

OCR

**INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT**

**CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY**

This material contains information affecting the National Defense of the United States within the meaning of the Espionage Laws, Title 18, U.S.C. Secs. 793 and 794, the transmission or revelation of which in any manner to an unauthorized person is prohibited by law.

S-E-C-R-E-T

25X1

COUNTRY Poland

REPORT

SUBJECT Monographs of the Polish Academy of Science in the Field of Electrotechnology  
*re (see check marks for subjects)*

DATE DISTR. April 8, 1957.

NO. PAGES 1

REQUIREMENT NO. RD

REFERENCES

DATE OF INFO.

25X1

PLACE & DATE ACQ

25X1

SOURCE EVALUATIONS ARE DEFINITIVE. APPRAISAL OF CONTENT IS TENTATIVE.

[redacted] monographs on subjects in the field of electrotechnology, in Polish, written by members of the Polish Academy of Science (Polska Akademia Nauk):

- ✓ 1. Criterion for Root Square Distortion at Limited Noise Power (Kryterium Zniekształcen Kwadratowych przy Ograniczonej Mocy Zakłócen) by R. Kulikowski and A. Rybarski.
- ✓ 2. Doppler Effect in Ionospheric Propagation (Zjawisko Dopplera w Propagacji Jonosferycznej) by S. Borowski, S. Jasinski and S. Manczarski. 25X1
- ✓ 3. Prediction of Solar Activity (Prognoza Aktywnosci Slonca) by K. Urbaniak and A. Zieba. 25X1

[redacted]

25X1

*Unclassified*

*8*

S-E-C-R-E-T

25X1

STATE	<input checked="" type="checkbox"/>	ARMY	<input type="checkbox"/>	NAVY	<input checked="" type="checkbox"/>	AIR	<input checked="" type="checkbox"/>	FBI	<input checked="" type="checkbox"/>	AEC					
-------	-------------------------------------	------	--------------------------	------	-------------------------------------	-----	-------------------------------------	-----	-------------------------------------	-----	--	--	--	--	--

(Note: Washington distribution indicated by "X"; Field distribution by "#".)

**INFORMATION REPORT INFORMATION REPORT**

**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**KOMITET NARODOWY U.R.S.R.**  
Warszawa, Pałac Kultury i Nauki  
pok. 23-II, tel. 6-50-51 wew. 23-84

25X1

**ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI**

25X1

ODBITKA Z ZESZYTU 2 — TOM V — 1956

523.74

K. URBANIAK, A. ZIĘBA

## Prognoza aktywności słońca

ПРОГНОЗ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

PREDICTION OF SOLAR ACTIVITY

**PAŃSTWOWE**  
**WYDAWNICTWO NAUKOWE**

25X1

523.74

K. URBANIK, A. ZIĘBA

## Prognoza aktywności słońca

Rękopis dostarczono 18. 11. 1955.

Zmiany elektromagnetycznej aktywności słońca, powodujące w szczególności zaburzenia w odbiorze radiowym, charakteryzuje się na ogół liczbami Wolfa, które opisują rozmieszczenie i ilość plam słonecznych. Ponieważ ścisła zależność liczb Wolfa od czasu nie jest znana, przyjmuje się, że tworzą one proces stochastyczny. W artykule omówione są krótko probabilistyczne metody prognozy liczb Wolfa: liniowa metoda Kólmogorowa-Wienera oraz metoda uwzględniająca koszt eksperymentu oparta na teorii funkcji decyzyjnych.

Aktywnością elektromagnetyczną słońca interesują się zarówno astronomowie i fizycy jak i radiotechnicy. Jej znaczenie dla radiotechniki polega na tym, że w dużym stopniu od niej zależy działanie służb telekomunikacyjnych. Zwiększenie aktywności wpływa ujemnie na jakość odbioru.

Aktywność słońca jest ściśle związana z występowaniem plam słonecznych. Dlatego opisujemy ją za pomocą tak zwanych liczb Wolfa, charakteryzujących ilość i rozmieszczenie plam na słońcu

$$r = k (10g + f)$$

$r$  — jest tu liczbą Wolfa,

$g$  — oznacza ilość grup plam słonecznych (izolowane plamy uważamy za oddzielne grupy),

$f$  — całkowitą ilość plam;

$k$  — jest współczynnikiem zależnym od przyrządu pomiarowego, w przybliżeniu równym jedności.

Zależność liczb Wolfa od czasu nie jest dokładnie znana.

Obserwacje wskazują na okresowe nasilenie się liczby plam słonecznych, przy czym wyraźny jest tu cykl jedenastoletni.

W pierwszym przybliżeniu przyjmuje się, że liczby Wolfa zależą od czasu losowo. Pozwala to na wykorzystanie aparatu teorii procesów stochastycznych do badania aktywności słońca, a w szczególności do ustalania prognozy aktywności słońca.

Niech  $r(t)$  będąca funkcją losową oznacza liczbę Wolfa odpowiadającą chwili  $t$ . Obok funkcji  $r(t)$  wygodnie jest posługiwać się odchyleniem  $\varrho(t)$  wielkości  $r(t)$  od średniej wartości  $\bar{r}(t)$ <sup>1</sup>

$$\varrho(t) = r(t) - \bar{r}(t).$$

Dla odchylenia  $\varrho(t)$ , które również jest funkcją losową, mamy

$$\bar{\varrho}(t) = 0.$$

Przyjmujemy także, zgodnie z doświadczeniem, że korelacja odchyleń  $\varrho(t)$  i  $\varrho(t+\tau)$  zależy wyłącznie od długości przedziału czasowego  $\tau$ , a więc funkcja korelacyjna ma postać

$$B_r(\tau) = \overline{\varrho(t+\tau)\varrho(t)}.$$

Odchylenia  $\varrho(t)$  tworzą zatem stacjonarny proces stochastyczny. Przyjmemy, że znamy liczby Wolfa w chwilach  $t_1, \dots, t_n$ . Wówczas szacując  $\bar{r}(t)$  średnią arytmetyczną

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r(t_i),$$

można obliczyć odchylenia  $\varrho(t_1), \dots, \varrho(t_n)$ . Zagadnienie prognozy liczby Wolfa w chwili  $t$ , przy znanych liczbach Wolfa w chwilach  $t_1, \dots, t_n$  sprowadza się więc do prognozy odchylenia  $\varrho(t)$ , gdy znane są odchylenia  $\varrho(t_1), \dots, \varrho(t_n)$ . Ograniczymy się do prognozy polegającej na oszacowaniu nieznannej wartości  $\varrho(t)$  kombinacją liniową wartości  $\varrho(t_1), \dots, \varrho(t_n)$ . Poza funkcją korelacyjną w prognozie nie wykorzystujemy innych charakterystyk procesu stochastycznego  $\varrho(t)$ .

Teoria prognozy liniowej opracowana została przez A. N. Kołmogorowa, N. Wienera i innych.

Prognoza liniowa sprowadza się do znalezienia układu współczynników liczbowych  $a_1, \dots, a_n$ ; odchylenie  $\varrho(t)$  szacuje się wówczas kombinacją liniową  $a_1\varrho(t_1) + \dots + a_n\varrho(t_n)$ . Prognozę opisaną współczynnikami  $a_1, \dots, a_n$  nazywamy optymalną, jeśli średni błąd kwadratowy prognozy jest najmniejszy, to znaczy

$$\sigma^2 = \left| \varrho(t) - \sum_{i=1}^n a_i \varrho(t_i) \right|^2 = \min_{a_1, \dots, a_n} \left| \varrho(t) - \sum_{i=1}^n a_i \varrho(t_i) \right|^2.$$

Dowodzi się, że współczynniki  $a_1, \dots, a_n$  opisujące najlepszą prognozę spełniają układ równań (por. [2])

$$\sum_{i=1}^n a_i B(t_i - t_k) = B(t - t_k) \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Kreska nad symbolem zmiennej losowej oznacza wartość średnią (oczekiwaną).

a średni błąd kwadratowy  $\sigma^2$  optymalnej prognozy jest równy

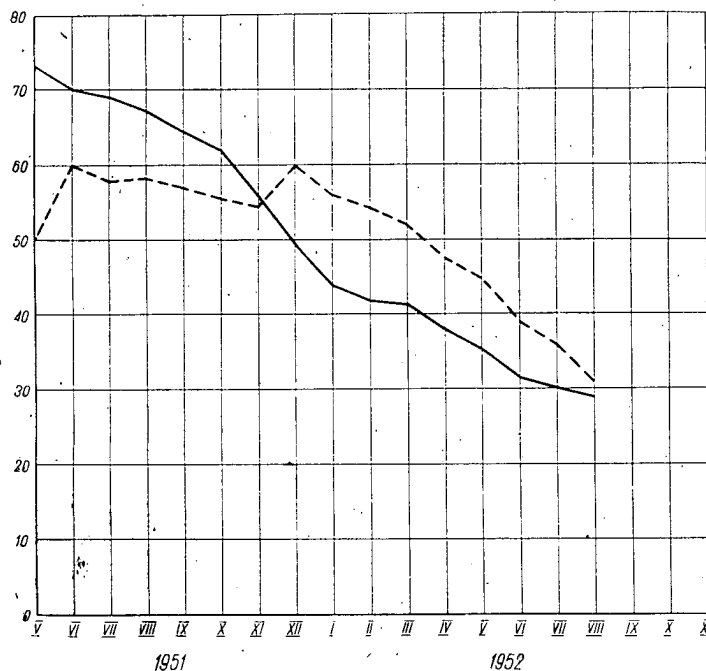
$$\sigma^2 = B(0) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k a_i B(t_i - t_k).$$

Odchylenia  $\varrho(t_1), \dots, \varrho(t_n)$  możemy, jak powiedzieliśmy, obliczyć. Pozwala to oczywiście szacować funkcję korelacyjną  $B(\tau)$  według znanego wzoru (por. [2] lub [6])

$$B(\tau) \approx \frac{1}{t_n - t_1 - \tau} \sum_{t_i + \tau < t_n} \varrho(t_i + \tau) \varrho(t_i).$$

Znając zaś funkcję  $B(\tau)$  z równań (1) możemy wyznaczyć współczynniki optymalnej prognozy.

Zanim podamy pewne konkretne przykłady prognozy, zwrócimy uwagę, że omawiana teoria prognozy liniowej podaje rachunkowy sposób otrzy-



Rys. 1. Wykres aktywności słońca według prognozy i na podstawie obserwacji w latach 1951/1952.

mania optymalnej prognozy (w podanym wyżej sensie) na podstawie danych obserwacyjnych. Materiał obserwacyjny aktywności słońca jest niezmiernie bogaty i nie może być cały wykorzystywany w rachunkach liczbowych. Powstaje zatem zagadnienie wyboru optymalnej ilości obserwacji i ich optymalnego rozmieszczenia. Innymi słowy

powstaje pytanie — ile i które obserwacje należy wykorzystać. Zagadnienie to jest nierozwiązane. Próba, podjęta przez autorów tej pracy, wskazuje, że zagadnienie prowadzi do równań, których nawet bardzo niedokładne rozwiązanie jest praktycznie na razie niemożliwe. (Do zagadnienia tego powrócimy jeszcze przy omawianiu innych teorii prognozy). W teorii prognozy liniowej przyjmuje się heurystycznie także (por. [3], [4]) wzory typu

$$\varrho(t) = a_1 \varrho(t-1) + a_2 \varrho(t-2) + a_{10} \varrho(t-10) + a_{11} \varrho(t-11) + \\ + a_{20} \varrho(t-20) + a_{21} \varrho(t-21) + \dots$$

Na przykład, dla dwóch obserwacji otrzymuje się na  $r(t)$  wzór

$$r(t) = 14,5 + 1,3 r(t-1) - 0,6 r(t-2).$$

Prognozę na lata 1925—1929 opartą na obserwacjach z dwóch poprzednich lat przedstawia poniższa tablica (por. [3]).

Rok	Prognoza	Obserwacja	Błąd
1925	33,2	44,3	11,1
1926	63,3	63,9	0,6
1927	71,5	69,0	-2,5
1928	65,4	77,8	12,4
1929	74,0	65,0	-9,0

Uwzględnijmy teraz tzw. koszt wykorzystania danych obserwacyjnych  $C(N)$ . Koszt ten należy rozumieć bardzo ogólnie; wchodzi do niego zarówno czas potrzebny do obliczeń jak i zużycie maszyn do liczenia itp. Oczywiście zależy na zmniejszeniu tego kosztu. Niech  $\varrho_N$  oznacza prognozę odchylenia  $\varrho(t)$  opartą na  $N$  obserwacjach (obserwacje te traktujemy jako zmienne losowe, a więc  $\varrho_N$  jest wielkością losową).  $W(\varrho, \varrho_N)$  oznacza dokładność prognozy odchylenia liczby Wolfa od średniej wartości. Może to być na przykład

$$W(\varrho, \varrho_N) = |\varrho - \varrho_N|.$$

Zależy również na zmniejszeniu funkcji  $W(\varrho, \varrho_N)$ , to jest na polepszeniu dokładności prognozy.

Gdybyśmy umieli oszacować stratę gospodarczą wynikającą z danej błędnej prognozy, wówczas można by otrzymać nowe wyniki w zakresie poruszonego już zagadnienia ilości i rozmieszczenia w czasie danych obserwacyjnych. Dokładne oszacowanie tej straty jest przypuszczalnie trudne. Jest to oczywiście trudność pozamatematyczna. Ponieważ jednak w praktyce wystarczy oszacowanie przybliżone, podamy przykład wyznaczenia ilości obserwacji w przypadku, gdy funkcja  $C(N)$  i  $W(\varrho, \varrho_N)$  są zna-

nymi funkcjami, których wartości wyrażają się w złotych. Wskażemy zresztą później pewne warianty tej teorii oparte na innych (w pewnych przypadkach dogodniejszych) założeniach o funkcji  $W(\varrho, \varrho_N)$ .

