangle\rangle_{E = \omega - i\epsilon}^{\tau}$$

Таким образом, мы пришли к формулам, связывающим вариацию среднего значения с функциями Грина. Если бы удалось каким-либо образом найти эту вариацию среднего значения, следовательно, и левую часть (2.17), то тем самым мы бы нашли фурье-компоненты запаздывающих функций Грина.

Уравнения гидродинамики дают возможность вычислить средние значения, существенные для систем одинаковых частиц с парным взаимодействием (а именно $\delta\langle\psi(t, \vec{r})\rangle$). В следующем параграфе мы перейдем к выводу уравнений гидродинамики вязкой жидкости, исходя из уравнений движения для систем одинаковых бозе-частиц.

§ 3. Уравнения гидродинамики для вязкой сверхтекучей бозе-жидкости

Рассматривается система одинаковых бозе-частиц с парным взаимодействием, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет вид:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2m} \int \nabla \psi^\dagger(t, \vec{r}) \nabla \psi(t, \vec{r}) d\vec{r} - \lambda \int \psi^\dagger(t, \vec{r}) \psi(t, \vec{r}) d\vec{r} + \\ & + \frac{1}{2} \int \Phi(\vec{r} - \vec{r}') \psi^\dagger(t, \vec{r}) \psi^\dagger(t, \vec{r}') \psi(t, \vec{r}) \psi(t, \vec{r}') d\vec{r} d\vec{r}' + \\ & + \int \{ \eta(t, \vec{r}) \psi^\dagger(t, \vec{r}) + \eta^*(t, \vec{r}) \psi(t, \vec{r}) \} d\vec{r} = H_0 + \delta H_t \quad ; \end{aligned} \quad (3.1)$$

здесь λ - постоянная $\psi^\dagger(t, \vec{r})$, $\psi(t, \vec{r})$ - бозе-операторы в представлении Гейзенберга (под знаком функциональной зависимости мы пишем вместо \vec{r} просто r ; $\hbar = 1$).

В методе, предложенном Н.Н. Боголюбовым^{I/}, кроме обычных членов, содержатся ещё дополнительные члены гамильтониана с "источниками частиц" $\eta(t, \vec{r})$, $\eta^*(t, \vec{r})$, которые являются задан-

ными - функциями. Введение внешних источников (адиабатическое включение возмущения) нужно для того, чтобы брать по ним вариации от обычных гидродинамических средних и таким образом получить выражения для функций Грина. Эти средние, взятые с некоторым, вообще говоря, неравновесным статистическим оператором, будем обозначать $\langle \dots \rangle$.

Для получения уравнений гидродинамики в I выведен ряд тождеств, выражающих производные по времени от средней плотности числа частиц ρ , среднего потока \vec{j} и средней плотности энергии $\rho \epsilon$ (ϵ - энергия на одну частицу) для системы с гамильтонианом (3.1). Мы выпишем эти тождества, так как они также необходимы для получения уравнения гидродинамики в приближении вязкой жидкости:

$$m \frac{\partial \rho(t, r)}{\partial t} + \nabla \vec{j}(t, r) = im [\eta^*(t, r) \psi(t, r) - \eta(t, r) \psi^*(t, r)], \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_\alpha}{\partial t} = & \frac{1}{4m} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \Delta \rho - \frac{1}{2m} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta} \left\langle \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial r_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial r_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} \right\rangle - \\ & - \frac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} \left\{ \dot{D}_t(\tau, R) + D_t(\tau, R, R) \right\} d\vec{R} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial r_\alpha} \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial r_\alpha} \eta^* - \varphi^* \frac{\partial \eta}{\partial r_\alpha} - \varphi \frac{\partial \eta^*}{\partial r_\alpha} \right), \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho \epsilon)}{\partial t} = & \frac{i}{8m^2} \Delta \langle (\Delta \psi^\dagger) \psi - \psi^\dagger (\Delta \psi) \rangle + \sum_\beta \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} \left\{ G_t^{(\beta)}(\tau, R) + G_t^{(\beta)}(\tau, R, R) \right\} d\vec{R} + \\ & + \sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta} \left\{ \frac{i}{4m^2} \left\langle \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial r_\beta} \Delta \psi - (\Delta \psi^\dagger) \frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} \right\rangle + \int \Phi(R) G_t^{(\beta)}(\tau, R) d\vec{R} \right\} + \\ & + \frac{i}{2} \int \Phi(\tau, r') \left[\eta^*(t, r) \langle \psi^\dagger(t, r') \psi(t, r') \psi(t, r) \rangle + \eta^*(t, r') \langle \psi^\dagger(t, r) \psi(t, r') \psi(t, r) \rangle - \right. \\ & - \eta(t, r') \langle \psi^\dagger(t, r) \psi^\dagger(t, r') \psi(t, r) \rangle - \eta(t, r) \langle \psi^\dagger(t, r) \psi^\dagger(t, r') \psi(t, r') \rangle \left. \right] d\vec{r}' + \\ & + \frac{i}{4m} (\eta \Delta \varphi^* - \eta^* \Delta \varphi + \varphi^* \Delta \eta - \varphi \Delta \eta^*) \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho(t, r) &= \langle \psi^\dagger(t, r) \psi(t, r) \rangle, \quad \varphi(t, r) = \langle \psi(t, r) \rangle, \\
 j_\alpha(t, r) &= \frac{i}{2} \left\langle \frac{\partial \psi^\dagger(t, r)}{\partial r_\alpha} \psi(t, r) - \psi^\dagger(t, r) \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r_\alpha} \right\rangle, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\
 \rho(t, r) \varepsilon(t, r) &= -\frac{1}{2} \langle (\Delta \psi^\dagger(t, r) \psi(t, r) + \psi^\dagger(t, r) \Delta \psi(t, r)) \rangle + \frac{1}{2} \int \Phi(r-r') D_t(r, r'-\tau) d\vec{r}', \\
 D_t(r, r'-\tau) &\equiv \langle \psi^\dagger(t, r) \psi^\dagger(t, r') \psi(t, r') \psi(t, r) \rangle = D_t(r', r-\tau) = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ D_t(r', r-\tau) + D_t(r, r'-\tau) \right\}, \\
 G_t^{(p)}(r, r'-\tau) &\equiv \frac{i}{4m} \left\langle \psi^\dagger(t, r) \left(\psi^\dagger(t, r') \frac{\partial \psi(t, r')}{\partial r_p} - \frac{\partial \psi^\dagger(t, r')}{\partial r_p} \psi(t, r') \right) \psi(t, r) \right\rangle, \\
 \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}'
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Сверхтекучая бозе-жидкость характеризуется наличием $\langle \psi(t, r) \rangle \equiv \varphi(t, r) = a \exp(iX) \neq 0$, где $\frac{1}{m} X = \mathcal{V}$ - потенциал сверхтекучей скорости \vec{v}_s движения конденсата. Для функции X и a в работе /1/ получены следующие уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X}{\partial t} &= \lambda + \frac{\Delta a}{2ma} - \frac{1}{m} (\nabla X)^2 - \frac{1}{2a} (\mathcal{J}^* + \mathcal{J}) - \\
 &\quad - \frac{1}{2a^2} \int \Phi(R) \{ X_t(\sigma, R) + X_t^*(\sigma, R) \} d\vec{R},
 \end{aligned} \tag{3.6a}$$

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial a^2}{\partial t} &= -\frac{i}{m} \{ a^2 \Delta X + 2a \nabla X \cdot \nabla a \} + \\
 &\quad + \int \Phi(R) [X_t(\sigma, R) - X_t^*(\sigma, R)] d\vec{R} + a(\mathcal{J} - \mathcal{J}^*),
 \end{aligned} \tag{3.6b}$$

где

$$\begin{aligned}
 X_t(\sigma, \tau-\tau) &= \langle \psi^\dagger(t, r) \psi(t, r') \psi(t, r) \rangle \varphi^*(t, r), \\
 \mathcal{J}(t, r) &= \eta(t, r) e^{-iX(t, r)}
 \end{aligned}$$

$$\zeta(t, \tau) = \eta(t, \tau) e^{-iK(t, \tau)} \quad (3.7)$$

Из (3.6a) получается уравнение для сверхтекучей скорости $\vec{v}_s = \frac{1}{m} \nabla \chi$

$$m \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = \nabla \left\{ \frac{\Delta a}{2am} - \frac{m v_s^2}{2} - \frac{\zeta^* \zeta}{2a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2a^2} \int \Phi(R) [X_t(\tau, R) + X_t^*(\tau, R)] d\vec{R} \right\} \quad (3.8)$$

Сверхтекучая жидкость описывается восьмью параметрами состояния. За эти параметры удобно принять: плотность числа частиц ρ , температуру θ , три слагаемые сверхтекучей скорости конденсата \vec{v}_s и три слагаемые скорости "нормальной компоненты" \vec{v}_n . Если источники отсутствуют, то в состоянии статистического равновесия эти параметры постоянны.

В случае наличия источников $\rho = \rho(\tau)$, $\vec{v}_s = \vec{v}_s(\tau)$. При отклонении от равновесия указанные величины считаются параметрами состояния только тогда, когда они являются медленно меняющимися функциями времени и пространства.

Средние для состояния статистического равновесия обозначим $\langle \dots \rangle_{\rho, \theta, v_s, v_n}$. В дальнейшем нам придется иметь дело со средними типа

$$\alpha_n = \left\langle \left(\partial_1 \zeta(t, \tau_1) \right), \dots, \left(\partial_n \zeta(t, \tau_n) \right) \right\rangle_{\rho, \theta, v_s, v_n} = \\ = \alpha_n(\tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_1 / \rho, \theta, v_s, v_n) \quad (3.9a)$$

где

$$\zeta(t, \tau_j) = \psi(t, \tau_j), \psi^\dagger(t, \tau_j),$$

а \mathcal{D}_t -линейные комбинации из постоянных и операторов дифференцирования по пространственным переменным (см., например, выражения для функции $\mathcal{D}_t, G_t^{(\alpha)}, X_t$).

Перейдём сейчас к рассмотрению изучаемых в гидродинамике неравновесных процессов, для которых неравновесные величины типа

$$\mathcal{O}_n = \langle (\mathcal{D}_1 \gamma(t, \tau_1) \dots (\mathcal{D}_n \gamma(t, \tau_n))) \rangle = \mathcal{O}_n(t, \tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_1) \quad (3.9в)$$

меняются достаточно медленно при временных и пространственных трансляциях

$$t \rightarrow t + t_0, \quad \tau_j \rightarrow \tau_j + \tau_0, \quad |t| \approx T, \quad |\tau_0| \approx l,$$

где T время релаксации, а l — длина свободного пробега. В окрестности каждой точки $(t, \vec{\tau})$ имеются лишь малые отклонения от "локального статистического равновесия", описанного через локальные величины $\rho(t, \tau), \theta(t, \tau), v_s^{(\alpha)}(t, \tau), v_m^{(\alpha)}(t, \tau)$. (Мы предполагаем, что отклонения от статистического равновесия асимптотически затухают, так что можно определить, хотя бы по порядку величины T и l). Естественно мы будем считать, что градиенты по t и $\vec{\tau}$ первого порядка будут малыми первого порядка, а градиенты второго порядка будут малыми второго порядка и т.д. Чтобы технически сформулировать это предположение, в [6] и [1] введен некоторый параметр малости μ , характеризующий малость градиентов. Пользуясь этим параметром, напомним (3.9в) в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n(t, \tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_1) &= \tilde{\mathcal{O}}_n(\mu t, \mu \tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_1; \mu) = \\ &= \tilde{\mathcal{O}}_n(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots, R_{n1}; \mu), \\ \tau &= \mu t, \quad \xi_1 = \mu \vec{\tau}_1, \quad \vec{R}_{j1} = \vec{\tau}_j - \vec{\tau}_1, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_n(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots, R_{n1}; \mu) = & \tilde{\mathcal{O}}_n^{(0)}(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots, R_{n1}) + \\ & + \mu \tilde{\mathcal{O}}_n^{(1)}(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots, R_{n1}) + \mu^2 \tilde{\mathcal{O}}_n^{(2)}(\tau, \xi_1, R_{21}, \dots, R_{n1}) + \dots, \end{aligned} \quad (3.9c)$$

где $\tilde{\mathcal{O}}_n^{(0)}$ получается заменой в (3.9.) неравновесных средних $\langle \dots \rangle$; соответствующими средними $\langle \dots \rangle_{\vartheta, \theta, v_s, v_n}$, $\tilde{\mathcal{O}}_n^{(0)}$ должно быть линейной формой по отношению к градиентам ϑ , θ , $v_s^{(k)}$, $v_n^{(k)}$ и т.д.

Заметим, что такая ситуация обычно возникает при выводе уравнений нормальной жидкости из кинетического уравнения, когда мы ищем его решение, близкое к "локально равновесному" и разлагаем по "степеням градиентов".