Przejdziemy teraz do teorii mających na celu prognozę dystrybuanty procesu. Rozpocznemy od wąskiego zagadnienia szacowania ilości obserwacji. Później zajmiemy się zagadnieniami o wiele ogólniejszymi.

Sumę

$$R_\varrho(N, \varrho_N) = C(N) + W(\varrho, \varrho_N)$$

nazywamy całkowitym kosztem prognozy, a wyrażenie

$$R(N, \varrho_N) = \max_{\varrho} [C(N) + W(\varrho, \varrho_N)]$$

maksymalnym całkowitym kosztem prognozy. Ilość  $N_0$  obserwacji potrzebnych do prognozy nazywamy optymalną, jeżeli

$$R(N_0, \varrho_{N_0}) = \min_N R(N, \varrho_N).$$

Na prostym, szczególnym przykładzie pokażemy metodę znajdowania optymalnej ilości obserwacji.

Przyjmijmy najpierw pewne założenia upraszczające. Przede wszystkim zakładamy, że obserwacje wykonujemy w sposób ciągły, a nie dyskretny. Dysponujemy więc wykresem rejestrowanym przez aparat od pewnej chwili początkowej 0. Dalej zakładamy, że odchylenie  $\varrho(t)$  liczb Wolfa od średniej tworzą proces normalny, czyli że rozkłady prawdopodobieństw są dane wzorem

$$P[\varrho(t) < x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t} \sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dy$$

i że prognoza dotyczy tylko niewiadomego parametru  $\mu$  w tym rozkładzie. Przyjmijmy, że dokładność  $W(\mu, \lambda)$  prognozy jest funkcją postaci

$$W(\mu, \lambda) = w(|\mu - \lambda|),$$

gdzie

$\mu$  — jest prawdziwą,

$\lambda$  — przewidzianą wartością parametru.

Prognoza wielkości  $\mu$  polega na oszacowaniu za pomocą średniej arytmetycznej wyników obserwacyjnych.

Dowodzi się [1], że optymalna ilość  $T$  pomiarów przy pewnych założeniach regularności funkcji  $w(x)$  i  $C(x)$  (które w praktyce można przyjąć) otrzymuje się z rozwiązania równania

$$\frac{dC(T)}{dT} + \frac{\int_0^{\infty} w(x) e^{-\frac{x^2 T}{2\sigma^2}} dx}{\sqrt{2\pi T} \cdot \sigma} - \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{\pi} \sigma} \int_0^{\infty} \frac{w(x) x^2}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2 T}{2\sigma^2}} dx = 0$$

względem  $T$ . Znając funkcje  $C(T)$  i  $w(x)$  można to równanie rozwiązać metodami przybliżonymi.

Podamy teraz pewien inny typ prognozy, mający o wiele szerszy zasięg niż podana na przykładzie teoria wyznaczania optymalnej obserwacji. Teoria ta, oprócz optymalnej ilości i optymalnego rozmieszczenia pomiarów, pozwala na skonstruowanie optymalnej prognozy [5].

Podstawowym pojęciem tej teorii jest pojęcie funkcji decyzyjnej.

Przez funkcję decyzyjną rozumiemy ciąg przepisów, z których pierwszy orzeka, jakie obserwacje powinniśmy wykonać i uwzględnić na początku, drugi — na podstawie tych wyników — bądź orzeka, że wykonujemy i uwzględniamy dalsze obserwacje (i jeśli tak, to jakie), bądź wydaje tzw. decyzję ostateczną. Trzeci przepis wchodzi w rachubę tylko wtedy, jeśli drugi nie wydał decyzji ostatecznej i znowu, na podstawie wyników obserwacji dokonanych na obu poprzednich etapach bądź zaleca dalsze pomiary, bądź wydaje decyzję ostateczną itd. Przez decyzję ostateczną rozumiemy orzeczenie, że badany proces stochastyczny ma taką a taką dystrybuantę. W samym pojęciu funkcji decyzyjnej abstrahujemy od tego czy jej zalecenia są dobre, czy decyzja ostateczna jest prawdziwa itp. Przez dystrybuantę procesu rozumiemy funkcję

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\varrho(t_1) < x_1, \dots, \varrho(t_n) < x_n\}$$

określającą dla wszystkich układów  $t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n$ , gdzie symbol  $P\{\}$  oznacza, jak zwykle, prawdopodobieństwo zdarzenia opisanego w nawiasie.

Używane w teorii funkcji decyzyjnych badanie etapowe nazywamy postępowaniem sekwencyjnym.

Oprócz wyżej opisanych funkcji decyzyjnych używamy funkcji decyzyjnych zrandomizowanych (losowych) [5]. Ma to zastosowanie do przypadków, gdy prognozę konstruujemy nie raz, lecz wiele razy. Możemy wtedy w poszczególnych badaniach stosować różne funkcje decyzyjne. Jeśli, ogólnie, z danego układu funkcji decyzyjnych za pomocą ustalonego mechanizmu (kostki) będziemy losowali poszczególne funkcje i stosowali je do kolejnych prognoz, będziemy mówili, że posługujemy się funkcją decyzyjną zrandomizowaną.

Zalety randomizacji można stwierdzić na prostym, nawet nie sekwencyjnym przykładzie. Ktoś kładzie monetę, my dajemy prognozę pojawienia się orła. Zadanie powtarza się wiele razy. Jeśli będziemy stale podejmowali jedną i tę samą decyzję z dwu możliwych: pojawi się orzeł, pojawi się reszka, to, jeżeli moneta była rzucała przypadkowo, możemy gwarantować, że średnio co najmniej (a także co najwyżej) połowa prognoz będzie dobra. Jeśli posłużymy się decyzją zrandomizowaną i sami swoje odpowiedzi: orzeł, reszka, będziemy losowali monetą, to



także będziemy mogli zagwarantować, że średnio połowa naszych prognoz będzie prawdziwa, ale już nie będziemy potrzebowali zakładać jak poprzednio, że moneta, której rzuty mamy odgadywać, jest rzucona przypadkowo. Nie będziemy potrzebowali w ogóle żadnych hipotez na ten temat. Randomizacja ma jeszcze inne zalety, których nie będziemy tu szczegółowo rozważali.

Przypuśćmy, że mamy daną rodzinę kompletnych dystrybuant procesów stochastycznych. Dystrybuanty oznaczymy symbolami  $F_1, \dots, F_n$ . Tę daną rodzinę będziemy nazywali bazą. Utwórzmy zrandomizowaną kombinację liniową

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n \quad (\alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1) \quad (2)$$

bazy. Dzięki normalizacji, taką kombinację znów możemy uważać za dystrybuantę.

Przypuśćmy, że tak wybraliśmy bazę dystrybuant (w praktyce kilkadziesiąt), iż mamy prawo przypuszczać, że losowy proces aktywności słońca daje się w przybliżeniu opisać jakąś z dystrybuant postaci (2). Przypuśćmy dalej, że wybraliśmy układ funkcji decyzyjnych  $d_1, \dots, d_m$  (w praktyce — kilkadziesiąt sekwencyjnych metod testowania hipotez, że proces  $\varrho(t)$  ma dystrybuantę  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Na ich podstawie skonstruujemy optymalną funkcję decyzyjną do badania procesów kształtu (2).

Niech  $C(N)$  oznacza, jak poprzednio, koszt wykorzystania  $N$  obserwacji,  $W(F_i, F_j)$  — stratę gospodarczą wynikającą z powzięcia decyzji ostatecznej orzekającej, że proces  $\varrho(t)$  opisany jest dystrybuantą  $F_j$ , podczas gdy naprawdę opisany jest dystrybuantą  $F_i$  [ $W(F_i, F_j) \geq 0, W(F_i, F_i) = 0$ ]. Przypuśćmy na chwilę, że proces aktywności słońca  $\varrho t$  opisany jest dystrybuantą  $F_i$  i że posługujemy się funkcją decyzyjną  $d_k$ . Znając dystrybuantę  $F_i$  i funkcję decyzyjną  $d_k$  łatwo możemy obliczyć średni koszt całkowity<sup>2</sup> badania za pomocą funkcji  $d_k$ , procesu opisanego dystrybuantą  $F_i$ , koszt ten wyrazi się wtedy funkcją

$$R(F_i, d_k).$$

Zadaniem naszym jest ten koszt uczynić jak najmniejszym.

Jeśli proces aktywności słońca opisuje się dystrybuantą

$$\alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_n F_n,$$

a my posługujemy się funkcją zrandomizowaną

$$\beta_1 d_1 + \dots + \beta_m d_m \quad (3)$$

( $\beta_i$  oznacza prawdopodobieństwo wybrania funkcji decyzyjnej  $d_i$ ), to średnio koszt całkowity wyrazi się formą biliniową

<sup>2</sup> Koszt wykorzystywania pomiarów i stratę wynikającą ze złej decyzji.

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=m} a_i \beta_j R(F_i, d_j),$$

którą dla skrót u oznaczmy

$$R_{ij} a_i \beta_j.$$

Maksimum formy  $R_{ij} a_i \beta_j$  ze względu na  $a_i$  przy ustalonych  $\beta_j$  nazywamy kosztem gwarantowanym przez funkcję decyzyjną (3) (zrandomizowaną).

Funkcję decyzyjną zrandomizowaną  $b_1 d_1 + \dots + b_n d_n$  nazywamy najlepszą jeżeli gwarantuje minimalny koszt

$$\max_{a_i, \dots, a_n} R_{ij} a_i \beta_j = \min_{\beta_1, \dots, \beta_m} \max_{a_i, \dots, a_n} R_{ij} a_i \beta_j.$$

Aby zilustrować rachunkowe trudności przy efektywnym znajdowaniu współczynników  $b_j$ , rozwiążemy prosty przykład przyjmując  $i=2, j=2$ . Przy większych wartościach  $i, j$  trudności wzrastają podobnie jak przy przechodzeniu od dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi do większej liczby równań i niewiadomych.

Przyjmijmy  $R_{ij} a_j \beta_i = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2$ .

Mamy wyznaczyć  $\min_{\beta_1, \beta_2} \max_{a_1, a_2} a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2$ .

Ekstremum mieszane *minimum maximorum* wyznaczamy podobnie jak zwyczajne, przez przyrównanie pochodnych do zera. Aby ułatwić sobie analityczne operowanie zmiennymi  $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$ , które są, jak wiemy dodatnio unormowane<sup>3</sup>, najlepiej zamiast tych zmiennych użyć zmiennych  $\sin^2 a, \cos^2 a, \sin^2 \beta, \cos^2 \beta$ .

Różniczkując formę

$$\sin^2 a \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 a \cdot \cos^2 \beta, \quad (4)$$

otrzymujemy na ekstrema układ równań

$$\begin{aligned} 2(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \sin a \cos a &= 0, \\ 2(\sin^2 a - \cos^2 a) \sin \beta \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Układ ten ma pierwiastki:

- 1)  $\sin a = \sin \beta = 0$ ,
- 2)  $\cos a = \cos \beta = 0$ ,
- 3)  $\sin a = \cos \beta = 0$ ,
- 4)  $\cos \beta = \sin a = 0$ ,
- 5)  $\sin^2 a = \cos^2 a = \sin^2 \beta = \cos^2 \beta = \frac{1}{2}$ .

Łatwo sprawdzić, że pierwiastkom 1) i 2) odpowiada maksimum, pier-

<sup>3</sup> To znaczy

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1, & a_1 &\geq 0, & a_2 &\geq 0, \\ \beta_1 + \beta_2 &= 1, & \beta_1 &\geq 0, & \beta_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

wiastkom 3) i 4) — minimum formy 4. Pierwiastkom 5) odpowiada ekstremum mieszane. Znaleźliśmy więc ekstremalne wartości  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $b_2 = \frac{1}{2}$ .

Wynik ten można było przewidzieć, gdybyśmy przedtem wyjaśnili, że forma  $a_1\beta_1 + a_2\beta_2$  odpowiada zagadnieniu prognozy orła i reszki w przykładzie, o którym wspominaliśmy. Współczynniki  $b_1, b_2$  mają znaczenie prawdopodobieństw, z jakimi powinniśmy przepowiadać orła i reszkę.

Oczywiście teoria decyzyjna została przedstawiona w sposób bardzo pobieżny i szkicowy.

Wspomnijmy jeszcze, że są następujące drogi ominięcia trudności szacowania straty gospodarczej ze złej prognozy. Koszt wykorzystania badań i jakość prognozy można mierzyć w różnych jednostkach i powyższą teorię uprawiać jak gdyby w zakresie liczb zespolonych. Wtedy zamiast optymalnej funkcji decyzyjnej otrzymujemy rodzinę optymalnych nieporównywalnych między sobą funkcji, ostatecznego zaś wyboru dokonujemy w zależności od lokalnych potrzeb i możliwości. Teoria dostarcza jak gdyby ofert, o których wie, że są lepsze od innych możliwości, ale między którymi już nie rozstrzyga.

Inną drogą jest budowa analogicznej, chociaż istotnie różnej teorii opartej, z grubsza mówiąc, na możliwościach finansowych instytucji prowadzącej badania. Chodzi o to, że w praktyce i tak na takie a takie badania przeznaczamy tyle a tyle. Teoria wskazuje natomiast optymalny schemat badań opartych na danym budżecie i, co więcej, pozwala sekwencyjnie badać czy dalsze zwiększenie budżetu jest celowe, czy też budżet ten należy zmniejszać.

Trzeba zaznaczyć, że przy stosowaniu wszystkich wyżej przedstawionych teorii prognoz w praktyce napotykamy dość duże trudności. Wynika to z faktu, że chociaż teorie te są na ogół szeroko i precyzyjnie rozbudowane, to jednak prowadzą często do niezmiernie skomplikowanych rachunków numerycznych lub wymagają trudnych i kosztownych badań.

*Instytut Matematyczny  
Polskiej Akademii Nauk*

#### WYKAZ LITERATURY

1. Dworetzky A., Kiefer J., Wolfowitz I.: *Sequential decision problems for processes with continuous time parameters problems of estimation*. The Ann. of Math. Statistics. T. 24, 1953, p. 403—415.
2. Jaǵłom A. M.: *Wwiedienije w teorju stacionarnych stuczajnych funkcji*. Uspiechi Matematycznych Nauk, T. VII, 5(51), 1952, s. 3 — 168.
3. Moran P. A. P.: *Some experiments and the prediction of sunspot numbers*. CCIR, London, 1953.
4. *Prediction of solar index*. Preliminary on recommendation nr 69, CCIR, London 1953.
5. Wald A.: *Sequential decision functions*. N. Y., 1950, p. 1—176.
6. Wiener N.: *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. New York, 1949.

К. УРБАНИК, А. ЗЕМБА

## ПРОГНОЗ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ

## Резюме

Изменения электромагнитной солнечной активности, вызывающие в особенности помехи приёма радиопередачи, характеризуются вообще числами Вольфа, описывающими распределение и количество солнечных пятен. Поэтому прогноз солнечной активности сводится к прогнозу чисел Вольфа. Точная зависимость чисел Вольфа от времени — нам неизвестна. В первом приближении принимается, что изменения чисел Вольфа имеют случайный характер. Это позволяет использовать в прогнозе аппарат стохастических процессов. В статье вкратце обсуждены пробабилистические методы прогноза числа Вольфа. Лучшее всего исследован теоретически метод линейного прогноза Колмогорова - Винера, который тем лучше, чем большее число наблюдательных данных он использует. Однако большое число наблюдательных данных ведёт к длинными и кропотливым вычислениям. Не следует поэтому пренебрегать методами прогноза, использующими небольшое число данных и дающими сравнительно хорошие результаты. В статье приведен такой метод, учитывающий стоимость опыта и основанный на теории децизионных функций.

K. URBANIK, A. ZIĘBA

## PREDICTION OF SOLAR ACTIVITY

## • Summary

Electromagnetic changes in solar activity, which cause disturbances in radio reception, are characterized in a general manner by Wolf numbers. These numbers describe the location and number of sunspots. Thus, prediction of solar activity is reduced to the prediction of Wolf numbers. The exact dependency of Wolf numbers on time is not known. As a first approximation, it is assumed that the change in the Wolf numbers is of a chance nature. This permits stochastic process apparatus to be used for predictions. In this paper, probabilistic methods for predicting Wolf numbers are briefly discussed. The method most investigated is the Kolmogorov-Wiener linear method of prediction. In this method, the greater the amount of data employed, the better the results obtained. A great quantity of observed data, however, lead to long and timeconsuming calculations. Therefore, prediction methods employing not too great quantitative data, and giving relatively good results, are of without practical importance. In this paper, one such method, based on the theory of decision functions, is described. The cost of the experiment has also been taken into account.

**Page Denied**



**POLSKA AKADEMIA NAUK**  
**KOMITET NARODOWY U.R.S.I.**  
Warszawa, Pałac Kultury i Nauki  
pok. 23-II, tel. 6-50-51 wew. 23-84

25X1

**ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI**

ODBITKA Z ZESZYTU 2 - TOM V - 1956



621.396.11

25X1

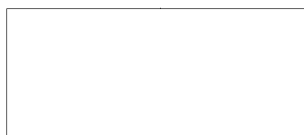
S. BOROWSKI, S. JASIŃSKI, S. MANCZARSKI

**Zjawisko Dopplera**  
**w propagacji jonosferycznej**

ЯВЛЕНИЕ ДОППЛЕРА В ИОНОСФЕРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ  
РАДИОВОЛН

DOPPLER EFFECT IN IONOSPHERIC PROPAGATION

**PAŃSTWOWE**  
**WYDAWNICTWO NAUKOWE**



25X1

621.396.11

S. BOROWSKI, S. JASIŃSKI, S. MANCZARSKI

## Zjawisko Dopplera w propagacji jonosferycznej

*Rękopis dostarczono 13. 12. 1955*

Praca podaje zestawienie wyników pomiarowych odnośnie zjawiska Dopplera w oświetleniu klasycznej teorii tego zjawiska. Ponieważ niektóre wyniki doświadczalne zmian częstotliwości przypisywane zjawisku Dopplera znacznie odbiegają od obliczeń teoretycznych, przedstawiono przypuszczalny mechanizm zmian częstotliwości w warunkach granicznych (bliskich MUF) odbić od jonosfery.

### 1. WSTĘP

Celem pracy jest wyjaśnienie rozbieżności poglądów, jakie spotyka się w literaturze na temat znaczenia w radiokomunikacji krótkofalowej zjawiska Dopplera, które zachodzi w związku z niestabilnością jonosfery. Cytowane przez różnych autorów (Dodatek 1) pomiarowe wyniki wahań częstotliwości powodowanych przez to zjawisko różnią się między sobą o kilka rzędów wielkości. Niektórzy autorzy wiążą występowanie silnego efektu Dopplera z dużą zmiennością kąta przychodzenia fali jonosferycznej.

Według badań przeprowadzonych na falach ultrakrótkich (poniżej 150 MHz) w ostatnich latach w rejonach zorzy polarnej stwierdzono, że przy odbiciach od kotary zorzowej występują dość znaczne zmiany częstotliwości, które mogą być przypisane zjawisku Dopplera. Podczas jednej z serii prób przy 50 MHz otrzymano zmiany częstotliwości fali nośnej zawarte w granicach od 0 do 200 Hz [6].

### 2. KLASYCZNA TEORIA ZJAWISKA DOPPLERA NA TLE WYNIKÓW DOŚWIADCZALNYCH

Zjawisko Dopplera znane w akustyce i w optyce (przy zjawiskach astronomicznych) obserwowane jest również przy propagacji fal radiowych odbijanych od jonosfery.

Zjawisko to polega na tym, że częstotliwość odbierana różni się od nadawanej. Według klasycznej teorii zjawiska Dopplera obserwowana zmiana częstotliwości może wynikać na skutek:

1. ruchu źródła,
2. ruchu odbiornika,
3. ruchu środowiska (w przypadku propagacji jonosferycznej fal radiowych — wskutek ruchu warstwy odbijającej),
4. kombinacji ruchów wyszczególnionych w punktach 1. i 3.

Zjawisko Dopplera przy ruchach zwierciadlanej warstwy jonosferycznej podane zostało w ujęciu optyki geometrycznej w Dodatku 2. Z dyskusji wzorów przytoczonych w tym Dodatku wynika, że zjawisko Dopplera przy propagacji jonosferycznej może być wywołane jedynie przez składową pionową szybkości poruszania się warstwy odbijającej. Zmiana częstotliwości (względna) wyraża się wówczas wzorem

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 \frac{u}{c} \sin \alpha, \quad (1)$$

gdzie

- $\Delta f$  — zmiana częstotliwości (na skutek zjawiska Dopplera),
- $f$  — częstotliwość emitowana,
- $u$  — składowa pionowa szybkości unoszenia się warstwy,
- $c$  — szybkość światła,
- $\alpha$  — kąt elewacji.

Ze wzoru (1) wynika, że  $\frac{\Delta f}{f}$  jest tym większe, im większa jest szybkość  $u$  i kąt  $\alpha$ .

W tablicy 1 podano wyniki obliczeń  $\frac{\Delta f}{f}$  dla kątów elewacji  $10^\circ$  i  $30^\circ$  na podstawie wzoru (1) przy obserwowanej, na przykład w Anglii w okresach małych plam słonecznych, szybkości unoszenia się warstwy odbijającej  $u \approx 12$  m/sek.

Tablica 1

$\alpha^\circ$	$u$ m/sek	$\frac{\Delta f}{f} \cdot 10^8$
10	12	1,4
30	12	4

Z porównania powyższych obliczeń z danymi Dodatku 1 wynika, że w niektórych przypadkach jest dość duża zgodność teorii z obserwacją. Rezultaty obliczeń różnią się jednak znacznie od wyników opublikowanych przez Böhma w 1929 r. Pewne światło rzuca na powyższe rozbieżności ta okoliczność, że ujęcie optyki geometrycznej jest słuszne tylko dopóty, dopóki częstotliwość robocza nie stanie się zbyt bliska granicznej częstotliwości jonosfery; w tym momencie optyka geometryczna przestaje obowiązywać.



Sprawa ta wymaga dodatkowych wyjaśnień. Według praw optyki geometrycznej przy zmniejszaniu się gęstości jonizacji przejście od stanu odbijania się fali jonosferycznej do stanu nieodbijania się jej odbywa się skokowo. Graniczne odbicie zachodzi wtedy, gdy szybkość grupowa fali staje się równa zero. Ponieważ jednak iloczyn szybkości grupowej przez fazową równa się kwadratowi szybkości światła, to w miarę zbliżania się do częstotliwości granicznej (MUF), gdy szybkość grupowa dąży do zera, szybkość fazowa dąży do nieskończoności. Uwzględniając jeszcze, że jonosfera jest niejednorodna, należy zauważyć, że niejednorodności stają się wtedy małe w porównaniu z długością fali w danym miejscu. W ten sposób powstają właśnie warunki, w których optyka geometryczna przestaje obowiązywać wobec następującej ogólnej zasady: metody optyki geometrycznej stosują się tylko wtedy, gdy koncentracja elektronowa nie ulega praktycznie zmianie w granicach odległości porównywalnych z długością fali.

W rozpatrywanych warunkach musimy się zatem uciec do optyki falowej. W związku z tym niżej rozpatrzono mechanizm odbić jonosferycznych w ujęciu optyki falowej i w oparciu o zdjęte doświadczalnie przebiegi pojedynczych impulsów powracających na ziemię po odbiciu od jonosfery.

### 3. PRZYPUSZCZALNY MECHANIZM ODBIĆ OD JONOSFERY W WARUNKACH GRANICZNYCH

Ścisła interpretacja matematyczna zjawisk zachodzących w jonosferze natrafia w ujęciu optyki falowej na bardzo poważne trudności, zwłaszcza w pobliżu stanów granicznych.

Ogólne zagadnienie rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w środowisku zjonizowanym znajdującym się w polu magnetycznym ziemi nie znalazło dotąd ścisłego rozwiązania. Jest to spowodowane tym, że:

1. nie zostały jeszcze wyprowadzone ścisłe równania rozchodzenia się fal w rozważanych warunkach,
2. przy rozwiązywaniu równań trudno jest sformułować w sposób właściwy warunki graniczne.

Tylko w niektórych przypadkach szczególnych rozkładu jonizacji i dla niektórych kierunków specjalnych lub wobec braku pola magnetycznego równania mogą być sformułowane i może być znalezione ich rozwiązanie. Dlatego spróbowano odtworzyć przypuszczalny mechanizm odbić jonosferycznych w tych warunkach w sposób przybliżony, opierając się na pewnych materiałach doświadczalnych. Jako punkt wyjścia rozpatrzono, stwierdzone eksperymentalnie, zjawisko rozbicia na szereg ciągów pojedynczego impulsu, odbitego od warstwy jonosferycznej.

Przykład takiego impulsu pokazany jest w Dodatku 3.

Mechanizm rozbijania impulsu na ciągi można ewentualnie wytłumaczyć kilkoma sposobami, a mianowicie:

1. rozbicie impulsu następuje wskutek rozszczepiającego działania pola geomagnetycznego w jonosferze, wytwarzającego falę zwyczajną i nadzwyczajną,

2. rozbicie impulsu następuje wskutek zmienności w czasie charakterystyki filtru dolnoprzepustowego, jakim jest jonosfera w pobliżu częstotliwości granicznej (o charakterystyce tego filtru będzie mowa niżej).

Rozbity na szereg ciągów impuls może być rozpatrzony za pomocą całki Fouriera. W przypadku dla przejrzystości mocno uproszczonym, traktując poszczególne ciągi jako odcinki sinusoidy, można z łatwością otrzymać na tej drodze rozkład spektralny pojedynczego ciągu. Przykład takiego rozkładu spektralnego podany jest w Dodatku 4. Jak wynika

z przedstawionego w Dodatku wykresu dla  $n=3$ , wartości  $\frac{\omega}{\omega^0} \approx 1,2$  odpowiada wartość  $\frac{S\omega_0}{2} \approx 3$ , co stanowi około 0,64 wartości maksymalnej  $\frac{S\omega_0}{2}$

Im ciągi fal są dłuższe, tym pasmo staje się węższe. Dla ciągów złożonych na przykład z  $n=100$  fal amplituda fali odbitej o częstotliwości różniacej się o  $\frac{1}{10n} = 0,1\%$  od częstotliwości emitowanej jest prawie równa amplitudzie fali odbitej o częstotliwości emitowanej; dla częstotliwości emitowanej 20 MHz stanowi to różnicę 20 kHz, co jest wartością dość znaczną.

Przy stanach bliskich granicznym jonosfera zachowuje się selektywnie jak filtr dolnoprzepustowy w stosunku do promieni powracających na ziemię. Wynika to z falowego ujęcia zjawiska odbicia, co znajduje swój wyraz w charakterystycznym przebiegu współczynnika odbicia, który zobrazowany jest w Dodatku 5. W Dodatku tym, ze względu na trudności matematyczne, przedstawiono współczynnik odbicia w funkcji różnicy częstotliwości krytycznej i bieżącej jedynie dla transmisji prostopadłej (częstotliwość krytyczna jest szczególnym przypadkiem częstotliwości granicznej). Analogicznego przebiegu współczynnika odbicia należy spodziewać się dla transmisji ukośnej.