Используя введенный нами малый параметр μ , перейдем теперь к нахождению уравнений гидродинамики-сверхтекучей жидкости, с учётом вязкости. Мы будем иметь дело с функциями \mathcal{D}_t , $\mathcal{G}_t^{(k)}$, принадлежащими к типу \mathcal{O}_n . Из уравнений (3.2)-(3.4) получим

$$m \frac{\partial \tilde{\vartheta}(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \sum_p \frac{\partial \tilde{j}_p(\tau, \xi)}{\partial \xi_p} = i a m (\tilde{\gamma}^+ - \tilde{\gamma}),$$

$$\frac{\partial \tilde{j}_\alpha}{\partial \tau} = - \sum_p \frac{\partial}{\partial \xi_p} \left\{ \frac{1}{2m} \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_p} + \frac{\partial \psi^+}{\partial \tau_p} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_\alpha} \right\rangle + \right. \quad (3.10)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_p \tilde{\mathcal{D}}_\tau^{(0)}(\xi, R) d\vec{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_p \tilde{\mathcal{D}}_\tau^{(1)}(\xi, R) d\vec{R} \right) \right\} +$$

$$+ iam(\gamma^* - \gamma) v_s^{(\alpha)} + \mu(\gamma^* + \gamma) \frac{\partial a}{\partial \xi_\alpha} \quad (3.11)$$

Или

$$\frac{\partial \tilde{f}_\alpha}{\partial \tau} = \sum_\beta \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \xi_\beta} + iam(\gamma^* - \gamma) v_s^{(\alpha)} + \mu(\gamma^* + \gamma) \frac{\partial a}{\partial \xi_\alpha}, \quad (3.12)$$

где

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(0)} + \mu T_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{1}{2m} \left\langle \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial \tau_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_\beta} + \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial \tau_\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_\alpha} \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \tilde{D}_\tau^{(0)}(\xi, R) d\vec{R} + \mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \tilde{D}_\tau^{(1)}(\xi, R) d\vec{R} \right) \right. \quad (3.13)$$

Как показано в /1/

$$T_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta} \mathcal{P}(\varrho, \theta) - m \varrho_s v_s^{(\alpha)} v_n^{(\beta)} - m \varrho_n v_n^{(\alpha)} v_s^{(\beta)},$$

$$\varrho_s = \frac{1}{m} \varrho \frac{\partial F(\varrho, \theta, \mu)}{\partial \mu}, \quad \varrho_n = \varrho - \varrho_s, \quad \mu = \frac{(v_s - v_n)^2}{2}, \quad (3.14)$$

где \mathcal{P} - давление, F - свободная энергия, ϱ_s - плотность конденсата, ϱ_n - плотность нормальной компоненты. Находим далее

$$\frac{\partial(\varrho E)}{\partial \tau} = \sum_\beta \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left\{ \left[\frac{i}{4m^2} \left\langle \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial \tau_\beta} (\Delta \Psi) - (\Delta \Psi^\dagger) \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_\beta} \right\rangle + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\Phi(R) \tilde{G}_\tau^{(0)}(\xi, R) d\vec{R} - \sum_\alpha \left(\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \tilde{G}_\tau^{(\alpha)}(\xi, R) d\vec{R} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \mu \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \frac{i}{8m^2} \left\langle (\Delta \Psi^\dagger) \Psi - \Psi^\dagger (\Delta \Psi) \right\rangle + \left(\Phi(R) \tilde{G}_\tau^{(1)}(\xi, R) d\vec{R} - \sum_\alpha \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \tilde{G}_\tau^{(\alpha)}(\xi, R) d\vec{R} \right) \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma} \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} \left(\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta R_\gamma \overset{(0)}{G}_\tau(\xi, R) d\vec{R} \right) + \frac{i}{a} (\gamma^* \Phi(R) X(\xi, R) d\vec{R} - \\
 & - \int \Phi(R) X^*(\xi, R) d\vec{R}) + i a (\gamma^* - \gamma) \frac{m v_s^2}{2} + \mu \frac{1}{2} (\gamma^* + \gamma) \vec{v}_s \nabla_\xi a, \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\varrho \varepsilon)}{\partial \tau} = & \sum_\beta \frac{\partial I_\beta}{\partial \xi_\beta} + \frac{i}{a} (\gamma^* \int \Phi(R) X(\xi, R) d\vec{R} - \int \Phi(R) X^*(\xi, R) d\vec{R}) + \\
 & + i a (\gamma^* - \gamma) \frac{m v_s^2}{2} + \mu \frac{1}{2} (\gamma^* + \gamma) \vec{v}_s \nabla_\xi a, \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_\beta = & I_\beta^{(0)} + \mu I_\beta^{(1)} = \left[\frac{i}{4m^2} \langle \frac{\partial \psi^+}{\partial t_\beta} (\Delta \psi) - (\Delta \psi^+) \frac{\partial \psi}{\partial t_\beta} \rangle + \right. \\
 & \left. + \int \Phi(R) \overset{(0)}{G}_\tau(\xi, R) d\vec{R} - \sum_\alpha \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \overset{(0)}{G}_\tau(\xi, R) d\vec{R} \right] + \\
 & + \mu \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \frac{i}{8m^2} \langle (\Delta \psi) \psi - \psi^+ (\Delta \psi) \rangle + \int \Phi(R) \overset{(1)}{G}_\tau(\xi, R) d\vec{R} - \right. \\
 & \left. - \sum_\alpha \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \overset{(1)}{G}_\tau(\xi, R) d\vec{R} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma} \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} \left(\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta R_\gamma \overset{(0)}{G}_\tau(\xi, R) d\vec{R} \right) \right]. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

В/I/ показано, что

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_\beta^{(0)} = & -\Lambda(\varrho, \theta, \mu) \varrho_s (v_s^{(\beta)} - v_n^{(\beta)}) - m \varrho_s (v_s^{(\beta)} - v_n^{(\beta)}) (v_s^2 - v_n^2) - \\
 & - v_n^{(\beta)} \left[\varrho \varepsilon + \mathcal{P} + \frac{m v_n^2}{2} \varrho + m \varrho_s v_n^2 (v_s^2 - v_n^2) \right], \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

где Λ - химический потенциал.

Необходимо помнить, что в последнем члене формулы (3.15), которая была получена из (3.4) в обозначениях (3.7)

$$\tilde{X}_\tau(\xi, R) = \tilde{X}_\tau^{(0)}(\xi, R) + \mu \tilde{X}_\tau^{(1)}(\xi, R) +$$

из-за присутствия в (3.4) членов, в которые входит $X(\xi - \mu R, R)$,

после разложения в ряд по μ появляются члены типа

$\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left(\Phi(R) \tilde{X}^{(0)}(\xi, R) R_\alpha d\vec{R} \right)$. Они равны нулю, потому что $\tilde{X}^{(0)}$ является четной функцией \vec{R} . При получении (3.11) мы использовали тот факт, что $\tilde{D}_\tau^{(0)}$ является четной функцией \vec{R} .

Заметим, что формы $T_{\alpha\beta}$, I_β составлены из величин типа $\sigma_{m\alpha}$, и потому мы воспользовались для них разложением (3.9с).

Выписаны только члены нулевого и первого порядка по μ .

Учёт членов нулевого порядка

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(0)}, \quad I_\beta = I_\beta^{(0)}$$

приводит к уравнениям гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости /I/.

Следующий порядок по μ

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(0)} + \mu T_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad I_\beta = I_\beta^{(0)} + \mu I_\beta^{(1)}$$

приводит к уравнениям гидродинамики сверхтекучей жидкости с учётом вязкости. Получение этих уравнений является целью дальнейших вычислений.

Итак, мы выделили в $T_{\alpha\beta}$ и I_β члены $T_{\alpha\beta}^{(0)}$, $I_\beta^{(0)}$, которые должны быть линейными формами по отношению к градиентам ξ , θ , $v_s^{(\alpha)}$, $v_m^{(\alpha)}$, (а также по отношению к η , η^* , которые, как видно из (3.2), порядка малости этих градиентов). Предположим, что линейные формы имеют вид:

$$T_{\alpha\rho}^{(a)} = \delta_{\alpha\rho} \left\{ C_1 \operatorname{div}_r \vec{v}_s + C_2 \operatorname{div}_r \vec{v}_m + C_5 \eta + C_5^* \eta^* \right\} + \\
 + C_3 \left(\frac{\partial v_s^{(a)}}{\partial \xi_\rho} + \frac{\partial v_s^{(p)}}{\partial \xi_\alpha} \right) + C_4 \left(\frac{\partial v_m^{(a)}}{\partial \xi_\rho} + \frac{\partial v_m^{(p)}}{\partial \xi_\alpha} \right) \quad (3.19)$$

и

$$I_p^{(a)} = D_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi_\rho} + D_2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi_\rho}, \quad (3.20)$$

где, C_i, D_i - некоторые коэффициенты, характеризующие сверхтекучую жидкость (D_1 - коэффициент диффузии, D_2 - теплопроводности, C_4 - коэффициент обычной вязкости, а C_1, C_2 - коэффициенты так называемой второй вязкости). Другие коэффициенты B_1, B_2, B_3, B_3^* будут введены при рассмотрении уравнения (3.8), причем B_1 и B_2 будут также коэффициентами второй вязкости. Введенные нами коэффициенты мы будем считать заданными величинами. В случае слабого взаимодействия между частицами, они в принципе могли бы быть вычислены при помощи кинетического уравнения. В случае же произвольного взаимодействия их надо взять из эксперимента.

Из условия статистического равновесия в работе /1/ получено на основе уравнений (3.6а, в)

$$\frac{1}{a^2} \int \Phi(R) \tilde{X}^{(a)} d\vec{R} = \frac{1}{a^2} \int \Phi(R) \tilde{X}^{(a)*} d\vec{R} = \\
 = \Lambda(\varrho, \theta, \mu) - \frac{m(v_s - v_m)^2}{2} \quad (3.21)$$

Предположим, что члены высшего порядка по μ имеют вид:

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ \frac{1}{a^2} \int \Phi(R) \tilde{X}(\xi, R)^{(1)} d\vec{R} + \frac{1}{a^2} \int \Phi(R) \tilde{X}(\xi, R)^{(1)*} d\vec{R} = \right. \\ & \left. = -\mu \left[B_1 \operatorname{div}_{\xi} \vec{v}_s + B_2 \operatorname{div}_{\xi} \vec{v}_n + b_1 \eta + b_1^* \eta^* \right] - \mu \frac{\gamma + \gamma^*}{2a} \right. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Тогда из (3.22) и (3.6в) получим, что

$$\begin{aligned} & \frac{2\mu}{a^2} \int \Phi(R) \tilde{X}(\xi, R)^{(1)} d\vec{R} = -\mu \left[B_1 \operatorname{div}_{\xi} \vec{v}_s + B_2 \operatorname{div}_{\xi} \vec{v}_n + b_1 \eta + b_1^* \eta^* \right] + \\ & + \mu \frac{\gamma^* - 3\gamma}{2a} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Используя теперь (3.21), (3.22), мы найдем, что в принятом нами приближении формула (3.8) имеет вид:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial v_s^{(4)}}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \left[\Lambda(\xi, \theta, \mu) + \frac{m v_s^2}{2} - \frac{m}{2} (v_s - v_n)^2 \right] + \\ & + \mu \left[B_1 \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \operatorname{div} \vec{v}_s + B_2 \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \operatorname{div} \vec{v}_n + b_1 \frac{\partial \eta}{\partial \xi_{\alpha}} + b_1^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \xi_{\alpha}} \right] - \\ & - \mu \frac{\partial}{\partial \xi_{\alpha}} \left(\frac{\gamma + \gamma^*}{2a} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

На основании определения энтропии в виде

$$S = - \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

(F - свободная энергия), в работе^{/1/} было получено уравнение для плотности энтропии. После аналогичных преобразований, но с учётом формул (3.20), (3.22) и (3.23) получим для случая вязкой жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho S)}{\partial \tau} + \sum_{\beta} \frac{\partial(\rho v_n^{(\beta)} S)}{\partial \xi_{\beta}} &= \frac{\mu}{\theta} \left[\mathcal{D}_1 \Delta_{\xi} S + \mathcal{D}_2 \Delta_{\xi} \theta + \right. \\ &+ i a (\gamma^* - \gamma) \left(-B_1 \operatorname{div}_{\xi} \vec{v}_s - B_2 \operatorname{div}_{\xi} \vec{v}_m - b_1 \eta - b_1^* \eta^* - \frac{\gamma^* \gamma}{2a} \right) + \\ &\left. + (\gamma^* + \gamma) \left(\frac{\eta^* - \eta}{2a} \right) + \frac{1}{2} (\gamma^* + \gamma) \vec{v}_s \nabla_{\xi} a \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

После того, как в уравнениях гидродинамики члены, пропорциональные η , η^* и градиентам ξ , θ , $v_s^{(\alpha)}$, $v_m^{(\alpha)}$ были выделены и учтены, в уравнениях (3.10), (3.12), (3.24), (3.25) следует перейти от вспомогательных переменных τ, ξ к первоначальным переменным t, \vec{r} . В результате мы получим уравнения гидродинамики для вязкой бозе-жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_m v_m^{(\alpha)})}{\partial r_{\alpha}} = i a (\gamma^* - \gamma) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s v_s^{(\alpha)} + \rho_m v_m^{(\alpha)}) &= \sum_{\rho} \frac{\partial}{\partial r_{\rho}} \left\{ \delta_{\alpha \rho} \left[-P + C_1 \operatorname{div} \vec{v}_s + C_2 \operatorname{div} \vec{v}_m + C_3 \eta + C_3^* \eta^* \right] - \right. \\ &- m \rho_s v_s^{(\alpha)} v_s^{(\beta)} - m \rho_m v_m^{(\alpha)} v_m^{(\beta)} + C_3 \left(\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_{\rho}} + \frac{\partial v_s^{(\rho)}}{\partial r_{\alpha}} \right) + C_4 \left(\frac{\partial v_m^{(\alpha)}}{\partial r_{\rho}} + \frac{\partial v_m^{(\rho)}}{\partial r_{\alpha}} \right) \left. \right\} + \\ &+ i a m (\gamma^* - \gamma) v_s^{(\alpha)} + (\gamma^* + \gamma) \frac{\partial a}{\partial r_{\alpha}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \left[\Lambda(\rho, \theta, \mu) + \frac{m v_s^2}{2} - \frac{m}{2} (v_s - v_m)^2 \right] + \\ &+ \left[B_1 \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \operatorname{div} \vec{v}_s + B_2 \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \operatorname{div} \vec{v}_m + b_1 \frac{\partial \eta}{\partial r_{\alpha}} + b_1^* \frac{\partial \eta^*}{\partial r_{\alpha}} \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \left(\frac{\gamma^* + \gamma}{2a} \right) \end{aligned}$$

(3.28)

$$\frac{\partial(\varrho S)}{\partial t} + \sum_{\beta} \frac{\partial(\varrho v_{\beta}^{(n)} S)}{\partial r_{\beta}} = \frac{1}{\theta} \left[\mathcal{D}_1 \Delta \varrho + \mathcal{D}_2 \Delta \theta + \right. \\
 \left. + i a (\mathcal{J}^* - \mathcal{J}) (-\mathcal{B}_1 \operatorname{div} \vec{v}_s - \mathcal{B}_2 \operatorname{div} \vec{v}_n - b_1 \eta - b_1^* \eta^* - \frac{\mathcal{J}^* + \mathcal{J}}{2a}) + \right. \\
 \left. + (\mathcal{J}^* + \mathcal{J}) \frac{(\eta^* - \eta)}{2a} + \frac{1}{2} (\mathcal{J}^* + \mathcal{J}) \vec{v}_s \nabla a \right]. \quad (3.29)$$

В формулах (3.26) , (3.27)

$$\vec{j} = (\varrho_s \vec{v}_s + \varrho_n \vec{v}_n)$$

(3.30)

§ 4. Уравнения гидродинамики для сверхтекучей жидкости с учётом вязкости в акустическом приближении

Рассмотрим теперь с помощью (3.26)-(3.29) случай бесконечно малого отклонения от статистического равновесия покоящейся жидкости.