W ujęciu optyki geometrycznej mielibyśmy prostokątny przebieg współczynnika odbicia  $R$ , co nie odpowiada rzeczywistości.

Ze względu na ustawicznie zmieniające się właściwości filtru jonosferycznego i związane z tym stany przejściowe, rozkład spektralny impulsów powracających na ziemię ulega różnym zmianom, zwłaszcza przy kilkakrotnym odbiciu od jonosfery.

Jak z tego wynika, szerokie widma występują tylko w warunkach granicznych, które w praktyce spotyka się oczywiście znacznie rzadziej niż przeciętne. Dla doświadczalnego potwierdzenia tego faktu przeprowadzono

szereg obserwacji na radiostacji Instytutu Łączności oraz na radiostacji odbiorczej Ministerstwa Łączności w Grodzisku.

W Instytucie Łączności badania przeprowadzono za pomocą nasłuchów (z filtrem) i przy użyciu oscyloskopu. Na radiostacji odbiorczej w Grodzisku próby dokonane były również metodą nasłuchów, a oprócz tego przez obserwację regulowanej automatycznie heterodyny, podążającej za częstotliwością odbieranego sygnału.

Należy zauważyć, że opisany mechanizm znacznej zmiany częstotliwości wyjaśnia związek zachodzący między nim a dużą zmiennością przychodzenia fal jonosferycznych.

Reasumując powyższe rozważania możemy stwierdzić, że przy dokonywaniu pomiarów na podstawie odbioru częstotliwości wzorcowych odległych radiostacji krótkofalowych należy unikać zbliżania się do stanów granicznych jonosfery.

Instytut Łączności

#### WYKAZ LITERATURY

1. Alpert J. L., Ginzburg W. L., Feinberg E. L.: *Rasprostranienije radiowołn*. Moskwa 1953.
2. Both C. F., Gregory G.: *Effect of Doppler's principle on the comparison of standard frequencies over a transatlantic radio path*. P. O. Elec. Eng. Jour., 40 pt 4: 153 — 8, Jan. 1948.
3. Böhm C.: *Mehrfachwege und Doppler-Effekt bei der Ausbreitung von kurzen Wellen*. Telefunkenzeitung 10, nr 53 (1929) 9.
4. Griffiths H. V.: *Doppler effect in propagation*. Wireless Engineer nr 285, June 1947.
5. Manczarski S.: *Wykłady politechniczne*, 1954.
6. Moore R. K.: *A VHF propagation phenomenon associated with aurora*. Journ. Geophys. Res., vol. 56, March. 1951.
7. Rydbeck O.: *The reflection of electromagnetic waves from a parabolic ionized layer*. Phil. Mag., 34, 1943.
8. Rydbeck O.: *On the propagation of radio waves*. Trans. Chalmers University, Gethenburg, Sweden. nr 3, 1944.

## Dodatek 1

## Dane z literatury odnośnie zjawiska Dopplera

Źródło	Data obserwacji	Trasa i jej długość	Częstotliwość w Mc/s	$\left  \frac{\Delta f}{f} \cdot 10^8 \right $	Uwagi
Böhm [3]	1929 r.	Niemcy-Buenos Aires, ok. 12 000 km	20	100 000	Z obserwacji fototelegrafii
Both i Gregory [2]	1934 r.	Anglia-Ameryka Północna, ok. 5050 km	5	20	Dane z obserwacji wzorca częstotliwości, dokładność wzorca $\frac{\Delta f}{f} \cdot 10^8 = \pm 5$ .
	Grudzień 1946 r. Godz. 9—9.15 Godz. 20.42 Godz. 9.45	Anglia-Ameryka Północna, ok. 5050 km	10	średnio 4,7 107 63 7	Dokładność wzorca w ciągu paru dni $\frac{\Delta f}{f} \cdot 10^8 = \pm$ kilka. Zmiany częstotliwości największe o wschodzie i zachodzie słońca. Przy zachodzie słońca częstotliwość maleje, przy wschodzie rośnie.
	28. 4. 1947— —2. 5. 1947 r. Godz. 20—8	Anglia-Ameryka Północna, ok. 5050 km	10 15	do 20 10	Zmiany częstotliwości większe dla niższej częstotliwości.
Griffiths [4]	Listopad 1943 r. Godz. 1.	Anglia-Ameryka Północna, ok. 5050 km	15	2—7 średnio 3	Dokładność częstotliwości stacji nadawczej $\frac{\Delta f}{f} \cdot 10^8 = \pm 1$
	Grudzień 1945 r.		15	3,3	

Dodatek 2

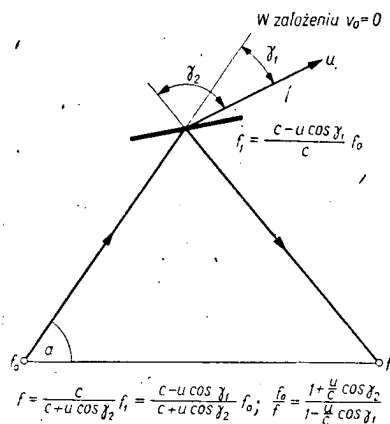
Zjawisko Dopplera przy ruchach zwierciadlanej warstwy jonosferycznej w ujęciu optyki geometrycznej

Ogólny wzór Dopplera

$$f_s = \frac{c + v_0 - v_s}{c + v_0 - v_z} f_z$$

gdzie:

- $f_s$  — częstotliwość odbierana przez słuchacza  $s$
- $f_z$  — częstotliwość wysyłana przez źródło  $z$
- $c$  — prędkość rozchodzenia się fal w środowisku
- $v_0$  — rzut prędkości środowiska na kierunek  $zs$
- $v_s$  — rzut prędkości słuchacza na kierunek  $zs$
- $v_z$  — rzut prędkości źródła na kierunek  $zs$

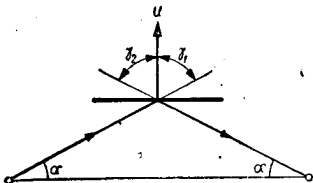


Dla  $u \ll c$

$$\frac{f_0}{f} \approx \left(1 + \frac{u}{c} \cos \gamma_1\right) \left(1 + \frac{u}{c} \cos \gamma_2\right) \approx 1 + \frac{u}{c} (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2)$$

Przypadki szczególne

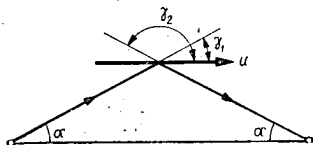
1.  $\gamma_1 = \gamma_2 = 90^\circ - a$   $\frac{f_0}{f} = 1 + 2 \frac{u}{c} \sin a$



a) przy  $a \rightarrow 0$ ;  $\frac{f_0}{f} \rightarrow 1$

b) przy  $a \rightarrow 90^\circ$ ;  $\frac{f_0}{f} \rightarrow 1 + 2 \frac{u}{c}$ ;  $\frac{\Delta f}{f} \rightarrow 2 \frac{u}{c}$

2.

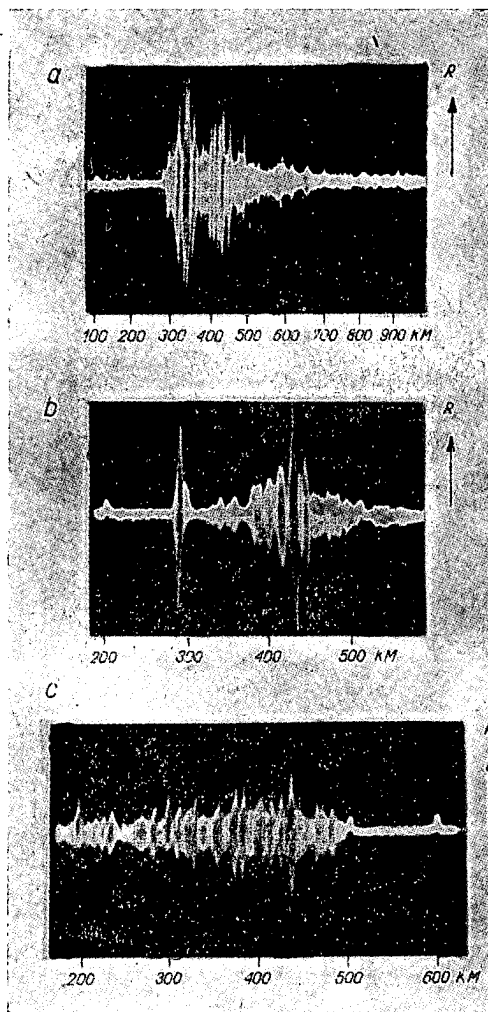


$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= a \\ \gamma_2 &= 180^\circ - a \end{aligned} \right\} \frac{f_0}{f} \approx 1 + \frac{u}{c} (\cos a - \cos a) = 1$$

Wg Manczarskiego [5].

Dodatek 3

Zjawisko rozbicia na szereg ciągów pojedynczego impulsu odbitego od warstwy  $F_2$



a. Rozbity i rozszerzony sygnał fali zwyczajnej; największy z ciągów zajmuje szerokość ok. 100 km (400—300 km), inne mniejsze ciągi mają szerokość podobnego rzędu.

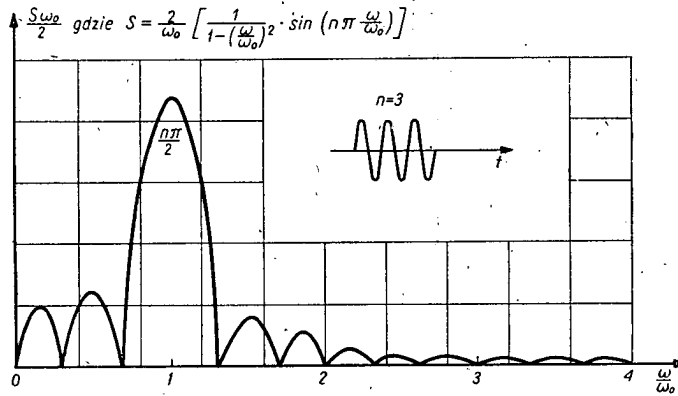
b. Rozbity i rozszerzony sygnał fali zwyczajnej, zajmujący szerokość ok. 220 km (550—330 km); ciąg po lewej stronie odnosi się do fali nadzwyczajnej.

c. Zespół ciągów fali zwyczajnej i nadzwyczajnej, zajmujący łącznie szerokość ok. 300 km (500—200 km).

Według zdjęć fotograficznych, podanych przez Alperta w książce "Rasprostranienije radiowołn", 1953 [1].

Dodatek 4

Rozkład spektralny odcinka sinusoidy

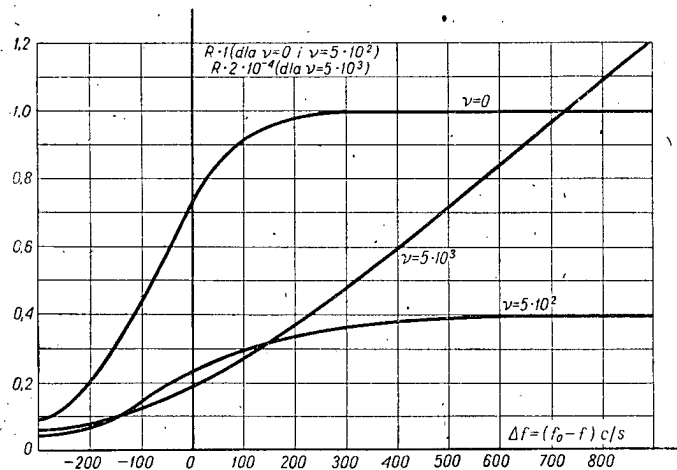


$S$  — moduł gęstości spektralnej, \*  
 $\omega$  — pulsacja dowolnej składowej w paśmie,  
 $\omega_0$  — pulsacja częstotliwości emitowanej,  
 $n$  — ilość fal sinusoidy.

\*  $\frac{S\omega_0}{2} = 0$  najbliżej max. dla  $\left| 1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right| = \frac{1}{n}$

Dodatek 5

Obliczony współczynnik odbicia od warstwy F w ujęciu optyki falowej



$R$  — współczynnik odbicia,  
 $\nu$  — ilość zderzeń na sekundę elektronów z molekułami,  
 $f_0$  — częstotliwość krytyczna,  
 $f$  — częstotliwość fali.

Obliczenia odpowiadają założeniom:

- a) paraboliczny rozkład gęstości jonizacji w warstwie,
- b) połowiczna grubość warstwy  $z_m = 120$  km,
- c)  $f_0 = 10$  Mc/s.

Wg Ginzburga, "Rasprostranienije radiowoln", 1953 [1], [7].

С. БОРОВСКИ, С. ЯСИНЬСКИ, С. МАНЧАРСКИ

ЯВЛЕНИЕ ДОППЛЕРА В ИОНОСФЕРНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ  
РАДИОВОЛН

## Резюме

Целью настоящей работы является изъяснение встречаемых в литературе воззрений на тему происходящего, в связи с нестабильностью ионосферы, явления Допплера и его значения в коротковолновой радиосвязи. Цитированные разными авторами результаты измерений колебания частоты, вызываемого этим явлением (приложение 1), отличаются друг от друга на несколько порядков.

Некоторые авторы видят причины возникновения сильного явления Допплера в большой изменчивости угла прихода ионосферной волны.