Положим

$$\varrho = \varrho^0 + \delta \varrho, \quad S = S^0 + \delta S, \quad \theta = \theta^0 + \delta \theta, \quad \vec{v}_s = \delta \vec{v}_s, \\
 \vec{v}_n = \delta \vec{v}_n, \quad \eta = \delta \eta$$

Тогда с точностью до величины второго порядка малости

$$\eta = \mathcal{J}.$$

Мы переходим, таким образом, от уравнений гидродинамики к линеаризованным "акустическим уравнениям". Это означает, что в уравнениях (3.26)-(3.29) мы пренебрегаем членами пропорциональными $\vec{v}_s^2, \vec{v}_n^2, \vec{v}_s \vec{v}_n$ и величиной \mathcal{J} , умноженной на

градиенты.

Надо подчеркнуть, что "акустическое" приближение является приближением совсем другого рода, чем разложение по малому параметру, которое ведёт к гидродинамике идеальной или вязкой жидкости. Акустическое приближение состоит в линеаризации полученных уравнений и может быть применено как к уравнениям идеальной жидкости, так и к уравнениям вязкой жидкости.

Принимая во внимание, что $\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial \tau_p} = \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial \tau_\alpha}$, получаем линеаризованные уравнения вязкой бозе-жидкости в виде (верхний индекс у ρ , θ , S опускается):

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_s \operatorname{div} \vec{v}_s + \rho_m \operatorname{div} \vec{v}_m = i \sqrt{\rho_0} (\eta^* - \eta), \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} m \rho_s \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + m \rho_m \frac{\partial v_m^{(\alpha)}}{\partial t} = & - \frac{\partial \delta \rho}{\partial \tau_\alpha} + C_1 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + C_2 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_m + \\ & + 2C_3 \Delta v_s^{(\alpha)} + C_4 \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} \left(\frac{\partial v_m^{(\alpha)}}{\partial \tau_\beta} + \frac{\partial v_m^{(\beta)}}{\partial \tau_\alpha} \right) + \\ & + C_5 \frac{\partial \eta}{\partial \tau_\alpha} + C_5^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau_\alpha}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} m \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = & - \frac{\partial \delta \rho}{\partial \tau_\alpha} + B_1 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + B_2 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_m + \\ & + B_3 \frac{\partial \eta}{\partial \tau_\alpha} + B_3^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau_\alpha}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \delta S}{\partial t} + S \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho S \operatorname{div} \vec{v}_m &= \\ &= \frac{1}{\theta} (\mathfrak{D}_1 \Delta \delta \rho + \mathfrak{D}_2 \Delta \delta \theta), \end{aligned} \quad (4.4)$$

здесь

$$\begin{aligned} B_3 &= b_1 + \frac{1}{2a}, \quad B_3^* = b_1^* + \frac{1}{2a}, \quad a \approx \sqrt{\rho_0}, \\ \delta \Lambda &= \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \delta \theta = -S \delta \theta + \frac{1}{\rho} \delta p, \\ p &= \rho^2 \frac{\partial F(\rho, \theta, \mu)}{\partial \rho}, \quad \Lambda = F + \rho \frac{\partial F(\rho, \theta, \mu)}{\partial \rho}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial \theta}, \\ \varepsilon &= F(\rho, \theta, \mu) - \theta \frac{\partial F(\rho, \theta, \mu)}{\partial \theta}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_\rho = \frac{\theta}{c_v}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где ρ_0 — плотность в состоянии статистического равновесия.

Уравнения (4.1) — (4.4) в случае, когда $\eta = 0$ были получены И.М. Халатниковым^{/7/}, исходя из феноменологических соображений. В полученные нами уравнения акустического приближения для вязкой жидкости входит десять коэффициентов, причем два из них комплексные, то есть практически двенадцать коэффициентов. Чтобы получить некоторые связи между ними, рассмотрим случай статистического равновесия, когда η является данной функцией \vec{r}

$$\eta = \eta(r), \quad \rho = \rho(r), \quad \theta = \text{const.}, \quad \vec{v}_s = \vec{v}_s(r), \quad \vec{v}_m = 0.$$

Тогда (4.1)–(4.4) (после учёта в (4.3) соотношения (4.5)) переходят в уравнения

$$\rho_s \operatorname{div} \vec{v}_s = i \sqrt{\rho_0} (\eta^* - \eta), \quad (4.1a)$$

$$-\frac{\partial \delta \rho}{\partial \tau_\alpha} + C_1 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + C_5 \frac{\partial \eta}{\partial \tau_\alpha} + C_5^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau_\alpha} + C_3 \Delta v_s^{(\alpha)} = 0, \quad (4.2a)$$

$$-\frac{\partial \delta \rho}{\partial \tau_\alpha} + \varrho B_1 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + \varrho B_3 \frac{\partial \eta}{\partial \tau_\alpha} + \varrho B_3^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau_\alpha} = 0, \quad (4.3a)$$

$$D_1 \Delta \varrho = 0 \quad (4.4a)$$

Сравнивая (4.2a) с (4.3a), получаем

$$C_1 = \varrho B_1, \quad C_5 = \varrho B_3, \quad C_5^* = \varrho B_3^*, \quad C_3 = 0. \quad (4.6)$$

Из (4.4a) следует, что в нашем приближении

$$D_1 = 0. \quad (4.7)$$

Следовательно, из двенадцати коэффициентов, описывающих вязкую бозе-жидкость, остаётся семь. Если теперь учесть (4.6) и (4.7), тогда уравнения (4.1) - (4.4) принимают окончательный вид:

$$\frac{\partial \delta \varrho}{\partial t} + \varrho_s \operatorname{div} \vec{v}_s + \varrho_m \operatorname{div} \vec{v}_m = i \sqrt{\varrho_0} (\eta^* - \eta), \quad (4.8)$$

$$m \varrho_s \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + m \varrho_m \frac{\partial v_m^{(\alpha)}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_\varrho \frac{\partial \delta \theta}{\partial \tau_\alpha} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varrho} \right)_\theta \frac{\partial \delta \varrho}{\partial \tau_\alpha} +$$

$$+ \varrho B_1 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + (C_2 + C_4) \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_m + C_4 \Delta v_m^{(\alpha)} +$$

$$+ \varrho B_3 \frac{\partial \eta}{\partial \tau_\alpha} + \varrho B_3^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau_\alpha}, \quad (4.9)$$

$$m \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = \left[S - \frac{1}{S} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_s \right] \frac{\partial \delta \theta}{\partial \tau_\alpha} - \frac{1}{S} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_\theta \frac{\partial \delta \rho}{\partial \tau_\alpha} +$$

$$+ B_1 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_s + B_2 \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} \operatorname{div} \vec{v}_n + B_3 \frac{\partial \eta}{\partial \tau_\alpha} + B_3^* \frac{\partial \eta^*}{\partial \tau_\alpha}, \quad (4.10)$$

$$\rho \frac{\partial \delta S}{\partial t} + S \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho S \operatorname{div} \vec{v}_n = \frac{1}{\theta} \partial_2 \Delta \delta \theta. \quad (4.11)$$

§ 5. Решение уравнений в акустическом приближении
и вычисление функции Грина

Задачей этого параграфа является выражение $v_s^{(\alpha)}(t, \tau)$,
 $(\alpha = 1, 2, 3)$ через фурье-компоненты функции Грина на основе § 2
 и вычисление $v_s^{(\alpha)}$ из (4.8) - (4.11).

Вариацию гамильтониана (1.1)

$$\delta H_\tau = \int \left\{ \psi(\tau, \tau') \eta^*(\tau, \tau') + \psi^*(\tau, \tau') \eta(\tau, \tau') \right\} d\vec{\tau}' \quad (5.1)$$

включаем адиабатически, для чего необходимо положить

$$\eta(\tau, \tau') = e^{-i\omega\tau + \varepsilon\tau + i\vec{k}\vec{\tau}'} \eta_k + e^{i\omega\tau + \varepsilon\tau - i\vec{k}\vec{\tau}'} \eta_{-k},$$

$$\eta(\tau, \tau')^* = e^{-i\omega\tau + \varepsilon\tau + i\vec{k}\vec{\tau}'} \eta_k^* + e^{i\omega\tau + \varepsilon\tau - i\vec{k}\vec{\tau}'} \eta_{-k}^*, \quad (5.2)$$

где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Из этого следует наличие в (2.14) одной
 лишь частоты: $\Omega = \pm\omega$.

Поэтому

$$\delta H_\tau = e^{-i\omega\tau + \varepsilon\tau} V_\omega + e^{i\omega\tau + \varepsilon\tau} V_{-\omega}, \quad (5.3)$$

где
$$V_{+\omega} = \int e^{i\vec{k}\vec{\tau}'} [\psi(\tau, \tau') \eta_{-k}^* + \psi^\dagger(\tau, \tau') \eta_k] d\vec{\tau}',$$

$$V_{-\omega} = \int e^{-i\vec{k}\vec{\tau}'} [\psi(\tau, \tau') \eta_k^* + \psi^\dagger(\tau, \tau') \eta_{-k}] d\vec{\tau}' \quad (5.4)$$

Рассмотрим вариацию $\delta \langle \psi(t, \tau) \rangle$. Используя (2.17) и (5.4) получаем

$$\begin{aligned} \delta \langle \psi(t, \tau) \rangle &= \delta \varphi(t, \tau) = \int e^{i\vec{k}\vec{\tau}'} d\vec{\tau}' \left\{ \left[\langle \langle \psi(t, \tau); \psi(\tau, \tau') \rangle \rangle^\tau \eta_{-k}^* + \right. \right. \\ &+ \left. \langle \langle \psi(t, \tau); \psi^\dagger(\tau, \tau') \rangle \rangle^\tau \eta_k \right] e^{-i\omega\tau + \epsilon\tau} d\tau \Big\} + \\ &+ \int e^{-i\vec{k}\vec{\tau}'} d\vec{\tau}' \left\{ \left[\langle \langle \psi(t, \tau); \psi(\tau, \tau') \rangle \rangle^\tau \eta_k^* + \langle \langle \psi(t, \tau); \psi^\dagger(\tau, \tau') \rangle \rangle^\tau \eta_{-k} \right] e^{i\omega\tau + \epsilon\tau} d\tau \right\} = \\ &= e^{-i\omega t + \epsilon t} \int e^{i\vec{k}\vec{\tau}'} \left[\langle \langle \psi(\tau); \psi(\tau') \rangle \rangle_{\omega+i\epsilon}^\tau \eta_{-k}^* + \langle \langle \psi(\tau); \psi^\dagger(\tau') \rangle \rangle_{\omega+i\epsilon}^\tau \eta_k \right] d\vec{\tau}' + \\ &+ e^{i\omega t + \epsilon t} \int e^{-i\vec{k}\vec{\tau}'} \left[\langle \langle \psi(\tau); \psi(\tau') \rangle \rangle_{\omega-i\epsilon}^\tau \eta_k^* + \langle \langle \psi(\tau); \psi^\dagger(\tau') \rangle \rangle_{\omega-i\epsilon}^\tau \eta_{-k} \right] d\vec{\tau}' \quad (5.5) \end{aligned}$$

Если положить

$$\begin{aligned} \delta \varphi(t, \tau) &= e^{-i\omega t + \epsilon t + i\vec{k}\vec{\tau}} \delta \varphi_k + e^{i\omega t + \epsilon t - i\vec{k}\vec{\tau}} \delta \varphi_{-k}, \\ \delta \varphi(t, \tau) &= e^{-i\omega t + \epsilon t + i\vec{k}\vec{\tau}} \delta \varphi_{-k}^* + e^{i\omega t + \epsilon t - i\vec{k}\vec{\tau}} \delta \varphi_k^*, \quad (5.6) \end{aligned}$$

то

$$\delta\varphi_k = 2\pi \left\{ \left\langle a_k; a_{-k} \right\rangle_E^T \eta_{-k}^* + \left\langle a_k; a_k^+ \right\rangle_E^T \eta_k \right\},$$

$$\delta\varphi_{-k}^* = 2\pi \left\{ \left\langle a_{-k}^+; a_{-k} \right\rangle_E^T \eta_{-k}^* + \left\langle a_{-k}^+; a_k^+ \right\rangle_E^T \eta_k \right\} \quad (5.7)$$

где $\left\langle a_q; a_{-q} \right\rangle_E^T$ и т.д. обозначают фурье-компоненты соответствующих запаздывающих функций Грина, например,

$$\left\langle \psi(\tau); \psi(\tau') \right\rangle_E^T = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int \left\langle a_q; a_{-q} \right\rangle_E^T e^{i\vec{q}(\vec{\tau}-\vec{\tau}')} d\vec{q} \quad (5.8)$$

На основе равенств

$$v_s^{(\omega)}(t, \tau) = \frac{i}{2m\sqrt{\rho_0}} \left(\frac{\partial \delta\varphi^*(t, \tau)}{\partial t_x} - \frac{\partial \delta\varphi(t, \tau)}{\partial t_x} \right),$$

$$\delta a = \frac{1}{2} [\delta\varphi^*(t, \tau) + \delta\varphi(t, \tau)] \quad (5.9)$$

в работе^{/1/} получены формулы, связывающие гидродинамические величины, найденные из уравнений (4.1)-(4.4), с функциями Грина

$$\sum_{(\alpha)} k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)} = \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}} k^2 \left\{ \left\langle a_{-k}^+; a_{-k} \right\rangle_E^T \eta_{-k}^* + \left\langle a_{-k}^+; a_k^+ \right\rangle_E^T \eta_k \right\}, \quad (5.10a)$$

$$\delta a_k = \pi \left\{ \left\langle a_k + a_{-k}^+; a_{-k} \right\rangle_E^T \eta_{-k}^* + \left\langle a_k + a_{-k}^+; a_k^+ \right\rangle_E^T \eta_k \right\} \quad (5.10b)$$

Из (5.10a) видно, что если из уравнений (4.8)-(4.11) мы найдем $\sum_{\alpha} k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)}$, как функцию η_k, η_{-k}^* , то, подставляя затем результат (5.10a) и сравнивая коэффициенты при η_k, η_{-k}^* ,

найдем тем самым выражения для соответствующих фурье-компонент запаздывающих функций Грина. Теперь напомним уравнения (4.8)-(4.11) в фурье-компонентах

$$-E \delta \varrho(k) + \varrho_s \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + \varrho_m \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_m^{(\beta)}(k) = \sqrt{\varrho_0} (\eta_{-k}^* - \eta_k), \quad (5.11)$$

$$E m [\varrho_s v_s^{(\alpha)}(k) + \varrho_m v_m^{(\alpha)}(k)] = k^{(\alpha)} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_{\theta} \delta \varrho(k) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{\varrho} \delta \theta(k) \right] - \\
 - i C_4 k^2 v_m^{(\alpha)}(k) - i \varrho B_1 k^{(\alpha)} \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) - i (C_2 + C_4) k^{(\alpha)} \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_m^{(\beta)}(k) - \\
 - \varrho \cdot k^{(\alpha)} (B_3 \eta_k + B_3^* \eta_{-k}^*), \quad (5.12)$$

$$E \left\{ \left[\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_{\theta} + S \right] \delta \varrho(k) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_{\varrho} \delta \theta(k) \right\} = \varrho S \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_m^{(\beta)}(k) - \\
 - i \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} k^2 \delta \theta(k), \quad (5.13)$$

$$E m v_s^{(\alpha)}(k) = k^{(\alpha)} \left\{ \left[-S + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{\varrho} \right] \delta \theta(k) + \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_{\theta} \delta \varrho(k) \right\} - \\
 - i B_1 k^{(\alpha)} \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) - i B_2 k^{(\alpha)} \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_m^{(\beta)}(k) - k^{(\alpha)} (B_3 \eta_k + B_3^* \eta_{-k}^*) \quad (5.14)$$

Умножая (5.12) и (5.14) на $k^{(\alpha)}$ и суммируя по α , после введения обозначений

$$\sum_{\beta} k^{(\beta)} v_s^{(\beta)} = X, \quad \sum_{\beta} k^{(\beta)} v_m^{(\beta)} = Y$$

систему уравнений (5.11) - (5.14) можем написать в виде:

$$\varrho_s X + \varrho_m Y - E \delta \varrho + 0 \cdot \delta \theta = \sqrt{\varrho_0} (\eta_{-k}^* - \eta_k), \quad (5.15)$$

$$(Em\varrho_s + i\varrho B_1 k^2)X + (Em\varrho_m + i(C_2 + 2C_4)k^2)Y - k^2 \left(\frac{\partial P}{\partial \varrho} \right)_\theta \delta \varrho - k^2 \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_\varrho \delta \theta = -\varrho k^2 (B_3 \eta_k + B_3^* \eta_{-k}^*), \quad (5.16)$$

$$(Em\varrho_s + i\varrho B_1 k^2)X + i\varrho B_2 k^2 Y - k^2 \left(\frac{\partial P}{\partial \varrho} \right)_\theta \delta \varrho + k^2 \left[\varrho S - \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_\varrho \right] \delta \theta = -k^2 \varrho (B_3 \eta_k + B_3^* \eta_{-k}^*), \quad (5.17)$$

$$0 \cdot X - \varrho S Y + E \left(\varrho \left(\frac{\partial S}{\partial \varrho} \right)_\theta + S \right) \delta \varrho + \left[E \varrho \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_\varrho + i \frac{D_2}{\theta} k^2 \right] \delta \theta = 0 \quad (5.18)$$

Мы получим, таким образом, систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Отсюда мы можем прямо найти $X = \sum_{\alpha} k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)}$ как функцию η_k , η_{-k}^* и использовать формулу (5.10). Если детерминант системы уравнений (5.15) - (5.18) обозначим через $D(E)$, а детерминант, в котором первый столбец заменяется правой стороной уравнений (5.15) - (5.18), - через D_X , то

$$X = \sum_{\alpha} k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)} = \frac{D_X}{D(E)} \quad (5.19)$$

Рассмотрим сначала два предельных случая, а затем общий.

а) $E = 0$,

Тогда

$$X = \frac{\sqrt{\varrho_0} (\eta_{-k}^* - \eta_k)}{\varrho_s} \quad (5.20)$$

Этот результат точно совпадает с результатом, полученным в /1/ для случая идеальной жидкости, и тогда

$$\langle\langle a_k; a_{-k} \rangle\rangle_{E=0}^T = \frac{1}{k^2} \frac{m \varrho_0}{2\pi \varrho_s} ,$$

$$\langle\langle a_k; a_k^+ \rangle\rangle_{E=0}^T = -\frac{1}{k^2} \frac{m \varrho_0}{2\pi \varrho_s} \quad (5.21)$$

приводит к " теореме о $1/k^2$ " (особенность типа $1/k^2$ в окрестности $k \sim 0$ /2/).

в) $\theta = 0$.

Тогда $\varrho_s = \varrho$, $\varrho_m = 0$, $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 0$. (Необходимо отметить, что уравнения гидродинамики, при $\theta = 0$, могут иметь только формальный смысл, так как времена релаксации становятся очень большими. Мы рассмотрим этот случай формально, чтобы посмотреть, что дают наши формулы в пределе при $\theta \rightarrow 0$). В этом случае

$$\mathcal{D}_X = k^2 \left[E m \varrho + i (C_{24} - \varrho B_2) k^2 \right] \left[(m c^2 \sqrt{\varrho_0} - E \varrho B_3) \eta_k - (m c^2 \sqrt{\varrho_0} + E \varrho B_3^*) \eta_{-k}^* \right] \quad (5.22a)$$

$$\mathcal{D}(E) = m^2 \varrho^2 \left[E^3 + i A_2 k^2 E^2 - A_1 k^2 E - i A_0 k^4 \right] \quad (5.22b)$$

где

$$A_2 = \frac{1}{m \varrho} [\varrho (B_1 - B_2) + C_{24}] , \quad A_1 = c^2 + \frac{B_1}{m^2 \varrho} (C_{24} - \varrho B_2) k^2 \approx c^2 ,$$

$$A_0 = \frac{1}{m \varrho} c^2 (C_{24} - \varrho B_2) , \quad c^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varrho} \right)_{\theta=0} , \quad C_{24} = C_2 + 2C_4 . \quad (5.23)$$

Из уравнения (5.22b) видно, что уравнение $\mathcal{D}(E) = 0$ имеет комплексные корни. Их действительная часть очень близка к

корням, полученным в [1] для случая идеальной жидкости

$$E^+ = ck = \omega_0, \quad E^- = -ck = -\omega_0. \quad (5.24)$$

Исходя из этих корней как первого приближения решения уравнения (полученного из требования обращения в нуль величины (5.22в)), получаем по методу Ньютона поправку (нас интересует только мнимая часть) :

$$\text{Im } \delta^\pm = -\text{Im} \frac{D(E^\pm)}{D'(E^\pm)} = -\frac{B_1}{2m} k^2 = -\varepsilon < 0 \quad (5.25)$$

Третий корень, чисто мнимый, равен

$$E_3 = -i \frac{1}{m\eta} (C_{24} - \eta B_2) k^2 = -i \varepsilon_3 \quad (5.26)$$

Чтобы он приводил к затуханию, ε_3 должно быть больше нуля, а значит, $C_{24} > \eta B_2$. Тогда знаменатель (5.22в) функции Грина имеет вид :

$$D(E) = m^2 g^2 (\omega + i\varepsilon - \omega_0)(\omega + i\varepsilon + \omega_0)(\omega + i\varepsilon_3) \quad (5.27)$$

Из (5.25) видно, что в рассмотренном предельном случае появляется затухание колебаний с частотой $\omega_0 = ck$

с) Общий случай

Для идеальной жидкости в работе [1] получено:

$$D_0(E) = B[E^4 - (c_0^2 + c_1^2)k^2 E^2 + c_0^2 c_1^2 k^4] = \\ = (E^2 - c_0^2 k^2)(E^2 - c_1^2 k^2) = (\omega^2 - c_0^2 k^2)(\omega^2 - c_1^2 k^2), \quad (5.28)$$

где

$$c_{0,1}^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)_s + \frac{1}{2} \frac{S \vartheta_s \theta}{m \vartheta_m c_v} \pm \\ \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4} \left[\frac{1}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)_s + \frac{S \vartheta_s \theta}{m \vartheta_m c_v} \right]^2 - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right)_\theta \frac{S \vartheta_s \theta}{m \vartheta_m c_v}} \right]}, \quad (5.29)$$

$$c_v = \theta \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_\vartheta, \quad B = m^2 \vartheta_s^2 \vartheta_m \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_\vartheta$$

c_0 - (знак +) скорость, связанная с обычной скоростью звука. Она стремится к ней как при $\vartheta_s \rightarrow 0$, так и при $\theta \rightarrow 0$. Величина c_1 (знак -) - специфическая для сверхтекучей жидкости скорость "второго звука".

В случае рассматриваемой нами вязкой жидкости

$$D(E) \cong B[E^4 + i A_3 k^2 E^3 - (c_0^2 + c_1^2)k^2 E^2 + i A_1 k^4 E + c_0^2 c_1^2 k^4], \quad (5.30)$$

где

$$A_3 = \frac{1}{m \vartheta_m} C_{24} + \frac{\vartheta_m B_1 - \vartheta_s B_2}{m \vartheta_m} + \frac{D_2}{\vartheta c_v} \quad (5.31a)$$

$$A_1 = - \left\{ \frac{\rho_s}{m^2 \rho_s \rho_n} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s (C_{24} - \rho B_2) + \left[\frac{\rho_s S^2}{m^2 \rho_s \rho_n} (C_{24} + \rho B_1) + \frac{1}{m \rho} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right] \frac{\theta}{c_w} - \right. \\
 \left. - \frac{S^2}{m^2 \rho_s^2 \rho_n} \left[2 \rho_s C_{24} - \rho (\rho_s B_2 + \rho_n B_1) \right] \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_s \left/ \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)_s \right\} \quad (5.31b)$$

При получении (5.31b) мы использовали соотношение

$$\rho^2 \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_\theta = - \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_\rho,$$

которое следует из (4.5).

Выражение для $\mathcal{D}(E)$ написано приближенно в том смысле, что мы не учитываем изменения коэффициентов, стоящих при E^4, E^2, E^0 . Изменение возникает вследствие появления в уравнениях (5.15)-(5.18) новых по сравнению со случаем идеальной жидкости членов. Если считать, что в случае идеальной жидкости получение двух скоростей звука соответствует проблеме колебаний, вынужденных $\delta H_2(\omega)$, без учёта трения (затухания), то случай вязкой жидкости соответствует проблеме вынужденных колебаний с учётом "трения". Поэтому нас интересует прежде всего коэффициент затухания, а не небольшое изменение частот колебаний (к которому приводит изменение коэффициентов при E^4, E^2, E^0). Из (5.30) видно, что уравнение

$$\mathcal{D}(E) = 0 \quad (5.30a)$$

будет иметь комплексные корни. Их действительная часть должна быть очень близка к корням (5.28) (мы принимаем, что она им равна)

$$E_0^+ = \omega_0^+ = c_0 k = \omega_0, \quad E_1^+ = \omega_1^+ = c_1 k = \omega_1,$$

$$E_0^- = \omega_0^- = -c_0 k = -\omega_0, \quad E_1^- = \omega_1^- = -c_1 k = -\omega_1,$$

(5.32)

а мнимая часть мала. Тогда, исходя из корней (5.32) как первого приближения решения уравнения (5.30а), получаем по методу Ньютона поправку (нас интересует только мнимая часть) :

$$\text{Im } \delta_\alpha^{(\pm)} = -\text{Im} \frac{\partial(E_\alpha^\pm)}{\partial'(E_\alpha^\pm)}, \quad \alpha = 0, 1, \quad (5.33)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta_0^\pm &= -\frac{A_3 c_0^2 + A_1}{2(c_0^2 - c_1^2)} k^2 = -\varepsilon_0, \\ \text{Im } \delta_1^\pm &= \frac{A_3 c_1^2 + A_1}{2(c_0^2 - c_1^2)} k^2 = -\varepsilon_1, \end{aligned} \quad (5.34)$$

где A_1, A_3 даны формулой (5.31а, в), а c_0, c_1 — формулой (5.29)

Из (5.29) следует, что $c_0^2 - c_1^2 > 0$, так, что знак δ_α зависит от знака числителя.