Доклад содержит как математический анализ проблемы (приложение 2), так и результаты измерений и наблюдений. Математическая формула колебаний частоты вследствие подвижности ионосферы (приложение 2), выведенная на основах геометрической оптики, даёт, как это следует из вычислений, незначительные изменения частоты. Это, однако, правильно только до момента, когда рабочая частота не станет слишком близкой к предельной частоте ионосферы МПЧ. В этот момент прекращается применение геометрической оптики. При состояниях близких к предельному избирательное поведение ионосферы подобно фильтру нижних частот по отношению к возвращающимся на землю лучам, причём свойства этого фильтра постоянно изменяются. В следствие возникающих таким образом переходных состояний возвращающийся на землю, отдельный импульс подвергается расщеплению на последовательные короткие группы (приложение 3). Если затем эти группы рассматривать при помощи интеграла Фурье (приложение 4), то получается довольно широкий спектр частот, приблизительно соответствующий данным некоторых авторов.

Распределение частот в спектре возвращающегося на землю сигнала может быть различно (прил. 4, 5). Из этого следует, что широкие спектры выступают только в предельных условиях, которые на практике встречаются очевидно гораздо реже чем средние. Для опытного подтверждения этого факта был исполнен ряд наблюдений радиостанцией Института Связи, а также приёмной станцией Министерства Связи в Гродзиске. Следует заметить, что описанный механизм сильного явления Допплера хорошо изъясняет связь между этим явлением и значительной изменчивостью угла прихода ионосферных волн.

Вытекающий из настоящей работы практический вывод тот, что при исполнении измерений на основании нормальных частот отдалённых коротковолновых станций — следует избегать приближения к предельным состояниям ионосферы.

S. BOROWSKI S. JASINSKI, S. MANCZARSKI

## DOPPLER EFFECT IN IONOSPHERIC PROPAGATION

## Summary

The object of this paper is to explain the difference in views found in the literature on the importance of the Doppler effect in short-wave communications, this effect arising from the variations of the ionosphere. Measurements of frequency variations due to Doppler effect, given by various authors, vary widely, even to the extent



of several orders (Appendix 1). Some authors associate the appearance of a strong Doppler effect with the great variability of the angle of incidence of the waves on the ionosphere.

This paper contains a mathematical analysis of the general problem (Appendix 2) as well as an analysis of the measurements and observations of the effect. A formula expressing the variation of frequency caused by the motion of the ionosphere (Appendix 2) has been derived on the basis of geometrical optics. Calculations made using this formula give a small change of frequency. The formula can be used as long as the operating frequency is not too close to the ionospheric MUF frequency. In this case geometrical optics is no longer applicable. Near this limit the ionosphere behaves like a selective low-pass filter for the waves returning to the earth, whereby the parameters of this filter are constantly changing. As a result of the changes arising in this manner, a single impulse returning to the earth is broken up into a series of short wave trains (Appendix 3). If these wave trains are studied with the aid of the Fourier integral (Appendix 4), we obtain a wide frequency spectrum, which more or less is in agreement with the data obtained by some authors. The spectral frequency distribution for the signal returning to the earth can vary widely (Appendix 4 and 5).

Analysis shows that the wide spectra appear only in the limiting conditions, which certainly occur considerably less often than the average ones. To confirm this fact experimentally, a series of observations were made at Warsaw and Grodzisk (Poland). It should be noted that the treatment presented by the authors provides a good explication of the correlation between the Doppler effect and the great variability of the angle of arrival of ionospheric waves.

As a practical conclusion results, it may be noted, that in carrying out measurements based on the reception of standard frequencies from distant short-wave radiostations, an approach to the limiting conditions should be avoided.

25X1

**Page Denied**

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET NARODOWY U.R.S.S.  
Warszawa, Pałac Kultury i Nauki  
pok. 23-11, tel. 6-50-51 wew. 23-84

25X1

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

ODBITKA Z ZESZYTU 2 - TOM V - 1956

25X1

621.3.094.3:621.396.82

R. KULIKOWSKI, A. RYBARSKI

## Kryterium zniekształceń kwadratowych przy ograniczonej mocy zakłóceń

КРИТЕРИЙ КВАДРАТИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ  
МОЩНОСТИ ПОМЕХ

CRITERION FOR ROOT SQUARE DISTORTION AT LIMITED NOISE POWER

PAŃSTWOWE  
WYDAWNICTWO NAUKOWE

25X1

621.3.094.3:621.396.82

R. KULIKOWSKI, A. RYBARIKI

## Kryterium zniekształceń kwadratowych przy ograniczonej mocy zakłóceń

Rękopis dostarczono 31. 10. 1955

Wyznaczono optymalne charakterystyki układu liniowego zapewniające przeniesienie sygnału o zadanym kształcie z minimalnymi zniekształceniami kwadratowymi przy założeniu, że średnia moc zakłóceń jest ograniczona. Wyznaczono sygnały pożyteczne i zakłócające, które są najbardziej niekorzystne z punktu widzenia pracy układu. Rozpatrzono również sygnały modulowane i charakterystyki układów selektywnych.

### 1. WSTĘP

W teorii odbioru sygnałów elektrycznych dużo uwagi poświęca się tzw. filtrom liniowym, których zadaniem jest wydzielanie sygnału pożytecznego spośród zakłóceń. Dla określenia i porównania zdolności filtrujących filtrów odbiorczych liniowych stosuje się różnorodne kryteria. Wybór kryterium uzależnia się zwykle od konkretnych warunków eksploatacyjnych, w jakich pracuje urządzenie odbiorcze.

Jednym z najbardziej rozpowszechnionych kryteriów jest stosunek maksymalnej mocy sygnału do mocy zakłóceń (lub stosunek amplitudy sygnału do skutecznej amplitudy zakłóceń) [1].

Oznaczając przez  $S(i\omega)$  widmo sygnału, a przez  $Z(i\omega)$  widmo zakłóceń, kryterium powyższe możemy wyrazić jako

$$2\pi \left( \frac{S}{Z} \right)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |S(i\omega)K(i\omega)e^{i\omega T}|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |Z(i\omega)K(i\omega)|^2 d\omega}, \quad (1)$$

gdzie  $K(i\omega)$  jest funkcją przenoszenia układu,  $T$  zaś symbolizuje moment czasu, dla którego amplituda sygnału osiąga wartość maksymalną.

Korzystając z nierówności Cauchy-Buniakowskiego można wykazać, że stosunek powyższy osiąga maksymalną wartość dla filtru o funkcji przenoszenia.

$$K(i\omega) = \frac{S^*(i\omega)e^{-i\omega T}}{|Z(i\omega)|^2}, \quad (2)$$

gdzie  $S(i\omega)$  oznacza funkcję zespolono-sprzężoną z  $S(i\omega)$ .

Kryterium powyższe okazuje się szczególnie wygodne w przypadku, gdy sygnał  $S$  składa się z szeregu identycznych impulsów przedzielonych znacznymi (w porównaniu z szerokością impulsu) odcinkami czasu (jak to ma miejsce na przykład w radiolokacji). W przypadku tym można rzeczywisty sygnał zastąpić pojedynczym impulsem, czyli inaczej mówiąc, okres powtarzania impulsów rozciąga się do nieskończoności.

Należy podkreślić, że kryterium stosunku sygnału do zakłóceń nadaje się szczególnie do układów, w których zależy głównie na wykryciu sygnałów (bądź momentów ich pojawienia się), natomiast nie zależy na dokładnym odtworzeniu kształtów sygnału. W tych urządzeniach, gdzie ważne jest możliwie dokładne odtworzenie kształtu sygnału, szerokie rozpowszechnienie uzyskało kryterium oparte na tzw. błędzie średniokwadratowym [5]:

$$\bar{I} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [s(t) - u(t)]^2 dt, \quad (3)$$

gdzie

$$u(t) = \int_0^{\infty} e(t-\tau) k(\tau) d\tau,$$

$e(t) = s(t) + z(t)$  — jest sygnałem na wejściu układu,

$s(t)$  — sygnałem pożytecznym,

$z(t)$  — sygnałem zakłócenia,

$k(t)$  — funkcją przejściową, która jest reakcją układu na sygnał impulsowy  $\delta(t)$ .

Jeśli założymy, że sygnał i zakłócenia opisują się funkcjami stochastycznymi stacjonarnymi (w szerokim sensie), to okazuje się, że wyznaczenie optymalnej funkcji przejściowej  $k(t)$  sprowadza się do rozwiązania równania całkowego typu Wienera-Hopfa

$$R_{es}(t) - \int_0^{\infty} k(\tau) R_e(t-\tau) d\tau = 0, \quad (4)$$

gdzie

$$R_{es} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s(t-\tau) [s(\tau) + z(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

$$R_e = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e(t-\tau) e(\tau) d\tau$$

są tak zwanymi funkcjami korelacyjnymi sygnału  $s(t)$  i  $z(t)$ .

Wynika stąd, że w zagadnieniu filtracji, opartym na kryterium (3), wystarczy znać funkcje korelacyjne sygnału i zakłóceń. Z geometrycznego punktu widzenia zagadnienie sprowadza się do przybliżenia funkcji  $s(t)$  i  $u(t)$  w Hilbertowskiej przestrzeni funkcyjnej, której własności określa iloczyn skalarny wektorów  $s(t)$  i  $u(t)$ , iloczyn ten pokrywa się natomiast z funkcją korelacyjną.

W kryteriach (1) i (3) operuje się bądź stosunkiem mocy, bądź zniekształceniami sygnału. Kryteria te nie uwzględniają więc wszystkich czynników interesujących w praktyce. Na przykład nie uwzględniają one wzajemnego stosunku między mocą (lub energią) sygnału i zakłóceń na wyjściu układu odbiorczego, a zniekształceniami sygnału.

Dlatego też wydaje się celowe zbadanie kryteriów opartych z jednej strony na zniekształceniu sygnału, z drugiej — operujących mocą (lub energią) sygnału oraz zakłóceń.

W niniejszej pracy ograniczamy się do rozpatrzenia kryteriów, w których dla oceny zniekształceń wykorzystuje się błąd kwadratowy przy ograniczonej mocy (lub energii) zakłóceń na wyjściu układu.

## 2. KRYTERIUM ZNIEKSZTAŁCEŃ KWADRATOWYCH PRZY OGRANICZONEJ MOCY ZAKŁÓCEŃ

Gdy sygnał  $e(t)$  działa na układ liniowy o funkcji przejścia  $h(t)$  wyrażającej reakcję układu na skok jednostkowy

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \end{cases}$$

wówczas na wyjściu układu ukaże się sygnał

$$u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e(t-\tau) h(\tau) d\tau.$$

W rozmaitych zagadnieniach wymaga się, aby sygnał wyjściowy z minimalnym zniekształceniem odtwarzał przebieg  $x(t)$ . Na przykład przy projektowaniu układów przekazujących i wzmacniających mamy zależność

$$x(t) = \text{const} \cdot e(t - t_0)$$

gdzie  $t_0$  jest zadany czas opóźnienia sygnału w układzie. Jako kryterium służące do oceny zniekształceń rozważymy wyrażenie

$$I = \int_0^{\infty} [x(t) - u(t)]^2 dt. \quad (6)$$

Oprócz sygnałów pożytecznych na układ działają często sygnały zakłócające, których efekt działania powinien być dostatecznie *wygaszony*.

Efekt działania zakłóceń można oceniać różnie. Tu ograniczymy się do rozpatrzenia średniej mocy szumów oraz energii zakłóceń na wyjściu układu.

Jeśli na przykład gęstość widmowa mocy szumów wejściowych może być uważana w przedziale częstotliwości objętych charakterystyką filtra za wartość stałą  $\mu$ , to średnia moc szumów wyjściowych wyniesie

$$\frac{\mu^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega.$$

Można wykazać, że dla wszystkich zakłóceń z ograniczoną powierzchnią  $\mu$ , energia zakłóceń wyjściowych nie przekracza wartości określonej powyższym wzorem. Celowość operowania powierzchnią zakłóceń związana jest z tym, że przy działaniu na układ liniowy krótkich impulsów  $z(t)$ , reakcja jego prawie zupełnie nie zależy od kształtu sygnału, lecz jedynie od jego powierzchni.

Wyznamy teraz spośród wszystkich sygnałów zakłócających o ograniczonej powierzchni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)| dt = \mu, \quad (7)$$

takie, którym odpowiada maksymalna energia zakłóceń na wyjściu układu

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(i\omega)K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (8)$$

Tutaj

$$Z(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-i\omega t} dt, \quad K(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Wykażemy, że są to sygnały o stałej gęstości widmowej. Dowód opiera się na nierówności

$$|Z(i\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)| \cdot |e^{-i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)| dt = \mu,$$

skąd dla energii zakłóceń otrzymujemy oszacowanie

$$E \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |ZK|^2 d\omega \leq \frac{\mu^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega = \text{const.}$$

Wobec tego największa wartość energii  $E$  jest osiągana dla sygnałów, przy których obie nierówności przechodzą w równość, skąd otrzymujemy

$$|Z(i\omega)| = \mu.$$

Sygnałem takiego typu jest na przykład kombinacja liniowa impulsów

$$z(t) = \sum_k c_k \delta(t - t_k), \quad \sum_k c_k = \mu,$$

poprzesuwanych w fazie.

Dla określonych powyżej najniekorzystniejszych zakłóceń energia na wyjściu wyrazi się wzorem

$$E = \frac{\mu^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(i\omega)|^2 d\omega. \quad (9)$$

Obecnie sformułujemy ściśle rozpatrywany problem.

Niech będzie zadany sygnał wejściowy  $e(t)$ . Należy znaleźć układ odtwarzający z minimalnym odkształceniem (6) zadany przebieg  $x(t)$ , przy czym energia zakłóceń na wyjściu nie może przekraczać zadanej wartości  $E$ . Jeżeli zauważymy, że z pomocą związku  $h'(t) = k(t)$  wiążącego wprowadzone funkcje przejścia, na mocy równości Plancherera możemy zapisać energię zakłóceń wzorem

$$E = \int_0^{\infty} h'^2(t) dt, \quad (10)$$

to zadanie nasze, z punktu widzenia matematycznego, jest zadaniem z rachunku wariacyjnego na minimum funkcjonału (6) przy izoperymetrycznym warunku ubocznym (10).