Формулы (5.34) соответствуют теоретической бозе-жидкости. Чтобы определить знак δ_α используем свойства реальной бозе-жидкости, гелия II. Последний член формулы (5.31в) пропорционален

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}\right)_s \bigg/ \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_s = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial S}\right)_s \sim \sqrt{c_p - c_v} \approx 0 \quad (5.35)$$

Из (5.35) следует, что

$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \vartheta}\right)_s = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \vartheta}\right)_\theta - \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)_\theta \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}\right)_s \bigg/ \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_s \approx \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \vartheta}\right)_\theta \quad (5.36)$$

Учитывая (5.36) в (5.29), получим :

$$c_0^2 \approx \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)_s, \quad c_1^2 \approx \frac{s^2 \varrho_s \theta}{m \varrho_n c_v} \quad (5.37)$$

Формула (5.3Iв) упрощается, если использовать (5.37) и неравенство $c_0 \gg c_1$ справедливо для гелия II.

Между коэффициентами второй вязкости И.М. Халатниковым^{/7/} найдена добавочная связь, которую в наших обозначениях можно записать

$$\varrho_s B_2 = c_1 - \varrho_s B_1. \quad (5.38)$$

Рассматривая случай статистического равновесия, мы получим в § 4, что $c_1 = \varrho_s B_1$ (формулы (4.6)). Тогда из четырех коэффициентов второй вязкости только два независимы. Из (4.6) и (5.38) вытекает

$$\varrho_n B_1 = \varrho_s B_2 \quad (5.39)$$

Мы приходим к выводу, что вязкая сверхтекучая жидкость описывается шестью коэффициентами. Применение (5.39) упрощает формулу (5.3Iа).

После учёта свойств гелия II для коэффициентов A_3, A_I , заданные формулой (5.3Iа,в), получаем следующие выражения:

$$A_3 = \frac{1}{m g_n} \dot{C}_{24} + \frac{D_2}{g c v} \quad ,$$

$$A_1 = - \left\{ \frac{g_s}{m g_m} (C_{24} - g B_2) + \frac{D_2}{g c v} \right\} C_0^2 \quad (5.40)$$

Тогда

$$\text{Im } \delta_0^{\dagger} = - \frac{1}{2} (A_3 + \frac{A_1}{C_0^2}) k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m g} C_{24} + \frac{1}{m} B_1 \right] k^2 = - \varepsilon_0 < 0,$$

$$\text{Im } \delta_1^{\dagger} = \frac{1}{2} \frac{A_1}{C_0^2} = - \frac{1}{2} \left[\frac{g_s}{m g_m} (C_{24} - g B_2) + \frac{D_2}{g c v} \right] k^2 = - \varepsilon_1 < 0. \quad (5.41)$$

Пользуясь (5.34) или в частном случае (5.41), можно написать

$$D(E) = B(\omega + i\varepsilon_0 - \omega_0)(\omega + i\varepsilon + \omega_0)(\omega + i\varepsilon_1 - \omega_1)(\omega + i\varepsilon_1 + \omega_1) \cong$$

$$\cong (\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\omega\varepsilon_0)(\omega^2 - \omega_1^2 + 2i\omega\varepsilon_1) \quad (5.42)$$

Вычисляя D_X в самом низшем порядке по k , получаем, что

$$\sum_{\alpha} k^{(\alpha)} v_s^{(\alpha)} = \frac{k^2 [\Delta(k, E) \sqrt{g_0} + \Delta_1(k, E) B_3^*]}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\omega\varepsilon_0)(\omega^2 - \omega_1^2 + 2i\omega\varepsilon_1)} \eta^{-k} -$$

$$- \frac{k^2 [\Delta(k, E) \sqrt{g_0} - \Delta_1(k, E) B_3]}{m(\omega^2 - \omega_1^2 + 2i\omega\varepsilon_0)(\omega^2 - \omega_1^2 + 2i\omega\varepsilon_1)} \eta^k, \quad (5.43)$$

где

$$\Delta(k, E) = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial g} \right)_{\theta} k^2 \frac{S^2 \theta}{g_n c v} - E^2 \left[\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial g} \right)_{S} - \left(\frac{\partial}{\partial g} (g S) \right)_{\theta} \frac{\theta}{g c v} \right],$$

$$\Delta_1(k, E) = -E^3 + Ek^2 S \left(\rho \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_\theta - S \frac{\rho_s}{\rho_n} \right) \frac{\theta}{c_v} \quad (5.44)$$

Как видно, при малых k $\Delta \sim k^2$, $\Delta_1 \sim k^3$, поэтому мы можем пренебречь Δ_1 по сравнению с Δ .

В работе /I/ показано, что

$$\begin{aligned} \langle\langle a_k; a_{-k} \rangle\rangle_{E=0}^r &= - \langle\langle a_{-k}^+; a_k \rangle\rangle_{E=0}^r, \\ \langle\langle a_k; a_k^+ \rangle\rangle_{E=0}^r &= - \langle\langle a_{-k}^+; a_k^+ \rangle\rangle_{E=0}^r. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Следуя этой работе, мы принимаем, что равенства (5.45) имеют место в низшем порядке и в нашем случае. Тогда из (5.10), (5.43) и (5.45) получаем для фурье-компонент запаздывающих функций Грина

$$\begin{aligned} \langle\langle a_k; a_{-k} \rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}^r &\approx \frac{\Delta(k, E) \rho_0}{4\pi\omega_0\omega_1(\omega+2i\epsilon_0-\omega_0)(\omega+2i\epsilon_1-\omega_1)}, \\ \langle\langle a_k; a_k^+ \rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}^r &\approx - \frac{\Delta(k, E) \rho_0}{4\pi\omega_0\omega_1(\omega+2i\epsilon_0-\omega_0)(\omega+2i\epsilon_1-\omega_1)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Из формул (5.46), (5.33), (5.34), (5.41) видно, что при рассмотрении сверхтекучей жидкости с учётом вязкости появляется затухание колебаний δN_T (поглощение первого и второго звука).

Мнимые части корней запаздывающих функций Грина дают коэффициенты поглощения первого и второго звука в сверхтекучей бозе-системе. Они зависят от коэффициентов обычной и второй вязкости и от коэффициента теплопроводности. В связи с получением нами членов затухания, которые выражаются через кинетические коэффициенты, заметим следующее.

В случае, когда взаимодействие между частицами $\Phi(r)$ пропорционально некоторому малому параметру ε , основной член кинетического уравнения (отвечающий за соударения) порядка ε^2 . Отсюда следует, что кинетические коэффициенты, выступающие в дальнейших членах уравнения, будут величинами порядка $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Поэтому выражения для рассматриваемых функций Грина G и их массовых операторов G^{-1} , очевидно, не будут аналитическими функциями ε в окрестности $\varepsilon = 0$, поэтому использование для их вычисления обычных методов теории возмущения может вызвать серьезные сомнения.

Автор выражает глубокую благодарность акад. Н.Н. Боголюбову за предложение темы настоящей работы и за многочисленные дискуссии в процессе работы.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости. Препринт ОИЯИ, Дубна, (1961).
2. Н.Н. Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1961.
3. Kadanoff L.P. and Martin P.C. Ann.Phys. (N.Y.), 24, 419 (1963).
4. Д.Н. Зубарев, УФН, 71, 71 (1960).
5. Chapman S. and Cowling T.G. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases, Cambridge at the University Press (1952).
Русский перевод, И.Л., Москва, 1960.
6. Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М.-Л., 1946.
7. И.М. Халатников, ЖЭТФ, 20, 243 (1950); 23, 265 (1952).

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3511. Тираж 400. 1,7 уч.-изд.л.
Январь 1964 г.



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

LABORATORY OF THEORETICAL PHYSICS

N.Ya. Vilenkin and Ya.A. Smorodinsky

E- 1503

INVARIANT EXPANSIONS
OF RELATIVISTIC AMPLITUDES

Дубна 1964

Виленкин Н.Я., Смородинский Я.А.

Инвариантные разложения релятивистских амплитуд

Рассматривается проблема разложения функции в интегралы по ортогональным системам собственных функций оператора Лапласа на гиперboloиде. Приводятся формулы прямого и обратного разложения по четырем ортогональным координатным системам пространства Лобачевского. Показана связь этих разложений с разложениями функций на световом конусе. Полученные разложения, вообще говоря, неунитарны и становятся унитарными при некоторых значениях квантовых чисел.

Работа издается только на английском языке.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна 1964

Vilenkin N.Ya and Smorodinsky Ya.A.

Invariant Expansions of Relativistic Amplitudes.

The integral transforms of functions in terms of orthogonal systems of the Laplacian eigenfunctions on the hyperboloid are considered. Formulas are given for direct and inverse expansions in four orthogonal coordinate systems of the Lobachevsky's space. All the transformations are connected with expansions on a cone. The expansions are not unitary in general, but become unitary for certain values of the quantum numbers.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna. 1964.

N.Ya. Vilenkin and Ya.A. Smorodinsky

E- 1503

INVARIANT EXPANSIONS
OF RELATIVISTIC AMPLITUDES

Submitted to JETP

Дубна 1964

1. I n t r o d u c t i o n

In the present paper we shall consider the problem of the expansion of relativistic functions in series and integrals of the eigenfunctions of the Laplace operator in the Lobachevsky's space.

The problem is to investigate the Laplace operator on the two-sheet hyperboloid (the angular part of the d'Alembert operator) in various coordinate systems. In the next paper we shall consider a similar problem for a single-sheet hyperboloid. Many points of our investigation can be illustrated in geometrical terms. We shall use this method constantly. The expansion on the light cone first obtained by Shapiro (1,2) appears to be very important in these considerations. Gelfand and Graev (3,4) have developed a general theory of such expansions using the method of integral geometry. These methods allow one to pass from the investigation of functions on the hyperboloid to that on the cone where expansion reduces to the Fourier transformation. In this case the connection with the theory of the Lorentz group representations is clearly established^{x/}.

The constructed systems of eigenfunctions are a generalization of the non-relativistic systems such as the spherical and cylindrical ones. However, one of the systems described below namely the cylindrical, system has no analogy in non-relativistic mechanics. The eigenfunctions in this system are not expressed in terms of the Legendre and Bessel functions but in terms of a hypergeometrical function of a general form.

We note some features of the described expansions which point to interesting trends in the further work.

1) The systems of functions have an interesting symmetry property with respect to the crossing-channel. The relativistic nature of the crossing reaction is clearly manifested in geometrical terms. In particular, the cylindrical and horospherical coordinate system generates functions giving a one-dimensional representation of the crossing operation. The group properties of such transformations will be described later.

^{x/}
nov^{4-6/} The expansion of relativistic functions was also investigated by Dolgi-
but he has not constructed the complete system of functions.

connection with the four-dimensional angular momentum and the complete set of commuting observables in the relativistic theory. The four-momentum operator properties are richer than in the three-dimensional case and their theory makes it possible to understand the physical nature of the obtained results. This theory will be presented in the next paper.

The investigation of functions in the Lobachevsky's space was hitherto undeservedly forgotten. This paper illustrates the efficiency of the old and new aspects of the Lobachevsky's geometry for spinless particles. In further papers we shall consider particles with spin.

2. The Scattering Amplitudes

The scattering kinematics is described by means of the kinematical graph (Fig. 1): velocity-diagram in the Lobachevsky's space (see 7,8).

Points 1,2 represent the particle velocities before scattering, points 3,4 are the velocities after scattering. Point s is the velocity of the c.m.s. As the coordinate axes we choose two orthogonal axes, one of which bisects the scattering angle. As was shown in ^{9/}, the point of intersection of 14 and 23 is the velocity of the c.m.s. of the crossing reaction. For equal masses the point of intersection of 13 and 24 represents the u - channel c.m.s. velocity. In this case the coordinate axes coincide with the directions of the lines st and su and three points s, t, u form a so-called autopolar triangle (comp. ^{10/}). For different masses (dashed lines of Fig. 1) the connection between the coordinate axes and the u system is not so simple.

The third axis (non-essential for the binary collisions of spinless particles) is the normal to the plane.

If the Lobachevsky's space is represented as the interior of a sphere (the Beltrami model), then it is convenient to choose the origin in the center of the sphere. The points of the sphere correspond to particles with zero mass ^{x/}.

The Lobachevsky's space may be realized also as a three-dimensional manifold - the upper sheet of a two-sheet hyperboloid $u^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 = 1$.

We shall assume the coordinate origin to coincide with the vertex of the hyperboloid i.e. the coordinates of the c.m.s. will be (1,0,0,0). The zero mass

^{x/} The planes tangential to the sphere are isotropic (the distance from the point of contact to any point of the plane is equal to zero). This is connected with the gauge invariance of the photon.

particles are represented by the points on the light cone.

In this coordinate system the scattering is described by two parameters. For our purpose the usual kinematic parameters s and t turn out to be inconvenient. Instead of them we shall describe the process by the coordinates of one of the points, e.g. point I. The conservation laws of energy and momentum then define the coordinates of the other points. Since the bisectrix of the scattering angle was chosen as one of the coordinate axis, then the vectors of the initial and final velocity will be symmetrical with respect to this axis.

The scattering angle is denoted by θ . The coordinates of the point I can be chosen in different ways. This leads to different systems of eigenfunctions.

3. The Coordinate System and the d'Alembert Operator

As we have pointed out already, the Lobachevsky velocity-space is realized as the three-dimensional surface of the upper sheet of the two-sheet hyperboloid $u^2 = 1$ in the Minkowski's space. We cut such a hyperboloid by a plane parallel to one of the coordinate planes. Then the cross section represents again a hyperboloid (two-dimensional surface) if the plane does not pass through the axis "0", or a two-dimensional sphere if the plane crosses this axis normally. In the second case we can construct on the sphere a spherical coordinate system. In the first one the cutting can be continued in two ways: along a circle or along a hyperbola. In this case we get two more coordinate systems. In the Minkowski's space it is possible to construct two orthogonal two-dimensional planes. One of these plane possesses an Euclidean metric, the second a hyperbolic one. This gives rise to one more coordinate system. Constructing in the first plane a polar coordinate system, and in the second plane a hyperbolic one we get a cylindrical coordinate system. These systems exhaust all the orthogonal systems whose coordinate surfaces are spheres on hyperboloids (hyperspheres in the Lobachevsky space, i.e. spheres with the center on a one-sheet hyperboloid). If the center will be placed on the light cone then the coordinate surface will be a so-called horosphere: a surface whose geometry is isomorphic to the Euclidean plane geometry. Horospherical coordinate system will also be described in this paper. The physical meaning of all the coordinate systems can be easily understood if we notice that the transition from one frame of reference to any other can be performed by three successive transformations one of which, at least, is a Lorentz transformation.

In the spherical coordinate system a point is characterised by two space

rotations and one Lorentz transformation, in other systems by two or three Lorentz transformations. Note that for binary reactions without spins whose amplitude is independent of the azimuthal angle the Lobachevsky's system (three Lorentz rotations)^{x/} is not convenient.

The coordinate systems in the velocity-space will be specified by the connection between four homogeneous cartesian coordinates u_0, u_3, u_2, u_1 and corresponding angles. In this case a point on the hyperboloid is specified by four numbers which are the projective coordinates of a point. Along with the projective coordinates we introduce inhomogeneous coordinates obtained by dividing the projective coordinates by u_0 .

As the interval of variation of the ratios $u_i/u_0, i=1,2,3$ is between 0 and 1, then it is convenient to denote them by $th z_i$ where already $0 \leq z_i \leq \infty$ thus as inhomogeneous coordinates we choose z_i determined by the formula:

$$th z_i = \frac{u_i}{u_0} \quad (3.1)$$

Finally, we agree to denote the spacial rotation angles by Greek letters and the hyperbolic angles by Latin ones.

Now we go over to the description of the coordinate systems.

1. The Spherical System

The S - system is given by the formulas

$$\begin{aligned} u_0 &= ch a \\ u_3 &= sh a \cos \theta \\ u_2 &= sh a \sin \theta \cos \phi \\ u_1 &= sh a \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

or

$$\begin{aligned} th z_3 &= th a \cos \theta \\ th z_2 &= th a \sin \theta \cos \phi \\ th z_1 &= th a \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (3.3)$$

The inhomogeneous coordinates are nothing more than the three-dimensional spherical ones where $th a$ is the radius vector. The formulas in the

^{x/} The problem of the coordinate systems, in which variables in the Klein-Gordon equations are separable, has been considered by M.P.Olevsky^{10/} and A.I. Shoom^{11/}.

S - system are therefore found to be the closest to the non-relativistic ones. The d'Alembert operator in the four-dimensional Minkowski's space can be written in the form:

$$\square = \frac{1}{U^3} \frac{\partial}{\partial U} U^3 \frac{\partial}{\partial U} - \frac{1}{U^2} \Delta_L \quad (3.4)$$

where U is the four-vector length in the Minkowski's space, and Δ_L is the Laplace operator on the hyperboloid^{x/}, whose eigenfunctions are to be found.

In the S - system

$$\Delta_L = \frac{1}{\text{sh}^2 a} \frac{\partial}{\partial a} \text{sh}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\text{sh}^2 a} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.5)$$

II. The Lobachevsky Coordinate System

Lobachevsky was the first to consider one of the hyperbolic coordinate systems, therefore the corresponding coordinates are referred to as the Lobachevsky's coordinates (coordinates a , b and c):

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{ch } a \text{ ch } b \text{ ch } c \\ u_3 &= \text{ch } a \text{ ch } b \text{ sh } c \\ u_2 &= \text{ch } a \text{ sh } b \\ u_1 &= \text{sh } a \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \text{th } z_3 &= \text{th } c \\ \text{th } z_2 &= \text{th } b \frac{1}{\text{ch } c} \\ \text{th } z_1 &= \text{th } a \frac{1}{\text{ch } b} \frac{1}{\text{ch } c} \end{aligned} \quad (3.7)$$

The homogeneous coordinates u_0, u_1, u_2, u_3 are called the Weierstrass coordinates. In this system all the three angles are hyperbolic ones.

The Laplacian is determined by the formula

^{x/} i.e. operator of the second order on the hyperboloid which commutes with the Lorentz transformations.

$$\Delta_L = \frac{1}{\text{ch}^2 a} \frac{\partial}{\partial a} \text{ch}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\text{ch}^2 a} \left(\frac{1}{\text{ch} b} \frac{\partial}{\partial b} \text{ch} b \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\text{ch}^2 b} \frac{\partial^2}{\partial c^2} \right) \quad (3.8)$$

III. The Hyperbolic System - H

This system differs from the Lobachevsky one by that in the H -system one of the angles is spherical

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{ch} a \text{ch} b \\ u_3 &= \text{ch} a \text{sh} b \cos \phi \\ u_2 &= \text{ch} a \text{sh} b \sin \phi \\ u_1 &= \text{sh} a \end{aligned} \quad (3.9)$$

and the inhomogeneous coordinates

$$\begin{aligned} \text{th} z_3 &= \text{th} b \cos \phi \\ \text{th} z_2 &= \text{th} b \sin \phi \\ \text{th} z_1 &= \frac{1}{\text{ch} b} \text{th} a \end{aligned} \quad (3.10)$$

The inhomogeneous coordinates are similar to the cylindrical ones with the radius-vector (in the plane) $\text{th} b$. The coordinate planes $z_i = \text{const.}$ are orthogonal to the axis z_i . For the Laplacian we get:

$$\Delta_L = \frac{1}{\text{ch}^2 a} \frac{\partial}{\partial a} \text{ch}^2 a \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\text{ch}^2 a} \left(\frac{1}{\text{sh} b} \frac{\partial}{\partial b} \text{sh} b \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\text{sh}^2 b} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.11)$$

IV. The Cylindrical System

The C -system and H -system are very alike

$$\begin{aligned} u_0 &= \text{ch} b \text{ch} a \\ u_3 &= \text{sh} b \cos \phi \\ u_2 &= \text{sh} b \sin \phi \\ u_1 &= \text{ch} b \text{sh} a \end{aligned} \quad (3.12)$$

The correspondence between two systems is easily seen in inhomogeneous coordinates

$$\text{th } z_3 = \text{th } b \frac{1}{\text{ch } a} \cos \phi$$

$$\text{th } z_2 = \text{th } b \frac{1}{\text{ch } a} \sin \phi$$

$$\text{th } z_1 = \text{th } a$$

(3.13)

We see that the difference comes from the third (axial) coordinate. In the C-system the distance between planes is measured along the cylinder axis, so that the coordinate surfaces are equidistant surfaces.

The Laplacian in this system reads:

$$\Delta_L = \frac{1}{\text{ch } b \text{ sh } b} \frac{\partial}{\partial b} \text{ch } b \text{ sh } b \frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\text{ch}^2 b} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{1}{\text{sh}^2 b} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.14)$$

V. The Horospherical Coordinate System (0)

Finally we consider the horospherical coordinate system

$$u_0 = \frac{1}{2} [e^{-a} + (r^2 + 1) e^a]$$

$$u_3 = \frac{1}{2} [e^{-a} + (r^2 - 1) e^a]$$

$$u_2 = r e^a \cos \phi$$

$$u_1 = r e^a \sin \phi$$

(3.15)

In this system the coordinate surface $a = \text{const}$ is a horosphere in the Lobachevsky's space. In the horospherical coordinate system the Laplacian is

$$\Delta_L = e^{-2a} \left(\frac{\partial}{\partial a} e^{2a} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.16)$$

It is not difficult to see that from the system (0) we can get the system (C) by the transformation

$$r e^a = \text{sh } b$$

$$\text{th } a_c = \frac{e^{-a} + (r^2 - 1) e^a}{e^{-a} + (r^2 + 1) e^a}$$

(3.17)

where by a_c we denote the coordinate a in (3.12). After the transformation (3.17) has been performed the systems will differ only by an interchange of axes.

Now let us consider the kinematical meaning of the coordinates introduced above. As long as we restrict ourselves to the binary reactions (i.e. to the plane graphs), we shall not consider the Lobachevsky's system.

In the S -system the coordinates are the angle $\theta/2$ (the half of the scattering angle in c.m.s.) and the length $(s1)$ which defines the energy of the particle 1 in c.m.s.

In the H -system the point 1 is defined by the segment (sB) the Breit system velocity with respect to c.m.s. and the length $(B1)$ which defines the energy of the particle in the Breit system

In the C -system the particle 1 is specified symmetrically by the segments (sB) and (sB') i.e. by the velocities of both Breit systems (the system with vanishing sum of velocities of the particle 1 before and after the collision and the system in which vanishes the sum of the velocities of the particle 1 before the collision and particle 2 after the collision).

In the O - system the coordinate a is the distance to the horosphere with the center at the point k (1100) defined by the formula $\delta = \ln(ku)$. The scalar product of the type (ku) is often used as an independent variable in the problems of quantum electrodynamics. The two other variables u_2 and u_3 determine together with δ an invariant rectangular three-dimensional cartesian system in the Lobachevsky space.

4. The Eigenfunctions

In this section we shall obtain the eigenfunctions of the Laplacian on the hyperboloid in the five systems S , L , H , C and O . For this purpose we use the method of separation of variables. As is known (comp. ^{12/}), the eigenvalues of the multidimensional Laplacian are $-\ell(\ell+n-2)$ where n is the dimension of the space. For $n=4$ the eigenvalue is $-\ell(\ell+2)$. The transition from the sphere to the hyperboloid leads to that ℓ ceases to be integer and may be any complex number. Since in this case the sign of Δ_L (see eq. (3.4)) is negative the equation of the eigenvalues becomes:

$$\Delta_L f = \sigma(\sigma+2) f \quad (4.1)$$

In order that $\sigma(\sigma+2)$ be real it is necessary that: either

$$\sigma = -1 + ip \quad (p - \text{real}) \quad (4.2)$$

or

$$\sigma = \text{real} \quad (4.3)$$

From the theory of representations it is known that these values correspond to the unitary representations of the Lorentz group. Here (4.2) corresponds to the representation of the principal series and (4.3) to the additional one (see ^{13/}).

It is convenient to put $\sigma = -1 + ip$, then the real values of p correspond to the unitary representations of the principal series. In this case the eigenvalue $\sigma(\sigma + 2) = -(p^2 + 1)$ and we can write (4.1) in the form:

$$\Delta_L f_p = -(p^2 + 1) f_p \quad (4.4)$$

In the following we shall find other quantum numbers. We notice that in the case of a two-dimensional hyperboloid the eigenvalues will be $\sigma(\sigma + 1)$. For $\sigma = -\frac{1}{2} + iq$ (q - real) they will be real and equal to $-\sigma(\sigma + 1) = q^2 + \frac{1}{4}$.

We start with the system S . By separating the coordinates θ and ϕ by the ordinary spherical function $Y_{\ell, m}(\theta, \phi)$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ we get the equation

$$\left[\frac{1}{\text{sh}^2 a} \frac{\partial}{\partial a} \text{sh}^2 a \frac{\partial}{\partial a} - \frac{\ell(\ell + 1)}{\text{sh}^2 a} \right] A(a) = -(p^2 + 1) A(a) \quad (4.5)$$

It is easy to check that the solution of this equation will be

$$A(a) = (\text{sh } a)^{-\frac{1}{2}} P_{-\frac{1}{2} + ip}^{-(\ell + \frac{1}{2})}(\text{ch } a) \quad (4.6)$$

Thus, the eigenfunctions (unnormalized) in the S -system are of the form:

$$\langle p, \ell, m | a, \theta, \phi \rangle = (\text{sh } a)^{-\frac{1}{2}} P_{-\frac{1}{2} + ip}^{-(\ell + \frac{1}{2})}(\text{ch } a) Y_{\ell, m}(\theta, \phi) \quad (4.7)$$

The expansion in the coordinate a is a generalization of the well-known Moller-Fock expansion.