Przy podobnym podejściu do zagadnienia można wyznaczyć optymalną charakterystykę układu poddanego działaniu sygnału niestochastycznego o zadanym kształcie. Jeśli zaś sygnał działający na układ składa się ze składowej stochastycznej stacjonarnej  $e_s$ , niestochastycznej  $e_n$  i zakłóceń stochastycznych stacjonarnych  $z_s$ , to można wykazać [6], że średnia reakcja układu nie zależy od składowych stochastycznych, lecz określa się składową niestochastyczną  $e_n$ . Można więc znaleźć minimum błędu kwadratowego (6)  $I$  dla przebiegów niestochastycznych przy założonej wielkości błędu średniokwadratowego (3)  $\bar{I} = \text{const}$  (w którym



uwzględnia się składowe stacjonarne) oraz przy założonej średniej mocy zakłóceń  $E = \text{const}$  (lub też minimum  $\bar{I}$  przy  $I = \text{const}$ ,  $E = \text{const}$ ).

Nieco inną metodę podano w pracy [6], gdzie składową niestochastyczną rozwija się w szereg w przedziale  $[0, T]$

$$e_n(t - \tau) = e_n(t) - e'_n(t)\tau + \dots$$

i otrzymuje się odpowiednio

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k^{(k)}(t),$$

gdzie

$$\mu_k = \int_0^T \tau^k k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Przyrównując następnie  $u_n(t)$  do zadanej funkcji czasu otrzymuje się warunki na  $\mu_k$ . Wyznaczenie optymalnej funkcji przejściowej  $k(t)$  sprowadza się tu do znalezienia minimalnej wartości funkcjonału  $\bar{I}$  przy warunkach dodatkowych nałożonych na  $\mu_k$ . Nie trudno zauważyć, że metoda powyższa komplikuje się w przypadku bardziej złożonych sygnałów (na przykład sygnałów, które nie mogą być przedstawione wielomianem algebraicznym dostatecznie niskiego rzędu).

Ponieważ zagadnienia związane z określeniem optymalnych charakterystyk układu przy sygnałach stochastycznych i stacjonarnych są wyczerpująco omówione w literaturze, zajmiemy się poniżej głównie wyznaczeniem charakterystyk układów poddanych działaniu sygnałów niestacjonarnych o zadanym kształcie.

#### 2.1. RÓWNANIE CHARAKTERYSTYK OPTYMALNYCH

Zgodnie z metodą mnożników Lagrange'a równanie na funkcję  $h(t)$  znajdziemy przyrównując do zera wariację funkcjonału pomocniczego

$$W = I + \lambda E; \quad (11)$$

w którym  $\lambda$  oznacza mnożnik Lagrange'a.

Jeśli  $\eta(t)$  będzie dowolną funkcją znikającą poza skończonym przedziałem i równą zeru dla  $t=0$ , wtedy warunek ekstremum funkcjonału (11) możemy napisać jako

$$\delta W = \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} W[h + \varepsilon\eta] \right\}_{\varepsilon=0} = 0. \quad (12)$$

W dalszym ciągu obliczymy  $\delta W$ . Mamy

$$\frac{1}{2} \frac{dW}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \frac{dI}{d\varepsilon} + \frac{\lambda}{2} \frac{dE}{d\varepsilon}$$

Ze wzorów (6) i (10) po przekształceniach otrzymamy

$$\frac{1}{2} \frac{dI}{d\varepsilon} = - \int_0^{\infty} dt \eta(t) \int_0^{\infty} d_{\tau} e(\tau-t) [x(\tau) - u(\tau)],$$

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{d\varepsilon} = - \int_0^{\infty} h''(t) \eta(t) dt,$$

a następnie

$$\frac{1}{2} \delta W = - \int_0^{\infty} \eta(t) dt \left\{ \lambda h'' + \int_0^{\infty} d_{\tau} e(\tau-t) [x(\tau) - u(\tau)] \right\}.$$

Obecnie z warunku ekstremum (12), wykorzystując dowolność funkcji  $\eta(t)$  otrzymujemy równanie

$$\lambda h''(t) + \int_0^{\infty} d_{\tau} e(\tau-t) [x(\tau) - u(\tau)] = 0. \quad (13)$$

Równanie to musi spełniać optymalna charakterystyka  $h(t)$ . Przepiszemy je nieco inaczej, przyjmując dla skrótu

$$b(t) = \int_0^{\infty} d_{\sigma} e(\sigma) e(\sigma+t); \quad c(t) = \int_0^{\infty} d_{\sigma} e(\sigma) x(\sigma+t). \quad (14)$$

Wtedy

$$\int_0^{\infty} d_{\tau} e(\tau-t) u(\tau) = \int_0^{\infty} d\tau h'(\tau) b(t-\tau)$$

i równanie (13) możemy przepisać w postaci

$$-\lambda h''(t) + \int_0^{\infty} b(t-\tau) h'(\tau) d\tau = c(t). \quad (15)$$

Obecnie udowodnimy, że dla  $\lambda > 0$  rozwiązanie równania (15) realizuje minimum funkcjonału (11). W istocie, obliczając drugą wariację  $\delta^2 W$  ze wzoru

$$\delta^2 W = \left\{ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} W [h + \varepsilon \eta] \right\}_{\varepsilon=0},$$

znajdujemy

$$\delta^2 W = \int_0^{\infty} \left( \frac{d\tilde{u}}{d\varepsilon} \right)^2 dt + \lambda \int_0^{\infty} \eta'^2 dt,$$

gdzie

$$\ddot{u} = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{-(t-\tau)} [h(\tau) + \varepsilon \eta(\tau)] d\tau.$$

Ponieważ  $\lambda < 0$ , więc  $\delta^2 W > 0$ , jak wiadomo; jest wystarczającym warunkiem minimum.

## 2.2. JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZANIA RÓWNIANIA (15)

Gdy  $k(t) = h'(t)$ , wtedy zamiast (15) możemy napisać

$$-\lambda k'(t) + \int_0^{\infty} b(t-\tau) k(\tau) d\tau = c(t). \quad (16)$$

Równania (15) i (16) można sprowadzić do równań czysto całkowych, wykorzystując równości

$$k'(t) = \int_0^{\infty} \delta'(t-\tau) k(\tau) d\tau - k(0) \delta(t),$$

$$h''(t) = \int_0^{\infty} \delta''(t-\tau) h(\tau) d\tau - k(0) \delta(t).$$

Oznaczając

$$I_1(t) = -\lambda \delta'(t) + b(t), \quad I_2(t) = -\lambda \delta''(t) + b'(t),$$

zamiast (15) i (16) otrzymamy równania

$$\int_0^{\infty} I_1(t-\tau) k(\tau) d\tau = c(t) - \lambda k(0) \delta(t), \quad (15a)$$

$$\int_0^{\infty} I_2(t-\tau) h(\tau) d\tau + [b(+0) - b(-0)] h(t) = c(t) - \lambda k(0) \delta(t). \quad (16a)$$

Równania te są odpowiednio typu Focka i Wienera-Hopfa [3], [4]. W pracach tych autorów sformułowane są założenia, przy których równania takie przy zadanej prawej stronie mają jedno i tylko jedno rozwiązanie.

Prawe strony równań (15) i (16) zawierają niewiadomą wielkość  $k(0)$ , a więc twierdzeń tych nie możemy stosować bezpośrednio. Trzeba jednak zauważyć, że z uwagi na warunek izoperymetryczny (10) interesują nas

jedynie rozwiązania, dla których  $\int_0^{\infty} k^2 dt < +\infty$ . Otóż można wykazać, że

zbieżność tej całki (i całki  $\int_0^{\infty} k dt$ ) jednoznacznie wyznacza  $k(0)$ . Wobec

tego możemy stwierdzić, że nasze równania mają co najwyżej jedno rozwiązanie w interesującej nas klasie funkcji (można wykazać, że wynika

to również z równania (12), bez powoływania się na teorię Wienera-Hopfa).

### 2.3. UKŁADY PRZEKAZUJĄCE

Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy  $x(t) = e(t - t_0)$ , to jest gdy sygnał, który z minimalnym zniekształceniem ma być odtworzony na wyjściu, jest sygnałem pierwotnym, opóźnionym o  $t_0$ . Jak to wynika ze wzoru (14), mamy wtedy  $c(t) = b(t - t_0)$ , a równanie (16) przyjmie postać

$$-\lambda k'(t) + \int_0^{\infty} b(t - \tau) k(\tau) d\tau = b(t - t_0). \quad (17)$$

Rozwiązanie tego równania, spełniające warunek  $\int_0^{\infty} k^2 dt < +\infty$ , jest funkcją parametru  $t_0$ . Zamiast (17) możemy więc napisać

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial t} k(t, t_0) + \int_0^{\infty} b(t - \tau) k(\tau, t_0) d\tau = b(t - t_0). \quad (18)$$

Niech  $k_0(t) = k(t, 0)$ . Zatem  $k_0(t)$  jest optymalną charakterystyką, odpowiadającą czasowi opóźnienia 0. Wykażemy, że charakterystyki  $k(t, t_0)$  i  $k_0(t)$  związane są równaniem

$$\frac{\partial}{\partial t} k(t, t_0) + \frac{\partial}{\partial t_0} k(t, t_0) + k(t, 0) \cdot k(t_0, 0) = 0 \quad (19)$$

Dla dowodu napiszmy równanie (18) raz dla  $t_0 = t_1$ , drugi raz dla  $t_0 = t_2$ ; pierwsze z tych równań pomnóżmy przez  $k(t, t_2)$ , drugie zaś przez  $k(t, t_1)$ , a następnie dodajmy i scałkujmy po  $t$  od zera do nieskończoności. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \lambda k(0, t_1) k(0, t_2) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dt d\tau \left\{ b(t - \tau) + b(\tau - t) \right\} \left\{ k(\tau, t_1) k(t, t_2) + k(t, t_2) k(\tau, t_1) \right\} = \\ = \int_0^{\infty} b(t - t_1) k(t, t_2) dt + \int_0^{\infty} b(t - t_2) k(t, t_1) dt. \end{aligned}$$

Następnie wykorzystamy wynikającą z (14) równość<sup>1</sup>

$$b(t) + b(-t) = e^2(+\infty) = e^2_{-\infty}$$

oraz fakt, że, jak można udowodnić, mamy

$$\int_0^{\infty} k(t, t_0) dt = 1 \quad \text{dla } e_{\infty} \neq 0.$$

<sup>1</sup> Przy oczywistym założeniu  $e(t) = 0$ , dla  $t < 0$ .

Wtedy otrzymamy

$$\begin{aligned} & \lambda k(0, t_1) k(0, t_2) + e_\infty^2 \int_0^\infty k(t, t_1) dt \int_0^\infty k(t, t_2) dt = \\ & = e_\infty^2 \int_0^\infty k(t, t_2) dt - \int_0^\infty b(t_1 - t) k(t, t_2) dt + e_\infty^2 \int_0^\infty k(t, t_1) dt - \int_0^\infty b(t_2 - t) k(t, t_1) dt. \end{aligned}$$

Całki z prawej strony można wyrugować za pomocą (18), przy czym skrócą się wyrazy zawierające  $e_\infty^2$ . Dzieląc przez  $\lambda$  otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial t_1} k(t_1, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_2} k(t_2, t_1) + k(0, t_1) k(0, t_2) = 0. \quad (20)$$

Można udowodnić (przy dodatkowych założeniach o zachowaniu się  $k(t)$  w nieskończoności), że  $k(t, t_0)$  jest symetryczną funkcją swoich argumentów

$$k(t, t_0) = k(t_0, t). \quad (21)$$

Ze związków (20) i (21) wynika (19).

Równanie (19) pozwala wyznaczyć  $k(t, t_0)$ , o ile znamy  $k_0(t)$ . Aby to wykazać, poddajemy (19) transformacji Laplace'a względem  $t$  i  $t_0$ , oznaczając zmienną operatorową odpowiadającą  $t$  przez  $p$ , a zmienną operatorową odpowiadającą  $t_0$  — przez  $q$ . Oznaczając dalej

$$\mathcal{L}_{t, t_0} \{k(t, t_0)\} = K(p, q); \quad \mathcal{L}_t \{k_0(t)\} = K_0(p); \quad \mathcal{L}_{t_0} \{k_0(t_0)\} = K_0(q)$$

w ten sposób z (19) otrzymamy równość

$$K(p, q) = \frac{K_0(p) + K_0(q) - K_0(p) \cdot K_0(q)}{p + q}$$

Przez wzięcie transformatory odwrotnej względem  $q$ , dostajemy stąd, jeśli oznaczymy  $K(p, t_0) = \mathcal{L} \{k(t, t_0)\}$ , równanie

$$K(p, t_0) = K_0(p) e^{-pt_0} + [1 - K_0(p)] e^{-pt_0} \int_0^{t_0} k_0(\tau) e^{p\tau} d\tau. \quad (22)$$

Równanie (22) pozwala znaleźć  $k(t, t_0)$  jeśli znamy  $k(t, 0) = k_0(t)$ .