In the Lobachevsky's system the coordinate c is separated by means of the functions e^{imc} (m is real; the expansion is a Fourier expansion). Then we obtain two equations

$$\left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{2}{\text{cth } a} \frac{d}{da} - \frac{q^2 + \frac{1}{4}}{\text{ch}^2 a} \right) A(a) = -(p^2 + 1) A(a) \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{d^2}{db^2} + \frac{1}{\text{cth } b} \frac{d}{db} - \frac{m^2}{\text{ch}^2 b} \right) B(b) = -(q^2 + \frac{1}{4}) B(b) \quad (4.9)$$

to determine the eigenfunctions in the system L . The solutions of these equations are

$$A(a) = (\text{ch } a)^{-1} P_{-\frac{1}{2} + iq}^{ip}(\text{th } a) \quad (4.10)$$

$$B(b) = (\text{ch } b)^{-\frac{1}{2}} P_{-\frac{1}{2} + im}^{iq}(\text{th } b) \quad (4.11)$$

for the eigenfunction we obtain

$$\langle p, q, m | a, b, c \rangle = (ch a \sqrt{ch b})^{-1} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{ip} (th a) P_{-\frac{1}{2}+im}^{iq} (th b) e^{im\phi} \quad (4.12)$$

In the next system, the H -system, the operator in brackets (3.11) has the eigenvalue $-(q^2 + \frac{1}{4})$ and the eigenfunctions

$$P_{-\frac{1}{2}+iq}^m (ch b) e^{im\phi} \quad (4.13)$$

where m is an integer. Replacing the bracket by the eigenvalue we are led to the equation

$$\left(\frac{d^2}{da^2} + \frac{2}{ch a} \frac{d}{da} - \frac{q^2 + \frac{1}{4}}{ch^2 a} \right) A(a) = -(p^2 + 1) A(a) \quad (4.14)$$

The functions:

$$A(a) = (ch a)^{-1} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{ip} (th a) \quad (4.15)$$

represent the solution of this equation. Thus, we get for the H -system^{x/}

$$\langle p, q, m | a, b, \phi \rangle = (ch a)^{-1} P_{-\frac{1}{2}+iq}^{ip} (th a) P_{-\frac{1}{2}+im}^m (ch b) e^{im\phi} \quad (4.16)$$

In the horospherical coordinate system we separate the variables r and ϕ by means of the Bessel function $J_m(\kappa r) e^{im\phi}$. Then eq. (3.18) will be

$$\left\{ \frac{d^2}{db^2} - \frac{1}{b} \frac{d}{db} + \left(\kappa^2 + \frac{p^2 + 1}{b^2} \right) \right\} B(b) = 0 \quad (4.17)$$

The solution of this equation is the Macdonald function (the Bessel function of an imaginary index and an imaginary argument)

$$B(b) = \kappa b K_{ip}(\kappa b) \quad (4.18)$$

Thus the eigenfunctions of the system 0 are the functions

$$\langle p, \kappa, m | b, r, \phi \rangle = (\kappa b) K_{ip}(\kappa b) J_m(\kappa r) e^{im\phi} \quad (4.19)$$

Finally, we consider the cylindrical system. Separating the variables ϕ and a by $e^{im\phi}$ and e^{ifr} respectively, we are led to the equation

^{x/} The argument $th a$ can be replaced by the trigonometrical function $\cos a$. Formula $th a = \cos a$ is the well-known relation for parallel lines in Lobachevsky space.

$$\frac{d^2 B}{db^2} + (\operatorname{th} b + c \operatorname{th} b) \frac{dB}{db} + [p^2 + 1 - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 b} - \frac{r^2}{\operatorname{ch}^2 b}] B = 0 \quad (4.20)$$

The solution of (4.20) is the product of hyperbolic functions with the hypergeometrical ones:

$$B(b) = (\operatorname{th} b)^m (\operatorname{ch} b)^{-1-i p} F\left(\frac{m+1+i p+i r}{2}, \frac{m+1+i p-i r}{2}; m+1; \operatorname{th}^2 b\right) \quad (4.21)$$

and the eigenfunctions of the system C turn out to be equal to

$$\langle p, r, m | a, b, \phi \rangle = e^{i(r a + m \phi)} \frac{(\operatorname{sh} b)^m}{(\operatorname{ch} b)^{m+1+i p}}$$

$$F\left(\frac{m+1+i p+i r}{2}, \frac{m+1+i p-i r}{2}; m+1; \operatorname{th}^2 b\right)$$

This finishes the construction of the orthogonal systems of functions in the five coordinate systems. It can be shown that four systems S, H, O and C just exhaust all the systems, possessing the axial symmetry property and constructed from spheres, horospheres and hyperboloids. (The system L does not have this property and is given here as very close to the others; the remaining systems include ellipsoidal coordinate surfaces). In what follows it will be shown that the restriction to orthogonal systems is not obligatory and the expansion can be performed in non-unitary representations (the quantum number p is any complex number).

5. The Method of the Horosphere and the Expansion on the Cone

We have constructed different systems of the Laplace eigenfunctions on a two-sheet hyperboloid. Now we have to normalize these functions, or, what is the same, to find inversion formulas using these eigenfunctions. The general method of the horosphere developed by Gelfand and Graev gives a firm basis to the derivation of all these formulas.

To understand the essence of the method we consider the classical Fourier transformation in n dimensional space

$$F(k) = \int f(x) \exp(i k x) d^n x \quad (5.1)$$

where (only in this and the next formula):

$$k x = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$$

This can be reduced to the integration over planes

$$\Phi(k, p) = \int f(x) \delta(k x - p) d^n x \quad (5.2)$$

and a subsequent one-dimensional Fourier transformation

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k, p) e^{ip} dp \quad (5.3)$$

The integral transformation (5.2) (integration over the planes) is called the Radon transformation.

Gelfand and Graev have shown that in the same way one reduces the invariant expansions on any homogeneous manifold, the role of the planes being played by so-called horospheres. For the upper sheet of the two-sheet hyperboloid $u^2 = 1$ the horospheres are the cross sections of the hyperboloid by the planes $uk = 1$ where k is a point of the cone $k^2 = 0$. These planes are parallel to the cone generating lines.

Each function $f(u)$ given on the hyperboloid generates a function on the cone

$$h(k) = \int f(u) \delta(uk - 1) \frac{d^n u}{u_0} \quad (5.4)$$

where

$$d^n u = du_1 \dots du_n \quad (5.5)$$

$\frac{d^n u}{u_0}$ is the invariant measure on the hyperboloid. The transition from $f(u)$ to $h(k)$ we call the integral Gelfand-Graev transformation.

The inversion formula for this transformation for $n = 2m + 1$ is of the form

$$f(u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int \delta^{(n-1)}(uk - 1) h(k) \frac{d^n k}{k_0} \quad (5.6)$$

and for $n = 2m$ of the form^{x/}

$$f(u) = \frac{(-1)^{n/2} \Gamma(n)}{(2\pi)^n} \int (ku - 1)^{-n} h(k) \frac{d^n k}{k_0} \quad (5.7)$$

Here

$$\frac{d^n k}{k_0} = \frac{dk_1 \dots dk_n}{k_0} \quad (5.8)$$

is the invariant measure on the cone.

It is convenient to consider the functions on the cone since it is possible

^{x/} The divergent integral implies here a regularized one by means of the analytic continuation of the exponent.

to use homogeneous functions on this surface. The expansion of the function into the homogeneous components $\Phi(k, \sigma)$ is of the form^{xx/}:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Phi(k, \sigma) d\sigma \quad (5.9)$$

where

$$\Phi(k, \sigma) = \int h(tk) t^{-\sigma-1} dt \quad (5.10)$$

From eqs. (5.4) and (5.10) it follows that

$$\Phi(k, \sigma) = \int f(u) (uk)^\sigma \frac{d^n u}{u_0} \quad (5.11)$$

Whereas from eqs. (5.6), (5.7) and (5.9) it follows that for $n = 2m + 1$

$$f(u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2i (2\pi)^n} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)} \int \Phi(k', \sigma) (uk')^{\sigma+n-1} d^{n-1} k' d\sigma \quad (5.12)$$

for $n = 2m$

$$f(u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2i (2\pi)^n \Gamma(n)} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)} \text{ctg } \pi\sigma \int \Phi(k', \sigma) (uk')^{-\sigma+n-1} d^{n-1} k' d\sigma \quad (5.13)$$

The contour of integration Γ is any contour on the cone which crosses all the cone generating lines, and $d^{n-1} k'$ is the measure on this contour defined by the equality

$$d(tk') = t^{n-3} dt dk' \quad (0 < t < \infty)$$

For $\sigma = -\frac{n-1}{2} + ip$ where p is real, the integral transformation (5.11), (5.12) is unitary.

For the two-sheet hyperboloid the obtained formulas^{xx/} are just an analog of the Fourier function expansion in the n -dimensional Euclidean space. The analogy becomes more obvious if we notice that

$$uk' = e^{l(uk')} \quad uk' = 1$$

where $l(uk')$ is the distance from the point u to the horosphere $uk' = 1$

A further expansion of the function is already performed on the contour

^{x/} The value of δ is chosen so that no poles of the function are left inside the strip $0 \leq \text{Re } \sigma \leq \delta$.

^{xx/} For $n=3$ these formulas (5.10) and (5.12) were obtained by I. Shapiro^{1/} before Gelfand and Graev.

We restrict ourselves to the case $n=3$. We consider the contours:

- a) Γ - section of the cone by the plane $k_0 = 1$ i.e. the sphere $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1, k_0 = 1$
- b) Γ - section of the cone by the planes $k_3 = 1$ and $k_3 = -1$ i.e. the upper sheets of the hyperboloids $k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 = 1, k_3 = \pm 1$.
- c) Γ - section of the cone by the plane $k_0 - k_3 = 2$ (paraboloid).
- d) Γ - section of the cone by the cylinder $k_0^2 - k_1^2 = 1$

To these types of the cross sections there correspond the above considered coordinate systems S, H, O and C . Thus to case a) there corresponds the S -system, to b) the H -system, to c) the O -system and to d) the C -system.

6. Derivation of the Inversion Formulas

We pass to the derivation of the inversion formulas connected with the Laplace eigenfunctions obtained in 4.

1. The Inversion Formula in the S -system

We start with the case when the cross-section Γ is a sphere $k_0 = 1$. In this case the function $\Phi(k', \sigma)$ is given on the sphere and is therefore expanded in the set of spherical harmonics

$$\Phi(k', \sigma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m}(\sigma) Y_{\ell m}(k') \quad (6.1)$$

where k' is a point of the sphere.

We insert the expansion (6.1) into eq. (5.12) of § 5. We get that

$$f(u) = -\frac{1}{2i(2\pi)^3} \sum_{\ell m} \int_{\delta-1\infty}^{\delta+1\infty} \sigma(\sigma+1) a_{\ell m}(\sigma) \int_{\Gamma} (uk')^{\sigma-2} Y_{\ell m}(k') d^2 k' d\sigma \quad (6.2)$$

where $d^2 k'$ is the ordinary Euclidean measure on the sphere Γ .

We have to calculate the integral

$$J = \int_{\Gamma} (uk')^{\sigma-2} Y_{\ell m}(k') d^2 k' \quad (6.3)$$

Let $u = (u_0, u')$ where $u_0 = \text{ch } a$, $u' \equiv u$. We choose a polar axis in the direction u' and go over to the spherical coordinates, after simple calculations we obtain

$$J = \frac{(-1)^\ell (2\pi)^{3/2} \Gamma(-\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma-\ell-1) \sqrt{\text{sh } a}} P^{-\ell-\frac{1}{2}}_{-\sigma-\frac{3}{2}} (\text{cha}) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (6.4)$$

By substituting J' into eq. (6.2) we get

$$f(u) = \frac{1}{2i (2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell, m} (-1)^{\ell+1} \int_{\delta-\infty}^{\delta+\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(-\sigma-\ell-1)} \frac{a_{\ell m}(\sigma)}{\sqrt{\text{sh } a}} P^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{-\sigma-3/2} (\text{cha}) Y_{\ell m}(\theta, \phi) d\sigma \quad (6.5)$$

Now we proceed to the calculation of the coefficients $a_{\ell m}$. From eq. (6.1) it follows that

$$a_{\ell m}(\sigma) = \int_{\Gamma} \Phi(k', \sigma) Y_{\ell m}^*(k') d^2 k' \quad (6.6)$$

We insert into this equation the expression (5.11) for $\Phi(k', \sigma)$

$$a_{\ell m}(\sigma) = \int f(u) \int_{\Gamma} (uk' \rho)^{\ell} Y_{\ell m}^*(k') d^2 k' \frac{d^3 u}{u_0} \quad (6.7)$$

Repeating the calculations of the integral (6.4) we get

$$a_{\ell m}(\sigma) = \frac{(-1)^\ell (2\pi)^{3/2} \Gamma(\sigma+1)}{2\Gamma(\sigma-\ell+1)} \int f(u) (\text{sh } a)^{-\frac{1}{2}} P^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{\sigma+\frac{1}{2}} (\text{cha}) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \frac{d^3 u}{u_0} \quad (6.8)$$

In terms of the coordinates a, θ, ϕ we have

$$\frac{d^3 u}{u_0} = \text{sh}^2 a \sin \theta da d\theta d\phi \quad (6.9)$$

Eqs. (6.5), (6.8) give the expansion of the function $f(u)$ in the eigenfunctions of the Laplacian.