#### 2.4. CHARAKTERYSTYKI BEZ OPÓŹNIENIA

Zajmiemy się równaniem (18) dla zerowego czasu opóźnienia  $t_0 = 0$ . Wtedy

$$-\lambda k'_0(t) + \int_0^\infty b(t - \tau) k_0(\tau) d\tau = b(t). \quad (23)$$

Jak już pokazano, równanie to można sprowadzić do równania typu Wienera-Hopfa, dla którego podane są ogólne wzory na rozwiązanie. Tutaj

pokażemy, że gdy transformata Laplace'a funkcji  $b(t)$ ,  $B(p)$  jest funkcją wymierną, to istnieje rozwiązanie o postaci

$$k_0(t) = \sum_i A_i e^{a_i t} \quad \text{czyli} \quad K_0(p) = \sum_i \frac{A_i}{p - a_i}. \quad (24)$$

Powinniśmy mieć  $\int_0^\infty k_0^2 dt < \infty$ . Wynika stąd, że liczby  $a_i$  muszą mieć ujemne części rzeczywiste. Wyznamy liczby  $a_i$  i  $A_i$ . Podstawiając (24) do równania (23) i transformując otrzymaną równość według Laplace'a, po uporządkowaniu otrzymamy równanie

$$\sum_i \frac{A_i}{p - a_i} [-\lambda a_i + B(p) + V_i] = B(p), \quad (25)$$

gdzie

$$V_i = \int_0^\infty b(-\sigma) e^{a_i \sigma} d\sigma = -\frac{e_\infty^2}{a_i} - B(-a_i).$$

Mnożąc równanie (25) przez  $p - a_k$  i zakładając  $p = a_k$  otrzymujemy

$$-\lambda a_k + B(a_k) + V_k = 0$$

lub

$$-\lambda a_k + B(a_k) - \frac{e_\infty^2}{a_k} - B(-a_k) = 0.$$

A więc liczby  $a_i$  są pierwiastkami o ujemnej części rzeczywistej równania charakterystycznego

$$\lambda p + \frac{e_\infty^2}{p} + B(-p) - B(p) = 0. \quad (26)$$

Aby teraz wyznaczyć liczby  $A_i$ , porównujemy reszta lewej i prawej strony (25). Jeśli przez  $\beta_k$  oznaczymy bieguny funkcji  $B(p)$  (a można wykazać, że jest ich akurat tyle, ile ujemnych pierwiastków równania 26), to dostaniemy

$$\sum_i \frac{A_i}{(\beta_k - a_i)} = 1, \quad (27a)$$

jeżeli biegun  $\beta_k$  jest pojedynczy oraz

$$\sum_i \frac{A_i}{(\beta_k - a_i)^{n_k}} = 0, \quad (27b)$$

dla bieguna o krotności  $n_k > 1$ .

Powyższe równania ze względu na  $A_i$  można rozwiązać w postaci zamkniętej posługując się pomocniczymi funkcjami

$$F(p) = \prod_i (p - a_i); \quad G(p) = \prod_k (p - \beta_k)^{n_k}. \quad (28)$$

Mamy mianowicie

$$A_i = -\frac{G(a_i)}{F'(a_i)}, \quad (29)$$

dla  $K_0(p)$  zaś

$$K_0(p) = 1 - \frac{G(p)}{F(p)}. \quad (30)$$

Mając  $K_0(p)$  znajdujemy  $K(p, t_0)$  ze wzoru (22).

Na koniec można wykazać, że przy  $a_i$  i  $A_i$  wyznaczonych z (26) i (29), równanie (25) jest tożsamościowo spełnione, a tym samym wzory (24) dają rzeczywiście rozwiązanie równania (23).

#### 2.5. PRZYKŁADY

Dla przykładu znajdziemy optymalne charakterystyki dla sygnału

$$\dot{e}(t) = e^{-t}, \quad x(t) = e(t - t_0).$$

Ze wzoru (14) otrzymujemy

$$b(t) = \frac{1}{2} e^{-t}, \quad B(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+p}, \quad \beta = -1.$$

Równanie charakterystyczne (26) ma postać

$$\lambda p + \frac{p}{1-p^2} = 0$$

i jeden pierwiastek ujemny  $a = -\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}}$ . Z (28) obliczamy pomocnicze funkcje  $F$  i  $G$  jako

$$F = p + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}}; \quad G = p + 1.$$

W końcu z (29) otrzymujemy

$$A = \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} - 1$$

i z (24)

$$k_0(t) = A e^{at} = \left( \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} - 1 \right) e^{-\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} t},$$

$$K_0(p) = \frac{A}{p-a} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} - 1}{p + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}}}.$$

Wzór ten podaje optymalne charakterystyki zerowe. Następnie z (22) znajdujemy

$$K(p, t_0) = \frac{A}{p^2 - a^2} \left\{ e^{at_0} (p+1) + e^{-pt_0} (a-1) \right\}.$$

skąd

$$k(t, t_0) = \begin{cases} A e^{at_0} \left( \operatorname{ch} at + \frac{1}{a} \operatorname{sh} at \right) & \text{dla } t \leq t_0, \\ A e^{at} \left( \operatorname{ch} at_0 + \frac{1}{a} \operatorname{sh} at_0 \right) & \text{dla } t > t_0. \end{cases}$$

Są to charakterystyki optymalne dla czasu opóźnienia  $t_0$ .

Jako drugi przykład wyznaczmy charakterystyki optymalne dla sygnału  $e(t) = 1(t)$ ,  $\hat{x}(t) = 1(t - t_0)$ .

Ze wzoru (14) mamy

$$b(t) = 1(t),$$

zatem

$$\mathcal{L}\{b(t)\} = B(p) = \frac{1}{p}.$$

Równanie charakterystyczne (26) ma kształt następujący

$$\lambda p - \frac{1}{p} = 0,$$

oraz pierwiastek

$$a = -\sqrt{\frac{1}{\lambda}}.$$

Zatem funkcje pomocnicze (28) przyjmują postać

$$F = p - a, \quad G = p,$$

zaś

$$A = -\frac{a}{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}.$$

Korzystając ze wzorów (30) i (22) otrzymujemy

$$K_0(p) = \frac{A}{p+A},$$

$$K(p, t_0) = \frac{A}{p^2 - A^2} \left\{ p e^{-At_0} - A e^{-pt_0} \right\}.$$

Wobec tego

$$k(t, t_0) = \begin{cases} A e^{-At_0} \operatorname{ch} At, & t \leq t_0 \\ A e^{-At} \operatorname{ch} At_0, & t > t_0. \end{cases} \quad (31)$$

Charakterystyka o identycznej postaci została wyznaczona w pracy [2].



Charakterystyka odpowiadająca sygnałowi jednostkowemu jest bardzo interesująca z praktycznego punktu widzenia, gdyż — jak to zaraz wykazemy — skok jednostkowy jest sygnałem najbardziej niekorzystnym z punktu widzenia zniekształceń sygnału (w metryce przestrzeni  $C$ ) z pomiędzy wszystkich sygnałów z ograniczoną amplitudą.

W tym celu założymy, że sygnał  $e(t)$  działa na układ liniowy, którego reakcja na impuls jednostkowy jest  $k(t)$ . Sygnał na wyjściu układu wyniesie

$$u(t) = \int_0^{\infty} e(t-\tau) k(\tau) d\tau. \quad (32)$$

W przypadku, gdy układ nie wprowadza zniekształceń

$$k(t) = k_0 \delta(t-t_0), \quad (33)$$

to znaczy, że odpowiedź układu na sygnał  $\delta(t)$  różni się od tego sygnału tylko opóźnieniem  $t_0$  i tłumieniem  $k_0$ .

Podstawiając (33) do (32) otrzymujemy

$$u(t) = \int_0^{\infty} e(t-\tau) k_0 \delta(\tau-t_0) d\tau = k_0 e(t-t_0). \quad (34)$$

W przypadku układu, który wprowadza zniekształcenia mamy  $u(t) \neq k_0 e(t-t_0)$ . Zniekształcenia te można wyrazić za pomocą wzoru

$$\Delta = \max_t |u(t) - k_0 e(t-t_0)|. \quad (35)$$

Podstawiając wzory (32), (34) do (35) możemy napisać

$$\begin{aligned} \Delta &= \max \left| \int_0^{\infty} e(t-\tau) k(\tau) d\tau - \int_0^{\infty} k_0 e(t-\tau) \delta(\tau-t_0) d\tau \right| = \\ &= \max \left| \int_0^{\infty} e(t-\tau) [k(\tau) - k_0 \delta(\tau-t_0)] d\tau \right|. \end{aligned} \quad (36)$$

Sygnały działające na układ posiadają zwykle ograniczoną amplitudę i dlatego możemy założyć

$$|e(t)| \leq E_m.$$

Wyznamy teraz spośród sygnałów z ograniczoną amplitudą taki sygnał, który powoduje maksymalne zniekształcenie  $\Delta$ . Wyrażenie (36) uzyskuje maksymalną wartość wtedy, gdy funkcja podcałkowa będzie stale dodatnia. Wynika stąd, że zniekształcenie (36) maksymalną wartość uzyskuje w przypadku sygnału, który ma stałą amplitudę  $\pm E_m$  i zmienia znak w zerach funkcji  $k(\tau) - k_0 \delta(\tau-t_0)$ . Dla układu, w którym funkcja ta nie posiada zer dla  $t > 0$ , najbardziej niekorzystnym sygnałem, ze wszystkich sygnałów z ograniczoną amplitudą, będzie sygnał o kształcie skoku

$E_m 1(t)$ . Rezultat powyższy uzasadnia celowość stosowania sygnału jednostkowego jako sygnału wzorcowego przy badaniu aparatury elektrycznej.

### 3. SYGNAŁY MODULOWANE

Sygnały elektryczne stosowane w praktyce występują najczęściej w postaci modulowanej

$$e(t) = e_0(t) \cos \omega_0 t = \mathcal{R}_e \{ e_0(t) e^{i\omega_0 t} \},$$

gdzie  $e_0(t)$  określa charakter zmian obwiedni sygnału modulowanego, natomiast  $\cos \omega_0 t = \mathcal{R}_e \{ e^{i\omega_0 t} \}$  — reprezentuje tak zwaną falę nośną.

Ponieważ zwykle interesuje nas obwiednia sygnału modulowanego (fala nośna zostaje wyeliminowana w detektorze) wyznaczmy obwiednię sygnału na wyjściu układu liniowego.

Wyznamy najpierw reakcję układu na sygnał

$$e_0(t) e^{i\omega_0 t}.$$

Widmo tego sygnału wyraża się wzorem

$$E(i\omega) = E_0[i(\omega - \omega_0)],$$

gdzie

$$E_0(i\omega) = \mathcal{F} \{ e_0(t) \},$$

sygnał zaś na wyjściu układu wyraża się jako

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0[i(\omega - \omega_0)] K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Zatem reakcja układu na sygnał

$$e(t) = \mathcal{R}_e \{ e_0(t) e^{i\omega_0 t} \}$$

ze względu na liniowość układu wyniesie

$$u(t) = \mathcal{R}_e \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0[i(\omega - \omega_0)] K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\}. \quad (37)$$

Jeśli sygnał modulowany działa na układ o własnościach selektywnych (na przykład wzmacniacz rezonansowy nastrojony na częstotliwość nośną) wygodniej jest posługiwać się pojęciem funkcji przenoszenia, w której częstotliwość  $\omega$  odmierzana się od częstotliwości rezonansowej  $\omega_0$ , to jest

$$K(i\omega) = K_{ob} [i(\omega - \omega_0)] = K_{ob}(i\Omega). \quad (38)$$

Podstawiając (38) do wzoru (37) otrzymujemy

$$u(t) = \mathcal{R}_e \left\{ \frac{e^{i\omega_0 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(i\Omega) K_{ob}(i\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \right\} = u_0(t) \cos \omega_0 t,$$

gdzie

$$u_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(i\Omega) K_{ob}(i\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (39)$$

Wzór (39) możemy również wyrazić za pomocą splotu obwiedni sygnału wejściowego  $e(t)$  z funkcją przejściową obwiedni

$$h_{ob}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_{ob}(i\Omega)}{i\Omega} e^{i\Omega t} d\Omega,$$

a mianowicie

$$u_0(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e_0(t-\tau) h_{ob}(\tau) d\tau.$$

Wzór ten ma analogiczną postać do stosowanych w rozdziałach 2 i 3 wzorów na splot sygnału  $e(t)$  z funkcją przejściową  $k(t)$ . Wynika stąd, że optymalne charakterystyki częstotliwościowe wyznaczone metodą podaną w rozdziałach 2.3, 2.4, 2.5 i odnoszące się do układów bez modulacji (tzw. videoczęstotliwości) mogą być w prosty sposób przetransformowane (przez translację częstotliwości  $\Omega = \omega - \omega_0$ ) na optymalne charakterystyki układów z modulacją. Przy transformacji tej kształt charakterystyki nie ulega zmianie.

#### 4. FILTRY „IDEALNE“

W urządzeniach telekomunikacyjnych z tak zwanym częstotliwościowym rozdzielaniem sygnałów stosuje się filtry, które przepuszczają tylko określone (przez normy) pasmo częstotliwości i *obcinają* częstotliwości leżące poza pasmem przepuszczanym<sup>2</sup>. Przy projektowaniu takich filtrów stykamy się z koniecznością wyznaczenia charakterystyk zapewniających minimalne zniekształcenia sygnałów przy ograniczonym wpływie zakłóceń.

Obecnie wyznaczymy optymalne charakterystyki filtru *idealnego* zapewniające przeniesienie sygnału wzorcowego  $1(t)$  z minimalnymi zniekształceniami

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty} [h_{ob}(t) - 1(t-t_0)]^2 dt \quad (40)$$

<sup>2</sup> Ścisłe biorąc, układy te nie mogą być zrealizowane, gdyż charakterystyki ich nie spełniają na ogół warunku  $k(t) = 0$  dla  $t < 0$ . Jednakże charakterystyki układów selektywnych mogą być z wystarczającą dla praktyki dokładnością aproksymowane za pomocą charakterystyk dających się realizować

przy warunku dodatkowym (9)  $E = \text{const}$  oraz przy założeniu, że widmo sygnału wyjściowego znika przy  $|\Omega| > \Omega_0$ .