Formulae become simpler if $\sigma = -1 + ip$ i.e. if we consider only the unitary case. In this case they take the form:

$$f(u) = \frac{(-1)^\ell}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\ell, m} \int_0^\infty \frac{\Gamma(2+ip)}{\Gamma(ip-\ell)} \frac{a_{\ell m}(p)}{(\text{sh } a)^{\frac{1}{2}} P^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}+ip}} (\text{cha}) Y_{\ell m}(\theta, \phi) p^2 dp \quad (6.10)$$

where

$$a_{\ell m}(p) = \frac{(-1)^\ell (2\pi)^{3/2} \Gamma(ip)}{2\Gamma(-ip-\ell)} \int f(u) (\text{sh } a)^{-\frac{1}{2}} P^{-(\ell+\frac{1}{2})}_{-\frac{1}{2}-ip} (\text{cha}) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \frac{d^3 u}{u_0} \quad (6.11)$$

Expansion in the \mathbb{H}^3 - System

The expansion in the coordinate system \mathbb{H}^3 is performed in just the

same way. We choose as the Γ contour the section of the cone by the planes $u_3 = \pm 1$. This cross section consists of two parts: the upper sheets of the two-sheet hyperboloids Γ_+ and Γ_- . We denote by $\phi_+(k', \sigma)$ and $\phi_-(k', \sigma)$ the values of $\Phi(k', \sigma)$ on these hyperboloids and apply to the functions $\Phi_+(k', \sigma)$ and $\Phi_-(k', \sigma)$ the expansion on the two-dimensional hyperboloid (see Appendix). By substituting the obtained result into the formula (5.12) we get:

$$f(u) = \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\delta_{-1\infty}}^{\delta_{+1\infty}} \int_{\epsilon_{-1\infty}}^{\epsilon_{+1\infty}} \frac{\Gamma(1-\tau)}{\Gamma(m-\tau)} r \operatorname{ctg} \pi \tau \cdot \int_{\Gamma_-}^{\Gamma_+} a_m^+(r, \sigma) (f_+ + f_-)(uk')^{-\sigma-2} J_{-r-1}^m(k') d^2 k' dr d\sigma \quad (6.12)$$

where

$$J_{-r-1}^m(k') = P_{-r-1}^m(\operatorname{ch} b) e^{im\phi} \equiv J_{-r-1}^m(b, \phi)$$

$$d^2 k' = \operatorname{sh} b db d\phi$$

In this case we have to calculate the integrals

$$I_{\pm} = \int_{\Gamma_{\pm}} (uk')^{-\sigma-2} J_{-r-1}^m(k') d^2 k' \quad (6.13)$$

They are calculated in just the same way as (6.4)

$$I_{\pm} = \frac{\Gamma(\sigma+r+2)\Gamma(\sigma-r+1)}{\Gamma(\sigma+2)} (\operatorname{ch} a)^{-1} P_{-r-1}^{-\sigma-1}(\mp \operatorname{th} a) J_{-r-1}^m(b, \phi) \quad (6.14)$$

Therefore

$$f(u) = - \frac{(\operatorname{ch} a)^{-1}}{8(2\pi)^4} \sum_m \int_{\delta_{-1\infty}}^{\delta_{+1\infty}} \int_{\epsilon_{-1\infty}}^{\epsilon_{+1\infty}} \frac{\Gamma(\sigma+r+2)\Gamma(\sigma-r+1)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(m-\tau)} r \operatorname{ctg} \pi \tau \cdot J_{-r-1}^m(b, \phi) \cdot \left\{ a_m^+(r, \sigma) P_{-r-1}^{-\sigma-1}(-\operatorname{th} a) + a_m^-(r, \sigma) P_{-r-1}^{-\sigma-1}(\operatorname{th} a) \right\} dr d\sigma \quad (6.15)$$

Calculating a_m^+ and a_m^- we get

$$a_m^{\pm}(r, \sigma) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(-\sigma-r-1)\Gamma(r-\sigma)}{\Gamma(r-m+1)\Gamma(-\sigma)} \int f(u) P_r^{\sigma+1/2}(\mp \operatorname{th} a) J_r^m(b, \phi) d^3 u \quad (6.16)$$

where

$$d^3 u = \operatorname{sh}^2 a \operatorname{sh} b da db d\phi \quad (6.17)$$

As was pointed out in §5 (p.14) the unitary case corresponds to the values

$\sigma = -1 + ip$, $r = -\frac{1}{2} + iq$. Then eqs. (6.15), (6.16) take the form

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^4 \operatorname{ch} a} \sum_m \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + iq + ip) \Gamma(\frac{1}{2} + ip - iq)}{\Gamma(1 + ip) \Gamma(m + \frac{1}{2} - iq)} q \operatorname{cth} \pi q \times \quad (6.18)$$

$$J_{m+\frac{1}{2}}^m(b, \phi) \{ a_m^+ P_{-\frac{1}{2}+iq}^{4p}(-\operatorname{th} a) + a_m^- P_{-\frac{1}{2}+iq}^{-4p}(\operatorname{th} a) \} d\phi dq$$

$$a_m^\pm(p, q) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + iq) \Gamma(\frac{1}{2} - ip - iq) \Gamma(\frac{1}{2} - ip + iq)}{\Gamma(\frac{1}{2} + iq - m) \Gamma(1 - ip)} \quad (6.19)$$

$$\int f(u) P_{-\frac{1}{2}+iq}^{4p}(\mp \operatorname{th} a) J_{-\frac{1}{2}+iq}^{-m}(b, \phi) d^3\phi$$

The Expansion in the 0 System

In the horospherical coordinate system the calculation is performed in just the same way as above. As the Γ - contour we choose the section of the cone by the plane $k_0 - k_3 = 2$.

$$k_0 = (1 + \rho^2) \quad k_3 = (-1 + \rho^2) \quad (6.20)$$

$$k_2 = 2\rho \cos a \quad k_1 = 2\rho \sin a$$

We put

$$\Phi(k', \sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi(\kappa, \theta, \sigma) e^{i\kappa \rho \cos(\theta - a)} \kappa d\kappa d\theta \quad (6.21)$$

(the Hanckel transformation) and insert it in eq. (5.12). After simple transformations we get that

$$f(u) = - \frac{1}{2i(2\pi)} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) e^{-\sigma(\sigma+2)} \quad (6.22)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi(\kappa, \theta, \sigma) e^{i\kappa r \cos(\theta - \phi)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{i\kappa \rho \cos(\theta - a)} \cdot (\rho^2 + e^{-2a})^{-\sigma-2} \kappa \rho d\rho da d\kappa d\theta d\sigma$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-i\kappa \rho \cos(\theta - a)} (\rho^2 + e^{-2a})^{-\sigma-2} \rho d\rho da = \frac{2\pi}{\Gamma(\sigma+2)} \left(\frac{\kappa}{2} e^a\right)^{\sigma+2} K_{\sigma-1}(e^{-a}\kappa) \quad (6.23)$$

where $K_\alpha(x)$ is the Macdonald cylindrical function. Therefore (assuming also $e^{-a} = b$)

$$f(u) = - \frac{b}{i(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(\kappa, \theta, \sigma) \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{\sigma+2} e^{i\kappa\rho\cos(\theta-\phi)} \cdot K_{-\sigma-1}(b\kappa) d\kappa d\theta d\sigma \quad (6.24)$$

The coefficients $\psi(\kappa, \theta, \sigma)$ are calculated by the Fourier formula

$$\psi(\kappa, \theta, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Phi(k', \sigma) e^{-i\kappa\rho\cos(\theta-\alpha)} d^2k'$$

where $d^2k' = 4\rho d\rho d\alpha$. Substituting here eq. (5.11) for $\Phi(k', \sigma)$ we get

$$\psi(\kappa, \theta, \sigma) = \frac{2}{\pi \Gamma(-\sigma)} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{\sigma+1} \int f(u) e^{-i\kappa r \cos(\theta-\phi)} K_{\sigma+1}(b\kappa) \frac{1}{b^2} d^3u \quad (6.25)$$

$$d^3u = -r dr e^{-\alpha} d\alpha d\phi = r dr db d\phi$$

In the unitary case as above: $\sigma = -1 + i\rho$

The Expansion in the Cylindrical Coordinate System

Finally we consider the cylindrical coordinate system. It corresponds to the cross section Γ of the hyperboloid by the cylinder $k_0^2 - k_1^2 = 1$. We choose on Γ the parameters c and a :

$$k_0 = \operatorname{ch} c, \quad k_1 = \operatorname{sh} c, \quad k_2 = \sin a, \quad k_3 = \cos a \quad (6.26)$$

We perform the Fourier transformation of the function $\Phi(k', \sigma)$ with respect to the parameters c, a :

$$\Phi(k', \sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_m(\tau, \sigma) e^{i(ma + \tau c)} d\tau \quad (6.27)$$

We substitute this expansion to eq. (5.12). Assuming

$$\begin{aligned} u_0 &= \operatorname{ch} b \operatorname{ch} a & u_3 &= \operatorname{sh} b \cos \phi \\ u_2 &= \operatorname{sh} b \sin \phi & u_1 &= \operatorname{ch} b \operatorname{sh} a \end{aligned} \quad (6.28)$$

we get

$$f(u) = - \frac{1}{2i(2\pi)^3} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(m\phi + \tau a)} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\sigma+1) a_m(\tau, \sigma) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (\operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \cos a)^{-\sigma-2} e^{i(ma + \tau c)} \cdot dc da d\sigma d\tau \quad (6.29)$$

Now we have to calculate the integral

$$I = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (chb \ chc - shb \ cosa)^{-\sigma-2} e^{i(ma+rc)} \ dc \ da \quad (6.30)$$

We separate $chb \ chc$ outside the brackets and expand $(1 - thb \frac{\cos a}{chc})^{-\sigma-2}$ into the binomial series. After the integration term by term we get

$$I = \frac{2^{\sigma+2} \pi \Gamma(\frac{m+\sigma+ir}{2} + 1) \Gamma(\frac{m+\sigma-ir}{2} + 1)}{\Gamma(m+1) \Gamma(\sigma+2)} \quad (6.31)$$

$$\frac{sh^m b}{ch^{m+\sigma+2} b} F(A, B, m+1; th^2 b)$$

where $A = \frac{1}{2}(m+\sigma+ir+2)$ $B = \frac{1}{2}(m+\sigma-ir+2)$

Therefore

$$f(u) = -\frac{1}{16 \pi^2 i} \sum_m \frac{th^m b e^{im\phi}}{\Gamma(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ir a} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{a_m(r, \sigma)}{\Gamma(\sigma)} \Gamma(A) \Gamma(B) \left(\frac{2}{ch b}\right)^{\sigma+2} F(A, B, m+1; th^2 b) d\sigma \ dr \quad (6.32)$$

The coefficients $a_m(r, \sigma)$ are expressed by the formula

$$a_m(r, \sigma) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k', \sigma) e^{-i(m\phi+ra)} d^2 k' \quad (6.33)$$

$$d^2 k' = d\phi \ da$$

We insert for $\Phi(k', \sigma)$ the eq. (5.11). After simple transformations we obtain

$$a_m(r, \sigma) = \frac{\Gamma(A') \Gamma(B')}{4\pi \Gamma(m+1) \Gamma(-\sigma)}, \quad (6.34)$$

$$\int \frac{th^m b}{ch b} \left(\frac{2}{ch b}\right)^{\sigma} F(A', B', m+1; th^2 b) e^{i(m\phi+ra)} f(u) d^3 u$$

where $d^3 u = sh^2 a \ da \ db \ d\phi$

$$A' = \frac{1}{2}(m-\sigma+ir)$$

$$B' = \frac{1}{2}(m-\sigma-ir)$$

The unitary case corresponds to $\sigma = -1 + ip$. These formulas solve the problem of the amplitude expansion in the described four systems of coordinates.

A P P E N D I X

In the expansion in the H system use has been made of the expansion of functions on a two-dimensional hyperboloid. Introducing the coordinates

$$u_0 = ch b$$

$$u_2 = sh b \cos \phi$$

$$u_1 = sh b \sin \phi$$

we have

$$f(u) = -\frac{1}{8\pi i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} a_m(\sigma) \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(m-\sigma)} J^m(b, \phi) \sigma \operatorname{cth} \pi \sigma d\sigma$$

where

$$a_m(\sigma) = \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-m+1)} \int_{\sigma} f(u) J^{-m}(b, \phi) d^2u$$

$$d^2u = sh b db d\phi$$

References

1. И.С. Шапиро. ДАН СССР, 106 647 /1956/.
2. I. Shapiro. Phys. Letters 1, 253 (1962).
3. И.М. Гельфанд, М.И. Граев. Труды Моск.мат. общества 11, 243 /1962/.
4. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М-Л, 1963, Физматгиз.
5. А.З. Долгинов. ЖЭТФ, 30, 746 /1956/.
6. А.З. Долгинов, И.Н. Топтыгин. ЖЭТФ, 35, 794 /1958/.
7. А.З. Долгинов, И.Н. Топтыгин, 37, 1441 /1959/.
8. Я.А. Смородинский. Атомная энергия, 14, 110 /1963/.
9. Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 43, 2217 /1962/.
10. М.П. Олевский. Математический сборник. 27, 379 /1950/.
11. А.И. Шум. Математический сборник 47, 495 /1959/.
12. W. Magnus und F. Oberhettinger, Formeln und Satze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer (1950).
13. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос и З.Я. Шапиро. Представление группы вращения и группы Лоренца. Физматгиз, 1956.
14. И.М. Рыжик и П.С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1963, Физматгиз.

Received by Publishing Department
on December, 25, 1963.

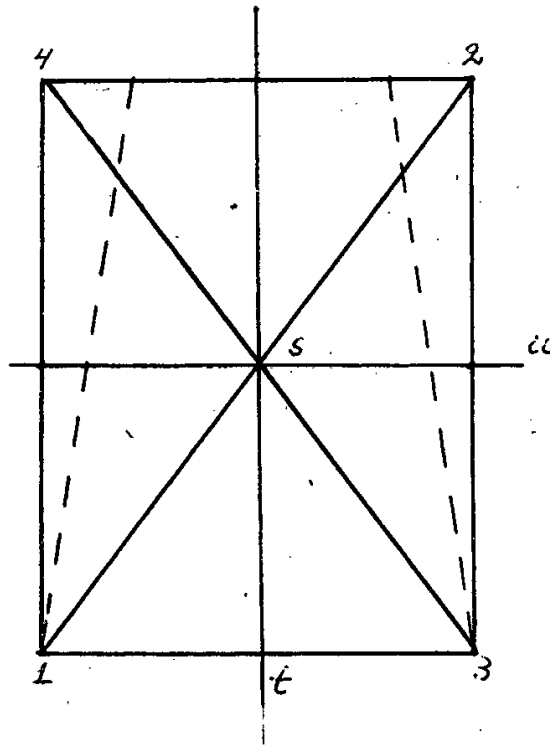


Fig. 1.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Заказ 3509. Тираж 410. 1,5 уч.-изд.л.
Январь 1964 г.