We wzorze (40) za dolny przedział całkowania przyjęliśmy  $-\infty$ , gdyż sygnał  $h_{ob}(t)$  dla filtru idealnego może nie zniknąć przy  $t < 0$ . Ponieważ widmo sygnału wyjściowego

$$\frac{K_{ob}(i\Omega)}{i\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ob}(t) e^{-i\Omega t} dt,$$

w myśl założenia równa się zero na zewnątrz pasma częstotliwości przepuszczanych przez filtr idealny, możemy napisać

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ob}(t) e^{-i\Omega t} dt = 0, \quad \text{dla } |\Omega| > \Omega_0, \quad (41)$$

przy czym  $\Omega_0$  jest górną częstotliwością pasma przepuszczanego.

Zagadnienie polega zatem na wyznaczeniu funkcji  $h(t)$ , która zapewnia minimum funkcjonału

$$H_1 = I + \lambda_1 E,$$

przy czym na możliwe rozwiązanie nakłada się dodatkowy warunek (41).

Zagadnienie powyższe jest zagadnieniem wariacyjnym na ekstremum warunkowe. Zagadnienie takie można rozwiązywać metodą Lagrange'a, zwaną też metodą nieokreślonego mnożnika funkcyjnego.

Zgodnie z powyższą metodą, pomnożmy wyrażenie (41) przez nieokreśloną na razie funkcję  $\lambda(\Omega)$  i scałkujmy otrzymaną funkcję w przedziale, który leży na zewnątrz pasma częstotliwości przepuszczanych.

Otrzymamy wtedy zamiast (41) warunek następujący

$$D = \int_{-\infty}^{-\Omega_0} \left[ \frac{\lambda(\Omega)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ob}(t) e^{-i\Omega t} dt \right] d\Omega + \int_{\Omega_0}^{+\infty} \left[ \frac{\lambda(\Omega)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ob}(t) e^{-i\Omega t} dt \right] d\Omega = 0, \quad |\Omega| > \Omega_0.$$

Zmieniając we wzorze powyższym kolejność całkowania otrzymujemy

$$D = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ob}(t) \left[ \int_{-\infty}^{-\Omega_0} \lambda(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega + \int_{\Omega_0}^{+\infty} \lambda(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \right] dt = 0, \quad |\Omega| > \Omega_0.$$

W myśl metody Lagrange'a znajdujemy teraz ekstremum bezwzględne funkcjonału

$$H = H_1 + D = I + D + \lambda_1 E. \quad (42)$$

Przyrównując do zera pierwsze wariacje względem  $h_{ob}(t)$  oraz  $\lambda(\Omega)$  wyrażenia (42), otrzymujemy następujące równania:

$$-\lambda_1 h''_{ob} + h_{ob} - 1(t-t_0) + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-\Omega_0} \lambda(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega + \int_{\Omega_0}^{\infty} \lambda(\Omega) e^{-i\Omega t} d\Omega \right\} = 0, \quad (43a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ob}(t) e^{-i\Omega t} dt = 0, \quad \text{dla } |\Omega| > \Omega_0. \quad (43b)$$

Poddając równanie (43a) transformacji Fouriera oraz uwzględniając (43b) otrzymujemy

$$\frac{K_{ob}(i\Omega)}{i\Omega} \left[ -\lambda_1 (i\Omega)^2 + \lambda_1 h'(0) + 1 \right] = \frac{e^{-i\Omega t_0}}{i\Omega} \quad \text{dla } |\Omega| < \Omega_0.$$

Stąd oraz z (43b) otrzymujemy wreszcie

$$K_{ob}(i\Omega) = \begin{cases} \frac{e^{-i\Omega t_0}}{-\lambda_1 (i\Omega)^2 + \lambda_1 h'_{ob}(0) + 1}, & |\Omega| < \Omega_0, \\ 0, & |\Omega| > \Omega_0. \end{cases}$$

We wzorze tym  $h'_{ob}(0)$  może być określone na przykład z równości

$$h'_{ob}(0) = \int_{-\Omega_0}^{+\Omega_0} K_{ob}(i\Omega) d\Omega,$$

$\lambda_1$  zaś z warunku izoperymetrycznego (9).

Dla  $\lambda_1 = 0$  otrzymujemy charakterystykę [2]

$$K_{ob}(i\Omega) = \begin{cases} e^{-i\Omega t_0} & \text{dla } |\Omega| < \Omega_0, \\ 0 & \text{dla } |\Omega| > \Omega_0. \end{cases}$$

Charakterystyce tej odpowiada prostokątna charakterystyka amplitudy

$$A(\Omega) = |K_{ob}(i\Omega)| = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\Omega| < \Omega_0, \\ 0 & \text{dla } |\Omega| > \Omega_0, \end{cases}$$

oraz liniowa charakterystyka fazowa.

Charakterystyce tej odpowiada

$$h_{ob}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si } \Omega_0(t-t_0),$$

gdzie Si oznacza sinus całkowity. Charakterystyka powyższego typu, mimo że należy do charakterystyk nie dających się zrealizować, może być z dostateczną dla praktyki dokładnością aproksymowana przez charakterystyki układów możliwych do realizacji.

Zakładając na przykład, że funkcja tłumienia układu wyraża się wzorem

$$\frac{1}{K_{ob}(ix)} = \prod_{k=1}^n (ix - x_k), \quad x = \frac{\Omega}{\Omega_0} \quad (44)$$

możemy wyznaczyć takie rozstawienie zer  $x_k$ -tej funkcji, które zapewnia najlepsze przybliżenie (w sensie Czebyszewa) charakterystyki idealnej

$\frac{1}{|K_{ob}(ix)|} = 1$  w przedziale  $(-1, +1)$  oraz dostatecznie duże tłumienie poza pasmem przepuszczania ( $x > 1$ ). W tym celu założymy, że kwadrat modułu funkcji (44) jest proporcjonalny do

$$A_0 + LT_{2n}(x),$$

gdzie  $T_{2n}(x)$  — oznacza wielomian Czebyszewa  $2n$ -tego rzędu,

$L$  — maksymalne odchylenie tego wielomianu od  $A_0 = \text{const}$

Jeśli nierównomierność tłumienia w pasmie przepuszczania układu wynosi  $a$  dB (rys. 1a), to mamy

$$A_0 = \frac{e^{2a} + 1}{2}, \quad L = \frac{e^{2a} - 1}{2} \quad (\text{rys. 1b})$$

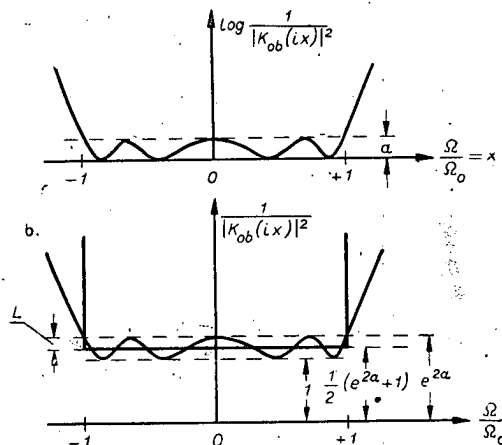
Wprowadzając współczynnik tłumienia

$$T = \sqrt{\frac{e^a - 1}{e^a + 1}},$$

który równa się zero dla  $a=0$  i dąży do jedności przy bardzo dużym  $a$ ; wielomian (44) można wyrazić jako

$$\frac{1}{(1 - T^{2n})^2} [1 + T^{4n} + 2T^{2n}T_{2n}(x)]. \quad (45)$$

Aby wielomian ten był proporcjonalny do wielomianu (44), zera ich powinny się pokrywać. Zera te będą leżały w ogólnym przypadku na płaszczyźnie zmiennej, zespolonej  $x = z + iy$ . Wprowadzając współrzędne eliptyczne według wzorów



Rys. 1. Aproksymacja charakterystyki filtra idealnego.

<sup>3</sup> Funkcje przenoszenia takiego typu posiadają na przykład układy złożone ze wzmacniaczy rezonansowych, zawierających jeden lub dwa obwody w każdym stopniu.

$$z = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi,$$

$$y = \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi,$$

$$x = \frac{1}{2} \left( \rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \right),$$

do wzoru (45) otrzymujemy <sup>4</sup>

$$\frac{1}{(1+T^{2n})^2} \left[ 1 + T^{4n} + T^{2n} \left( \rho^{2n} e^{i2n\varphi} + \frac{1}{\rho^{2n}} e^{-i2n\varphi} \right) \right].$$

Nie trudno teraz zauważyć, że funkcja powyższa równa się zeru dla

$$\rho = \frac{1}{T}, \quad 2n\varphi = (2k-1)\pi, \quad k = 1, 2, \dots, 2n.$$

wynika stąd, że zera wielomianu (44) powinny leżeć na elipsie w punktach o współrzędnych

$$z_k = \frac{1}{2} \left( T + \frac{1}{T} \right) \cos \frac{2k-1}{2n} \pi,$$

$$y_k = \frac{1}{2} \left( T - \frac{1}{T} \right) \sin \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

Przyjmując zatem określoną wartość tłumienia  $a$ , możemy ze wzorów powyższych wyznaczyć optymalne położenie biegunów  $x_k$  funkcji przenoszenia  $K_{ob}(ix)$ , a następnie określić optymalne parametry układu projektowanego.

#### WYKAZ LITERATURY

1. Dwork B.: *Detection of a pulse superimposed on fluctuation noise*. P. I. R. E. 1950, s. 771.
2. Kulikowski R., Plebański J.: *Optimum characteristics of linear puls systems*. Bull. de l'Acad. Pol. des Sc., nr 1, 1955.
3. Smirnow W. I.: *Kurs wysszej matematiki*. T. IV, s. 179.

<sup>4</sup> Wzór ten wynika z następujących zależności:

$$T_{2n} = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^{2n} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{2n}],$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \rho e^{i\varphi} - \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi} \right),$$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \rho e^{i\varphi}, \quad x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}.$$

4. Wiener N., Hopf: *Über eine Klasse singularer Integralgleichungen*. Preus. Akad., 1931.
5. Wiener N.: *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. M. I. T., 1950.
6. Zadeh L. A., Ragazzini J. R.: *An extension of Wiener's theory of prediction*. Jour. of Appl. Physics. v. 2, nr 7, 1950.

Р. КУЛИКОВСКИ, А. РЫБАРСКИ

#### КРИТЕРИЙ КВАДРАТИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ ПОМЕХ

##### Резюме

В качестве критерия искажений сигнала  $e(t)$  в линейной системе с переходной функцией  $h(t)$  принимается выражение  $I$  (6), где  $x(t)$  — линейный функционал  $e(t)$ . Если спектральную плотность входных шумов можно считать в полосе пропускания фильтра величиной постоянной  $\mu$ , то средняя мощность выходных шумов выражается формулой (9). Показано также, что среди всех помех с ограниченной поверхностью  $\mu$  (7), энергия помех на выходе фильтра не превышает величины (9).

Вопрос сводится затем к определению минимального значения искажений (6) при добавочном условии  $E = \text{const}$  (9), (10). Приравнявая первую вариацию функционала  $W = I + \lambda E$  по  $h(t)$  к нулю получаем уравнение (15), однозначность решений которого исследована в главе 3.2. В главе 3.3 приводится решение уравнения (15), определяющее оптимальную переходную функцию системы. Затем рассмотрено конкретные примеры при входных сигналах

$$e(t) = e^{-t}, \quad x(t) = e(t - t_0) \quad \text{и} \quad e(t) = 1(t), \quad x(t) = 1(t - t_0).$$

В главе 4 показано, что полученные результаты можно перенести при помощи трансляции частоты на случай амплитудно-модулированных сигналов.

Затем определены характеристики системы, обеспечивающей минимальные искажения единичного сигнала при  $E = \text{const}$  и добавочном условии, которое сводится к требованию, чтобы частотные характеристики системы исчезали вне полосы пропускания. В случае  $E = 0$  оптимальная характеристика амплитуды имеет форму прямоугольника, который, как это показано, можно аппроксимировать при помощи функции затухания (44) с любой точностью.

R. KULIKOWSKI A. RYBARSKI

#### CRITERION FOR ROOT SQUARE DISTORTION AT LIMITED NOISE POWER

##### Summary

As a criterion for distortion of the signal  $e(t)$  in a linear system having a transfer function  $h(t)$ , we take expression  $I(6)$ , where  $x(t)$  is a linear operation of the function  $e(t)$ . If the spectral density of the input noise power to have a constant value  $\mu$  in the frequency interval included in the filter characteristic, then the average output noise power will be equal to (9). It is also shown that among all disturbances with a limited area  $\mu$ . (7), the output noise energy does not exceed the value given by formula (9).



The problem involves determining the minimum value of the distortion (6) at the subsidiary condition that  $E = \text{const}$  (9), (10). To first variation of  $W = I + \lambda E$  with respect to  $u(t)$  being set equal to zero, we obtain Eq. (15). The question of whether the solution of Eq. (15) is single-valued, is considered under point 3.2. The solution of Eq. (15) defining the optimum transfer function of the system is given under point 3.3. Next, specific examples with input signals  $e(t) = e^{-t}$ ,  $x(t) = e(t - t_0)$  and  $e(t) = 1(t)$ ,  $x(t) = 1(t - t_0)$  are discussed.

In section 4, it is shown that the results presented in the previous sections can be applied to amplitude modulated signals by a translation of frequency.

At last, the authors determine the characteristics of a system which distorts, to a minimum extent, a unit signal with  $E = \text{const}$  and whose frequency characteristic vanishes outside a defined frequency band. In the case of  $E = 0$ , the optimum amplitude characteristic has a rectangular shape. It is shown that this shape can be approximated to any desired accuracy with the help of the damping function (44).

25X1

**Page Denied**